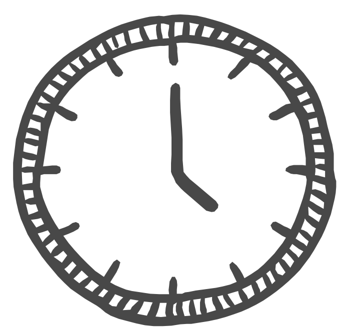
Macroeconomía Dinámica

EC3024.1 (CCM)

CLASE 12

1

RECESO

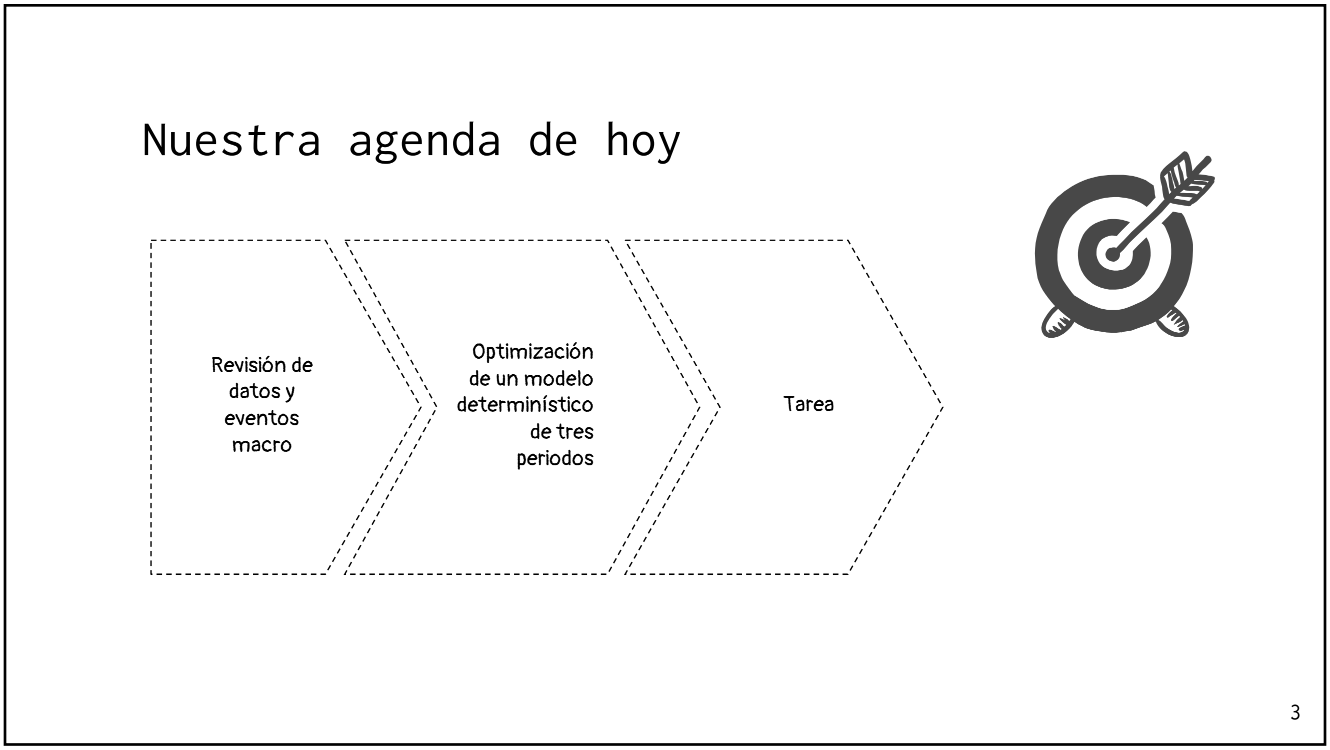


Hoy habrá **dos recesos** de 10 minutos:

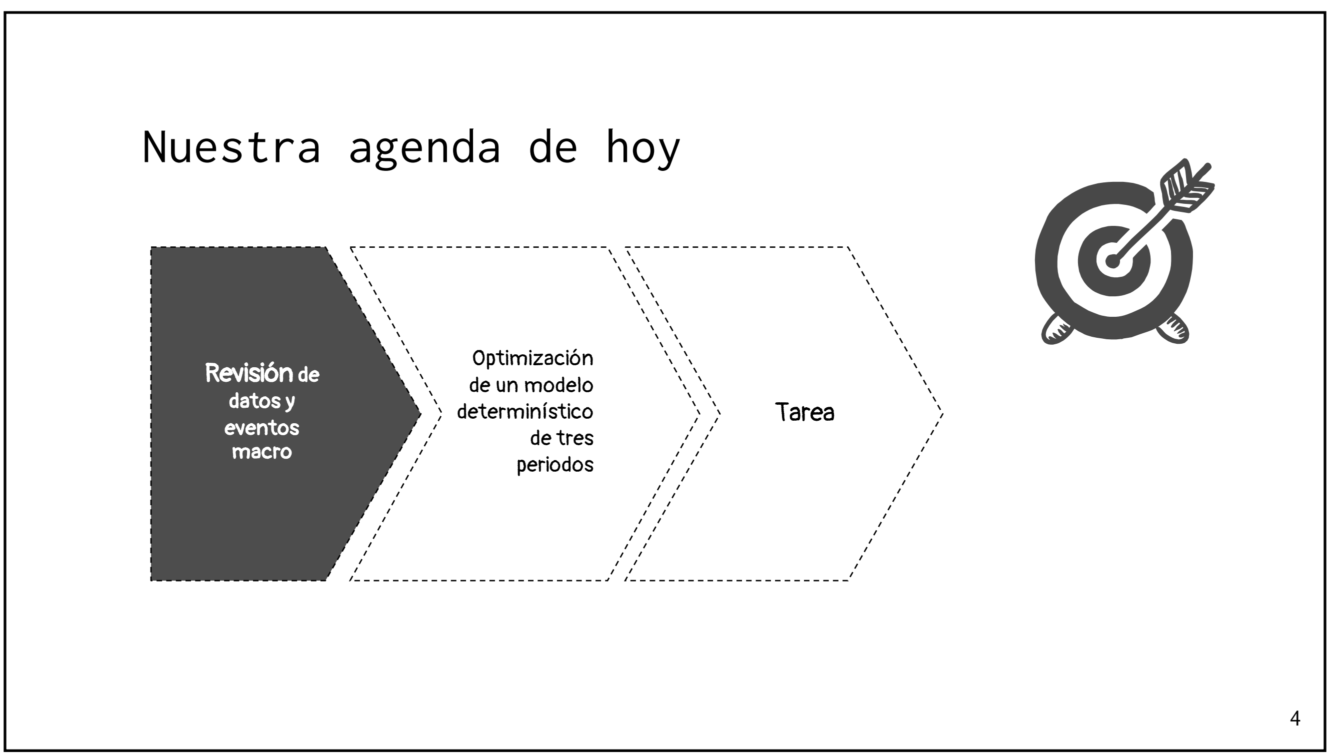
4:50pm y 5:50pm

2

2


Nuestra agenda de hoy
Revisión de datos y eventos macro
Optimización de un modelo determinístico de tres periodos
Tarea
3

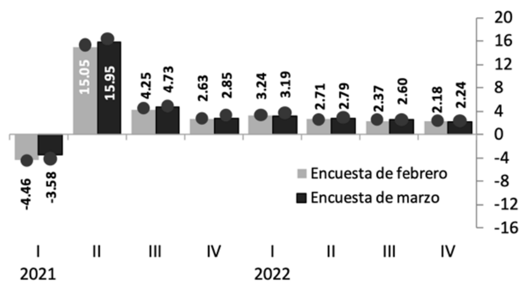
3


Nuestra agenda de hoy
Revisión de datos y eventos macro
Optimización de un modelo determinístico de tres periodos
Tarea
4

4

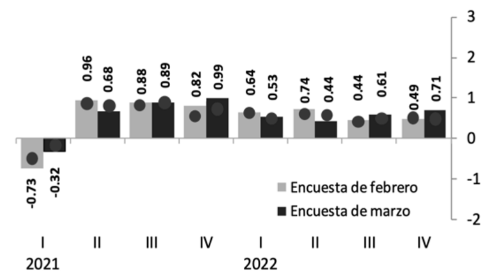
Pronóstico de los analistas

Gráfica 10. Pronósticos de la variación del PIB trimestral
Tasa anual en por ciento[1/]



1/ Para cada trimestre, la barra y la cifra se refieren a la media, en tanto que el círculo rojo se refiere a la mediana. Las cifras correspondientes a la mediana se pueden consultar en el anexo de este reporte.

