

Sistemas Dinámicos

Notas del curso del semestre 1 del 2024

ITALO CIPRIANO
DIANA TORREALBA

19 de abril de 2024

Introducción

Un sistema dinámico puede ser la solución de una EDO, sin embargo el concepto es más general. Podemos considerar una función $T : X \rightarrow X$, sobre un conjunto X , y entender como se comportan las composiciones (iteraciones) de esta función. Preguntas típicas son el comportamiento de órbitas particulares y el de comportamientos globales. En sistemas dinámicos usualmente se utilizan modelos simples motivados por modelos reales de fenómenos complejos, como por ejemplo un modelo meteorológico. Adicionalmente, los sistemas dinámicos permiten explorar problemas en diferentes áreas de las matemáticas, tales como geometría, probabilidades y teoría de números por ejemplo.

Veamos un ejemplo de aplicación de sistemas dinámicos para probar un teorema en teoría de números.

Teorema 1 (Szemerédi) *Dada cualquier partición finita de los enteros positivos, existe un elemento de la partición que contiene progresiones aritméticas de cualquier largo.*

Ahora veremos algunos ejemplos de sistemas dinámicos.

Automatas celulares

En este ejemplo $X = \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ y $T : X \rightarrow X$ está definido localmente por $T(x_1, x_2, \dots)_i = M_{2,2}(x_i, x_{i+1})$, para todo $i \in \mathbb{N}$, donde $M_{2,2}(x, y)$ es la componente $(x + 1, y + 1)$ de la matriz $M_{2,2}$. En la Figura 2 se muestra las iteraciones hacia abajo de la función T dada una condición inicial. Los números 0, 1, 2 están representados con distintos colores en la figura.

Función 2x (doubling map) en el intervalo

$T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ donde

$$Tx = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, 1/2) \\ 2x - 1 & \text{si } x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Ejercicio: Jugar iterando las funciones $\sqrt{\quad}$, \sin , \cos en la calculadora.

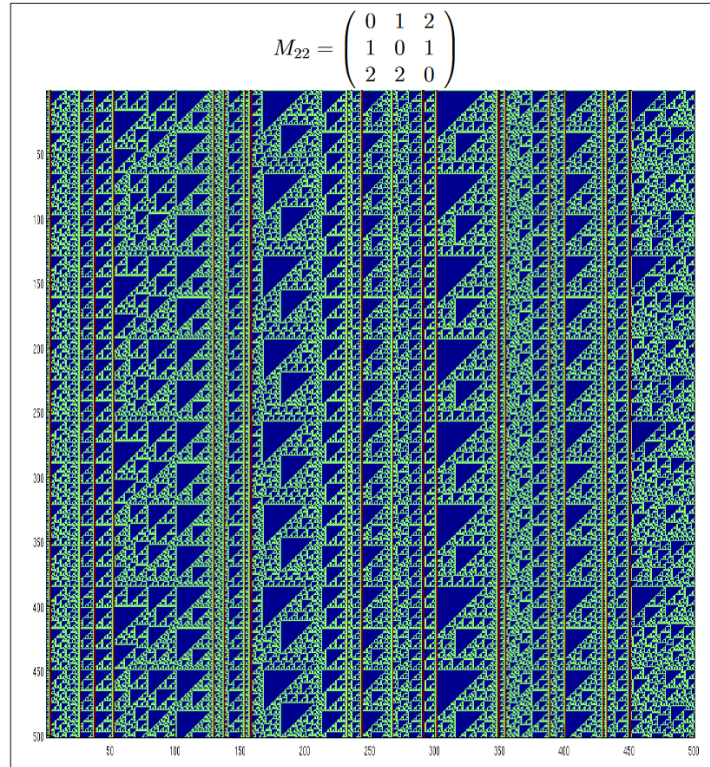


Figura 1: Iteración de un automata celular

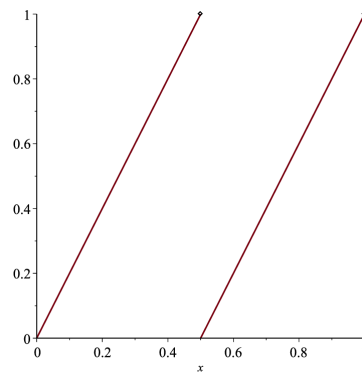


Figura 2: Doubling map

Terminaremos esta introducción con un problema importante en física: el problema de Kepler.

