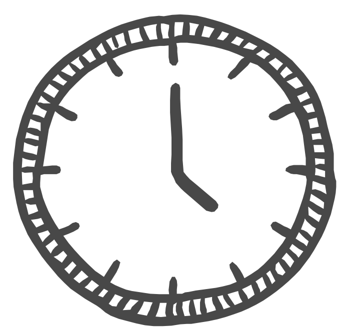
Macroeconomía Dinámica

EC3024.1 (CCM)

CLASE 13

1

RECESO



Hoy habrá **dos recesos** de 10 minutos:

4:50pm y 5:50pm

2

2

Nuestra agenda de hoy

Revisión de datos y eventos macro

Optimización de un modelo determinístico de tres periodos

Tarea

3

3

Banxico...

La actualización de los pronósticos para la inflación general y subyacente muestra, para el corto plazo, niveles mayores a los publicados en el último Informe Trimestral. No obstante, se sigue estimando que ambas converjan a la meta de 3% desde el segundo trimestre de 2022. Estas previsiones están sujetas a riesgos. Al alza: i) presiones inflacionarias externas; ii) presiones de costos o reasignaciones de gasto; iii) persistencia en la inflación subyacente; y iv) depreciación cambiaria. A la baja: i) por los efectos de la brecha negativa del producto; ii) mayores medidas de distanciamiento social; y iii) apreciación cambiaria. El balance de los riesgos que podrían incidir en la trayectoria esperada de la inflación en el horizonte de pronóstico es al **alza**.

Fuente: Encuesta sobre las expectativas de los especialistas en economía del sector privado: marzo 2021. Liga: https://www.banxico.org.mx/publicaciones-y-prensa/encuestas-sobre-las-expectativas-de-los-especialis/%7BA9302B4A-04AD-4551-9877-028346F57E96%7D.pdf

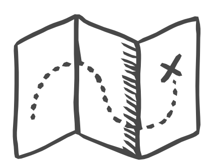
4

4

Nuestra agenda de hoy

Revisión de datos y eventos macro → **Optimización de un modelo determinístico de tres periodos** → Tarea

¿Cómo vamos a aprender DP?



	Número de periodos de tiempo	Determinístico / Estocástico	Método de solución
(1)	Tres	Determinístico	Lagrange
(2)	Tres	Determinístico	Función de política[1]
(3)	Tres	Determinístico	Programación Dinámica
(4)	Infinito	Determinístico	Programación Dinámica
(5)	Tres	Estocástico	Programación Dinámica
(6)	Infinito	Estocástico	Programación Dinámica

1. Realmente no es un método, sino una forma alternativa de expresar las soluciones óptimas, que ayuda a ilustrar la idea conceptual sobre la que descansa la programación dinámica.

Richard E. Bellman

(1920-1984)
Matemático
Principal aportación:
Programación Dinámica

- Lic. en Matemáticas
  Brooklyn College (1941)
- Maestría
  University of Wisconsin (1943)
- Doctorado
  Princeton University (1946)
- Profesor
  Princeton, Stanford, USC

7

7

Problema de optimización determinístico de tres periodos (función logarítmica)

Variable de control

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t$$

sujeto a:

Variable de estado

$$A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , para toda } t$$

$$A_4 \geq 0$$

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t + \sum_{t=1}^{3} \lambda_t [(1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t - A_{t+1}]$$