Gráfica 11. Pronósticos de la variación del PIB trimestral con ajuste estacional
Tasa trimestral en por ciento[1/]



1/ Para cada trimestre, la barra y la cifra se refieren a la media, en tanto que el círculo rojo se refiere a la mediana. Las cifras correspondientes a la mediana se pueden consultar en el anexo de este reporte.

Fuente: Encuesta sobre las expectativas de los especialistas en economía del sector privado: marzo 2021. Liga: https://www.banxico.org.mx/publicaciones-y-prensa/encuestas-sobre-las-expectativas-de-los-especialis/%7BA9302B4A-04AD-4551-9877-028346F57E96%7D.pdf

5

5

Nuestro pronóstico utilizando el IOAE

		Encuesta Banxico
Pronóstico de PIB 1T21 %a/a	-4.2	-3.58
Pronóstico de PIB 1T21 %t/t	0.1	-0.32

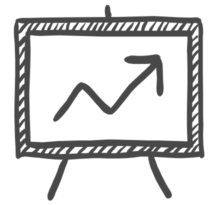
Pronóstico de Análisis Ec de Banorte

Hora		Evento	Periodo	Unidad	Banorte	Consenso	Previo
06:00	MEX	Producto interno bruto	1T21	% a/a	-4.0	-3.1	-4.3
06:00	MEX	Producto interno bruto*	1T21	% t/t	0.3	0.1	3.3

6

6

PIB de México de 1T21



Estimación Oportuna del Producto Interno Bruto
durante el primer trimestre de 2021
Cifras desestacionalizadas por actividades económicas

Concepto	Variación % real respecto al trimestre previo	Variación % real respecto a igual trimestre de 2020
PIB Total	**0.4**	**(-) 2.9**
Actividades Primarias	(-) 1.3	2.8
Actividades Secundarias	0.0	(-) 2.3
Actividades Terciarias	0.7	(-) 3.6

Notas: Cifras Oportunas. La estimación oportuna no reemplaza a la estimación tradicional.
La serie desestacionalizada del agregado se calcula de manera independiente a la de sus componentes.
Fuente: INEGI.

Fuente: INEGI

7

7

Nuestra agenda de hoy

Revisión de datos y eventos macro

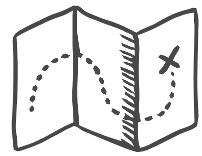
Optimización de un modelo determinístico de tres periodos

Tarea

8

8

¿Cómo vamos a aprender DP?



	Número de periodos de tiempo	Determinístico / Estocástico	Método de solución
(1)	Tres	Determinístico	Lagrange
(2)	Tres	Determinístico	Función de política[1]
(3)	Tres	Determinístico	Programación Dinámica
(4)	Infinito	Determinístico	Programación Dinámica
(5)	Tres	Estocástico	Programación Dinámica
(6)	Infinito	Estocástico	Programación Dinámica

1. Realmente no es un método, sino una forma alternativa de expresar las soluciones óptimas, que ayuda a ilustrar la idea conceptual sobre la que descansa la programación dinámica.

9

‘Función de política’ (*Policy Function*)

- Una vez más, vamos a utilizar el problema de optimización de la decisión consumo-ahorro (o de consumo inter-temporal) de un agente representativo que vive tres periodos

10

‘Función de política’ (*Policy Function*)

- Una vez más, vamos a utilizar el problema de optimización de la decisión consumo-ahorro (o de consumo inter-temporal) de un agente representativo que vive tres periodos
- Sin embargo, en lugar de resolver las trayectorias óptimas de consumo y nivel de activos para todo el periodo en cuestión desde la perspectiva inicial, *i.e.* $t = 1$...

11

11

‘Función de política’ (*Policy Function*)

- Una vez más, vamos a utilizar el problema de optimización de la decisión consumo-ahorro (o de consumo inter-temporal) de un agente representativo que vive tres periodos
- Sin embargo, en lugar de resolver las trayectorias óptimas de consumo y nivel de activos para todo el periodo en cuestión desde la perspectiva inicial, *i.e.* $t = 1$,...
- ...vamos a posicionarnos en algún momento intermedio en la vida del agente representativo (*i.e.* , $t = 2$ o $t = 3$, porque en $t = 4$ ya terminó) y resolver el problema de optimización...

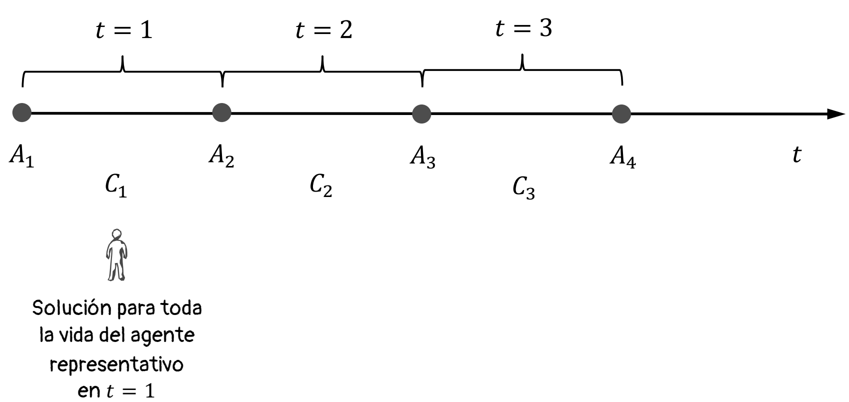
12

12

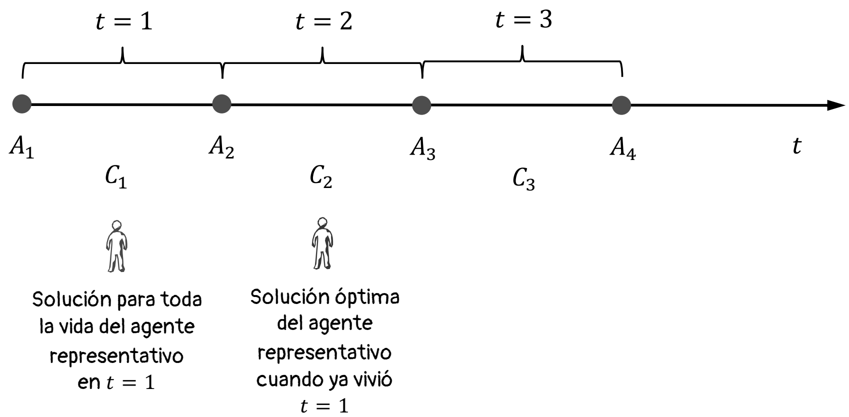
‘Función de política’ (*Policy Function*)

- Una vez más, vamos a utilizar el problema de optimización de la decisión consumo-ahorro (o de consumo inter-temporal) de un agente representativo que vive tres periodos
- Sin embargo, en lugar de resolver las trayectorias óptimas de consumo y nivel de activos para todo el periodo en cuestión desde la perspectiva inicial, *i.e.* $t = 1$…
- …vamos a posicionarnos en algún momento intermedio en la vida del agente representativo (*i.e.* , $t = 2$ o $t = 3$, porque en $t = 4$ ya terminó) y resolver el problema de optimización…
- Las soluciones que vamos a obtener se conocen también como ‘funciones de política (económica)’, que son una ‘manera alternativa’ de expresar las soluciones óptimas en cada periodo de tiempo

‘Funciones de política’