0.1. Problema de Kepler

El problema de Kepler (también conocido como *el problema de los dos cuerpos*) corresponde al sistema de EDOs

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2}{dt^2} r_1 &= F_{21}, \\ m_2 \frac{d^2}{dt^2} r_2 &= F_{12}. \end{aligned}$$

Los dos cuerpos interactúan mediante la energía potencial $U(|r_1 - r_2|) = g \frac{m_1 m_2}{|r_1 - r_2|^2}$, donde g es la constante de Newton. Esto es $F_{21} = -\frac{\partial}{\partial r_1} U$ y $F_{12} = -\frac{\partial}{\partial r_2} U$.

Como los dos cuerpos interactúan mediante la energía potencial, deben obedecer la tercera ley de Newton (la acción mutua entre dos cuerpos entre ellos es igual y con direcciones opuestas). Al derivar el centro de masa

$$r = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{M}$$

se obtiene la ecuación

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{M}.$$

La aceleración del centro de masa depende de la fuerza externa, $F_{ext} = Ma$, donde a es la aceleración del centro de masa. En el sistema considerado, la aceleración del centro de masa es constante, luego v es constante. Entonces es posible obtener la ecuación que describe la posición $r(t)$ del centro de masa en el tiempo t , que viene dada por $r(t) = vt$. Escribiendo $r_3 = r_1 - r_2$, es posible escribir $r_1 = r + \frac{m_2 r}{M}$ y $r_2 = r - \frac{m_1 r}{M}$. Entonces es suficiente resolver el problema para r . Para encontrar la ecuación que satisface r , notemos que $m_1 m_2 \frac{d^2}{dt^2} r_1 = m_2 F_{21}$ y $m_1 m_2 \frac{d^2}{dt^2} r_2 = m_1 F_{12}$. Luego,

$$m_1 m_2 \frac{d^2}{dt^2} (r_1 - r_2) = m_2 F_{21} - m_1 F_{12},$$

entonces, usando la tercera ley de Newton

$$\frac{m_1 m_2}{M} \frac{d^2}{dt^2} r_3 = F_{21}.$$

Haciendo un cálculo con las ecuaciones anteriores, obtenemos

$$\frac{m_1 m_2}{M} \frac{d^2}{dt^2} r_3 = -\frac{\partial}{\partial r_3} U(|r_3|),$$

lo que reduce el problema a un sistema de un cuerpo. En lo siguiente denotaremos $m = \frac{m_1 m_2}{M}$ por r , y $\frac{d}{dt}r$ por v , y $-\frac{\partial}{\partial r}U(|r|)$ por $F(r)$.

Ahora usaremos la conservación del momentum angular. El momentum angular viene dado (para el centro de masa) por

$$L = mr \times v.$$

Haciendo un cálculo, obtenemos para $\rho = |r|$

$$F(r) = -\frac{\partial}{\partial r}U(|r|) = -\frac{r}{\rho} \frac{dU(\rho)}{d\rho},$$

luego el torque τ sobre el centro de masa es

$$\tau := r \times F = 0.$$

En la ausencia de torque, el momentum angular es constante, y por lo tanto $\frac{d}{dt}L = 0$.

Usando la identidad que para cualquier trio de vectores x, y, z se tiene que

$$x \cdot (y \times z) = y \cdot (z \times x) = z \cdot (x \times y),$$

obtenemos que

$$r \cdot L = mr \cdot (r \times v) = mv \cdot (r \times r) = 0.$$

Luego r es perpendicular al momentum angular L , pero como el momentum angular es constante tiene que haber un vector fijo en el espacio tal que la posición del vector r es siempre perpendicular a el. Dado que la posición del vector es siempre perpendicular a cierta orientación en el espacio, entonces el vector posición del centro de masa tiene que siempre pertenecer a un plano.

