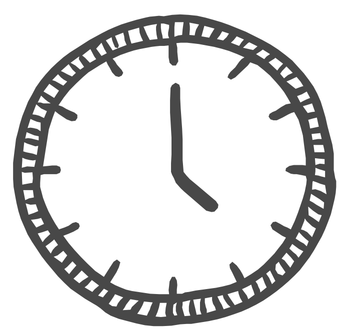
Macroeconomía Dinámica

EC3024.1 (CCM)

CLASE 8

1

RECESO



Hoy habrá **dos recesos** de 10 minutos:

4:50pm y 5:50pm

2

2

Nuestra agenda de hoy

- Revisión de datos y eventos macro
- Introducción a modelos de optimización dinámica en tiempo discreto
- Tarea

3

3

Nuestra agenda de hoy

- **Revisión de datos y eventos macro**
- Introducción a modelos de optimización dinámica en tiempo discreto
- Tarea

4

4

Reunión de primavera del FMI/BM

5

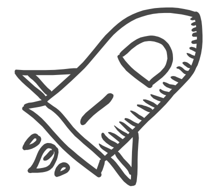
5

Nuestra agenda de hoy

6

6

Programación Dinámica



Durante la 'Guerra Fría' (1947-1991), existieron al menos cuatro 'carreras' entre los Estados Unidos y la Unión Soviética:

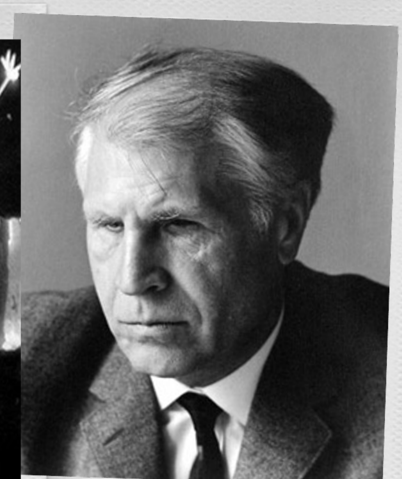
(1) Carrera armamentista;
(2) Carrera espacial, particularmente por llegar a la luna;
(3) Carrera económica (*i.e.* modelo capitalista vs. comunista); y
(4) Carrera matemática

7

7

Richard Bellman
(1920-1984)

Programación Dinámica vs. Control Óptimo



Lev Pontryagin
(1908-1988)

Fuente: Richard Bellman (Wikipedia); Puños (http://az-az-az.com/us-vs-ussr.htm); Lev Pontrgyagin (https://timenote.info)

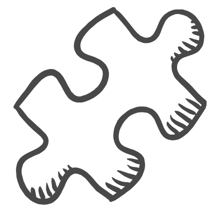
8

8

Programación Dinámica

La **Teoría de Control Óptimo** de Pontryagin (OC – *Optimal Control*) nació del Cálculo de Variaciones (Siglo XIX) para dar solución a problemas de optimización dinámica en tiempo continuo ("Principio del Máximo")

Bellman desarrolló el "Principio de Optimalidad", que da origen a la **Programación Dinámica** (DP - *Dynamic Programming*), para encontrar la solución a problemas de optimización dinámica en tiempo discreto



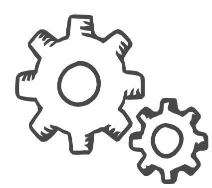
9

9

¿Qué método se utiliza más?

Ambos métodos (OC y DP) se pueden utilizar para resolver problemas de optimización dinámica, pero...

	Tiempo		Características de las variables		
	Continuo	Discreto	Determinístico	Estocástico	Método preferido
(1)	X		X		Control Óptimo
(2)		X	X		Programación Dinámica
(3)	X			X	Programación Dinámica
(4)		X		X	Programación Dinámica



Al final del día, con el método de Lagrange se pueden obtener los mismos resultados que con 'Control Óptimo' o 'Programación Dinámica', pero estas herramientas son mucho más eficientes

10

10

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans
→ Tiempo continuo vs. discreto

