Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
&
Sistemas Dinámicos

Apuntes del curso dictado por Italo Cipriano en 2019

Mario Mallea

PUBLISHED BY PUBLISHER

BOOK-WEBSITE.COM

First printing, March 2019

Índice De Contenidos

1. Fundamentos

1.1 Introducción

El curso abitualmente empieza con una motivación de mecánica clásica, la "segunda ley del movimiento de Newton". Una partícula se representa por un punto en el espacio cuya posición está dada por la función $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. La derivada con respecto al tiempo es la velocidad de la párticula, $v = \dot{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. En el modelo, la partícula se mueve bajo un campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ejerciendo una fuerza $F(x)$ a la partícula en la posición x. La segunda ley del movimiento de Newton es ecuación diferencial ordinaria que describe el movimiento de una partícula en el tiempo dada su masa y un campo vectorial F conocido. La ecuación es

$$m\ddot{x}(t) = F(x(t)), t \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

A la variable x se le llama variable dependiente, a t se le llama la variable independiente (en este caso el tiempo). Veremos pronto que las ecuaciones diferenciales se pueden escribir como un sistema de ecuaciones (aumentando el número de variables y disminuyendo el orden), y que tanto para demostraciones y a veces en aplicaciones, es importante tener en cuenta. En el caso de la ecuación 1.1, uno puede considerar la variable dependiente $(x, v) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^6$ y el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v(t), \\ \dot{v}(t) &= \frac{1}{m} F(x(t)), \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde $t \in \mathbb{R}$. Como ejemplo, resolvamos esta ecuación en el caso de "una piedra soltada desde cierta altura en la tierra". En este caso, consideramos el sistema de ejes coordenados Cartesianos clásico, así el campo vectorial viene dado por $F(x) = -mge_3$, donde $e_3 = (0, 0, 1)^t \in \mathbb{R}^3$. El sistema 1.1 toma la forma

$$\begin{aligned} m\dot{x}_1(t) &= 0, \\ m\dot{x}_2(t) &= 0, \\ m\dot{x}_3(t) &= -mg. \end{aligned} \tag{1.3}$$

La resolución de este sistema solo requiere integrar con respecto a t y utilizar el teorema fundamental del cálculo, de modo que obtenemos $x(t) = x(0) + v(0)t - \frac{g}{2}t^2 e_3$. De este ejemplo, podemos observar que el futuro y pasado de la posición de la partícula en el tiempo queda completamente determinado por la posición inicial y la velocidad inicial, lo que se conoce como condiciones iniciales. Si consideramos la ecuación junto a estas condiciones iniciales, tenemos lo que se llama el problema de condición inicial. Una pregunta natural es si el problema de condición inicial tiene solución, ya que de lo contrario el modelo no tendría sentido. Otra pregunta fundamental es el número de soluciones de esta ecuación, ya que si existe más de una solución no es preciso el modelo. Encontrar hipótesis generales para la existencia y unicidad es la importancia principal del teorema de Picard-Lindelof que nos ocupara al final de esta unidad. Por otra, parte veremos que el ejemplo recién presentado también da luces de otros fenómenos comunes a familias más generales de ecuaciones tales como el hecho que soluciones distintas no se intersecten, lo que por cierto tiene una interpretación física del modelo en sí, ya que el hecho que dos soluiones se intersecten en un punto significa que la posición es la misma para dos partículas de la misma masa para tiempos distintos, lo que solo puede pasar si las soluciones coinciden desde ese momento y para siempre en el futuro, y que han coincido siempre en el pasado hasta ese momento.

1.2 Clasificación de ecuaciones diferenciales

Una pregunta natural (asumiendo que existe al menos una solución) es cuando puede encontrarse una solución explícita a una EDO, es decir, cuando se puede encontrar una función que sea solución. Como veremos, esto ocurre con poca frecuencia, y ocurre cada vez que la EDO tiene alguna forma particular tal que permite mediante un cambio de variable u otra manipulación algebraica reescribirla de otro modo tal que la sepamos resolver. Por esta razón, antes de empezar a estudiar algunas familias particulares de EDOs a las que sí puede encontrárseles una solución explícita, veremos una clasificación que nos permitirá en el futuro estudiar las EDOs por ”clase”, en vez de tratar de entender todas las EDOs de manera simultánea.

Definición 1.2.1 Sea $U \subseteq \mathbb{R}^m, V \subseteq \mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{N}_0$. Entonces $C^k(U,V)$ denotamos al conjunto de funciones $f : U \to V$ que tienen hasta la k ésima derivada continua. Lo siguiente es notación:

$$C(U,V) = C^0(U,V) \qquad C^\infty(U,V) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(U,V) \qquad C^k(U) = C^k(U,\mathbb{R})$$

Definición 1.2.2 Sea $f \in C(U)$ con $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ abierto, una EDO de orden n corresponde a una ecuación de la forma:

$$x^{(n)}(t) = f\left(t, x(t), x^{(1)}(t), \ldots, x^{(n-1)}\right), \quad t \in I. \tag{1.4}$$

Para I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, donde:

$$x^{(i)}(t) = \frac{d^i x(t)}{dt^i}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Definición 1.2.3 Una solución de (1) es una función $\phi : I \to \mathbb{R}$ de clase C^n tal que:

$$\phi^{(n)}(t) = f\left(t, \phi(t), \phi^{(1)}(t), \ldots, \phi^{(n-1)}\right), \quad t \in I.$$

Definición 1.2.4 Un sistema de EDO’s de orden n corresponde a un sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1^{(n)} &= f_1\left(t, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(n-1)}\right). \\ &\vdots \\ x_k^{(n)} &= f_k\left(t, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(n-1)}\right). \end{aligned}$$

Los sistemas autónomos son sistemas de EDO’s donde $f_1, \ldots, f_k$ no dependen explicitamente de t.

Definición 1.2.5 Los sistemas lineales, corresponden a sistemas de EDO's donde:

$$x_i^{(n)} = g_i(t) + \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1} f_{i,j,l}(t)x_l^{(j)}$$

Y se dirá lineal homogéneo si $g_i(t) \equiv 0$.

Todos los sistemas lineales se pueden escribir como un sistema autónomo de primer orden.

Ej $\quad m\ddot{x} = F(x) \iff \dot{x} = v(t) \wedge m\dot{v}(t) = F(x)$

1.3 Algunas familias de primer orden que tienen solución explicíta

En esta sección veremos algunas familias de EDOs de primer orden que tienen solución explícita. Hay dos familias fundamentales de EDOs de primer orden, las lineales (ya definidas en la clasificación) y las de variables separable. Fundamentales, porque las familias que veremos más adelante se reducen mediante un cambio de variable a alguna de estas, por otra parte, fundamentales también porque son (salvo cambio de variables y generalizaciones a sistemas lineales) las únicas EDOs que en este curso aprenderemos a resolver explícitamente.
En la siguiente tabla consideramos $f,p,q,r \in C(I)$, $\alpha \neq 0 \neq 1$.

Familia	Forma	Solución
Variables Separables	$\dot{x} = p \cdot f(x)$	Sol implicita $\int \frac{dx}{f(x)} = \int p(t)dt + c$
Lineales	$\dot{x} + px = q$	Factor integrante $:= e^{\int p(t)dt}$
Bernoulli	$\dot{x} + px = qx^{\alpha}$	Se linealiza con $z = x^{1-\alpha}$
Ricatti	$\dot{x} + px = qx^2 + r$	Queda B($\alpha = 2$) con $\phi = w + \phi_1$
Homogénea de grado 0	$\dot{x} = f\left(\frac{x}{t}\right)$	V.S con $z = \frac{x}{t}$
Exactas ($M_y = N_x$)	$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$	Sol implicita en $F(x,y)$ al resolver $F_x = M \wedge F_y = N$
No Exactas ($M_y \neq N_x$)	$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$	Exacta, si $\frac{M_y - N_x}{N}$ es función de x: $\exp\int \frac{M_y - N_x}{N}dx$, si $\frac{N_x - M_y}{M}$ es función de y: $\exp\int \frac{N_x - M_y}{M}dy$

Teorema 1.1 El problema con valor inicial (PVI) en $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$ abierto donde $p,q \in C(I)$, $y_0 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dot{x} + px = q \\ x(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Tiene única solución, más aún es:

$$x(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds}\left(\int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds} q(s)ds + y_0\right)$$

1.4 Principio de contracción y aplicaciones

El principio de contracción es un teorema que permite demostrar la existencia de puntos fijos para operadores, lo que se traduce en demostraciones de existencia de soluciones a ecuaciones en general (no restringidas a EDOs).

Definición 1.4.1 Sea $(B, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach (i.e. un espacio métrico completo). Un funcional

$F : C \subset B \to B$ se dice contracción si existe una constante $0 \le \theta < 1$ tal que

$$\|F(x) - F(y)\| \le \theta \|x - y\|, x, y \in C.$$

Teorema 1.2 — Teorema de contracción de Banach. Sea C un cerrado no vacío $C \subset B$. Si $F : C \to C$ es una contracción, entonces F tiene un único punto fijo $\bar{x} \in C$.

La demostración es constructiva, el objetivo es: construir una secuencia de Cauchy y usar que el espacio es completo. La unicidad es fácil.

Demostración. Denotar $F^n = F \circ \cdots \circ F$ donde F aparece n veces. Fijar $x_0 \in C$ y considerar la secuencia $x_n = F^n(x_0)$. Esta secuencia es de Cauchy debido a que F satisface el principio de contracción (ejercicio 1). Hay que demostrar que el límite es punto fijo (ejercicio 2, usar que $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n$). Finalmente, demostrar que hay un único punto fijo (ejercicio 3, por contradicción usando que F es contracción). ■

El problema de valor inicial de ecuaciones diferenciales ordinarias se define de la siguiente manera.

Definición 1.4.2 Problema de valor inicial.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \tag{1.5}$$

donde $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$ para $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ abierto y $(t_0, x_0) \in U$.

Probaremos el teorema de básico de existencia y unicidad del problema de valor inicial (Picard-Lindelöf). En este curso estamos interesados en mostrar otras aplicaciones en SD del teorema de contracción. Es importante saber que este teorema es una herramienta tan general como espacios de Banach y contracciones puedan escribirse para representar diferentes problemas de existencia de solución a ecuaciones. Veremo al final de esta sección otra aplicación.

Teorema 1.3 — Teorema de Picard-Lindelöf. Si $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$ es localmente Lipschitz con respecto a la segunda variable y uniforme con respecto a la primera:

$$\sup_{(t,x) \neq (t,y) \in V} \frac{\|f(t,x) - f(t,y)\|}{\|x - y\|} = L < \infty,$$

para todo $V \subset U$ compacto. Entonces existe una única solución $\phi \in C(\bar{I}, \mathbb{R}^n)$ del PVI, donde $x_0 \in \bar{I}$ es un cerrado.

Notar que el teorema solo nos dice que existe $\bar{I}$ sin embargo no nos da información de la solución (puede estar en un abierto I cualquiera). Además, nos dice que existen intervalos $I_1 = [t_0, t_0 + \varepsilon]$ y $I_2 = [t_0 - \varepsilon, t_0]$ donde el PVI tiene solución única de clase C^1.