A causa de esto, el problema se ha ahora reducido a solo dos dimensiones. Luego podemos reescribirlo usando coordenadas polares $\rho \cos \theta$ y $\rho \sin \theta$, donde hicimos la elección de escoger el plano perpendicular a la orientación del momentum angular. Recordemos que en coordenadas polares se tiene

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2.$$

Haciendo un calculo, y anotando $l = |L|$, obtenemos

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{m\rho^2}.$$

Finalmente, usamos la conservación de la energía. Ya que el movimiento de los cuerpos es debido a la función de energía potencial, entonces se conserva

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(\rho).$$

La conservación de la energía en coordenadas polares viene dada por

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2 + U(\rho).$$

Substituyendo la ecuación para $\dot{\theta}$, obtenemos

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2 \left(\frac{l}{m\rho^2} \right)^2 + U(\rho).$$

Denotando $U_{eff}(\rho) := \frac{1}{2}\frac{l^2}{m\rho^2} + U(\rho)$, el problema original se redujo al siguiente sistema de dos ecuaciones

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + U_{eff}(\rho), \\ \dot{\theta} &= \frac{l}{m\rho^2}. \end{aligned}$$

La primera ecuación se puede resolver usando el curso de EDO, luego en la segunda se puede reemplazar ρ e integrar con respecto a t para obtener

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{l}{m} \int_0^t \frac{dy}{\rho^2(y)}.$$

Finalmente, queda como ejercicio probar que la solución de la ecuación permite deducir que los movimientos de un cuerpo con respecto al otro viene dado por las secciones cónicas, i.e., hipérbolas, parábolas, elipses y círculos (y segmentos de línea).

Este problema se llama usualmente problema de Kepler, y su solución se conoce desde 1710 (demostrado por Johann Bernoulli). El problema original es en sistema de EDOs con 12 ecuaciones (3 variables de posición y 3 de velocidad para cada cuerpo), sin embargo, haciendo uso de la conservación de la energía, y del momentum angular y lineal, se reduce a un sistema de EDOs con solo 2 ecuaciones.

En el año 1887 se pensaba era posible resolver el problema para tres cuerpos, más aún, el premio del rey Oscar II de Suecia y Noruega se le otorgaría el 21 de Enero del 1889, en honor a su cumpleaños 60, a quien resolviera uno de los cuatro problemas escogidos por K. Weierstrass, C. Hermite y G. Mittag-Leffler, uno de los cuales era el siguiente: *Dado un sistema de cierto número arbitrario de masas puntuales, atrayendose entre ellas de acuerdo a las leyes de Newton, tratar de encontrar, bajo el supuesto que dos puntos nunca chocan, una representación de las coordenadas de cada punto como una serie en una variable que es una función conocida en el tiempo y que para todos sus valores la serie converge uniformemente.*

El premio fue ganado por Henri Poincaré, quien no pudo resolver el problema, sin embargo su trabajo desarrollaba una nueva manera cualitativa y

geométrica de entender este problema. Según el este problema proveyó una fuente inagotable de resultados para las futuras generaciones, el problema era muy difícil para el sólo, y que al menos él había entendido que nadie resolverá este problema solo. El paper de H. Poincaré se publicó en el volumen 13 de Acta Mathematica del 1890, y tenía 270 páginas. Actualmente es considerado el inicio de la teoría de sistemas dinámicos. Motivación de la clase y más en CelestialEncounters.

Tarea: ver simulación de solución al problema con condición inicial del problema de los tres cuerpos. Buscar simulaciones del problema del péndulo doble y del péndulo caótico (con imanes).