Tiempo continuo

$$\max_{C_t} \int_{t=0}^{\infty} e^{-\beta t} U(C_t) dt$$

sujeto a:

$$\dot{a}_t = w_t + r_t a_t - c_t$$

Tiempo discreto

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(C_t)$$

sujeto a:

$$a_{t+1} = w_t + (1 + r_t)\, a_t - c_t \,, \forall t$$

Ramsey, Frank (1928). "A mathematical theory of saving." *Economic Journal* 38 (diciembre), pp. 543-59.
Cass, David (1965). "Optimum growth in an aggregate model of capital accumulation." *Review od Economic Studies* 32 (julio), pp. 233-40.
Koopmans, Tjalling (1965). "On the concept of optimal economic growth" en *The economic approach to development planning*. Amsterdam, Países Bajos: North Holland

11

11

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans
→ Tiempo continuo vs. discreto

Tiempo continuo

$$\max_{C_t} \int_{t=0}^{\infty} e^{-\beta t} U(C_t) dt$$

sujeto a:

$$\dot{a}_t = w_t + r_t a_t - c_t$$

Tiempo discreto

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(C_t)$$

sujeto a:

$$\overbrace{a_{t+1} - a_t}^{\Delta a_t} = w_t + r_t\, a_t - c_t \,, \forall t$$

Ramsey, Frank (1928). "A mathematical theory of saving." *Economic Journal* 38 (diciembre), pp. 543-59.
Cass, David (1965). "Optimum growth in an aggregate model of capital accumulation." *Review of Economic Studies* 32 (julio), pp. 233-40.
Koopmans, Tjalling (1965). "On the concept of optimal economic growth" en *The economic approach to development planning*. Amsterdam, Países Bajos: North Holland

12

12

El agente representativo y su duración

Los modelos macroeconómicos 'modernos' (post-Lucas) asumen que los individuos se comportan de manera similar en el agregado y que viven eternamente. Claramente el comportamiento de los individuos o agentes económicos sin duda es heterogéneo y no hemos logrado alcanzar la inmortalidad. Sin embargo…

(1) **Comportamiento similar en el agregado.** Se utiliza una función de utilidad que 'representa' las preferencias y **describe el comportamiento AGREGADO de la población**. A esto se le llama 'agente representativo'. Lo mismo ocurre cuando se incorporan empresas; y…

13

13

El agente representativo y su duración

(2) **Vida infinita.** Cuando unas personas mueren, otras continúan vivas. Cuando algún gobierno termina, inicia otro y de la misma manera sucede con las empresas. Pero lo más importante es que cuando las personas, las empresas, los gobiernos o los bancos centrales toman decisiones –como ahorrar o consumir, trabajar o dedicarle tiempo al ocio, invertir, producir, bajar tasas de interés, etc.-, no lo hacen pensando en que se va a terminar su periodo de existencia. En este sentido, destaca que **los modelos de optimización de los agentes económicos modelan la toma de decisiones.**

14

14

La optimización del agente representativo

Vamos a ilustrar cómo resolver problemas de optimización dinámica en tiempo discreto, utilizando un modelo sencillo de un consumidor que tiene que decidir cuánto consume y cuánto ahorra (para consumir en el futuro)

El consumidor maximiza su utilidad esperada de toda su existencia en función del consumo

sujeto a:

(1) Función de acumulación de los activos en términos del salario y el consumo, en donde el salario es incierto; y
(2) Condición de solvencia

15

15

El problema del agente representativo

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}\{A_t\}_{t=2}^{\infty}} E\left[\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(C_t)\right]$$

Sujeto a:

$A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + \eta_t w_t - C_t$, para toda t

$$\lim_{T\to\infty} A_1(1 + r_1) + \sum_{t=1}^{T} \frac{w_t - C_t}{(1 + r_t)^{t-1}} = 0$$

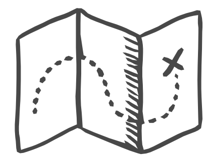
En donde:
$U(C_t)$ es una función de utilidad a partir del consumo en t o C_t, $U'(C_t) > 0$ y $U''(C_t) < 0$
β es un factor de descuento, tal que $0 < \beta < 1$
A_t son los activos que tiene en t, $A_1 \geq 0$
w_t es el salario que recibe en t, con un choque estocástico η_t

16

16

¿Cómo vamos a aprender DP?