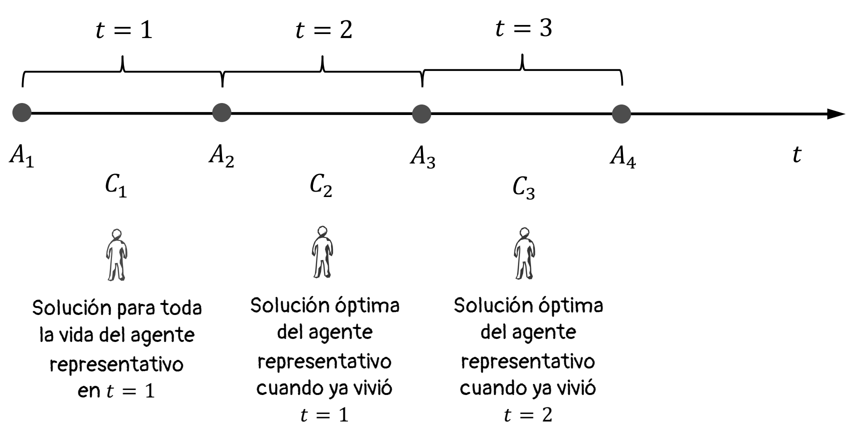
‘Funciones de política’



15

15

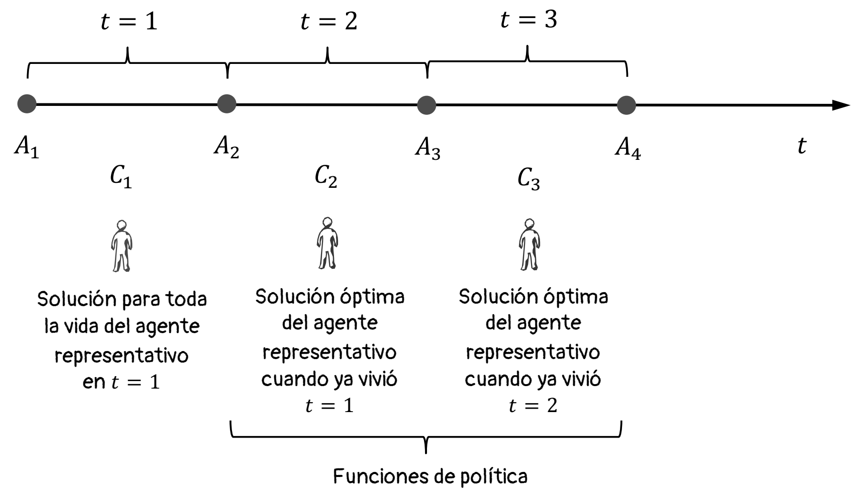
‘Funciones de política’



16

16

'Funciones de política'



17

17

Soluciones 'condicionalmente óptimas'

- Entonces vamos a resolver el problema de optimización del agente representativo para $t = 2$ y para $t = 3$

18

18

Soluciones ‘condicionalmente óptimas’

- Entonces vamos a resolver el problema de optimización del agente representativo para $t = 2$ y para $t = 3$
- A diferencia de las soluciones óptimas que obtenemos cuando resolvemos el problema para todo el periodo de tiempo, las ‘funciones de política’ son soluciones condicionalmente óptimas

19

19

Soluciones ‘condicionalmente óptimas’

- Entonces vamos a resolver el problema de optimización del agente representativo para $t = 2$ y para $t = 3$
- A diferencia de las soluciones óptimas que obtenemos cuando resolvemos el problema para todo el periodo de tiempo, las ‘funciones de política’ son soluciones condicionalmente óptimas
- ¿Por qué ‘condicionalmente óptimas’? Porque son decisiones óptimas, pero están condicionadas a los activos que se desea acumular en el periodo siguiente

20

20

Soluciones ‘condicionalmente óptimas’

- Entonces vamos a resolver el problema de optimización del agente representativo para $t = 2$ y para $t = 3$
- A diferencia de las soluciones óptimas que obtenemos cuando resolvemos el problema para todo el periodo de tiempo, las ‘funciones de política’ son soluciones condicionalmente óptimas
- ¿Por qué ‘condicionalmente óptimas’? Porque son decisiones óptimas, pero están condicionadas a los activos que se desea acumular en el periodo siguiente
- Vamos a denotarlas con un acento circunflejo o ‘gorrito’ (e.g. $\widehat{C_2}$)

21

21

Soluciones ‘condicionalmente óptimas’

- Entonces vamos a resolver el problema de optimización del agente representativo para $t = 2$ y para $t = 3$
- A diferencia de las soluciones óptimas que obtenemos cuando resolvemos el problema para todo el periodo de tiempo, las ‘funciones de política’ son soluciones condicionalmente óptimas
- ¿Por qué ‘condicionalmente óptimas’? Porque son decisiones óptimas, pero están condicionadas a los activos que se desea acumular en el periodo siguiente
- Vamos a denotarlas con un acento circunflejo o ‘gorrito’ (e.g. $\widehat{C_2}$)
- Vamos a ver este método como ‘paso intermedio’ para poder entender mejor el concepto de *Programación Dinámica*

22

22

'Funciones de política' para $t = 2$

Como vamos a optimizar la decisión del agente representativo en $t = 2$, entonces solo se maximiza la función de utilidad aditiva para los periodos 2 y 3 (en el cuarto periodo el agente representativo ya no puede obtener utilidad):

$$\max_{C_2, C_3}\{\ln C_2 + \beta \ln C_3\}$$

¿Sujeto a?

$$(1 + r_1)\, A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} = C_1 + \frac{C_2}{1+r_2} + \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)}$$

23

23

'Funciones de política' para $t = 2$

Como vamos a optimizar la decisión del agente representativo en $t = 2$, entonces solo se maximiza la función de utilidad aditiva para los periodos 2 y 3 (en el cuarto periodo el agente representativo ya no puede obtener utilidad):

$$\max_{C_2, C_3}\{\ln C_2 + \beta \ln C_3\}$$

¿Sujeto a?

$$(1 + r_1)\, A_1 + \cancel{w_1} + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} = \cancel{C_1} + \frac{C_2}{1+r_2} + \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)}$$

24

24

’Funciones de política’ para $t = 2$

Como vamos a optimizar la decisión del agente representativo en $t = 2$, entonces solo se maximiza la función de utilidad aditiva para los periodos 2 y 3 (en el cuarto periodo el agente representativo ya no puede obtener utilidad):

$$\max_{C_2, C_3}\{\ln C_2 + \beta \ln C_3\}$$

¿Sujeto a?

$$(1 + \overset{r_2}{\cancel{r_1}})\, A_1 + \cancel{w_1} + \frac{w_2}{\cancel{1+r_2}} + \frac{w_3}{\cancel{(1+r_2)}(1+r_3)} = \cancel{C_1} + \frac{C_2}{\cancel{1+r_2}} + \frac{C_3}{\cancel{(1+r_2)}(1+r_3)}$$

’Funciones de política’ para $t = 2$

Como vamos a optimizar la decisión del agente representativo en $t = 2$, entonces solo se maximiza la función de utilidad aditiva para los periodos 2 y 3 (en el cuarto periodo el agente representativo ya no puede obtener utilidad):

$$\max_{C_2, C_3}\{\ln C_2 + \beta \ln C_3\}$$

¿Sujeto a?

$$(1 + \overset{r_2}{\cancel{r_1}})\, \overset{a}{\cancel{A_1}} + \cancel{w_1} + \frac{w_2}{\cancel{1+r_2}} + \frac{w_3}{\cancel{(1+r_2)}(1+r_3)} = \cancel{C_1} + \frac{C_2}{\cancel{1+r_2}} + \frac{C_3}{\cancel{(1+r_2)}(1+r_3)}$$

'Funciones de política' para $t = 2$

Como vamos a optimizar la decisión del agente representativo en $t = 2$, entonces solo se maximiza la función de utilidad aditiva para los periodos 2 y 3 (en el cuarto periodo el agente representativo ya no puede obtener utilidad):

$$\max_{C_2, C_3}\{\ln C_2 + \beta \ln C_3\}$$

¿Sujeto a?