I. Dinámica continua

En el contexto de esta parte del curso, un sistema dinámico se puede asociar a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), donde el estado x que resuelve la ecuación tiene asociada una condición inicial x_0 y eventualmente también cierto parámetro p

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, p), x \in \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}^k \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}\tag{1}$$

La trayectoria de las soluciones se pueden representar geoméricamente en \mathbb{R}^n , mediante un *diagrama de fases*. Por ejemplo recordar el diagrama de fases de sistemas autónomos lineales con coeficientes constantes del curso de EDO :

$$\dot{x} = Ax, A \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Ejemplo sistemas autónomos lineales con coeficientes constantes en dimensión 2 El diagrama de Poincaré (caso $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$) resume la información obtenida de resolver la ecuación para los valores propios:

$$\lambda - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A) = 0, \lambda = \frac{\text{Tr}(A) \pm \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Ejercicio: Jugar con diagramas de fases en <https://aeb019.hosted.uark.edu/pplane.html>

Construcción de un sistema dinámico a partir de un sistema de ecuaciones

Dada el sistema de ecuaciones diferenciales 1 sin condición inicial, consideramos el operador de evolución

$$\begin{aligned}\varphi_t : X &\rightarrow X, \\ x_0 &\mapsto \varphi_t(x_0) = x(t)\end{aligned}\tag{2}$$

donde $t \in \mathbb{R}$ y $x(t)$ es la solución del problema con condición inicial 1 evaluado en t . Notar que para que esta definición tenga sentido es necesario que $X \subset \mathbb{R}^n$ sea tal que el problema con condición inicial para todo $x_0 \in X$ tenga una única

Poincaré Diagram: Classification of Phase Portraits in the $(\det A, \text{Tr } A)$ -plane

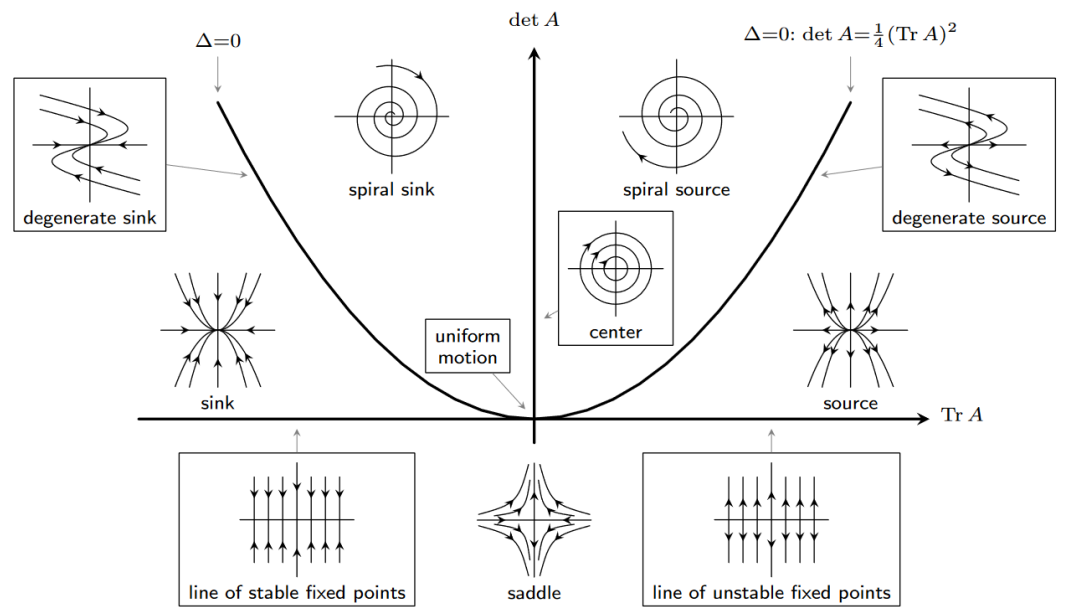


Figura 3: Diagram de Poincaré

solución.

Notar que el sistema construido cumple las siguientes condiciones

1. $\varphi_0(x_0) = x_0$.
2. $\varphi_{t+s}(x_0) = \varphi_t(\varphi_s(x_0))$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$.