Demostración. Integrando con respecto a t a ambos lados de la ecuación 1.5 se obtiene

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) ds.$$

Asumamos que $t_0 = 0$. Consideramos el espacio de Banach $B = C([0, T], \mathbb{R}^n)$ para algún $T > 0$. Definimos un operador K actuando en B mediante

$$K(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) ds.$$

Sea $\delta > 0$ tal que para $B_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \delta\}$ se tenga que $V = [0, T] \times \overline{B_\delta(x_0)} \subset U$. Se tiene que para todo $(t, x(t)) \in V$

$$|K(x)(t) - x_0| \le \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s))| ds \le t \max_{(t,x) \in V} |f(t,x)| =: tM.$$

Para $t < T_0 := \min\{T, \delta/M\}$ se tiene que $|K(x)(t) - x_0| \leq \delta$. Luego, para $B = C([0,T_0],\mathbb{R}^n)$ y $C = \{x \in B : \|x - x_0\| \leq \delta\}$, donde $\|x\| = \max_{0\leq t\leq T_0} |x(t)|$, se tiene que $C \subset B$ es un cerrado no vacío y $K : C \to C$. Nuestro siguiente objetivo es probar que $K : C \to C$ es una contracción. La condición de f localmente Lipschitz en el segundo argumento, uniforme con respecto al primero implica que para todo subconjunto compacto $V \subset U$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
|K(x)(t) - K(y)(t)| &\leq \int_0^t |f(s,x(s)) - f(s,y(s))| ds \\
&\leq \sup_{(t,x)\neq(t,y)\in V} \frac{|f(t,x) - f(t,y)|}{|x-y|} \int_0^t |x(s) - y(s)| ds.
\end{aligned}
$$

Luego, denotando $L = \sup_{(t,x)\neq(t,y)\in V} \frac{|f(t,x)-f(t,y)|}{|x-y|}$ se obtiene que

$$\|K(x) - K(y)\| \leq LT_0\|x-y\|, \text{ para todo } x,y \in C.$$

Escogiendo $T_0 < L^{-1}$ se concluye (usando el principio de contracción) la demostración para $T_0 < \min\{L^{-1}, T, \delta/M\}$. Notar que se demostró que existe solución única para todo $t \in [0,T_0]$ tal que $[0,T] \times B_\delta(x_0) \subset U$ y $T_0 < \min\{L^{-1}, T, \delta/M\}$. De manera análoga puede demostrarse que la ecuación 1.5 tiene solución única en $[-T_0, 0]$. ■

La demostración del teorema nos da un método para aproximar la solución de la ecuación conocido como el Método de Picard. Que consiste básicamente de escoger un ϕ_0 continua tal que $\phi_0(t_0) = x_0$ e iterar de forma $\phi_i(t) = \int_{t_0}^t f(s, \phi_{i-1}(s)) ds + x_0$.

Definición 1.4.3 Una solución del PVI se dice maximal si $\phi \in C^1(I,\mathbb{R}^n)$ con $x_0 \in I$ abierto y cualquier otra solución $\phi' \in C(I',\mathbb{R}^n)$ del PVI necesariamente tiene que $I' \subset I$. Se dirá global si su dominio es $\mathbb{R}$.

En muchos casos la siguiente Proposición es bastante útil.

Proposición 1.4.1 Si $f \in C^1(U,\mathbb{R}^n)$ para $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, entonces f es localmente Lipschitz en el segundo argumento, uniforme con respecto al primero.

Usando inducción puede probarse también lo siguiente.

Proposición 1.4.2 Si $f \in C^k(U,\mathbb{R}^n)$ entonces la solución dado por este teorema es de clase C^{k+1}.

Finalmente, veamos otra apliación del principio de contracción importante en sistemas dinámicos.

Teorema 1.4 Perron 1907-Frobenius 1912. Sea $N \geq 1$ y A una matriz no negativa de $N \times N$ tal que ninguna coordenada (i,j) de A^n sea siempre 0 para todo $n \geq 1$. Entonces A tiene un valor propio maximal (en módulo) positivo y real λ_A (llamado valor propio de Perron) asociado a un vector propio no negativo.

En este curso probaremos usando el principio de contracción el siguiente resultado.

Proposición 1.4.3 Sea $N \geq 1$ y A una matriz positiva de $N \times N$, entonces λ_A tiene un único vector propio en $\mathbb{R}^N_+$.

1.5 Ejercicios

Problema 1. Considere la ecuación diferencial con condición inicial

$$
\begin{cases}
y' + 2y &= g(x) \\
y(0) &= 0
\end{cases}
$$

donde

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Encuentre la familia de soluciones continuas $y : [0,\infty) \to \mathbb{R}$.
*Indicación:*Primero resuelva la ecuación en el intervalo $[0,1]$, y después en el intervalo $[1,\infty)$, usando en este último caso el valor de $y(1)$ como condición inicial.

Problema 2. Considere la siguiente ecuación diferencial con condición inicial

$$\begin{cases} y' & = 2x(1+y) \\ y(0) & = 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

1. Demuestre que para todo $b > 0$ existe una única solución continua $y : [0,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ del problema (1.6).
2. Use el método de Picard para aproximar la solución. *Indicación:* Puede serle útil iterar partiendo con la función constante $\phi_0 = 0$.
3. Demuestre directamente que la sucesión obtenida del método de Picard converge a una función ϕ que es la solución de (1.6). *Indicación:* Recuerde que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge absolutamente si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$. Diferencie término a tértmino para demostrar que ϕ que es la solución de (1.6).
4. Encuentre la solución de (1.6) usando separación de variables.

Problema 3. Demuestre la siguiente Proposición (muchas veces útil para estudiar existencia y unicidad de soluciones a ecuaciones con condición inicial).

Proposición 1.5.1 Si $f \in C^1(U,\mathbb{R}^n)$ para $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, entonces f es localmente Lipschitz en el segundo argumento, uniforme con respecto al primero.

Problema 4. El objetivo de este problema es completar la demostración de la siguiente Proposición.

Proposición 1.5.2 Sea $N \geq 1$ y A una matriz positiva (i.e. $A_{i,j} > 0$ para todo i,j) de $N \times N$, entonces A tiene un único vector propio en $\mathbb{R}_+^N$ y está asociado a un valor propio real y positivo.

Demostración. Sea $B = \mathbb{R}^N$ el espacio de Banach para la norma $\|x\| = \sum_{i=1}^N |x_i|$ y

$$B' = \{x : x_i \geq 0, i = 1,\ldots,N\} \setminus \{0\} \subset B.$$

Para $x,y \in B'$, sean

$$\begin{aligned} \alpha(x,y) &= \sup\{\lambda \in \mathbb{R}_+ : y - \lambda x \in B'\} \in [0,\infty[, \\ \beta(x,y) &= \frac{1}{\alpha(y,x)}, \\ \Gamma(x,y) &= \frac{\alpha(x,y)}{\beta(x,y)}, \\ \Theta(x,y) &= -\log\Gamma(x,y) \in [0,\infty]. \end{aligned}$$

Notar que Γ es una pseudo-distancia en B' y una distancia en $C = \{x \in B' : \|x\| = 1\}$ (ejercicio). Observar que $\Gamma(x,y) = \inf_{i,j : x_i y_j \neq 0} \frac{x_j y_i}{x_i y_j}$ (ejercicio).

Notar que $A(B') \subset B'$ y se puede definir el operador $L : C \to C$ mediante $Lx = \frac{Ax}{\|Ax\|}$.

Demostrar (ejercicio) que para todo $x,y \in C$

$$\Theta(Lx,Ly) \leq \frac{1-\sqrt{1/\delta}}{1+\sqrt{1/\delta}}\Theta(x,y) \leq \tanh(diam(L(C))/4)\Theta(x,y),$$

donde
$$\delta = \inf_{x,y \in C} \Gamma(Lx, Ly) = \max_{i,j,k,l} \frac{a_{ki}a_{lj}}{a_{kj}a_{li}} > 0.$$

Demostrar (ejercicio) que $\tanh(diam(L(C))/4) < 1$. Para esto es útil demostrar que $diam(L(C)) = \log(1/\delta) < \infty$. Por el principio de contracción existe un único punto fijo $\bar{x} \in C$ de L. Si v es un vector propio de A en B', entonces $\frac{v}{\|v\|} \in C$ es un punto fijo de L. Por lo tanto $\bar{x}$ es el único vector propio en $\mathbb{R}^N_+$ (para justificar esto demostrar que $\bar{x}$ pertence al interior de C) asociado a un valor propio real y positivo. ■

1.6 ¿Cómo encontrar una solución maximal?

Proposición 1.6.1 Si el PVI admite solución local única entonces admite solución maximal única.

Demostración. Sea S el conjunto de todas las soluciones ϕ del PVI en el que el dominio sea un intevalo abierto I_ϕ.
Sea $I = \bigcup\limits_{\phi \in S} I_\phi$. Notar que si $t_0 < t_1 \in I \Rightarrow$ existe $\phi \in S$ tal que $[t_0, t_1] \subset I_\phi$.
Definimos una función $\phi' : I \to \mathbb{R}^n$ donde dado $t \in I$ usamos una función $\phi \in S$ tal que $t \in I_\phi$ y definimos $\phi'(t) = \phi(t)$, esta asignación es única pues la solución es única. (localmente en torno a t). ■

Queremos un criterio que nos permita determinar cuando el conjunto solución se puede extender.

Teorema 1.5 Sea $\phi(t)$ solución del PVI en un intervalo (t_-, t_+). Entonces la solución puede extenderse a la derecha a $(t_-, t_+ + \varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$ ssi
$$\exists t_m \in (t_-, t_+) \; \forall m \quad \text{tq} \lim_{m \to \infty} (t_m, \phi(t_m)) = (t_+, y) \in U$$

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Esta implicancia ya se tiene, ya que puedo extender la solucion a $(t_-, t_+ + \varepsilon)$, es decir, existe solución única al problema
$$(1) \begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = y_0 \end{cases}$$
Donde se tiene que el dominio de ϕ es $(t_-, t_+ + \varepsilon)$, es también solución de
$$(2) \begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_+) = \phi(t_+) \end{cases}$$
Y es única en una vecindad de t_+, por el teorema de Picard-Lindelof.
$\therefore$ Para cualquier sucesión $t_m \uparrow t$ se tiene que $(t_m, \phi(t_m) \to (t_+, \phi(t_+)))$ por continuidad de ϕ y $(t_+, \phi(t_+)) \in U$.
Pues ϕ es solución de (2).

$\boxed{\Leftarrow}$ Observemos que es suficiente demostrar que $\lim\limits_{t \to t_+} \phi(t) = \phi(t_+)$, pues si esto es cierto entonces $\lim\limits_{m \to \infty} (t_m, \phi(t_m)) = (t_+, y) \in U \Rightarrow (t_+, f(t_+)) \in U$.
Entonces usando Picard-Lindelof podemos encontrar solución local o
$$(1) \begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_+) = \phi(t_+) = y \end{cases}$$
Donde esta solución puede ser usada para extender la solución del problema original.
Escojamos $\delta > 0$ tal que $V = [t_+ - \delta, t_+] \times \overline{B_\delta(y)} \subseteq U$ (Puede hacerse pues $(t_+, y) \in U$, U abierto). Donde V es un compacto.

- Definamos $M = \sup\limits_{(t,x) \in V} \|f(t,x)\|$ (f continua, V compacto).
- La demostración sigue por contradicción.
  $\exists$ una sucesión $r_m \uparrow t_+$ tal que
  $$|\phi(r_m) - y| \geq \gamma > 0$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que $\gamma \leq \delta$ y $r_m \geq t_m$

$$
\begin{aligned}
0 < \gamma \leq |\phi(r_m) - y| \leq |\phi(t_m) - \phi(r_m)| + |\phi(t_m) - y| \\
&= \left| \int_{t_0}^{t_m} f(t, \phi(t)) dt - \int_{t_0}^{r_m} f(t, \phi(t)) dt \right| + |\phi(t_m) - y| \\
&\leq \int_{t_m}^{r_m} |f(t, \phi(t))| dt + |\phi(t_m) - y| \\
&\leq \underbrace{(r_m - t_m)}_{\to 0} \cdot M + \underbrace{|\phi(t_m) - y|}_{\to 0}
\end{aligned}
$$

Lo cuál es una contradicción, pues $\gamma > 0$.