$$(1 + \cancel{r_1}^{\,r_2})\cancel{A_1}^{\,a} + \cancel{w_1} + \frac{w_2}{\cancel{1+r_2}} + \frac{w_3}{\cancel{(1+r_2)}(1+r_3)} = \cancel{C_1} + \frac{C_2}{\cancel{1+r_2}} + \frac{C_3}{\cancel{(1+r_2)}(1+r_3)}$$

$$(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} = C_2 + \frac{C_3}{1 + r_3}$$

27

'Funciones de política' para $t = 2$

$$\max_{C_2, C_3}\{\ln C_2 + \beta \ln C_3\}$$

sujeto a:

$$(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} = C_2 + \frac{C_3}{1 + r_3}$$

Podríamos resolverlo con un lagrangiano. Sin embargo, en este caso es más sencillo despejar C_3 de la restricción e incorporar la expresión en la función objetivo. Así lo podemos resolverlo como un problema de optimización no restringido

28

'Funciones de política' para $t = 2$

$$(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} = C_2 + \frac{C_3}{1 + r_3}$$

29

29

'Funciones de política' para $t = 2$

$$(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} = C_2 + \frac{C_3}{1 + r_3}$$

$$C_2 + \frac{C_3}{1 + r_3} = (1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3}$$

30

30

'Funciones de política' para $t = 2$

$$(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} = C_2 + \frac{C_3}{1 + r_3}$$

$$C_2 + \frac{C_3}{1 + r_3} = (1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3}$$

$$\frac{C_3}{1 + r_3} = (1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} - C_2$$

31

31

'Funciones de política' para $t = 2$

$$(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} = C_2 + \frac{C_3}{1 + r_3}$$

$$C_2 + \frac{C_3}{1 + r_3} = (1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3}$$

$$\frac{C_3}{1 + r_3} = (1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} - C_2$$

$$C_3 = (1 + r_3)\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} - C_2\right]$$

32

32

’Funciones de política’ para $t = 2$

$$\max_{C_2} \left\langle \ln C_2 + \beta \ln \left\{ (1+r_3) \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2 \right] \right\} \right\rangle$$

FOC – Condición de primer orden:

33

’Funciones de política’ para $t = 2$

$$\max_{C_2} \left\langle \ln C_2 + \beta \ln \left\{ (1+r_3) \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2 \right] \right\} \right\rangle$$

FOC – Condición de primer orden:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial C_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C_2} - \frac{\beta(1+r_3)}{(1+r_3)\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2\right]} = 0$$

34

'Funciones de política' para $t = 2$

$$\max_{c_2} \left\langle \ln C_2 + \beta \ln \left\{ (1+r_3) \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2 \right] \right\} \right\rangle$$

FOC – Condición de primer orden:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial C_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C_2} - \frac{\beta \cancel{(1+r_3)}}{\cancel{(1+r_3)} \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2 \right]} = 0$$

35

35

'Funciones de política' para $t = 2$

$$\max_{c_2} \left\langle \ln C_2 + \beta \ln \left\{ (1+r_3) \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2 \right] \right\} \right\rangle$$

FOC – Condición de primer orden:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial C_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C_2} - \frac{\beta \cancel{(1+r_3)}}{\cancel{(1+r_3)} \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2 \right]} = 0$$

$$(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2 = \beta C_2$$

36

36

’Función de política’ de C para $t = 2$

$$(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} - C_2 = \beta C_2$$

37

37

’Función de política’ de C para $t = 2$

$$(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} - C_2 = \beta C_2$$

$$\beta C_2 + C_2 = (1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3}$$

38

38

’Función de política’ de C para $t = 2$

$$(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2 = \beta C_2$$

$$\beta C_2 + C_2 = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$C_2(1+\beta) = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

39

39

’Función de política’ de C para $t = 2$

$$(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2 = \beta C_2$$

$$\beta C_2 + C_2 = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$C_2(1+\beta) = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

40

40

'Función de política' de C para $t = 2$

$$(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2 = \beta C_2$$

$$\beta C_2 + C_2 = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$C_2(1+\beta) = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$\boxed{\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]}$$

41

41

'Función de política' de A en $t = 2$

- Ya tenemos $\widehat{C_2}$

42

42

’Función de política’ de A en $t = 2$

- Ya tenemos $\widehat{C_2}$
- Ahora ¿Qué función de política nos falta para tener el equilibrio completo en $t = 2$?

43

43

’Función de política’ de A en $t = 2$

- Ya tenemos $\widehat{C_2}$
- Ahora ¿Qué función de política nos falta para tener el equilibrio completo en $t = 2$?
- Podríamos pensar que $\widehat{A_2}$ por ser ‘el par en el tiempo’ de $\widehat{C_2}$

44

44

'Función de política' de A en $t = 2$

- Ya tenemos $\widehat{C_2}$
- Ahora ¿Qué función de política nos falta para tener el equilibrio completo en $t = 2$?
- Podríamos pensar que $\widehat{A_2}$ por ser 'el par en el tiempo' de $\widehat{C_2}$
- Sin embargo, debido a que A_1 es un parámetro, A_2^* se tuvo que haber obtenido en $t = 1$, por lo que en $t = 2$ tenemos que obtener A_3^*

45

45

'Función de política' de A en $t = 2$

- Ya tenemos $\widehat{C_2}$
- Ahora ¿Qué función de política nos falta para tener el equilibrio completo en $t = 2$?
- Podríamos pensar que $\widehat{A_2}$ por ser 'el par en el tiempo' de $\widehat{C_2}$
- Sin embargo, debido a que A_1 es un parámetro, A_2^* se tuvo que haber obtenido en $t = 1$, por lo que en $t = 2$ tenemos que obtener A_3^*
- No nos dimos cuenta de esto cuando resolvimos el problema de optimización para todo el periodo de tiempo, porque resolvimos todo de manera simultánea. Por esto no nos detuvimos a ver en qué momento en el tiempo el agente representativo toma la decisión sobre su nivel de activos para el siguiente periodo

46

46

'Función de política' de A en $t = 2$ $(\widehat{A_3})$

- Entonces en $t = 2$ tenemos que obtener la función de política de los activos para $t = 3$, *i.e.* $\widehat{A_3}$

'Función de política' de A en $t = 2$ $(\widehat{A_3})$

- Entonces en $t = 2$ tenemos que obtener la función de política de los activos para $t = 3$, *i.e.* $\widehat{A_3}$
- Tomando la restricción o simplemente la expresión (8b):

$A_3 = (1 + r_2)\, A_2 + w_2 - C_2$..(8b)

'Función de política' de A en $t = 2$ $(\widehat{A_3})$

- Entonces en $t = 2$ tenemos que obtener la función de política de los activos para $t = 3$, *i.e.* $\widehat{A_3}$
- Tomando la restricción o simplemente la expresión (8b):

$A_3 = (1 + r_2)\, A_2 + w_2 - C_2$……………………………………………(8b)

- Proponemos la función de política para los activos en $t = 3$:

$$\widehat{A_3} = (1 + r_2)a + w_2 - \widehat{C_2}$$

49

49

'Función de política' de A en $t = 2$ $(\widehat{A_3})$

- Entonces substituimos $\widehat{C_2}$ en $\widehat{A_3}$:

$$\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$\widehat{A_3} = (1 + r_2)a + w_2 - \widehat{C_2}$$

50

50

’Función de política’ de A en $t = 2$ $(\widehat{A_3})$

- Entonces substituimos $\widehat{C_2}$ en $\widehat{A_3}$:

$$\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$\widehat{A_3} = (1+r_2)a + w_2 - \widehat{C_2}$$