Estas propiedades del sistema dinámico asociado al sistema de ecuaciones diferencias usualmente se generalizan. De este modo, puede definirse en general un sistema dinámico continuo como cualquier función φ cumpliendo las dos condiciones anteriores.

0.2. Definiciones

Definición 0.2.1 (Sistema dinámico continuo) *Un sistema dinámico continuo (X, φ_t) viene dado por un conjunto X y un operador de evolución*

$$\begin{aligned} \varphi_t : X &\rightarrow X \\ x_0 &\mapsto \varphi_t(x_0) = x_t \end{aligned}$$

donde $t \in \mathbb{R}$, tal que

1. $\varphi_0(x_0) = x_0$ para todo $x_0 \in X$, y
2. $\varphi_{t+s}(x_0) = \varphi_t(\varphi_s(x_0))$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$.

Definición 0.2.2 (Órbita) *Una órbita por x_0 es el conjunto*

$$\mathcal{O}(x_0) = \cup_{t \in \mathbb{R}} \varphi_t(x_0)$$

Cada órbita tiene asociada una dirección que puede ser positiva o negativa de acuerdo a la dirección de $\varphi_t(x_0)$ con respecto a $\mathcal{O}(x_0)$ cuando varía $t \in \mathbb{R}$.

Definición 0.2.3 (Puntos equilibrio) *Un punto x_0 es un punto de equilibrio si $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0\}$.*

Definición 0.2.4 (Órbitas periódicas) *Una órbita $\mathcal{O}(x_0)$ es periódica si existe un intervalo $[0, T] \subset \mathbb{R}$ tal que*

$$\mathcal{O}(x_0) = \cup_{t \in [0, T]} \varphi_t(x_0).$$

El intervalo minimal con tal propiedad viene determinado por el periodo $T^ \in \mathbb{R}$ de la órbita.*

Definición 0.2.5 (Diagrama de fases) *El diagrama de fases de un sistema dinámico es una partición de X en órbitas.*

Definición 0.2.6 (Conjunto invariante) *Un conjunto invariante es un subconjunto $S \subset X$ tal que si $x_0 \in S$, entonces $\varphi_t(x_0) \in S$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Los conjuntos invariantes maximales son muy importantes en sistemas dinámicos, su geometría es en muchos casos interesante, y son la 'clave' para entender el sistema (codificación, entropía, etc.). Ejemplo básico de conjuntos invariantes: órbitas.

Definición 0.2.7 (puntos no-errantes) *Un punto p es no-errante para el flujo φ_t si para cualquier vecindad \mathcal{U} de p , existe t arbitrariamente grande tal que $\varphi_t(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. El conjunto de puntos no-errantes se llama conjunto no-errante y se denota por Ω .*

Definición 0.2.8 (conjuntos estables) *Un conjunto invariante A se dice estable si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. (Estabilidad de Lyapunov) *para toda vecindad suficientemente pequeña \mathcal{U} de A , existe una vecindad \mathcal{V} de A tal que*

$$\varphi_t(x) \in \mathcal{U}, \forall x \in \mathcal{V}, \forall t > 0;$$

2. (Estabilidad asintótica) *existe una vecindad \mathcal{U}_0 de A tal que para todo $x \in \mathcal{U}_0$ existe $T > 0$ suficientemente grande tal que $\varphi_t(x) \in \mathcal{U}_0$ para todo $t > T$.*

Ejemplo. Demuestre que el conjunto estable es $\{0\}$ para el sistema dinámico asociado al sistema de EDOs con condición inicial $\dot{x} = Ax, x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^2$ donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Definición 0.2.9 (Atractor) *Un atractor es un conjunto estable que contiene una órbita densa. Un repulsor es el conjunto análogo invirtiendo el sentido del tiempo $t - t$.*

Observar que generaliza la noción de equilibrios y ciclos atractores, tomando A un punto equilibrio o una órbita periódica, respectivamente. Por lo tanto dos atractores sencillos son los puntos fijos y los ciclos límite.