■

Teorema 1.6 — Corolario. Se obtiene la misma conclusión bajo el supuesto que existía C compacto tal que:

$$[t_-, t_+] \times C \subset U \quad \text{y } \phi(t_m) \in C \text{ para alguna sucesión } t_m \uparrow t_+$$

Demostración. Si se satisface está última condición, extraer una subsucesión convergente de t_m y usar teorema anterior. ■

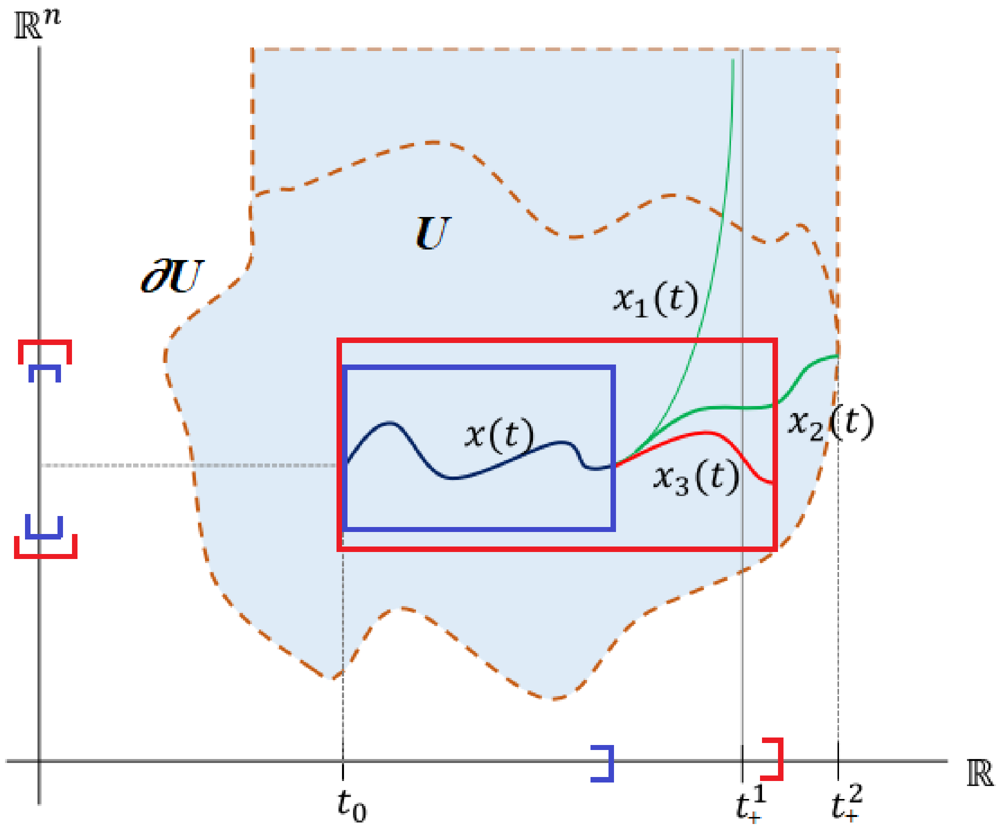
Proposición 1.6.2 — Obs. Para que un intervalo sea maximal a la derecha se requiere que la solución debe "abandonar" cualquier compacto $C \subset \mathbb{R}^n$ tal que $(t_-, t_+) \times C \subset U$ cuando $t \uparrow t_+$.

En particular si $U = \mathbb{R}^{n+1}$ entonces la solución tiene que diverger cuando $t \uparrow t_+$.

En simples palabras todo lo anterior significa que si $\phi(t)$ es una solución maximal con $t_+ < \infty$ entonces necesariamente $\lim_{t \to t_+} \|\phi(t)\| = \infty$.

Además si ϕ es una solución maximal acotada entonces necesariamente $I = \mathbb{R}$.

Estas ideas quedan más claras al estudiar el siguiente dibujo:



Donde digamos que se empieza con la solución $x(t)$ de un PVI inicialmente definido en un cierto compacto (rectángulo azul). Existirán entonces tres casos.

Primero, supongamos que el límite de $x(t)$ al acercarse al compacto converge a un cierto valor, luego por Picard-Lindelöf existirá un cierto intervalo de solución única en torno a este punto como lo es $x_3(t)$ en el dibujo, esta extensión crea un nuevo compacto (el rectángulo rojo) más grande que el anterior y se repite el análisis para $x_3(t)$ convergiendo a su compacto.

Segundo, supongamos que el límite de $x(t)$ al acercarse al compacto diverge como en el dibujo lo hace $x_1(t)$, en dicho caso no es posible construir un nuevo compacto por lo que la solución no puede extenderse, es decir dicho intervalo para t sería maximal$[\lim_{t\to t_+^1} \|x_1(t)\| = \infty]$.

Tercero, supongamos que el límite de $x(t)$ al acercarse al compacto resulta la frontera del dominio U, como lo hace $x_2(t)$ en el dibujo en ese caso el intervalo también sería maximal $[\lim_{t\to t_+^2} \|x_2(t)\| \in \partial U]$.

1.7 ¿Cómo saber si el PVI admite solución global? ¿Cómo depende de las condiciones iniciales?

Para responder esta pegunta usaremos la observación anterior más la desigualdad de Grönwall

Teorema 1.7 — Desigualdad de Grönwall. Sea ψ una función real tal que

$$\psi(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\psi(s)ds \;\; \forall s \in [0,T]$$

Con $T>0,\ \alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \beta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+\cup\{0\}$ Entonces

$$\psi(t)\le\alpha(t)+\int_0^t\alpha(s)\beta(s)e^{\int_t^s\beta(r)dr}ds$$

Nota: En este curso usaremos una consecuencia.

Si $\alpha\in\mathbb{R},\ \beta\ge 0,\ \gamma\in\mathbb{R}$. tal que

$$\psi(t)\le\alpha+\int_0^t(\beta\psi(s)+\gamma)ds\ \ \forall t\in[0,T]$$

Entonces

$$\psi(t)\le\alpha e^{\beta t}+\frac{\gamma}{\beta}(e^{\beta t}-1)$$

Demostración. (consecuencia)

Sea $\overline{\psi}=\psi+\dfrac{\gamma}{\beta}$ (Cambio de variable)

$$\begin{aligned}\overline{\psi}=\psi+\frac{\gamma}{\beta}&\le\alpha+\int_0^t\left(\beta(\overline{\psi}-\frac{\gamma}{\beta}+\gamma)\right)ds+\frac{\gamma}{\beta}\\&=\left(\alpha+\frac{\gamma}{\beta}\right)+\int_0^t\beta\overline{\psi}(s)ds\end{aligned}$$

Por lo que se tiene que

$$\overline{\psi}\le\left(\alpha+\frac{\gamma}{\beta}\right)e^{\int_0^t\beta ds}$$

$$\psi+\frac{\gamma}{\beta}\le\left(\alpha+\frac{\gamma}{\beta}\right)e^{\beta t}$$

$$\psi\le\alpha e^{\beta t}+\frac{\gamma}{\beta}(e^{\beta t}-1)$$

Demostración (Grönwall)

Sea $\phi(t)=e^{-\int_0^t\beta(s)ds}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\phi(t)\int_0^t\beta(s)\psi(s)ds)&\overset{R.C}{=}\beta(t)\psi(t)\left(\psi(t)-\int_0^t\beta(s)\psi(s)ds\right)\\&\underset{Hiptesis}{\le}\beta(t)\phi(t)\alpha(t)\end{aligned}$$

Integrando con respecto a t y dividiendo por $\phi(t)$ se obtiene

$$\psi(t)\le\alpha(t)+\int_0^t\alpha(s)\beta(s)e^{\int_t^s\beta(r)dr}ds$$

■

Teorema 1.8 — Criterio para existencia global de soluciones. Sea $U=\mathbb{R}^{n+1}$ y $\forall T>0$ sean $M(T),L(T)$ constantes tales que:

$$\|f(t,x)\|\le M(T)+L(T)\|x\|\quad\forall(t,x)\in[-T,T]\times\mathbb{R}^n$$

entonces todas las soluciones del PVI son globales.

Demostración. Idea, demostrar que bajo esta condición cualquier solución es acotada en compactos (para esto usar Gronwall). Suponga ϕ solución del PVI con $\phi(0) = x_0$.

Luego

$$\begin{aligned}
\|\phi(t)\| &\leq \|x_0\| + \int_0^t \|f(s,\phi(s))ds\| \\
&\leq \underbrace{\|x_0\|}_{\alpha} + \| \int_0^t \underbrace{M(T)}_{\gamma} + \underbrace{L(t)}_{\beta} \|\phi(t)\| ds \quad \in [-T,T] \cap I_\phi \\
&\Rightarrow \ \|\phi(t)\| \leq \|x_0\| e^{LT} + \frac{M}{L}(e^{LT} - 1)
\end{aligned}$$

Es acotada sobre un compacto(el grafo de la solución pertenece a una bola compacta). ■

Teorema 1.9 Sean $f, g \in C(U, \mathbb{R}^n)$ con $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ abierto, f satisfaciendo las condiciones de P-L, sean $x(t), y(t)$ soluciones de los siguientes PVI:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{y} = g(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Entonces

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| \, \mathrm{e}^{L|t-t_0|} + \frac{M}{L}\left(\mathrm{e}^{L|t-t_0|} - 1\right)$$

Donde

$$L = \sup_{(t,x) \neq (t,y) \in V} \frac{|f(t,x) - f(t,y)|}{|x-y|}, \qquad M = \sup_{(t,x) \in V} |f(t,x) - g(t,x)|$$

$(t,x) \neq (t,y) \in V$ con $V \subset U$ es un compacto que contiene a los grafos $x(t)$ e $y(t)$

Demostración. Asumamos $t_0 = 0$

$$\begin{aligned}
\|x(t) - y(t)\| = \|x_0 + \int_0^t f(s,x(s))ds - (y_0 + \int g(s,y(s))ds)\| \\
&\leq \|x_0 - y_0\| + \int_0^t \|f(s,x(s)) - g(s,y(s))\| ds \\
&\leq \|x_0 - y_0\| + \int_0^t \|f(s,x(s)) - f(s,y(s))\| + \|f(s,y(s) - g(s,y(s))\| ds \\
&\leq \underbrace{\|x_0 - y_0\|}_{\alpha} + \int_0^t (\underbrace{L}_{\beta} \underbrace{\|x(s) - y(s)\|}_{\psi(s)} + \underbrace{M}_{\gamma} \| ds \\
&\leq \|x_0 - y_0\| e^{LT} + \frac{M}{L}(e^{LT} - 1) \quad \forall t \in [0,T]
\end{aligned}$$

■

Proposición 1.7.1 — Obs. Si $f = g$ entonces este resultados nos dice que:

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x_0 - y_0\| e^{L|t-t_0|}$$

Se pude leer como que la solución depende continuamente de parámetros iniciales.(Notar que L es la cota de Lipschitz)

1.8 Ejercicios

Problema 1. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones.

1. $\dot{x} = 1 + \frac{x}{t}$.
2. $\dot{x} = \frac{x}{2t+x}$.

3. $y' = -\frac{y}{x} + \sqrt{y}$.
4. $y' = 2\frac{y-x}{x+y}$.

Problema 2. Estudie la existencia de soluciones globales a la ecuación $\dot{x} = 2tx^2$ con cada una de las condiciones iniciales $x(0) = 0, x(2) = -1/3$ y $x(0) = -1$.

Problema 3. Dado un problema con condición inicial para la ecuación $\dot{x} = f(t,x)$, estudie la posibilidad de que dos soluciones distintas puedan intersectarse.

Problema 4. Dada la ecuación $\dot{x} = \sqrt[3]{\frac{x^2+1}{t^4+1}}$. Verifique que el problema con condición inicial $x(t_0) = x_0$ para $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^2$ admite solución única, que se puede extender a todo $\mathbb{R}$ y que todas las soluciones son acotadas.