8

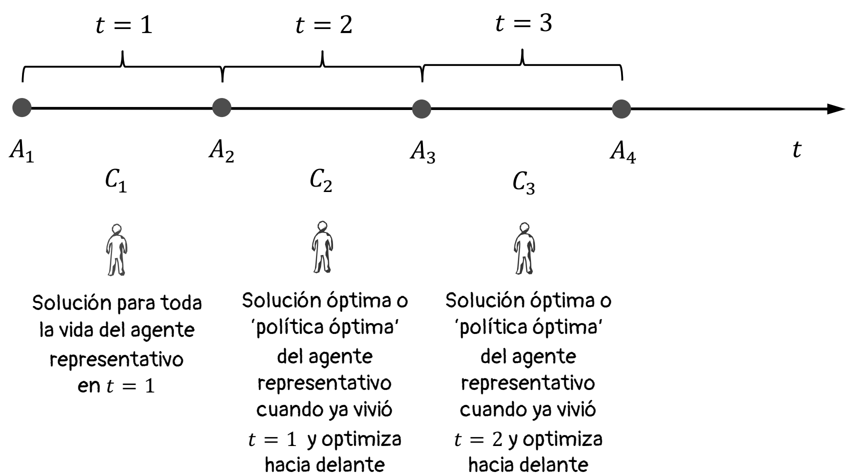
8

‘Principio de Optimalidad’ de Bellman (1957)

“Una política óptima tiene la propiedad de que cualquiera que haya sido el estado inicial y las decisiones que se hayan tomado, las decisiones hacia delante deben de constituir una política óptima, con respecto al estado que resulte de la primera decisión”

-- Richard Bellman (1957), p. 83

‘Política óptima’



Programación Dinámica y Ecuación de Bellman

- Intuitivamente, el método de Programación Dinámica divide un problema complejo de optimización dinámica en subproblemas más simples de resolver

11

11

Programación Dinámica y Ecuación de Bellman

- Intuitivamente, el método de Programación Dinámica divide un problema complejo de optimización dinámica en subproblemas más simples de resolver
- El método calcula 'funciones valor' que dependen de la 'variable de estado' en cada momento

12

12

Programación Dinámica y Ecuación de Bellman

- Intuitivamente, el método de Programación Dinámica divide un problema complejo de optimización dinámica en subproblemas más simples de resolver
- El método calcula 'funciones valor' que dependen de la 'variable de estado' en cada momento
- A la ecuación que relaciona las funciones valor en el tiempo se le llama 'Ecuación de Bellman'

13

13

Programación Dinámica y Ecuación de Bellman

- Intuitivamente, el método de Programación Dinámica divide un problema complejo de optimización dinámica en subproblemas más simples de resolver
- El método calcula 'funciones valor' que dependen de la 'variable de estado' en cada momento
- A la ecuación que relaciona las funciones valor en el tiempo se le llama 'Ecuación de Bellman'
- La Programación Dinámica puede ser especialmente útil en decisiones bajo incertidumbre

14

14

La Ecuación de Bellman y la utilidad ’indirecta’

- Las ‘funciones valor’ en nuestro caso son similares al concepto de ‘función de utilidad indirecta’

15

15

La Ecuación de Bellman y la utilidad ’indirecta’

- Las ‘funciones valor’ en nuestro caso son similares al concepto de ‘función de utilidad indirecta’

- La función de utilidad ‘directa’ describe las preferencias, independientemente de lo que ocurre en los mercados, mientras que la función de ‘utilidad indirecta’ refleja condiciones de optimización y precios de mercado

16

16

Digresión: Utilidad indirecta

$$u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$$

17

17

Digresión: Utilidad indirecta

$$\underbrace{\boxed{u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}}}_{\text{Utilidad 'directa'}}$$

18

18

Digresión: Utilidad indirecta

$$\boxed{u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}} \quad \max_{x_1, x_2}\left\{2x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} | p_1x_1 + p_2x_2 = m\right\}$$

Utilidad 'directa'

19

19

Digresión: Utilidad indirecta

$$\boxed{u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}} \quad \max_{x_1, x_2}\left\{2x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} | p_1x_1 + p_2x_2 = m\right\}$$

Utilidad 'directa'

$$\mathcal{L} = 2x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} + \lambda(m - p_1x_1 - p_2x_2)$$

20

20

Digresión: Utilidad indirecta

$$\boxed{u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}} \qquad \max_{x_1, x_2}\left\{2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} | p_1x_1 + p_2x_2 = m\right\}$$

Utilidad 'directa'

$$\mathcal{L} = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} + \lambda(m - p_1x_1 - p_2x_2)$$

FOC

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \iff \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} - \lambda\, p_1 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{p_1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \iff \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{1}{2}} - \lambda\, p_2 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{p_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0. \iff m - p_1\,x_1 - p_2x_2 = 0$$