Teorema 2 (Poincaré-Bendixon) *Considere el sistema con $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$*

$$\dot{x} = f(x). \tag{3}$$

Si existe $K \subset \mathbb{R}^2$ tal que se tiene las 3 propiedades siguientes.

1. *K es cerrado y acotado.*
2. *El sistema (3) no tiene puntos de equilibrio en K (i.e., no existe $x_0 \in K$ tal que $f(x_0) = 0$).*
3. *Existe $x_0 \in K$ tal que la solución x del problema con condición inicial (3) con $x(0) = x_0$ satisface $x(t) \in K$ para todo $t \geq 0$.*

Entonces (3) tiene una solución periódica no trivial en K .

0.3. Ejemplos

Veamos algunos ejemplos de sistemas dinámicos continuos.

Sistema de Lorenz

Por ejemplo, sistema de Lorenz se le llama al sistema de EDOs

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(r - z) - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

donde $\sigma, r, b \in \mathbb{R}$ son parámetros del sistema. El sistema de Lorenz corresponde a un modelo simplificado para modelar convección atmosférica (movimiento del aire debido a capas de aire a diferentes temperatura). En sistemas dinámicos hay estados a los que los sistemas tienden cuando avanza el tiempo, para una gran cantidad de condiciones iniciales del sistema. Por ejemplo, cuando el sistema está determinado por un sistema de ecuaciones diferenciales. Los atractores son extraños cuando la evolución del sistema partiendo de puntos distintos resulta en trayectorias exponencialmente divergentes (formalizaremos más adelante). Por ejemplo, un péndulo simple con energía disipativa, tiene un atractor (no extraño) en el punto de menor altura. Existen parámetros $\sigma = 10, r = 28, b = 8/3$, para los que el atractor es extraño.

Un ejemplo de ecuación no lineal

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x} = -6y, \\ \dot{y} = y^2 - x^2 \end{cases}$$

¿Qué puede decirse de las órbitas cercanas a los puntos de equilibrio? Responderemos a esta pregunta usando el teorema de Hartman-Grobman [ir a ayudantía 2].

Sistema de Hopf

Viene dado por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

¿Hay órbitas periódicas? Responderemos a esta pregunta usando el teorema de Poincaré-Bendixson [ir a ayudantía 1].

Sistema de glicolisis

Consideremos el siguiente sistema de glicolisis

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y/10 + x^2y, \\ \dot{y} = 1/2 - y/10 - x^2y \end{cases}$$

Hay órbitas periódicas? Responderemos a esta pregunta usando el teorema de Poincaré-Bendixson [ir a ayudantía 1].

Problema en Tarea 1

Demuestre (usando teorema de Poincaré-Bendixson) que los sistemas (4) y (5) tienen cada una al menos una solución periódica.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + by + x^2y \\ \dot{y} = a - by - x^2y \end{cases} \quad (5)$$

donde $a, b > 0$.

Construya un ejemplo de un flujo bidimensional con un atractor que no tenga puntos de equilibrios ni órbitas periódicas.

0.4. Temas para presentaciones

Para las presentaciones puede escojese entre los siguientes tema. El objetivo de las presentaciones de familias de sistemas dinámicos consiste en describir las definiciones básicas, enunciar y probar alguna propiedad básica, y mostrar algún ejemplo. Los temas son los siguientes.

1. Sistemas iterados de funciones (IFS).
2. Dinámica compleja.
3. Fractales.
4. Automatas celulares.
5. Funciones de cambios de intervalo (Interval exchange transformation).
6. Dinámica simbólica.

0.5. Estabilidad de equilibrios hiperbólicos

Considere el sistema de ecuaciones

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n, \quad (6)$$

donde $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. El teorema de Harman-Grobman nos permite demostrar que localmente el sistema el sistema linealizado es topológicamente equivalente al sistema original en torno a los equilibrios hiperbólicos. Y por lo

tanto, es posible usar la tecnología desarrollada para sistemas lineales para describir localmente el comportamiento en el equilibrio del sistema original.