Problema 5. Suponga que $f, g \in C(U, \mathbb{R}^n)$ para U algún abierto en $\mathbb{R}^{n+1}$. Suponga que f satisface la hipótesis del teorema de Picard-Lindelof. En este problema denotaremos por $x(t)$ la solución del problema con condición inicial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t,x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

y por $y(t)$ a una solución del problema con condición inicial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g(t,y) \\ y(t_0) &= y_0. \end{aligned}$$

Encuentre funciones $f(t,x) = f(x)$ y $g(t,x) = g(x)$ tales que

$$|x(t) - y(t)| = |x_0 - y_0|e^{L|t-t_0|} + \frac{M}{L}(e^{L|t-t_0|} - 1),$$

donde $L = \sup_{(t,x)\neq(t,y)\in V} \frac{\|f(t,x)-f(t,y)\|}{\|x-y\|}$ y $M = \sup_{(t,x)\in V} \|f(t,x) - g(t,x)\|$, para V un conjunto compacto que contiene los grafos de $x(t)$ e $y(t)$.

1.9 Teorema de Peano y Algoritmo de Euler

Si sólo pedimos que $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$ que podemos decir del PVI, podremos decir que existe solución local pero tal vez no es única.

Teorema 1.10 — Teorema de Peano. Supongamos que f es continua en $V = [t_0, t_0 + T] \times B_\delta(x_0) \subset U$ y denotamos a $M = max\|f(t,v)\|$.
Entonces existe al menos una solución del PVI para $t \in [t_0, t_0 + T_0]$ y sobre $\overline{B_\delta(x_0)}$, donde $T_0 = min\{T, \frac{\delta}{M}\}$.
El resultado es análogo para el intervalo $[t_0 - T_0, t_0]$.

La demostración requiere de Arzela-Ascoli y del algoritmo de Euler.

Teorema 1.11 — Algoritmo de Euler. Aproxima una solución para el PVI, definiendo para $i = 0, 1, ..., n-1$:

$$x_{i+1} = x_i + f(t_i, x_i) \cdot h \quad t_{i+1} = t_i + h$$

Donde x_0 será dado y $h = \frac{b-a}{n}$ con $[t_0, T] = [a, b]$.

Teorema 1.12 — Teorema de Arzela-Ascoli. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas $x_n : I \to \mathbb{R}^n$ para $I \subset \mathbb{R}$ intervalo compacto. Si f es uniformemente equicontinua y uniformemente acotada, entonces tiene una subsucesión absolutamente convergent.

Demostración. Como $f \in C(u, \mathbb{R}^n)$ definimos $V = [0, \varepsilon] \times B_\delta(x_0)$ asumiento $t_0 = 0$.
Observar que f es uniformemente continua en V.
Usando el algoritmo de Euler construimos una secuencia de solución aproximadas $x_h(t)$ al PVI para $t \in [0, min\{\varepsilon, \frac{\delta}{M}\}]$ indexados a h convergiendo a 0.
Ejercicio: Demostrar qye esta sucesión satisface la condición de A-A.
Sea x_{n_k} la subsucesión absolutamente convergente que denotaremos por ϕ_k convergiendo a ϕ uniformemente.
Es suficiente demostar que ϕ es solución del PVI, es decir: $\phi(t) = x_0 + \int_0^t f(s, \phi(s))ds$ o de otra forma, $|\phi(t) - (x_0 + \int_0^t f(s, \phi(s))ds)| = 0$.
Para hacer esto, notemos que:

$$x_h(t) = x_0 + \sum_{j=0}^{n_h} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \chi_{[0,t]}(s) f(t_j, x_h(t_j))ds$$

con

$$\chi_{[0,t]}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \in [0,t] \\ 0 & \end{cases}$$

Supongamos que de la sucesión original x_h extraemos antes de ocupar A-A una subsucesión $x_{h'}$ con la siguiente Proposición:

$$\|f(s,y) - f(t,x)\| \leq h' \quad \text{si } |s-t| < h \wedge \|y-x\| \leq M_h$$

Luego:

$$|\phi(t) - (x_0 + \int_0^t f(s, \phi(s))ds)|$$

$$|x_0 + \sum_{j=0}^{n_h} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \chi_{[0,t]}(s) f(t_j, x_h(t_j))ds|$$

$$\leq |t - t_0| \cdot \alpha_n$$

Donde $\alpha_n \to 0$, luego $\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = x_0 + \int_0^t f(s, \phi(s))ds$, más aún:

$$\lim_{n\to\infty} x_0 + \int_0^t f(s, \phi_n(s))ds = \lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = x_0 + \int_0^t f(s, \phi(s))ds$$

Esto demuestra que efectivamnete ϕ es solución del PVI. ∎

1.10 Problemas

Problema 1. Dada $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$ donde $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es un abierto y $(t_0, x_0) \in U$. Considere la ecuación con condición inicial

$$\dot{x} = f(t,x), \; x(t_0) = x_0.$$

1. Cuándo existe una única solución local?
2. Cuándo la única solución local depende de manera continua de la condición inicial?
3. Cuándo existe al menos una solución local?
4. Cuándo existe una solución global?

Problema 2. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones.

$$\frac{dx}{dt} = 1 + \frac{x}{t}$$

y

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{y-x}{x+y}.$$

Problema 3. Se pide demostrar el siguiente resultado.

Proposición: Sea $U = (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$, donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ con $\alpha < \beta, \gamma < \delta$ y

$$f : U \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto f(x,y)$$

una función continua con derivada parcial con respecto a la segunda variable $\frac{\partial f}{\partial y} : U \to \mathbb{R}$ continua. Si $(x_0, y_0) \in U$, entonces existe una única solución local a la ecuación con condición inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),\ y(x_0) = y_0.$$

Problema 4. El objetivo de este problema es estudiar completamente la ecuación diferencial

$$t\dot{x}(t) + 2x(t) = 4t^2. \tag{1.7}$$

Para esto:

1. Argumente sin resolver la ecuación (1.7) porque el problema con condición inicial $x(1) = 2$ tiene una única solución maximal.
2. Encuentre la solución local de la ecuación (1.7) con condición inicial $x(1) = 2$.
3. Determine el dominio de la solución encontrada y argumente porque corresponde a la única solución maximal.
4. Encuentre un valor $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que la solución de la ecuación (1.7) con condición inicial $x(1) = x_0 \in \mathbb{R}$ sea solución global, es decir, su dominio sea $\mathbb{R}$.
5. Encuentre 4 conjuntos abiertos disjuntos $U_1, U_2, U_3, U_4 \subset \mathbb{R}^2$ tales que $\cup_{i=1}^4 \overline{U_i} = \mathbb{R}^2$ y para todo $i = 1,2,3,4$ la solución de la ecuación (1.7) con condición inicial $x(t_0) = x_0$ para $(t_0, x_0) \in U_i$ dependa de manera continua de la condición inicial.

Problema 5. Considere la ecuación con condición inicial

$$\dot{x}(t) = \frac{-t + \sqrt{t^2 + 4x(t)}}{2},\ x(2) = -1. \tag{1.8}$$

1. Puede usarse el teorema de Peano para argumentar que la ecuación (1.8) con condición inicial admite solución?
2. Verifique que la función $x(t) = 1 - t$ y la función $z(t) = \frac{-t^2}{4}$ son soluciones.
3. Cuál es el dominio de estas soluciones?
4. Explique porque la existencia de dos soluciones no contradice el resultado del problema anterior.

Problema 6. Dada la ecuación

$$\dot{x} = \sqrt[3]{\frac{x^2+1}{t^4+1}}.$$

Verifique que el problema con condición inicial $x(t_0) = x_0$ para $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$ admite solución única, que se puede extender a todo $\mathbb{R}$ y que todas las soluciones son acotadas.

Problema 7. Estudie los intervalos maximales de las soluciones a la ecuación

$$\dot{x} = 2tx^2$$

con cada una de las tres condiciones iniciales distintas

$$x(0) = 0, x(2) = -1/3 \text{ y } x(0) = -1.$$

2. Sistemas Lineales

2.1 Introducción Sistemas Lineales

Es un sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$
\begin{aligned}
x_1'(t) &= a_{11}x_1(t) + \ldots + a_{1N}x_N(t) + b_1(t) \\
&\vdots \\
x_N'(t) &= a_{N1}x_1(t) + \ldots + a_{NN}x_N(t) + b_N(t)
\end{aligned}
$$

Donde $a_{ij}:\ I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con I intervalo, $a_{ij} \in C(I,\mathbb{R}),\ b_i \in C(I,\mathbb{R}) \quad \forall i,j$

Definición 2.1.1 — Notación habitual . Para $A \in C(I,\mathbb{R}^{N\times N}),\ b \in C(I,\mathbb{R}^N)$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)$$

Teorema 2.1 — Teorema fundamental. Dado $t_0 \in I,\ \gamma \in c \in \mathbb{R}^N,\ A \in C(I,\mathbb{R}^{N\times N}),\ b \in C(I,\mathbb{R}^N)$. El sistema lineal de primer orden con condición inicial:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = c \end{cases}$$

tiene solución única.

Proposición 2.1.1 Sea $H = \{x:\ I \longrightarrow \mathbb{R}^N:\ x \text{ es solución del sistema lineal}\}$ entonces H es un espacio vectorial de dimensión N.

Teorema 2.2 Si $X^{(1)},\ldots,X^{(N)}$ son N soluciones del sistema lineal homogéneo:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad A \in C(I,\mathbb{R}^{N\times N})$$

tales que para algún $x_0 \in I$ se tenga que:

$$det\left[X^{(1)}|...|X^{(N)}\right](t) = W\left(X^{(1)},...,X^{(N)}\right)(t_0)$$

Entonces toda solución de esta ecuación se escribe de la forma:

$$\sum_{i=1}^{N} c_i X^{(i)} \quad c_i \in \mathbb{R}$$

Además $\exists t_0 \in I$ tal que la matriz fundamental donde cada columna tiene un vector solución:

$$X = \underline{X}(t) = [X_1|...|X_N](t)$$

Satisface $Det(\underline{X}(t)) \neq 0$ definiendo este como el Wronskiano de $X_1,...,X_N$.

Ecuaciones lineales homogéneas de coeficientes constantes con condición inicial.

Teorema 2.3 $\dot{x}(t) = Ax(t)$ donde $t \in I \subset \mathbb{R}$ y $A \in \mathbb{R}^{N\times\mathbb{R}}$ (independiente del tiempo), entonces:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = c \ \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Tiene solución única $x(t) = ce^{At}$.

Definición 2.1.2 Sea $A \in \mathbb{R}^{N\times N}, t \in \mathbb{R}$ definimos:

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$$

Donde se tiene:

$$\begin{cases} A^0 = I \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \\ A^k = A^{k-1}A \end{cases}$$

¿Por qué el limite existe? Elegimos la norma en $\mathbb{R}^{N\times N}$ dada por:

$$\|A\| \sum_{i,j} |a_{ij}|$$

Para estudiar esto basta notar que

$$|(AB)^{ij}| = |\sum_{l=1}^{N} A_{il}B_{lj}| \leq \sum_{l=1}^{N} |A_{il}|\,|B_{lj}| \leq N\|A\|\|B\|$$

De manera inductiva se tiene $\|A^N\| \leq N^{3(N-1)}\|A\|^N$
Luego

$$\|e^{tA}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k N^{3(k-1)}\|A\|^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k (N^3\|A\|)^k N^{-3}}{k!} = N^{-3}e^{tN^3\|A\|} < \infty \quad \forall t \in \mathbb{R} \wedge N\,fijo$$

Demostración. Por linealidad de la derivada basta demostrar que:

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt}\frac{(tA)^k}{k!} = Ax(t). \text{ En efecto:}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(tA)^{k+1}}{k!}A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(tA)^{k-1}}{(k-1)!}A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}A^{k-1}}{(k-1)!}A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}AA^{k-1}}{(k-1)!}$$
$$= A\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}\right) = Ae^{tA}$$

■

Propiedades de la matriz exponencial.