21

Digresión: Utilidad indirecta

$$\boxed{u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}} \qquad \max_{x_1, x_2}\left\{2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} | p_1x_1 + p_2x_2 = m\right\}$$

Utilidad 'directa'

$$\mathcal{L} = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} + \lambda(m - p_1x_1 + p_2x_2)$$

FOC

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \iff \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} - \lambda\, p_1 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{p_1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \iff \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{1}{2}} - \lambda\, p_2 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{p_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0. \iff m - p_1\,x_1 - p_2x_2 = 0$$

$$\frac{1}{p_1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{p_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$x_2^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} = \frac{p_1}{p_2}x_1^{\frac{1}{2}}x_1^{\frac{1}{2}}$$

$$x_2 = \frac{p_1}{p_2}x_1$$

22

Digresión: Utilidad indirecta

$$\boxed{u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}} \qquad \max_{x_1,x_2}\left\{2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} | p_1x_1 + p_2x_2 = m\right\}$$

Utilidad 'directa'

$$\mathcal{L} = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} + \lambda(m - p_1x_1 + p_2x_2)$$

FOC

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \iff \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} - \lambda\, p_1 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{p_1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \iff \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{1}{2}} - \lambda\, p_2 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{p_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0. \iff m - p_1\, x_1 - p_2 x_2 = 0$$

$$\frac{1}{p_1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{p_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$x_2^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} = \frac{p_1}{p_2}x_1^{\frac{1}{2}}x_1^{\frac{1}{2}}$$

$$x_2 = \frac{p_1}{p_2}x_1$$

23

23

Digresión: Utilidad indirecta

$$m - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \qquad x_2 = \frac{p_1}{p_2}x_1$$

$$m - p_1x_1 - p_2\frac{p_1}{p_2}x_1 = 0$$

24

24

Digresión: Utilidad indirecta

$$m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \qquad x_2 = \frac{p_1}{p_2} x_1$$

$$m - p_1 x_1 - \cancel{p_2} \frac{p_1}{\cancel{p_2}} x_1 = 0$$

25

25

Digresión: Utilidad indirecta

$$m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \qquad x_2 = \frac{p_1}{p_2} x_1$$

$$m - p_1 x_1 - \cancel{p_2} \frac{p_1}{\cancel{p_2}} x_1 = 0$$

$$m - p_1 x_1 - p_1 x_1 = 0 \iff m = 2p_1 x_1 \iff x_1^*(p,m) = \frac{m}{2p_1}$$

$$x_2^*(p,m) = \frac{m}{2p_2}$$

26

26

Digresión: Utilidad indirecta

$m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \qquad x_2 = \frac{p_1}{p_2} x_1$

$m - p_1 x_1 - \cancel{p_2} \frac{p_1}{\cancel{p_2}} x_1 = 0$

$m - p_1 x_1 - p_1 x_1 = 0 \iff m = 2p_1 x_1 \iff x_1^*(p,m) = \frac{m}{2p_1}$

$x_2^*(p,m) = \frac{m}{2p_2}$

Funciones de demanda 'Marshalliana'

27

27

Digresión: Utilidad indirecta

$m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \qquad x_2 = \frac{p_1}{p_2} x_1$

$m - p_1 x_1 - \cancel{p_2} \frac{p_1}{\cancel{p_2}} x_1 = 0$

$m - p_1 x_1 - p_1 x_1 = 0 \iff m = 2p_1 x_1 \iff x_1^*(p,m) = \frac{m}{2p_1}$

$x_2^*(p,m) = \frac{m}{2p_2}$

Funciones de demanda 'Marshalliana'

La 'utilidad directa' es: $U(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$, entonces la 'utilidad indirecta' es: $v(p,m) = U(x_1^*, x_2^*)$

28

28

Digresión: Utilidad indirecta

La 'utilidad directa' es $u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}$ …

…Entonces la 'utilidad indirecta' es: $v(p, m) = U(x_1^*, x_2^*)$

29

29

Digresión: Utilidad indirecta

La 'utilidad directa' es $u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}$ …

…Entonces la 'utilidad indirecta' es: $v(p, m) = U(x_1^*, x_2^*)$

$v(p, m) = 2\left(\frac{m}{2p_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m}{2p_2}\right)^{\frac{1}{2}}$

30

30

Digresión: Utilidad indirecta

La 'utilidad directa' es $u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}$ ...