	Número de periodos de tiempo	Determinístico / Estocástico	Método de solución
(1)	Tres	Determinístico	Lagrange
(2)	Tres	Determinístico	Función de política
(3)	Tres	Determinístico	Programación Dinámica
(4)	Infinito	Determinístico	Programación Dinámica
(5)	Tres	Estocástico	Programación Dinámica
(6)	Infinito	Estocástico	Programación Dinámica



17

17

Tres periodos, determinístico

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\cancel{\infty}\to 3}\{A_t\}_{t=2}^{\cancel{\infty}\to 3}} \cancel{E}\left[\sum_{t=1}^{\cancel{\infty}\to 3} \beta^{t-1} U(C_t)\right]$$

Sujeto a:

$A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + \cancel{\eta_t} w_t - C_t$, para toda t

$$\cancel{\lim_{T\to\infty} A_1(1 + r_1) + \sum_{t=1}^{T} \frac{w_t - C_t}{(1 + r_t)^{t-1}} = 0} \rightarrow A_4 \geq 0$$

En donde:
$U(C_t)$ es una función de utilidad a partir del consumo en t o C_t, $U'(C_t) > 0$ y $U''(C_t) < 0$
β es un factor de descuento, tal que $0 < \beta < 1$
A_t son los activos que tiene en t, $A_1 \geq 0$
w_t es el salario que recibe en t

18

18

Tres periodos, determinístico

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} U(C_t)$$

sujeto a:

$$A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , para toda } t$$
$$A_4 \geq 0$$

19

19

(1) Tres periodos, determinístico → Método de solución: Lagrange

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} U(C_t)$$

sujeto a:

$$A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , para toda } t$$
$$A_4 \geq 0$$

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} U(C_t) + \sum_{t=1}^{3} \lambda_t [(1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t - A_{t+1}]$$

20

20

Función de utilidad logarítmica

$$U(C_t) = \ln C_t \ , C_t > 0$$

$$U'(C_t) = \frac{\partial U(C_t)}{\partial C_t} = \frac{1}{C_t} > 0$$

$$U''(C_t) = \frac{\partial^2 U(C_t)}{\partial {C_t}^2} = -\frac{1}{{C_t}^2} < 0$$

21

21

Condiciones de Inada (1963)

$$\lim_{C_t \to 0} U'(C_t) = \infty \, ; \lim_{C_t \to 0} \frac{1}{C_t} = \infty$$

$$\lim_{C_t \to \infty} U'(C_t) = 0 \, ; \lim_{C_t \to \infty} \frac{1}{C_t} = 0$$

Inada, Ken-Ichi (1963), "On the two-sector model of economic Growth: Comments and a generalization". *Review of Economic Studies*, 30 (junio), pp. 119-27.

22

22

Problema de optimización con función de utilidad logarítmica

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t$$

sujeto a:

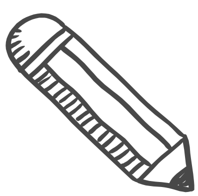
$$A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , para toda } t$$
$$A_4 \geq 0$$

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t + \sum_{t=1}^{3} \lambda_t [(1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t - A_{t+1}]$$

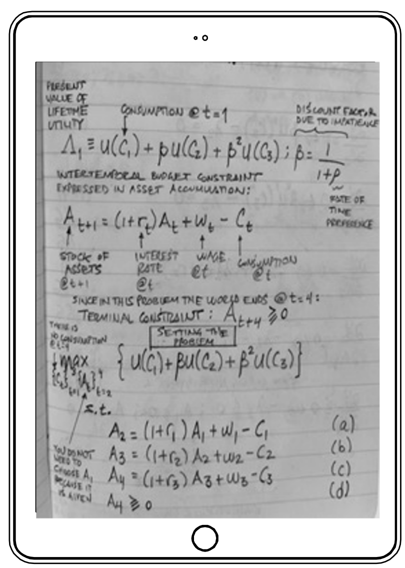
23

23

Vamos al pizarrón, virtual…



$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t + \sum_{t=1}^{3} \lambda_t [(1 + r_t)$
$A_t + w_t - C_t - A_{t+1}]$