Proposición 2.1.2 Si $A, B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ conmutan entonces:

$$e^{tA}e^{tb} = e^{t(A+B)} \quad \in \mathbb{R}^{N\times N}$$

Demostración. (Idea) Demostrar que ambos lados de la desigualdad resuelven la misma ecuación dif de solución única, $e^{t(A+B)}$ es la única solución de

$$\begin{cases} \dot{x} = (A+B)x \\ x(0) = I \ \in \mathbb{R}^{N\times N} \end{cases}$$

■

2.2 Sistemas Lineales

Ej Resolver las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = 5x_1(t) + 6x_2(t) \\ \dot{x_2}(t) = x_2(t) \end{cases}$$

Con $x_1(0) = 5$ y $x_2(0) = 7$.
Solución

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \\ x(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \text{La solución es } x(t) = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} e^{t\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Ej Resolver las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = 7x_1(t) + x_3(t) \\ \dot{x_2}(t) = x_2(t) \\ \dot{x_3}(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

Con $x_1(t_0) = 1$, $x_2(t_0) = 0$ y $x_3(t_0) = 5$.
Solución

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x \\ x(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \text{La solución es } x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} e^{t\begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

¿Cómo calcular e^{tA}?
Recordemos que $\forall A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ existe una descomposición de Jordan, esto es que existe P invertible y J una matriz de bloques de Jordan tal que:

$$A = PJP^{-1} = PJP^t$$

A veces se denota de la forma que A tiene descomposición $\oplus J_i$ donde J_i es un bloque de Jordan.
Imaginemos que conocemos $A = PJP^{-1}$ luego $e^{tA} = e^{tPJP^{-1}}$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tPJP^{-1})^k}{k!} = P\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k J^k}{k!} P^{-1} = Pe^{tJ}P^{-1}$$

En conclusión basta saber calcular e^{tJ} con J la matriz de Jordan asociada a A.
El problema se reduce a saber calcular potencias de matrices de Jordan:

$$e^{t(J-D_i} = \sum_{k=0}^{n_i} \frac{(t(J-D_i))^k}{k!}$$

Donde n_i es el tamaño del bloque J_i. Además:

$$J_i = D + N$$

Donde $N^n = 0$ y $D^n = \begin{pmatrix} \lambda_i^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_i^n \end{pmatrix}$

Finalmente, podremos calcular e^{tJ_i} $\forall i$ y de esta forma:

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_i} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{tJ_i} \end{pmatrix}$$

2.3 Ejercicios

Problema 1. Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $N \in \mathbb{N}$, $A \in C(I, \mathbb{R}^{N\times N})$, $b \in C(I, \mathbb{R}^N)$ y $c \in \mathbb{R}^N$. Demuestre que el PVI

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t), x(t_0) = c$$

tiene solución única.

Problema 2. Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $N \in \mathbb{N}$, $A \in C(I, \mathbb{R}^{N\times N})$. Demuestre que

$$H := \{x : I \to \mathbb{R}^N : \dot{x}(t) = A(t)x(t)\}$$

es un espacio vectorial de dimensión N.

Problema 3. Sean $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de matrices $A_n, B_n \in \mathbb{R}^{N\times N}$ tales que $A_n \to A$ y $B_n \to B$ con respecto a la norma de matrices $\|X\| = \sum_{i,j} |X_{i,j}|$ para $X \in \mathbb{R}^{N\times N}$, donde $A, B \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Demuestre que $A_n B_n \to AB$ con respecto a $\|\cdot\|$.

Problema 4. Considere la norma $\|\cdot\|_2$ en ^{N} definida por $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N |x_i|^2}$, para $x \in^N$. Verifique que la función $\|\cdot\|_* :^{N\times N} \to [0, \infty)$ definida por $\|A\|_* = \sup_{x:\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$ define una norma en $^{N\times N}$.

Problema 5. Demuestre que $(^{N\times N}, \|\cdot\|_*)$ es un espacio de Banach.

Problema 6. En clase definimos e^{tA} para $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ y vimos que corresponde a la solución de $\dot{x} = Ax, x(0) = I_N$, donde I_N es la matrix identidad de $N \times N$. Demuestre que puede definirse de manera similar e^{tA} para $A \in^{N\times N}$ y $t \in \mathbb{R}$, que corresponde a la solución de la ecuación $\dot{x} = Ax, x(0) = I_N$. Ind: para esto puede ser útil demostrar que $\|AB\|_* \le \|A\|_* \|B\|_*$ y demostrar que la definición natural es correcta (es una serie convergente).

2.4 Clase Práctica

Proposición 2.4.1 — Obs. Si $x \in C(I, \mathbb{R}^n)$ es una solución de $x(t) = Ax(t)$ y $x_p(t)$ es solución de $\dot{x_p}(t) = Ax(t) + b$ con $t \in I$ entonces:

$$(x \dot{+} x_p) = \dot{x} + \dot{x_p} = Ax + Ax_p + b = A(x + x_p) + b$$

Conclusión, $x + x_p$ es solución de $\dot{x} = Ax + b$.

Proposición 2.4.2 — Obs. Definimos un conjunto fundamental como un conjunto de n funciones vectoriales $x_1,...,x_n$ tales que $det(x_1|...|x_n)(t_0) \neq 0$ para algún $t_0 \in I$ y la matriz fundamental $\overline{X} \in C(I,\mathbb{R}^{n\times n}$:

$$\overline{X}(t) = [X_1|...|X_N](t)$$

El conjunto fundamental satisface que $\dot{\overline{X}} = A\overline{X}$, donde cada columna de $\overline{X}$ es solución del sistema $\dot{x} = Ax$.

Encontremos una fórmula para todas las soluciones particulares, observar que:

$$x_p(t) := \overline{X}\int_0^t \overline{X}^{-1}(s)bds$$

Luego observar que el conjunto solución del sistema de ecuaciones :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b \\ x(0) = c \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

se puede escribir como:

$$\overline{X}(t)c + \overline{X}(t)\int_0^t \overline{X}^{-1}(s)bds$$

Más aún sabemos que:

$$\overline{X}(t) = e^{tA}$$

Entonces la solución del sistema se puede escribir de la forma:

$$\boxed{e^{tA}c + e^{tA}\int_0^t e^{-sA}bds}$$

Ej Resolver el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x_2} = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

Solución

Se puede escribir como

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} x$$

El polinomio característico de A es $(\lambda-1)(\lambda-3) = 0$, con valores propios $\lambda_1 = 1 \wedge \lambda_2 = 3$ por tanto A es diagonalizable y:

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

Luego el conjunto solución es:

$$\{Pe^{tA}c : \ c \in \mathbb{R}^2\} = \{P\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} : \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

Para encontrar P buscamos vectores propios de A:

Un generador de $ker(A-\lambda_1 I)$ es $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Un generador de $ker(A-\lambda_2 I)$ es $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Luego el conjunto solución queda:

$$\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} : \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} = \{c_1\begin{pmatrix} e^t \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} : \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

Ej Resolver el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -x_1 + 2x_2 \\ \dot{x_2} = -x_1 + -3x_2 \end{cases}$$

Solución

Se puede escribir como

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}}_{A} x$$

El polinomio característico de A es $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$, con valores propios $\lambda_1 = -2 + i \wedge \lambda_2 = -2 - i$ por tanto A es diagonalizable y:
Para encontrar P buscamos vectores propios de A:
Un generador de $ker(A - \lambda_1 I)$ es $\begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \end{pmatrix}$.
Un generador de $ker(A - \lambda_2 I)$ es $\begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \end{pmatrix}$.
Finalmente la solución del sistema original:

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t(-2+i)} & 0 \\ 0 & e^{t(-2-i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Ej Resolver el sistema:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} x$$

Solución

Los valores propios son $\lambda_1 = \lambda_2 = 3 \wedge \lambda_3 = -3$ y:
Para encontrar P buscamos vectores propios de A:
Un generador de $ker(A - \lambda_1 I)$ es $< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$ con lo que A es diagonalizable.
Un generador de $ker(A - \lambda_3 I)$ es $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Finalmente la solución del sistema original:

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Ej Resolver el sistema:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x$$

Solución

El polinomio característico de A es $(1-\lambda)^2(3-\lambda) = 0$, con valores propios $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \wedge \lambda_3 = 3$ Para encontrar P buscamos vectores propios de A:
Un generador de $ker(A - \lambda_1 I)$ es $< \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$ con lo que A no es diagonalizable, pues la multiplicidad aritmética y geométrico no coinciden, luego procede buscar un vector propio generalizado asociado a $\lambda_1 = 1$ esto es buscar generadores del espacio $ker(A - \lambda_1 I)^2$:

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se obtiene:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{Ker(A-\lambda_1 I)} + v_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v.p\ generalizado}$$

Un generador de $ker(A-\lambda_3 I)$ es $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Luego

$$A = PJP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

Entonces $x(t) = e^{tA}c = e^{tA}c = Pe^{tJ}\underbrace{P^{-1}c}_{\bar{c}}$.

Para calcular e^{tJ}:

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{t\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} & \\ & e^{3t} \end{pmatrix}$$

Calculamos $e^{t\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$:

$$e^{t\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)} \quad \text{Como conmutan} \Rightarrow \quad e^{t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot e^{t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Por un lado:

$$e^{t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = e^{tI} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tI)^k}{k!} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

Por otro:

$$e^{t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^k}{k!} = I + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 + 0 \ldots$$

Por tanto:

$$e^{t\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

Con los que:

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

Finalmente la solución es:

$$x(t) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}}_{P^{-1}c} = c_1 \underbrace{e^t}_{e^{\lambda_1 t}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{vp\ \lambda_1} + c_2 \underbrace{e_t}_{e^{\lambda_1 t}} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{vpgen\ \lambda_1} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{vp\ \lambda_1} \right\} + c_3 \underbrace{e^{3t}}_{e^{\lambda_3 t}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{vp\ \lambda_3}$$

2.5 Ejercicios

Problema 2. En clase 10 demostramos que para el bloque de Jordan $J_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ donde $J_i = D_i + (J_i - D_i)$ para $D_i = \lambda_i I$ con $I \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ la matriz identidad. Podemos escribir $N_i = J_i - D_i$, y obtenemos que $e^{tN_i} = \sum_{k=0}^{n_i} \frac{t^k N_i^k}{k!}$ y luego

$$e^{tJ_i} = e^{t(D_i+N_i)} = e^{tN_i} e^{tD_i} = e^{tD_i} e^{tN_i}. \tag{2.1}$$

Además, es fácil ver que $e^{tD_i} = e^{t\lambda_i I} = e^{t\lambda_i} I$, por lo que podemos concluir que

$$e^{tJ_i} = e^{t\lambda_i} \sum_{k=0}^{n_i} \frac{t^k N_i^k}{k!}.$$

Para justificar la ecuación (2.1) dijimos en clase 10 que estabamos usando un resultado de clase 8, que decía lo siguiente.

Proposición Si $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $AB = BA$, entonces $e^{tA} e^{tB} = e^{t(A+B)}$.

Sin embargo, en clase 8 solo alcanzamos a empezar la demostración de esta Proposición. En este ejercicio, se pide completarla.

Problema 3. Calcule e^{tA} y e^{tB} para $t \in \mathbb{R}$, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Problema 4. Considere las matrices A y B del problema anterior, y encuentre las soluciones generales de los siguientes sistemas lineales de ecuaciones

$$\dot{x} = Ax(t)$$

y

$$\dot{x} = Bx(t).$$

Problema 5. Escoja una matrix real M de 3×3 no diagonalizable. Que propiedades tiene su matriz? Porque escogió esa matriz y no otra? Estudie e^M.

Problema 6. Encuentre un sistema lineal de ecuaciones donde e^{tM} sea solución. Argumente brevemente como escribir el conjunto de todas las soluciones del sistema lineal encontrado.