51

51

’Función de política’ de A en $t = 2$ $(\widehat{A_3})$

- Entonces substituimos $\widehat{C_2}$ en $\widehat{A_3}$:

$$\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$\widehat{A_3} = (1+r_2)a + w_2 - \widehat{C_2}$$

$$\widehat{A_3} = (1+r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

52

52

'Función de política' de A en $t = 2$ ($\widehat{A_3}$)

$$\widehat{A_3} = (1 + r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

53

53

'Función de política' de A en $t = 2$ ($\widehat{A_3}$)

$$\widehat{A_3} = (1 + r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + \beta)(1 + r_2)a + (1 + \beta)w_2 - (1 + r_2)a - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

54

54

’Función de política’ de A en $t = 2$ $(\widehat{A_3})$

$$\widehat{A_3} = (1 + r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + \beta)(1 + r_2)a + (1 + \beta)w_2 - (1 + r_2)a - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + \beta)(1 + r_2)a - (1 + r_2)a + (1 + \beta)w_2 - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

55

55

’Función de política’ de A en $t = 2$ $(\widehat{A_3})$

$$\widehat{A_3} = (1 + r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + \beta)(1 + r_2)a + (1 + \beta)w_2 - (1 + r_2)a - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + \beta)(1 + r_2)a - (1 + r_2)a + (1 + \beta)w_2 - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + \beta - 1)(1 + r_2)a + (1 + \beta - 1)w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

56

56

'Función de política' de A en $t = 2$ $(\widehat{A_3})$

$$\widehat{A_3} = (1+r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+\beta)(1+r_2)a + (1+\beta)w_2 - (1+r_2)a - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+\beta)(1+r_2)a - (1+r_2)a + (1+\beta)w_2 - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+\beta-1)(1+r_2)a + (1+\beta-1)w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[\beta(1+r_2)a + \beta w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

57

57

'Función de política' de A en $t = 2$ $(\widehat{A_3})$

$$\widehat{A_3} = (1+r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+\beta)(1+r_2)a + (1+\beta)w_2 - (1+r_2)a - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+\beta)(1+r_2)a - (1+r_2)a + (1+\beta)w_2 - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+\beta-1)(1+r_2)a + (1+\beta-1)w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[\beta(1+r_2)a + \beta w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

58

58

'Función de política' de A en $t = 2$ $(\widehat{A_3})$

$$\widehat{A_3} = (1 + r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + \beta)(1 + r_2)a + (1 + \beta)w_2 - (1 + r_2)a - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + \beta)(1 + r_2)a - (1 + r_2)a + (1 + \beta)w_2 - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + \beta - 1)(1 + r_2)a + (1 + \beta - 1)w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[\beta(1 + r_2)a + \beta w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\boxed{\widehat{A_3} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1 + r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)}$$

59

59

'Funciones de política' en $t = 2$

- Así, ya obtuvimos las dos funciones de política para el agente representativo en $t = 2$:

$$\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1 + r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

60

60

’Funciones de política’ en $t = 2$

- Así, ya obtuvimos las dos funciones de política para el agente representativo en $t = 2$:
  $\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$
  $\widehat{A_3} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1 + r_2)a + w_2]$- $\frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$
- Ambas son funciones condicionalmente óptimas porque están en función de a...

61

61

’Funciones de política’ en $t = 2$

- Así, ya obtuvimos las dos funciones de política para el agente representativo en $t = 2$:
  $\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$
  $\widehat{A_3} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1 + r_2)a + w_2]$- $\frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$
- Ambas son funciones condicionalmente óptimas porque están en función de a...
- ...por lo que para que $\widehat{C_2}$ y $\widehat{A_3}$ sean óptimas, se necesita que $a = A_2^*$

62

62

- Entonces las funciones de política $\widehat{C_2}$ y $\widehat{A_3}$ cuando $a = A_2^*$ son:
  $C_2^* = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)A_2^* + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$
  $A_3^* = \frac{\beta}{1+\beta}[(1 + r_2)A_2^* + w_2]$- $\frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$
- ¿En qué se parecen las funciones de política –que son funciones condicionales-, a las soluciones óptimas para todo el periodo?

63

63

- Entonces las funciones de política $\widehat{C_2}$ y $\widehat{A_3}$ cuando $a = A_2^*$ son:
  $C_2^* = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)A_2^* + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$
  $A_3^* = \frac{\beta}{1+\beta}[(1 + r_2)A_2^* + w_2]$- $\frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$
- ¿En qué se parecen las funciones de política –que son funciones condicionales-, a las soluciones óptimas para todo el periodo?

$$C_2^* = \frac{\beta(1+r_2)}{1+\beta+\beta^2}\left[(1 + r_1)\, A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$A_3^* = (1 + r_2)\,\left\langle (1 + r_1)\, A_1 + w_1 - \left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1 + r_1)\, A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}\right\rangle + w_2 - \left\{\frac{\beta(1+r_2)}{1+\beta+\beta^2}\left[(1 + r_1)\, A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}$$

64

64

- Entonces las funciones de política $\widehat{C_2}$ y $\widehat{A_3}$ cuando $a = A_2^*$ son:

  $C_2^* = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)A_2^* + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$

  $A_3^* = \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)A_2^* + w_2]$- $\frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$

- ¿En qué se parecen las funciones de política –que son funciones condicionales-, a las soluciones óptimas para todo el periodo?

  $C_2^* = \frac{\beta(1+r_2)}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$

  $A_3^* = (1+r_2)\left\langle(1+r_1)A_1 + w_1 - \left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}\right\rangle + w_2 - \left\{\frac{\beta(1+r_2)}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}$

65

65

'Funciones de política' en $t = 3$

$$\max_{C_3}\{\ln C_3\}$$

sujeto a:

$$(1+r_3)a + w_3 = C_3 + A_4$$
$$A_4 \geq 0$$

66

66

’Funciones de política’ en $t = 3$

$$\max_{C_3}\{\ln C_3\}$$

sujeto a:

$$(1 + r_3)a + w_3 = C_3 + A_4$$
$$A_4 \geq 0$$

- Aquí ni siquiera hay necesidad de construir un lagrangiano, ni es necesario obtener alguna derivada. Debido a que sabemos que en óptimo el agente representativo se va a terminar sus recursos (*i.e.* $A_4 = 0$), simplemente con ‘cumplir’ con la restricción obtenemos el máximo restringido: $\widehat{C_3} = (1 + r_3)a + w_3$

67

67

’Funciones de política’ en $t = 3$

- $\widehat{C_3} = (1 + r_3)a + w_3$
- Ahora, tomando la primera restricción y despejando A_4, la función de política de A_4 sería:

  $\widehat{A_4} = (1 + r_3)a + w_3 - \widehat{C_3}$

68

68

'Funciones de política' en $t = 3$

- $\widehat{C_3} = (1 + r_3)a + w_3$
- Ahora, tomando la primera restricción y despejando A_4, la función de política de A_4 sería:

$$\widehat{A_4} = (1 + r_3)a + w_3 - \widehat{C_3}$$

$$\widehat{A_4} = (1 + r_3)a + w_3 - (1 + r_3)a - w_3$$

69

69

'Funciones de política' en $t = 3$

- $\widehat{C_3} = (1 + r_3)a + w_3$
- Ahora, tomando la primera restricción y despejando A_4, la función de política de A_4 sería:

$$\widehat{A_4} = (1 + r_3)a + w_3 - \widehat{C_3}$$

$$\widehat{A_4} = \cancel{(1 + r_3)a} + \cancel{w_3} - \cancel{(1 + r_3)a} - \cancel{w_3}$$

70

70

'Funciones de política' en $t = 3$

- $\widehat{C_3} = (1 + r_3)a + w_3$

- Ahora, tomando la primera restricción y despejando A_4, la función de política de A_4 sería:

$$\widehat{A_4} = (1 + r_3)a + w_3 - \widehat{C_3}$$

$$\widehat{A_4} = \cancel{(1 + r_3)a} + \cancel{w_3} - \cancel{(1 + r_3)a} - \cancel{w_3}$$

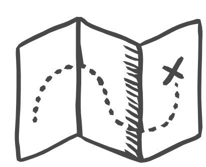
$$\widehat{A_4} = 0 = A_4^*$$

71

71

¿Cómo vamos a aprender DP?