Definición 0.5.1 (Equilibrio hiperbólico) *Dado el sistema de ecuaciones (6) donde $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, un equilibrio $x_0 \in \mathbb{R}^n$ del sistema se dice hiperbólico si $Df(x_0)$, la matriz Jacobiano de f en x_0 , no tiene valores propios con parte real nula.*

Ahora definiremos el concepto de sistema dinámico localmente topológicamente equivalente, donde recordemos que un homeomorfismo es una función continua cuya inversa también es continua.

Definición 0.5.2 *Un sistema dinámico continuo (X, φ_t) es localmente topológicamente equivalente en una vecindad del \mathcal{V} del origen al sistema dinámico $(Y, \tilde{\varphi}_t)$, si existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ que transforma órbitas de φ_t en órbitas $\tilde{\varphi}_t$, para todo $t \in \mathcal{V}$.*

Teorema 3 (Hartam-Grobman) *Si el sistema de ecuaciones (6) tiene un equilibrio hiperbólico x_0 , entonces existe una vecindad \mathcal{U} de x_0 tal que el sistema (6) en \mathcal{U} es localmente topológicamente equivalente al sistema linealizado*

$$\dot{x} = Df(x_0)x$$

en una vecindad \mathcal{V} del origen.

Por lo tanto, como conocemos las dinámicas del sistema lineal, recordar curso de edo del semestre pasado, entonces conocemos localmente la dinámica local en torno a los equilibrios hiperbólicos de sistemas no-lineales también.

En lo siguiente veremos un sketch de la demostración del teorema de Poincaré-Bendixon, que nos servirá como inspiración para luego pasar a secciones de Poincaré.

0.6. Demostración del teorema de Poincaré-Bendixon

Antes de demostrar el teorema, es bueno hacerse una idea de como se ven los diagramas de fases para sistemas en que el teorema puede aplicarse, ya que gran parte de la demostración tiene una motivación geométrica proveniente de un ejemplo.

Definición 0.6.1 (Sección) *Una sección o sección transversal es un segmento de línea $S = \{\lambda x_0 + (1 - \lambda)x_1 : \lambda \in (0, 1)\}$ tal que para todo $x \in \bar{S}$, $f(x)$ no se anula y no es paralelo a S .*

Teorema 4 (Cajas de flujo) Sea S una sección y $x_0 \in S$. Entonces existe un conjunto abierto U con $x_0 \in U$ y una función $\tau : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi_{\tau(x)}(x) \in S$ para todo $x \in U$.

La demostración la dejaremos para el final de clase, si es que hay tiempo, ya que usa el teorema de la función implícita. De todas formas, acá recordemos el teorema de la función implícita, que nos da un criterio para resolver una ecuación $F(x, y) = 0$ para y en función de x .

Teorema 5 (Teorema de la función implícita) Suponga que $S \subset \mathbb{R}^{n+k}$ es un abierto y $F : S \rightarrow \mathbb{R}^k$ es una función de clase C^1 . Suponga también que $(a, b) \in S$, que $F(a, b) = 0$ y que $\det D_y F(a, b) \neq 0$. Entonces,

1. Existe $r_0, r_1 > 0$ tal que para todo $x \in B(a, r_0)$, existe un único $y \in B(b, r_1)$ con

$$F(x, y) = 0.$$

2. La función $f : B(a, r_0) \rightarrow B(b, r_1) \subset \mathbb{R}^k$ arriba es de clase C^1 , y la derivada se puede calcular derivando

$$F(x, f(x)) = 0$$

y resolviendo para las derivadas parciales de f .