2.6 Continuación y EDO Lineal De Orden Superior

Teorema 2.4 La solución general de:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b \\ x(0) = c \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

se puede escribir como:

$$\underline{X}(t)c + \underline{X}(t) \int_0^t \underline{X}^{-1}(s) b ds$$

Si derivamos:

$$\dot{\underline{X}}c + \dot{\underline{X}} \int_0^t \underline{X}^{-1}(s) b ds + \underbrace{\underline{X}\underline{X}^{-1} b}_{b} = A\underline{X}c + A\underline{X} \int_0^t \underline{X}^{-1}(s) b ds + b$$

$$= A \left(\underline{X}c + \underline{X} \int_0^t \underline{X}^{-1}(s) b ds \right) + b$$

Ej Resolver la ecuación:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3e^{t} \end{pmatrix}}_{b(t)}$$

Solución
El polinomio característico de A es $(\lambda+3)(\lambda+1)=0$, con valores propios $\lambda_1=-1 \wedge \lambda_2=-3$ por tanto A es diagonalizable y:
Para encontrar P buscamos vectores propios de A:
Un generador de $ker(A-\lambda_1 I)$ es $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Un generador de $ker(A-\lambda_2 I)$ es $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Finalmente la solución del sistema original:

$$\underline{X}(t) = e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$\underline{X}(t) = Pe^{tJ}P^{-1} \quad \wedge \quad \underline{X}^{-1}(t) = Pe^{-tJ}P^{-1}$

$\underline{X}(t) = \int_0^t \underline{X}^{-1}(s)bds = Pe^{tJ}P^{-1}\int_0^t Pe^{-sJ}P^{-1}bds = Pe^{tJ}\int_0^t e^{-sJ}P^{-1}bds$

$\Rightarrow \quad e^{-sJ}P^{-1}b = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^{-s} \\ 3e^{s} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2+3s^{s} \\ 2e^{2s}-3se^{3s} \end{pmatrix}$

$\therefore \quad \int_0^t e^{-sJ}P^{-1}bds = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \int_0^t 2+3se^{s}ds \\ \int_0^t 2e^{2s}-3se^{3s}ds \end{pmatrix}$

$\therefore \quad Pe^{tJ}\int_0^t e^{-sJ}P^{-1}bds = \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_0^t 2+3se^{s}ds \\ \int_0^t 2e^{2s}-3se^{3s}ds \end{pmatrix}$

Ej Resolver o encontrar la solución general de la ecuación lineal de segundo orden:

$$y'' + y' - 6y = 8e^{5x}$$

Solución
Haciendo el cambio $z = y' \quad z'' = 8e^{5x} + 6y - z$.

$$\dot{\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} 8e^{5x}}_{b(x)}$$

Los valores propios de A son $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$.

Los vectores propios de A son $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

La solución de la ecuación homogénea es:

$$\underline{X}(t)c = e^{tA}c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

La solución de la ecuación particular es:

$$\underline{X}(t)\int_0^t \underline{X}^{-1}(s)bds = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-2s} & 0 \\ 0 & e^{3s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 8e^{5s} \end{pmatrix} ds$$

Desarrollando:

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{c_1} \\ \bar{c_2} \end{pmatrix} + e^{5t} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 25/3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad y(x) = \bar{c_1}e^{2x} + \bar{c_2}e^{-3x} + \frac{e^{5x}}{3}$$

2.7 Ejercicios

Problema 1 Demuestre que la solución general de la ecuación $y'' + y' - 6y = 0$ tiene la forma $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$, para c_1, c_2 constantes.

Problema 2. Determine la solución general de la ecuación $y'' + 6y' + 25y = 0$.

Problema 3. Encuentre una ecuación lineal de orden 6 homogénea tal que la solución general sea

$$y(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + C_3 t \cos(2t) + C_4 t \sin(2t) + C_5 t^2 \cos(2t) + C_6 t^2 \sin(2t).$$

Problema 4. Determine la solución general de la ecuación

$$y'' + y' - 6y = 8e^{5x}.$$

2.8 Distribuciones

Idea básica de la transformada De Laplace.
Vamos a definir un operador L lineal sobre cierto espacio de funciones tal que transformemos ecuaciones diferenciales a ecuaciones algebraicas:

$$L(\dot{x}(t)) = sL[x(t)](s) - x(0)$$

Ej

$$\dot{x}(t) = f(t,x) \quad \Rightarrow L(\dot{x}(t))(s) = sL(x(t)) - x(0) = L(f(t,x))(s) \iff s(..) - cte = F(s)$$

Uno resuelve la ecuación en s y finalmente uno se devuelve a las originales usando el operador inverso.

Motivación.

$$\begin{aligned}
&\dot{x}(t) \quad / e^{-st},\ s > 0 \\
&= e^{-st}\dot{x}(t) \quad / \int_0^\infty dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st}\dot{x}(t)dt \quad \text{Por partes: } u = e^{-st} \Rightarrow du = -se^{-st} \wedge dv = \dot{x}(t)dt \Rightarrow v = x(t) \\
&= s\int e^{-st}\dot{x}(t)dt + \left[e^{-st}\dot{x}(t)\right]_0^\infty \\
&= -x(0) + s\int_0^\infty e^{-st}\dot{x}(t)dt
\end{aligned}$$

Conclusión: Si llamamos $L(x(t))(s) = \int_0^\infty e^{-st}\dot{x}(t)dt$ entonces:

$$L(\dot{x}(t))(s) = sL(x(t)) - x(0)$$

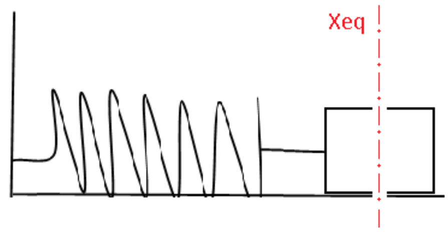
Definiremos la transformada de Laplace por la función $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ por:

$$L(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Conclusión: La transformada de Laplace esta definida sobre una función $f : [,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ y es una función $L(f(t))(s)$ en la variable compleja s.

¿Para qué usaremos la transformada de Laplace en este curso?

1) Para resolver sistemas lineales de la forma $\dot{x} = Ax(t) + b(t)$ con $A \in C(I, \mathbb{R}^{N\times N})$, $b(I, \mathbb{R}^N)$.
2) Para resolver EDO de la forma $\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx = \delta(t-t_{0)}$, donde $\delta(t-t_0)$ es la función que es 0 salvo en $t-t_0$, donde es 1.



se puede modelar la segunda ley de Newton:

$$-kx(t) = \ddot{x}(t)m$$
$$-w^2x(t) = \ddot{x}(t)$$

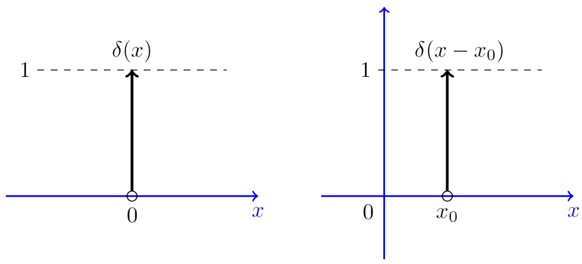
Suponer que un instante x_0: "Le pega un martillo al objeto". De modo que la edo que la modela queda de la forma:

$$-w^2x(t) + \delta(t-t_0) = \ddot{x}(t)$$

Tres funciones importantes para modelar fenómenos físicos son:

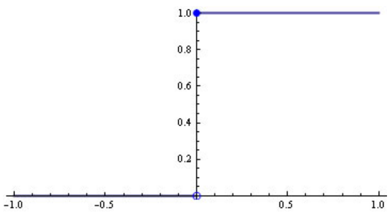
1) Función Delta de Dirac:

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$



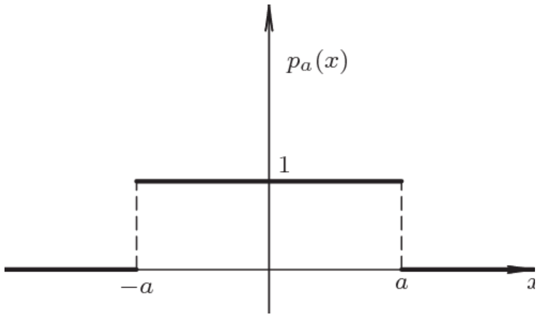
2) Función de Heaviside:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$



3) Función de Pulso:

$$P_{ab}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{si } x > b \end{cases}$$



Proposición 2.8.1 — Obs. • $\delta(t-t_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = t_0 \\ 0 & \text{si } t \neq t_0 \end{cases}$ • $H(t-t_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq t_0 \\ 0 & \text{si } t < t_0 \end{cases}$ • $P_{ab}(x) = H(t-a) - H(t-b)$

Daremos un contexto matemático que generaliza donde estas funciones "viven" que "generaliza" el espacio de funciones continuas. Esto lo haremos definiendo un espacio topológico de distribuciones.

Definición 2.8.1 Espacio de funciones test:

$$\mathscr{D}(\mathbb{R}) = \{f \in C_c^\infty(\mathbb{R})\}$$

donde $C_c^\infty(\mathbb{R})$ es el conjunto C^∞ a soporte compacto.

Proposición 2.8.2 Def. Soporte:

$$Sop(f)\overline{\{x \in \Omega : \ f(x) \neq 0\}} = \Omega / \{y \in \Omega : \ \exists \text{ vecindades de } y \text{ tq } f(z) = 0 \ \forall z \text{ en este vecindad}\}$$

Donde $\Omega \subset \mathbb{R}$ es el dominio de f.

Algunas propiedades: • es cerrado • $sop(fg) \subset sop(f) \cap sop(g)$ • $f \equiv 0$ ssi $sop(f) = \emptyset$

Proposición 2.8.3 — Obs. Esta definición es válida para $f : \Omega \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Si $f \in C^\infty$ la única manera que $f \notin \mathscr{D}$ es que $sop(f)$ sea no acotado.

Definimos entonces para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

$$\mathscr{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$$

Donde $C_c^\infty(\Omega)$ es el conjunto de funciones $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $sop(f) \subset \Omega$ sea un compacto.

Ej De funciones en $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1+|x^2|}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 \quad \text{si } |x| \geq 0 \end{cases}$$

Cumple $f \in C^\infty$, $sop(f) = \overline{B_1(0)} = \overline{\{x : \ |x| \geq 1\}} \subset \mathbb{R}^n$

Definiremos el espacio de distribuciones $\mathscr{D}'(\Omega)$ de la siguiente manera: $u : \mathscr{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ lineal y tal que $\phi_n \to \phi \Rightarrow u(\phi_n) \to u(\phi)$ en $\mathbb{C}$ en distribución. Donde $\phi_n \to \phi$ en distribución significa que $(\phi_n)_n \subset \mathscr{D}(\Omega)$, $\exists K \subset \Omega$ compacto tal que $sop(\phi_n) \subset K \ \forall n$, $sop(\phi) \subset K$ y $\phi_n \to \phi$ uniformemente y $\partial^\alpha \phi_n \to \partial^\alpha \phi$ uniformemente $\forall$ multi indice α y donde:

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_\ell}^{\alpha_\ell}}$$

Para $f : \ \Omega \subset \mathbb{R}^\ell \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell)$ con $|\alpha| = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i$.

Ej $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ En este espacio $\phi_n \to \phi$ en distribución significa que: $\exists K \subset \mathbb{R}$ compacto $sop(\phi_n), sop(\phi) \subset K$.
$\phi_n \to \phi$ uniformemente.
$\dfrac{d^k}{dt^k}\phi_n \to \dfrac{d^k}{dt^k}\phi$ uniformemente $\forall k \in \mathbb{N}$

Existe un teorema que permite determinar cuando una función es distribución.

Teorema 2.5 Sea $u: \ \mathscr{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ lineal entonces $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ ssi $\forall K \subset \Omega$ compacto, $\exists m \in \mathbb{N}$, $\exists c > 0$ tal que

$$|u(\phi)| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \phi\|_{L^\infty(K)} \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(K)$$

Con este teorema demostraremos lo siguiente:

- $\delta \in \mathscr{D}'(\Omega)$
- $P_{ab} \in \mathscr{D}'(\Omega)$
- Si $f \in C(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}$ entonces $uf \in \mathscr{D}'(\Omega)$ donde

$$\begin{aligned} uf: \mathscr{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ g &\longrightarrow \int_\Omega g(t) f(t) dt \end{aligned}$$

Esta misma distribución u_f inducida por f nos permite concluir el espacio de distribuciones generalizas a las funciones continuas en el sentido que:

$$C(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{D}'(\Omega)$$

Sea inyectiva, i.e existe una función lineal inyectiva entre amos espacios.