	Número de periodos de tiempo	Determinístico / Estocástico	Método de solución
(1)	Tres	Determinístico	Lagrange
(2)	Tres	Determinístico	Función de política[1]
(3)	Tres	Determinístico	Programación Dinámica
(4)	Infinito	Determinístico	Programación Dinámica
(5)	Tres	Estocástico	Programación Dinámica
(6)	Infinito	Estocástico	Programación Dinámica



1. Realmente no es un método, sino una forma alternativa de expresar las soluciones óptimas, que ayuda a ilustrar la idea conceptual sobre la que descansa la programación dinámica.

72

72

Richard E. Bellman

(1920-1984)

Matemático

Principal aportación:

Programación Dinámica

- Lic. en Matemáticas
  Brooklyn College (1941)
- Maestría
  University of Wisconsin (1943)
- Doctorado
  Princeton University (1946)
- Profesor
  Princeton, Stanford, USC

73

73

Problema de optimización determinístico de tres periodos (función logarítmica)

Variable de control

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t$$

sujeto a:

Variable de estado

$A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t$, para toda t

$$A_4 \geq 0$$

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t + \sum_{t=1}^{3} \lambda_t [(1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t - A_{t+1}]$$

74

74

‘Principio de Optimalidad’ de Bellman (1957)

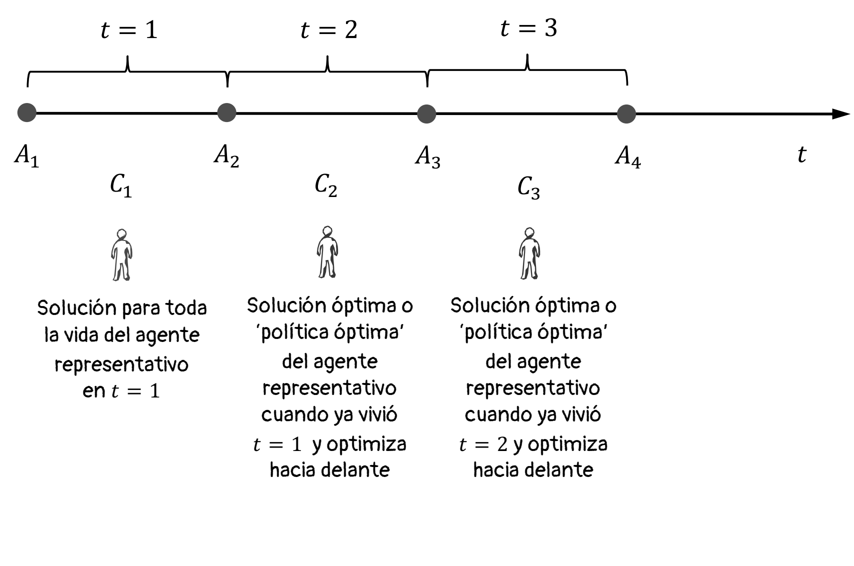
“Una política óptima tiene la propiedad de que cualquiera que haya sido el estado inicial y las decisiones que se hayan tomado, las decisiones hacia delante deben de constituir una política óptima, con respecto al estado que resulte de la primera decisión”

-- Richard Bellman (1957), p. 83

75

75

‘Política óptima’



76

76

Programación Dinámica y Ecuación de Bellman

- Intuitivamente, el método de Programación Dinámica divide un problema complejo de optimización dinámica en subproblemas más simples de resolver

77

77

Programación Dinámica y Ecuación de Bellman

- Intuitivamente, el método de Programación Dinámica divide un problema complejo de optimización dinámica en subproblemas más simples de resolver
- El método calcula 'funciones valor' que dependen de la 'variable de estado' en cada momento

78

78

Programación Dinámica y Ecuación de Bellman

- Intuitivamente, el método de Programación Dinámica divide un problema complejo de optimización dinámica en subproblemas más simples de resolver
- El método calcula 'funciones valor' que dependen de la 'variable de estado' en cada momento
- A la ecuación que relaciona las funciones valor en el tiempo se le llama 'Ecuación de Bellman'

79

79

Programación Dinámica y Ecuación de Bellman

- Intuitivamente, el método de Programación Dinámica divide un problema complejo de optimización dinámica en subproblemas más simples de resolver
- El método calcula 'funciones valor' que dependen de la 'variable de estado' en cada momento
- A la ecuación que relaciona las funciones valor en el tiempo se le llama 'Ecuación de Bellman'
- La Programación Dinámica puede ser especialmente útil en decisiones bajo incertidumbre

80

80

La Ecuación de Bellman y la utilidad ’indirecta’

- Las ‘funciones valor’ en nuestro caso son similares al concepto de ‘función de utilidad indirecta’

81

81

La Ecuación de Bellman y la utilidad ’indirecta’

- Las ‘funciones valor’ en nuestro caso son similares al concepto de ‘función de utilidad indirecta’

- La función de utilidad ‘directa’ describe las preferencias, independientemente de lo que ocurre en los mercados, mientras que la función de ‘utilidad indirecta’ refleja condiciones de optimización y precios de mercado

82

82

Digresión: Utilidad indirecta

$$\boxed{u(x_1,x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}} \qquad \max_{x_1,x_2}\left\{2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} | p_1x_1 + p_2x_2 = m\right\}$$

Utilidad 'directa'

$$\mathcal{L} = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} + \lambda(m - p_1x_1 + p_2x_2)$$

FOC

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \iff \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} - \lambda\, p_1 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{p_1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \iff \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{1}{2}} - \lambda\, p_2 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{p_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0. \iff m - p_1\,x_1 - p_2x_2 = 0$$

$$\frac{1}{p_1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{p_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$x_2^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} = \frac{p_1}{p_2}x_1^{\frac{1}{2}}x_1^{\frac{1}{2}}$$

$$x_2 = \frac{p_1}{p_2}x_1$$

83

83

Digresión: Utilidad indirecta

$$m - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \qquad x_2 = \frac{p_1}{p_2}x_1$$

$$m - p_1x_1 - \cancel{p_2}\frac{p_1}{\cancel{p_2}}x_1 = 0$$

$$m - p_1x_1 - p_1x_1 = 0 \iff m = 2p_1x_1 \iff x_1^*(p,m) = \frac{m}{2p_1}$$

$$x_2^*(p,m) = \frac{m}{2p_2}$$

Funciones de demanda 'Marshalliana'

La 'utilidad directa' es: $U(x_1,x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}$, entonces la 'utilidad indirecta' es: $v(p,m) = U(x_1^*, x_2^*)$

84

84

Digresión: Utilidad indirecta

La 'utilidad directa' es $u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}$ ...

...Entonces la 'utilidad indirecta' es: $v(p, m) = U(x_1^*, x_2^*)$

$$v(p,m) = 2\left(\frac{m}{2p_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m}{2p_2}\right)^{\frac{1}{2}} \iff \boxed{v(p,m) = \frac{m}{(p_1p_2)^{\frac{1}{2}}}}$$

Utilidad 'indirecta'

85

85

Utilidad indirecta | decisiones óptimas vs. Función valor | funciones de política

Concepto	Problema estático de optimización de un consumidor con dos bienes	Problema dinámico de optimización de un individuo entre consumir y ahorrar un periodo antes del final
Utilidad directa	$u(x_1, x_2)$	$U(C_{T-1}, A_T)$

86

86

Utilidad indirecta | decisiones óptimas vs. Función valor | funciones de política

Concepto	Problema estático de optimización de un consumidor con dos bienes		Problema dinámico de optimización de un individuo entre consumir y ahorrar un periodo antes del final	
Utilidad directa	$u(x_1, x_2)$		$U(C_{T-1}, A_T)$	
Decisiones óptimas	$x_1^*(p, m)$ $x_2^*(p, m)$	'Demandas Marshallianas'	$\widehat{C_{T-1}}(a; r, w)$ $\widehat{A_T}(a; r, w)$	'Funciones de política'