Dem. [Cajas de flujo] Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x_0 = (0, 0)$ y que S es un subconjunto de $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Definiendo $F(x, t) = \pi_1(\varphi_t(x))$ para $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi_1(x, y) = x$. Tenemos que

$$F(x_0, 0) = \pi_1(\varphi_0(x_0)) = \pi_1(x_0) = x_0 = 0$$

y que

$$D_t F(x_0, 0) = \pi_1(D_t \varphi_0(x_0)) = \pi_1(f(x_0)) = \pi_1(f(0)) \neq 0$$

por la hipótesis de sección de S , que $f(0) \neq 0$, pues no se anula en la sección, y el caso que queda que $f(0) = (0, \lambda)$ para $\lambda \neq 0$, implicaría que la dirección del flujo en 0 que es $f(0)$ es paralela a la dirección de la sección S . Finalmente, puede probarse que F es C^1 , y usando el Teorema de la función implícita existe U y $\tau : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in U$ se tiene que $F(x, \tau(x)) = \pi_1(\varphi_{\tau(x)}(x)) = 0$, i.e. $\varphi_{\tau(x)}(x) \in S$. \square .

En clase 4 demostraremos el siguiente lema, donde el concepto de interseccionar la sección de manera ordenada lo definiremos en clases.

Lema 1 Dada una sección S por x_0 . El flujo $\varphi_t(x_0)$ intersecciona la sección S de manera ordenada.

Ahora, dado un punto x_0 , introduciremos la definición de puntos ω -límites de x_0 (también conocidos como límites débiles de x_0) y conjuntos ω -límite de x_0 (también conocidos como conjunto límites débiles de x_0)

Definición 0.6.2 (Puntos ω -límites de x_0) Un punto $y \in \mathbb{R}^2$ es ω -límite de x_0 si existe una secuencia de tiempos $t_1 < t_2 < \dots$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{t_n}(x_0) = y.$$

Definición 0.6.3 (Conjuntos ω -límites) Es el conjunto de todos los puntos ω -límites de x_0 . Denotamos este conjunto por $\omega(x_0)$.

Bajo la hipótesis de $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, denotamos por $\varphi_t(x_0)$ el flujo C^1 correspondiente a la solución única del problema $\dot{x} = f(x), x(0) = x_0$. Tenemos los siguientes lemas.

Lema 2 Sea $y_0 \in \omega(x_0)$. Entonces

1. $\varphi_s(y_0) \in \omega(x_0)$, para todo $s \in \mathbb{R}$.
2. Si $z_0 = \varphi_s(y_0)$ para algún $s \in \mathbb{R}$, entonces $z_0 \in \omega(x_0)$.
3. Si $w_0 \in \omega(y_0)$, entonces $w_0 \in \omega(x_0)$.

La demostración del Lema 2 es parte de la tarea 1.

Lema 3 Para $y_0 \in \omega(x_0)$ y S una sección cualquiera, se tiene que $\varphi_t(y_0)$ intersecta S en a lo más un punto.

La demostración del Lema 3 es parte de la clase 4.

Finalmente, podemos demostrar el teorema.

Dem. [Poincaré-Bendixon] Sea x_0 de la hipótesis. Por teorema de Bolzano-Weierstrass, como K es cerrado y acotado, $\omega(x_0) \neq \emptyset$, y $\omega(x_0) \subset K$, pues K es cerrado. Como K no contiene puntos de equilibrio, y $\omega(x_0) \subset K$, entonces tiene que haber una sección transversal S a x_0 dentro de K , y a cada uno de los puntos de la trayectoria de la solución. Ahora tomemos cualquier punto $y_0 \in \omega(x_0)$, y consideremos $\varphi_t(y_0)$, queremos demostrar que tiene una órbita periódica. Para esto tomemos $z_0 \in \omega(y_0)$. Sabemos que $\varphi_s(y_0) \in \omega(x_0) \subset K$ para todo $s \geq 0$. Entonces, como K es cerrado $\omega(y_0) \subset K$ y $z_0 \in K$, y tampoco es equilibrio porque en K no hay puntos de equilibrio, entonces podemos tomar la sección S que contiene al punto z_0 . Sabemos que $\varphi_t(y_0)$ intersecta a S en a lo más un punto. Pero el flujo $\varphi_t(y_0)$ tiene que intersectar S infinitas veces, pues $z_0 \in \omega(y_0)$, pero como solo lo puede intersectar por un punto, entonces lo intersecta infinitas veces por un único punto. Esto concluye que hay una órbita periódica.