Volviendo a la transformada de Laplace.

Teorema 2.6 **Teorema de Lerch.** Si $\exists a$ tal que $\forall s \geq a$ $L(f)(s) = L(g)(s)$ donde $f, g : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ con funciones continuas entonces $f \equiv g$.

2.9 Ejercicios

Problema 1 Usando el teorema para caracterizar distribuciones demuestre que la delta de Dirac y la función de Heaviside son distribuciones.

Problema 2 El objetivo de este problema es entender el espacio de distribuciones como una generalización del espacio de las funciones continuas. Para esto demostraremos que es posible inyectar el espacio $C(\Omega)$ en $\mathscr{D}'(\Omega)$ para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto.

Recordad para $f \in C(\Omega)$ el funcional inducido $u_f : \mathscr{D}(\Omega) \to$ definido por

$$u_f(\varphi) = \int_\Omega \varphi(x) f(x) dx.$$

Demuestre que la función

$$C(\Omega) \ni f \mapsto u_f \in \mathscr{D}'(\Omega)$$

es lineal e inyectiva.

Indicación: Para la inyectividad, demuestre que $u_f = 0$ en $\mathscr{D}'(\Omega)$ implica que $f \equiv 0$. Para esto, asuma que existen funciones $\rho \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tales que $\text{sop}(\rho) \subset \overline{B_1(0)}$ y $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx = 1$ (no es difícil probar esto usando el ejemplo de función en $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ que vimos en clases, sin embargo no necesita probarlo) y usar que si f no es identicamente cero, entonces sin perdida de generalidad $f : \Omega \to \mathbb{R}$ y existe un $x_0 \in \Omega$ tal que $f(x_0) = 1$. Use una función $\rho \geq 0$ y un $\delta > 0$ chico tal que $B_\delta(x_0) \subset \Omega$ y además $f|_{B_{\delta/2}}(x_0) > 1\%$. Finalmente para obtener el resultado, argumente por contradicción acotando por abajo la expresión

$$0 = u_f\left(\rho\left(\frac{x - x_0}{\delta}\right)\right).$$

Problema 3. Resuelva la edo con condición inicial

$$2x''(t) + \dot{x}(t) + 4x(t) = \delta(t - \pi/6)\sin t$$
$$x(0) = 0$$
$$\dot{x}(0) = 0.$$

Problema 4. Demuestre que si y es una función tal que $y''(t) = \varphi(t)$, donde φ resuelve la ecuación integral

$$\varphi(t) + \int_0^t (t-r)\varphi(r)dr = \sin(2t),$$

entonces y resuelve la edo

$$y'' + y - t\dot{y}(0) - y(0) = \sin(2t).$$

Problema 5. Resuelva la ecuación integral

$$\varphi(t) + \int_0^t (t-r)\varphi(r)dr = \sin(2t).$$

Indicación: Puede ser útil usar la transformada de Laplace.

2.10 La Transformada De Laplace

Teorema 2.7 Teorema útil. Sea $u : \mathscr{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ lineal. Entonces $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ ssi $\forall K \subset \Omega$ compacto $\exists c > 0\ \exists m \in \mathbb{N}_0$:

$$|u(\phi)| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \phi\|_{L^\infty(k)} \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega)$$

Recuerdo: Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow\ \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n, f \in \mathscr{D}(\Omega)$

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$$

Demostración. $\boxed{\Leftarrow}$

$\phi_n \to \phi$ en distribución ssi $\Rightarrow\ u(\phi_n) \to u(\phi)$ en $\mathbb{C}$ y $\phi_n \to 0$ en distribución $\Rightarrow\ u(\phi_n) \to 0$ en $\mathbb{C}$.
Suponer que $(\phi_n)_n \in \mathscr{D}(\Omega)$ y $sop(\phi_n) \subset K$ compacto y $\phi_n \to 0$ en distribución luego por teorema anterior:

$$|u(\phi_n)| \leq c \underbrace{\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \phi_n\|_{L^\infty(k)}}_{n\to\infty \qquad \to 0}$$

$\therefore \quad u(\phi_n) \to 0$ en $\mathbb{C}$.

$\boxed{\Rightarrow}$

Por contradicción. Suponer que $\exists K \subset \Omega$ compacto y una sucesión $(\phi_n)_n \in \mathscr{D}(\Omega)$ con $sop(\phi_n) \subset K$ tal que:

$$u(\phi) > m \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \phi\|_{L^\infty(k)} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Sea $\psi(x) = \dfrac{\phi_n(x)}{\sum\limits_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \phi\|_{L^\infty(k)}}$ para $x \in \Omega$.

Notar que $\psi_m \in \mathscr{D}(\Omega)$ y $sop(\psi_m) \subset K$. Además si $\beta \leq m \Rightarrow$

$$\|\partial^\beta \psi_m\|_{L^\infty(k)} = \frac{\|\partial^\beta \phi_m\|_{L^\infty(k)}}{m \sum\limits_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \phi_m\|_{L^\infty(k)}} \leq \frac{1}{m}$$

Luego $\psi_m \to 0$ pero $u(\psi_m) = \dfrac{u(\phi_n)}{\sum\limits_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \phi_m\|_{L^\infty(k)}} > 1$, Contradicción. ■

Ej Ω abierto, $f \in C(\Omega) \longrightarrow u_f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ donde:

$$u_f(\phi) = \int\limits_\Omega \phi(x) f(x) dx$$

Hay que demostrar que $u_f \in \mathscr{D}'(\Omega)$.
1) Notar que u_f es lineal, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $g_1, g_2 \in \mathbb{C}$.

$$u_f(\alpha g_1 + \beta g_2) = \int\limits_\Omega (\alpha g_1 + \beta g_2) f dx = \int\limits_\Omega \alpha g_1 f dx + \int\limits_\Omega \alpha g_2 f dx = \alpha u_f(g_1) + \beta u_f(g_2)$$

Usando el teorema para demostrar que $u'_f(\Omega)$ ahora bastaría demostrar la desigualdad.

Sea $K \subset \Omega$ compacto y sea $\phi \in \mathscr{D}(K)$

$$|u_f(\phi)| = |\int\limits_\Omega \phi(x) f(x) dx| = |\int\limits_K \phi(x) f(x) dx| \leq \|\phi\|_{L^\infty(k)} \int\limits_K f(x) dx \leq \underbrace{\|f\|_{L^\infty(k)} \cdot Vol(K)}_{c} \cdot \underbrace{\|\phi\|_{L^\infty(k)}}_{m=0}$$

Propiedades Básicas De La Transformada De Laplace.

Propiedad	
Linealidad	$L(\alpha f + \beta g)(s) = \alpha L(f)(s) + \beta L(f)(s)$
Para $L(\dot{x}) = sL(x) - x(0)$	$L(x^{(n)})(s) = s^n L(x) - s^{n-1} x(0) - s^{n-2} \dot{x}(0) - \ldots - x^{n-}$
	$L(e^{-at})(s) = L(f(t))(s+a)$
Si $f(t) = \begin{cases} g(t-a) & \text{si } t \geq a \\ 0 & \text{si } t < a \end{cases}$	$L(f) = e^{-sa} L(g)$
Convolución, para $f * g(\tau) = \int_0^T f(\tau - t) g(t) dt$	$L(f * g) = L(f) \cdot L(g)$
	$\dfrac{d}{ds} L(f)(s) = -L(t f(t))(s)$

Tabla de transformadas:

$f(t)$	$L(f(t))(s)$
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}
$H(t-t_0)$	$\frac{1}{s}e^{-st_0}$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{s-\lambda}$
$\frac{e^{\lambda t}t^{k-1}}{(k-1)!}$	$\frac{1}{(s-\lambda)^k}$
$\frac{\sigma}{w}sin(wt)$	$\frac{1}{(s-\sigma)^2+w^2}$
$tsin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
$e^{\sigma t}cos(wt)$	$\frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2+w^2}$
$\frac{1}{a}sin(at)-tcos(at)$	$\frac{2a^2}{(s^2+a^2)^2}$

La antitransformada de Laplace es el operador L^{-1} tal qur $L^{-1}[L(f(t))(s)]$ "toma un función que depende de s y entrega una que depende de t".

Ej $L^{-1}(e^{-st_0}) = \delta(t-t_0)$

L^{-1} es un operador lineal.

Para demostrar el **teorema de Lerch** usaremos dos lemas:

Teorema 2.8 **Lema 1.** Si $g \in C([0,1],\mathbb{R})$ y $\int_0^1 x^n g(x) = 0 \in \mathbb{N} \Rightarrow \ g \equiv 0$.

Teorema 2.9 **Lema 2.** Si $g \in C(\mathbb{R})$ y $L(g)(s) = 0 \ \forall s \geq 0 \Rightarrow g \equiv 0$.

Demostración Teorema. Por linealidad de L si $L(f) = L(g) \Rightarrow L(f-g) = 0 \Rightarrow f-g \equiv 0$. ■

Demostración Lema 1. Por Weierstrass$-\beta$, $\exists$ polinomio $P_\varepsilon(x)$ tal que aproxima uniformemente en el compacto $C([0,1])$ a g, es decir:

$$\|P_\varepsilon(x) - g\|_{L^\infty([0,1]} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

Luego $\int_0^1 P_\varepsilon(x)g(x) = 0 \quad \varepsilon$ y tomando $\varepsilon \to 0$ entonces $\int_0^1 g^2(x)dx = 0 \Rightarrow g \equiv 0$. ■

Demostración Lema 2. Sea $s = s_\alpha + n + 1$ donde $s_\alpha \geq a$, $n \in \mathbb{N}$.

Entonces sea $g \in C(\mathbb{R})$ con $L(g)(w) = 0 \; \forall w \geq a$ entonces en particular $L(g)(s) = 0$ y luego por definición:

$$\int_0^\infty e^{-st} g(t)dt = 0$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s_\alpha+n+1)t} g(t)dt = \int_0^\infty (e^{-t})^n (e^t)^{s_\alpha} (e^{-t}) g(t)dt$$