87

87

Utilidad indirecta | decisiones óptimas vs. Función valor | funciones de política

Concepto	Problema estático de optimización de un consumidor con dos bienes		Problema dinámico de optimización de un individuo entre consumir y ahorrar un periodo antes del final	
Utilidad directa	$u(x_1, x_2)$		$U(C_{T-1}, A_T)$	
Decisiones óptimas	$x_1^*(p, m)$ $x_2^*(p, m)$	'Demandas Marshallianas'	$\widehat{C_{T-1}}(a; r, w)$ $\widehat{A_T}(a; r, w)$	'Funciones de política'
Utilidad indirecta	$v(p, m) = u[x_1^*(p, m), x_2^*(p, m)]$		$V_{T-1}(a) = U\left[\widehat{C_{T-1}}(a; r, w), \widehat{A_T}(a; r, w)\right]$ 'Función valor'	

88

88

‘Ecuación de Bellman’

- Para nuestro modelo determinístico de consumo inter-temporal, la ‘Ecuación de Bellman’ es la siguiente:

$$\max_{C_t, A_{t+1}} \left\{ U(C_t) + \beta V_{t+1}(A_{t+1}) \middle| A_{t+1} = (1 + r_t)A_t + w_t - C_t \right\}$$

89

89

‘Ecuación de Bellman’

- Para nuestro modelo determinístico de consumo inter-temporal, la ‘Ecuación de Bellman’ es la siguiente:

$$\max_{C_t, A_{t+1}} \left\{ U(C_t) + \beta V_{t+1}(A_{t+1}) \middle| A_{t+1} = (1 + r_t)A_t + w_t - C_t \right\}$$

- Es una función recursiva que relaciona las funciones valor en el tiempo

90

90

‘Ecuación de Bellman’

- Para nuestro modelo determinístico de consumo inter-temporal, la ‘Ecuación de Bellman’ es la siguiente:

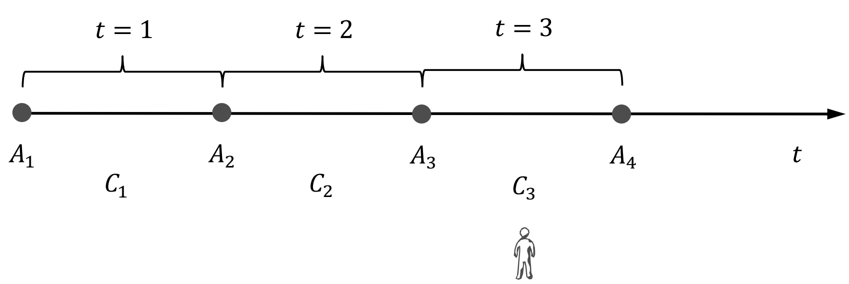
$$\max_{C_t, A_{t+1}} \left\{ U(C_t) + \beta V_{t+1}(A_{t+1}) \middle| A_{t+1} = (1 + r_t)A_t + w_t - C_t \right\}$$

- Es una función recursiva que relaciona las funciones valor en el tiempo
- La idea es resolver para el último periodo, después para los dos últimos periodos, luego para los tres últimos y así sucesivamente

91

91

Inducción ‘hacia atrás’ $t = 3$



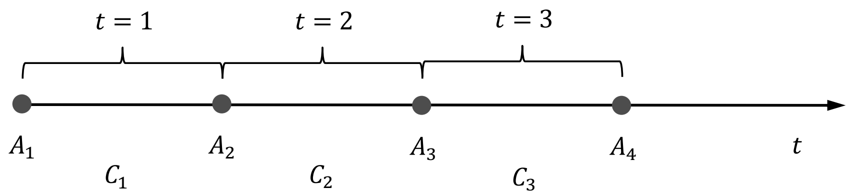
Problema de optimización del agente representativo cuando solo le queda por vivir $t = 3$

$$\left.\begin{array}{c} \text{maximizar} \\ U(C_3) + \cancel{\beta V_4(A_4)} \\ \text{sujeto a} \\ (1 + r_3)A_3 + w_3 = C_3 + \cancelto{0}{A_4} \end{array}\right\} \text{Ecuación de Bellman}$$

92

92

Inducción 'hacia atrás' $t = 2$



Problema de optimización del agente representativo cuando va a vivir en $t = 2$ y ya maximizó en $t = 3$

maximizar

$U(C_2) + \beta V_3(A_3)$

sujeto a

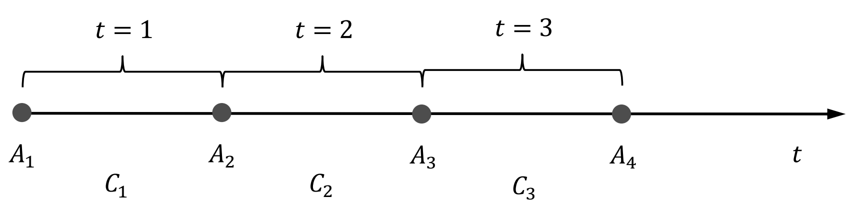
$(1 + r_2)A_2 + w_2 = C_2 + A_3$

Ecuación de Bellman

93

93

Inducción 'hacia atrás' $t = 1$



Problema de optimización del agente representativo cuando va a vivir en $t = 1$ y ya maximizó en $t = 2$ y $t = 3$

maximizar

$U(C_1) + \beta V_2(A_2)$

sujeto a

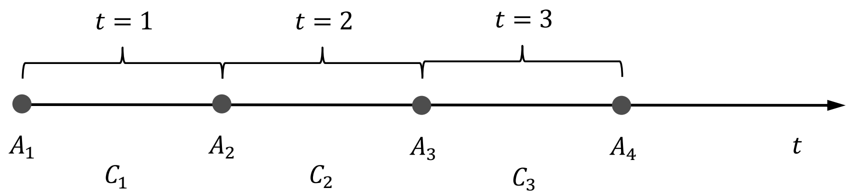
$(1 + r_1)A_1 + w_1 = C_1 + A_2$

La 'función valor' V_2 ya incorpora las decisiones óptimas en $t = 2$ y $t = 3$ (*i.e.* las funciones de política $\widehat{C_2}, \widehat{A_3}, \widehat{C_3}, \widehat{A_4}$)

94

94

Ahora sí, empecemos en $t = 3$



Problema de optimización del agente representativo cuando solo le queda por vivir $t = 3$

maximizar

$U(C_3) + \cancel{\beta V_4(A_4)}$

sujeto a

$(1 + r_3)A_3 + w_3 = C_3 + \cancel{A_4} \rightarrow 0$

95

95

Programación Dinámica en nuestro problema determinístico de tres periodos

Empecemos por resolver el problema[1] en $t = 3$:

$$\max_{C_3,\, A_4}\{U(C_3) | (1 + r_3)a + w_3 = C_3 + A_4;\ A_4 \geq 0\}$$

Ya sabemos que dejar activos en $t = 4$ no incrementa el nivel de utilidad del agente representativo, por lo que la función de política –*i.e.* la decisión óptima-, es $\widehat{A_4} = 0$.

Así, la restricción presupuestaria inter-temporal queda:

$$(1 + r_3)a + w_3 = C_3$$

1. Al igual que cuando abordamos el tema de las funciones de política, denotaremos al nivel de activos en la actualidad como a. Adicionalmente, denotaremos al nivel de activos futuro como a^+, *à la* Heijdra (2017). **Heijdra, Ben J**. *Foundations of Modern Macroeconomics*. 3a ed., Oxford, Reino Unido: Oxford University Press, 2017, p. 674.