24

24

$$\mathcal{L} = \ln C_1 + \beta \ln C_2 + \beta^2 \ln C_3 + \lambda_1 \left[(1+r_1)A_1 + w_1 - C_1 - A_2\right] + \ldots$$

$$\ldots\ \lambda_2 \left[(1+r_2)A_2 + w_2 - C_2 - A_3\right] + \ldots$$

$$\ldots\ \lambda_3 \left[(1+r_3)A_3 + w_3 - C_3 - A_4\right]$$

FIRST-ORDER CONDITIONS

$\boxed{\text{FOC}}$ (SON 6)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = 0 \Leftrightarrow u'(C_1) - \lambda_1 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = 0 \Leftrightarrow \beta u'(C_2) - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_3} = 0 \Leftrightarrow \beta^2 u'(C_3) - \lambda_3 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_2} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_1 + \lambda_2(1+r_2) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_3} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_2 + \lambda_3(1+r_3) = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_4} \leqq 0}_{} \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_4} = \underbrace{-}_{\ominus}\underbrace{\lambda_3}_{\geqq 0} \leqq 0$$

RECORDAR QUE $A_4 \geqq 0 \leftarrow$ ES UNA RESTRICCIÓN

25

CONDICIONES DE KUHN-TUCKER

$$\underset{①}{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} \leqq 0}; \quad \underset{②}{\lambda_i \geqq 0}; \quad \underset{③}{\lambda_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} = 0}$$

$$\underset{②}{\lambda_3 \geqq 0}$$

$$\lambda_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_3} = 0$$

$$(1+r_3)A_3 + w_3 - C_3 - A_4 = 0$$

$\uparrow$?

$\boxed{\text{FOC}}$ (SON 6)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = 0 \Leftrightarrow u'(C_1) - \lambda_1 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = 0 \Leftrightarrow \beta u'(C_2) - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_3} = 0 \Leftrightarrow \beta^2 u'(C_3) - \lambda_3 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_2} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_1 + \lambda_2(1+r_2) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_3} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_2 + \lambda_3(1+r_3) = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_4} \leqq 0}_{} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_4} = \underbrace{-}_{\ominus}\underbrace{\lambda_3}_{\geqq 0} \leqq 0}_{①}$$

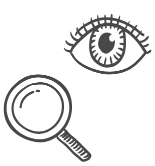
RECORDAR QUE $A_4 \geqq 0 \leftarrow$ ES UNA RESTRICCIÓN

26

Nuestra agenda de hoy

27

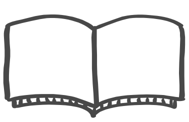
27



(1) Estar atentos y revisar los datos y eventos económicos que se van a publicar en la semana

2 páginas

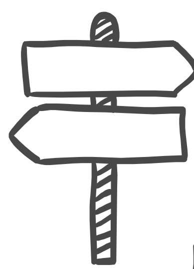
https://www.banorte.com/cms/casadebolsabanorteixe/analisisyestrategia/analisiseconomico/otros/20210412_Calendario.pdf

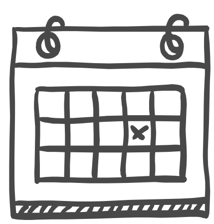


(2) Leer mi columna en El Financiero (martes 12-abr) sobre la reunión anual de primavera del FMI/BM

1 página

https://www.elfinanciero.com.mx/opinion/gabriel-casillas/





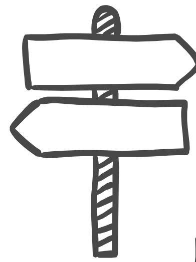
28

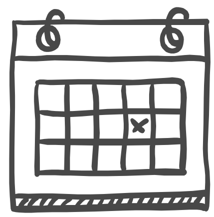
28

(3) Escuchar el podcast ‘Norte Económico’ episodio 13 de la Temporada 2 (mié 24-abr) - Entrevista con Gabriel Yorio

45 minutos

https://podcasts.apple.com/us/podcast/norte-económico/id1515320115

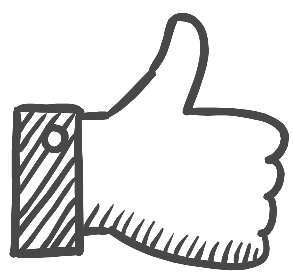




29

29

Muchas gracias!



30

30

Slides Carnival

Free templates for all your presentation needs

For PowerPoint and Google Slides

100% free for personal or commercial use

Ready to use, professional and customizable

Blow your audience away with attractive visuals

31