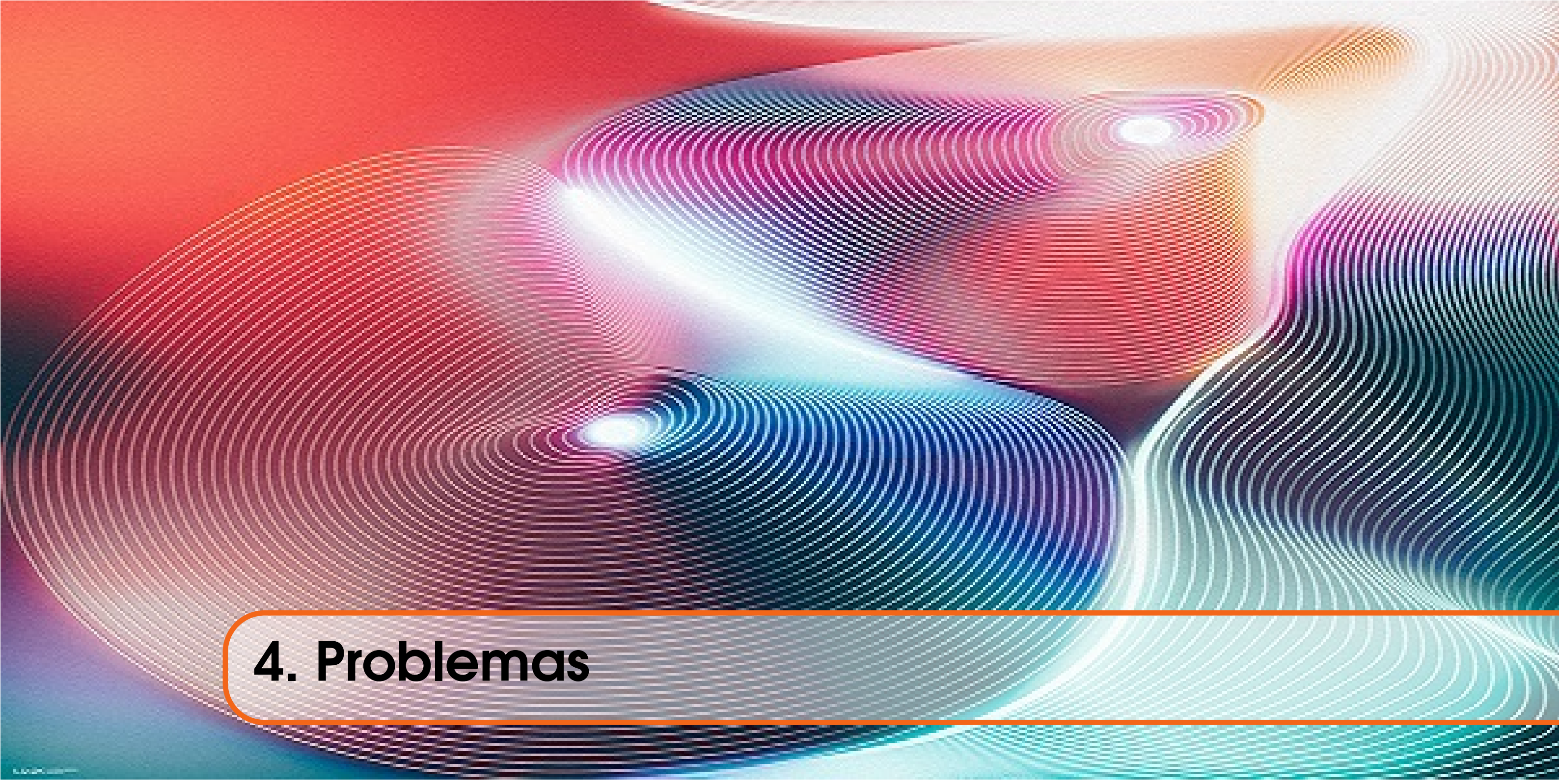
$$\underbrace{=}_{x=e^{-t}} -\int_1^0 x^n x^{s_\alpha} g(-logx)dx = -\int_0^1 x^n (x^{s_\alpha} g(-logx))dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por lema anterior (1) se tiene: $x^{s_\alpha} g(- \underbrace{log(x)}_{\text{Todos los valores posibles}}) = 0 \Rightarrow \; g \equiv 0.$ $\blacksquare$

3. Sistemas Dinámicos

Videos disponibles desde youtube en el siguiente link: `https://www.youtube.com/channel/UCN-unpSB2LXS7NOU7Ggbbpw/`

- Video 1. La transformada de Laplace para resolver sistemas lineales
- Video 2. Error del método de Euler
- Video 3. Resolución numérica de ecuaciones usando Octave o Matlab
- Video 4. Definiciones del análisis cualitativo de sistemas autónomos
- Video 5 Análisis cualitativo del sistemas linean x'=Ax
- Video 6. Ecuaciones de Lotka-Volterrra
- Video 7. Análisis cualitativo de sistemas casi-lineales
- Video 8. Análisis cualitativo de una ecuación de Lotka-Volterra
- Video 9. El método de Lyapunov
- Video 10. Aplicación del método de Lyapunov en un ejemplo
- Video 11. Rotaciones de S1
- Video 12. Teorema de minimalidad de las rotaciones
- Video 13. Definiciones formales de transitividad y minimalidad
- Video 14. Aproximación de integrales usando rotaciones
- Video 15. Funciones expansoras de S1
- Video 16. Caos en sistemas dinámicos
- Video 17. La funciones expansoras son caóticas
- Video 18. La acción del shift
- Video 19. Conjugaciones topologicas
- Video 20. La herradura de Smale
- Video 21. El gato de Arnold
- Video 22. propiedades dinámicas de la herradura de Smale y el gato de Arnold
- Video 23. Introducción al Teorema de Hartman y Großmann
- Video 24. El Teorema de Hartman y Großmann
- Video 25. Teorema Ponincaré-Bendixson



4. Problemas

4.1 Familias de Primer Orden y Métodos Numéricos

1. Puede explicar que familias de EDOs se pueden resolver analíticamente y porqué? En particular, puede escribir y demostrar la fórmula para resolver ecuaciones lineales?
2. En este problema pide dibujar el gráfico de la solución de la ecuación con condición inicial de primer orden:
$$y' = 4 - y^2, y(0) = 0.$$
Indicación: Puede ser útil suponer que la solución es única, continua y que se puede extender a todo $\mathbb{R}$. Sugerencia: responder siguiendo los siguientes pasos:
   - Determinar intervalo (a,b) tal que $y(x) \in (a,b)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
   - Demostrar que la solución es impar.
   - Estudiar monotonía.
   - Estudiar los límites cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$.
   - Calcular la segunda derivada en función de y.
   - Determinar la presencia de puntos de inflexión.
   - Dibujar un gráfico cualitativo.
3. Resuelva la siguiente EDO con condición inicial:
$$y' + (2x-1)y = xy^2 + x - 1, y(-1) = -2.$$
Indicación: Puede ser útil reconocer una ecuación de tipo Ricatti.
4. Explique la idea principal de un método numérico para resolver ecuaciones. Un ejemplo. Cómo se mide la eficiencia? Cómo se puede mejorar la calidad del método?
5. Explique la idea del método de Peano. Cómo se relaciona con el método de Euler?

4.2 Fundamentos

1. Porque la condición de Lipschitzianidad es importante en ecuaciones. Cómo argumentaría la razón detrás de esto? Qué criterio es usualmente usado en vez de esta condición?
2. Cuándo existen soluciones globales? Que significa la dependencia continua con respecto a las condiciones iniciales? Bajo qué hipótesis se tiene? Puede dar una familia interesante de ejemplos?
3. Considere una ecuación de primer orden autonoma $x' = f(x)$ en $\mathbb{R}^1$ con $f(x)$ Lipschitz. Suponga que $f(0) = f(1) = 0$. Muestre que una solución con condición inicial en $[0,1]$ no puede abandonar

este intervalo. Cuál es el intervalo maximal (T_-,T_+) de una solución con condición inicial en $[0,1]$? Existen los límites de la solución cuando $t\to T_-,T_+$?

4. Resuelva el modelo del paracaidista:

$$\ddot{x}=\eta\dot{x}^2-g,\eta>0.$$

Existe una velocidad máxima que el paracaidista puede alcanzar? Si la respuesta es afirmativa, encuéntrela. Indicación: Introduzca la velocidad $v=\dot{x}$ como una nueva variable independiente.

5. Suponga que $U=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ y que $\|f(t,x)\|\leq g(\|x\|)$ para $g\in C([0,\infty))$ que satisface $\int_0^\infty\frac{dr}{g(r)}=\infty$. Demuestre que todas las soluciones del problema de valor inicial $x'=f(t,x)$ tienen solución definida para todo $t\geq 0$.

4.3 Sistemas Lineales

1. Por qué el método de la transformada de Laplace es útil en ingeniería? Puede construir un ejemplo?
2. Explique la forma general de la solución de un sistema lineal de 2x2 a coeficientes contantes. Puede dar algunos ejemplos?
3. Explique la forma general de la solución de un sistema lineal de 3x3 a coeficientes contantes. Puede dar algunos ejemplos?
4. Demuestre que usando la transformada de Laplace es posible transformar el problema de valor inicial

$$\dot{x}=Ax+f(t),x(0)=x_0$$

en un sistema lineal. Indicación: Puede ser útil recordar que $\mathscr{L}(\dot{x})(s)=s\mathscr{L}(x)(s)-x(0)$.

5. Suponga que A es una matrix en $\mathbb{R}^{n\times n}$. Suponga que todos los valores propios satisfacen $Re(\alpha_j)<0$. Demuestre que toda solución de

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+g(t),x(0)=x_0$$

satisface $\lim_{t\to\infty}x(t)=0$, si $\lim_{t\to\infty}\|g(t)\|=0$. Indicación: Recuerde que la solución general está dada por $x(t)=e^{tA}x_0+\int_0^t e^{(t-s)A}g(s)ds$.

4.4 Análisis Cualitativo

1. Qué pasaría si en las ecuaciones de Lotka-Volterra (modelo predador-presa) incluimos pasto que los conejos pueden comer. Escriba y explique un sistema de ecuaciones no-lineal que incluya esta nueva variable. Puede argumentar como sería el diagrama de fase en este caso?
2. Qué pasaría si en las ecuaciones de Lotka-Volterra (modelo predador-presa) incluimos un predador solamente de zorros. Escriba y explique un sistema de ecuaciones no-lineal que incluya esta nueva variable. Puede argumentar como sería el diagrama de fase en este caso?
3. Construya un ejemplo (puede utilizar un modelo físico) de una ecuación con al menos una solución heteroclínica. Cómo se comporta el modelo con respecto a la realidad?
4. Cómo analizaría cualitativamente el sistema lineal a coeficientes constantes de 3x3 en todos sus posibles casos.
5. Considere el sistema de no-lineal

$$\dot{x}=y-\frac{x}{2},$$
$$\dot{y}=\sin(x).$$

Justifique el diagrama de fase mostrado en Figura 4.1, que fue obtenido por un computador.

4.5 Sistemas Dinámicos

1. Construya una codificación para funciones expansoras de $\mathbb{S}^1$ y demuestre que es un sistema caótico.
2. Qué significa que un sistema sea periódico? Que significa que sea minimal? Puede explicar porque las rotaciones irracionales son minimales y las racionales periódicas.
3. Puede construir un ejemplo de sistema dinámico que no sea un STF y que sea topológicamente conjugado un STF asociado a una matriz $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$.

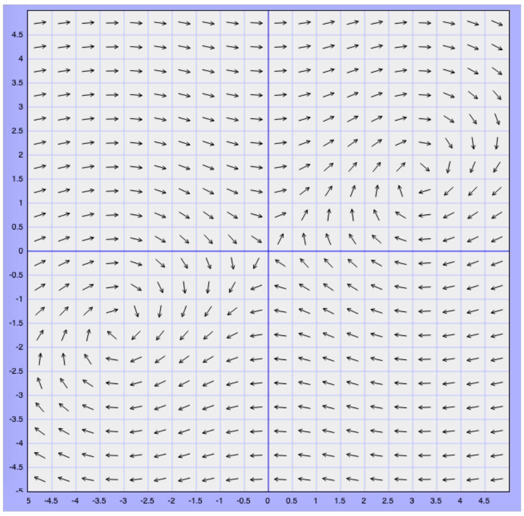


Figure 4.1: Diagrama de fases.

4. Descubra (invente/Proposiciónonga) una variación geométrica en la construcción de la herradura de Smale que permita obtener las mismas conclusiones.
5. Descubra (invente/Proposiciónonga) una variación geométrica en la construcción del gato de Arnold que permita obtener las mismas conclusiones.

Bibliografía

Gerald Teschl, Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems, preliminary version of the book

Christopher P. Grant, Theory of Ordinary Differential Equations, Brigham Young University

Gunther Hormann and Roland Steinbauer, Lecture Notes on the theory of distributions,Fakultat fur Mathematik, Universitat Wien Summer Term 2009

Simon J.A. Malham, Differential Equations and Linear Algebra Lecture Notes, Department of Mathematics, Heriot-Watt University

Axel Osses, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, CMM, Universidad de Chile, 2013

William Boyce and Richard DiPrima, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, Seventh Edition, John Wiley Sons, Inc.

Notas del curso de Ecuaciones diferenciales ordinarias dictado por Manuel Del Pino en la Facultdad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile el año 2006

Viviane Baladi, Positive Transfer Operators and Decay of Correlations (Advanced Series in NonlinearDynamics, 16). World Scientific, River Edge, NJ, 2000.