96

96

$t = 3$

…y el problema se simplifica a:

$$\max_{C_3}\left\{U(C_3)\middle|(1+r_3)a + w_3 = C_3\right\}$$

Entonces el nivel óptimo de consumo en $t = 3$ (o 'función de política') es:

$$\widehat{C_3} = (1+r_3)a + w_3$$

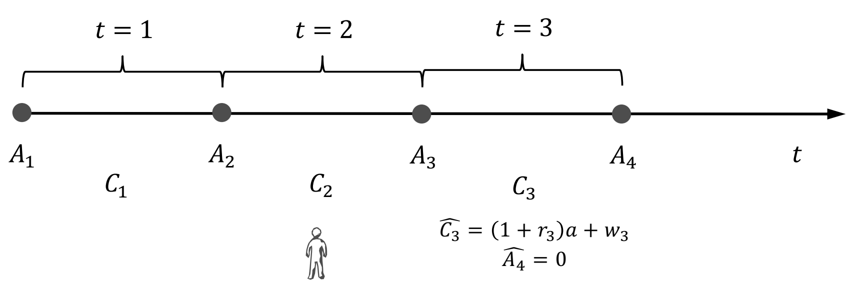
…y el nivel de activos para el periodo $t = 4$ es:

$$\widehat{A_4} = 0$$

97

97

Ahora resolvamos en $t = 2$



Problema de optimización del agente representativo cuando va a vivir en $t = 2$ y ya maximizó en $t = 3$
maximizar
$U(C_2) + \beta V_3(A_3)$
sujeto a
$(1+r_2)A_2 + w_2 = C_2 + A_3$

98

98

$t = 2$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 2$:

$$\max_{C_2, A_3} \{ U(C_2) + \beta V_3(A_3) \,|\, (1 + r_2)a + w_2 = C_2 + A_3 \}$$

La 'usanza' en cuanto a notación en Programación Dinámica es que no utilicemos el subíndice de tiempo (t) en las variables de control y de estado, por lo que el problema queda:

$$\max_{c, a^+} \{ U(c) + \beta V_3(a^+) \,|\, (1 + r_2)a + w_2 = c + a^+ \}$$

99

99

$t = 2$

$$\max_{c, a^+} \{ U(c) + \beta V_3(a^+) \,|\, (1 + r_2)a + w_2 = c + a^+ \}$$

Para resolverlo, podemos despejar a^+ de la restricción e incorporarlo en la función objetivo:

$$\max_{c} \{ U(c) + \beta V_3[(1 + r_2)a + w_2 - c] \}$$

FOC

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial c} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad U'(c) - \beta V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c] = 0$$

$$U'(c) = \beta V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$$

100

100

$t = 2$

$$U'(c) = \beta V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$$

Sabemos que $U(c) = \ln c$, entonces $U'(c) = \frac{1}{c}$

Ahora solo nos falta obtener $V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$

¿Cómo obtenemos V_3?

Es necesario incorporar las soluciones óptimas o funciones de política $\widehat{C_3}$ y $\widehat{A_4}$ en la función de utilidad en $t = 3$ y así obtener la 'función valor'

10
1

101

$t = 2$

Las funciones de política en $t = 3$:
$\widehat{C_3} = (1 + r_3)a + w_3$
$\widehat{A_4} = 0$
La 'función valor' en $t = 3$, es decir $V_3(a) = U\left[\widehat{C_3}(a), \widehat{A_4}(a)\right]$ es[1]:

$$V_3(a) = \ln[(1 + r_3)a + w_3]$$

Por lo que $V_3'(a) = \frac{1}{(1+r_3)a+w_3} \cdot (1 + r_3)$ o $V_3'(a) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a+w_3}$

1. La 'usanza' en Programación Dinámica es también ya no escribir de manera explícita los parámetros dentro de los paréntesis cuando nos referimos a las funciones. Es decir, en lugar de escribir $V_3(a; r, w) = U\left[\widehat{C_3}(a; r, w), \widehat{A_4}(a; r, w)\right]$, ahora solo la expresamos como $V_3(a) = U\left[\widehat{C_3}(a), \widehat{A_4}(a)\right]$

10
2

102

$t = 2$

Sin embargo, necesitamos $V_3{}'(a^+)$, no $V_3{}'(a)$

Si $V_3'(a) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a+w_3}$, entonces $V_3'(a^+) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a^+ + w_3}$

...y ya sabíamos que por la restricción: $a^+ = (1 + r_2)a + w_2 - c$

Por lo que entonces:

$$V_3'(a^+) = \frac{(1 + r_3)}{(1 + r_3)[(1 + r_2)a + w_2 - c\,] + w_3}$$

103

103

$t = 2$

Ahora sí podemos expresar la condición de primer orden:

$$U'(c) = \beta V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$$

Así:

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1 + r_3)}{(1 + r_3)[(1 + r_2)a + w_2 - c\,] + w_3}$$

Resolver para c y luego sustituir c en la restricción...

104

104

$t = 2$

$$\beta(1+r_3)c = (1+r_3)[(1+r_2)a + w_2 - c] + w_3$$

$$\frac{\beta\cancel{(1+r_3)}c}{\cancel{1+r_3}} = \frac{\cancel{(1+r_3)}[(1+r_2)a + w_2 - c]}{\cancel{(1+r_3)}} + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$c + \beta c = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$(1+\beta)c = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$c = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

105

105

$t = 2$

Sustituimos $c = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$ en la restricción $a^+ = (1+r_2)a + w_2 - c$, para obtener a^+:

$$a^+ = (1+r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$a^+ = \frac{1+\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

$$a^+ = \frac{\cancel{1} + \beta \cancel{- 1}}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

106

106

$t = 2$

Las 'funciones de política' en $t = 2$ son:

$$c = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$a^{+} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

Para que $\widehat{C_2} = c$, se necesita que $\widehat{A_3} = a^{+}$ y así:

$$\boxed{\begin{aligned}\widehat{C_2} &= \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right] \\ \widehat{A_3} &= \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)\end{aligned}}$$

Llegamos a las mismas funciones de política que en la sección anterior

10
7

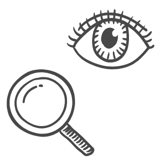
107

Nuestra agenda de hoy

Revisión de datos y eventos macro → Optimización de un modelo determinístico de tres periodos → **Tarea**

10
8

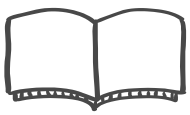
108



(1) Estar atentos y revisar los datos y eventos económicos que se van a publicar en la semana

2 páginas

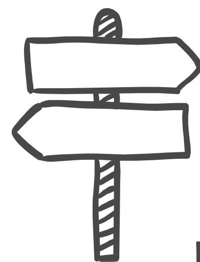
https://www.banorte.com/cms/casadebolsabanorteixe/analisisyestrategia/analisiseconomico/otros/20210510_Calendario.pdf

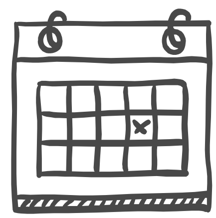


(2) Leer mi columna en *El Financiero* (martes 11-may) sobre el PIB en 1T21

1 página

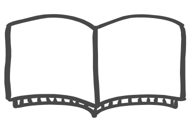
https://www.elfinanciero.com.mx/opinion/gabriel-casillas/





10
9

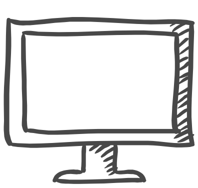
109



(3) Leer el *paper* “Richard Bellman on the Birth of Dynamic Programming” de Stuart Dreyfus (2002)

4 páginas

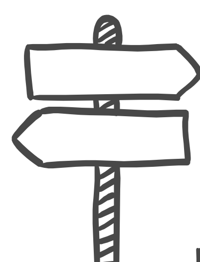
https://pubsonline.informs.org/doi/pdf/10.1287/opre.50.1.48.17791

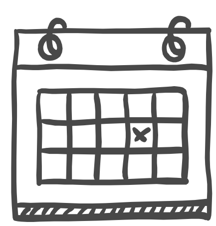


(4) Ver el documental ”The Mysterious Man Behind The Bellman Equation”

1 hora 26 minutos

https://www.youtube.com/watch?v=B8I6LIV-c5I





11
0

110

Muchas gracias!

11
1

111

Slides Carnival

Free templates for all your presentation needs

For PowerPoint and Google Slides

100% free for personal or commercial use

Ready to use, professional and customizable

Blow your audience away with attractive visuals

112