...Entonces la 'utilidad indirecta' es: $v(p, m) = U(x_1^*, x_2^*)$

$v(p,m) = 2\left(\frac{m}{2p_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m}{2p_2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad v(p,m) = \frac{m}{(p_1p_2)^{\frac{1}{2}}}$

31

31

Digresión: Utilidad indirecta

La 'utilidad directa' es $u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}$ ...

...Entonces la 'utilidad indirecta' es: $v(p, m) = U(x_1^*, x_2^*)$

$v(p,m) = 2\left(\frac{m}{2p_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m}{2p_2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{v(p,m) = \frac{m}{(p_1p_2)^{\frac{1}{2}}}}$

Utilidad
'indirecta'

32

32

Utilidad indirecta | decisiones óptimas vs. Función valor | funciones de política

Concepto	Problema estático de optimización de un consumidor con dos bienes	Problema dinámico de optimización de un individuo entre consumir y ahorrar un periodo antes del final
Utilidad directa	$u(x_1, x_2)$	$U(C_{T-1}, A_T)$

Utilidad indirecta | decisiones óptimas vs. Función valor | funciones de política

Concepto	Problema estático de optimización de un consumidor con dos bienes	Problema dinámico de optimización de un individuo entre consumir y ahorrar un periodo antes del final
Utilidad directa	$u(x_1, x_2)$	$U(C_{T-1}, A_T)$
Decisiones óptimas	$\left.\begin{array}{l} x_1^*(p,m) \\ x_2^*(p,m) \end{array}\right\}$ 'Demandas Marshallianas'	$\left.\begin{array}{l} \widehat{C_{T-1}}(a;r,w) \\ \widehat{A_T}(a;r,w) \end{array}\right\}$ 'Funciones de política'

Utilidad indirecta | decisiones óptimas vs. Función valor | funciones de política

Concepto	Problema estático de optimización de un consumidor con dos bienes		Problema dinámico de optimización de un individuo entre consumir y ahorrar un periodo antes del final	
Utilidad directa	$u(x_1, x_2)$		$U(C_{T-1}, A_T)$	
Decisiones óptimas	$x_1^*(p,m)$ $x_2^*(p,m)$	'Demandas Marshallianas'	$\widehat{C_{T-1}}(a;r,w)$ $\widehat{A_T}(a;r,w)$	'Funciones de política'
Utilidad indirecta	$v(p,m) = u[x_1^*(p,m), x_2^*(p,m)]$		$V_{T-1}(a) = U\left[\widehat{C_{T-1}}(a;r,w), \widehat{A_T}(a;r,w)\right]$ 'Función valor'	

35

35

'Ecuación de Bellman'

- Para nuestro modelo determinístico de consumo inter-temporal, la 'Ecuación de Bellman' es la siguiente:

$$V_t(a) = \max_{C_t, A_{t+1}} \left\{ U(C_t) + \beta V_{t+1}(A_{t+1}) \middle| A_{t+1} = (1 + r_t)A_t + w_t - C_t \right\}$$

36

36

'Ecuación de Bellman'

- Para nuestro modelo determinístico de consumo inter-temporal, la 'Ecuación de Bellman' es la siguiente:

$$V_t(a) = \max_{C_t, A_{t+1}} \left\{ U(C_t) + \beta V_{t+1}(A_{t+1}) \middle| A_{t+1} = (1 + r_t)A_t + w_t - C_t \right\}$$

- Es una función recursiva que relaciona las funciones valor en el tiempo

37

37

'Ecuación de Bellman'

- Para nuestro modelo determinístico de consumo inter-temporal, la 'Ecuación de Bellman' es la siguiente:

$$V_t(a) = \max_{C_t, A_{t+1}} \left\{ U(C_t) + \beta V_{t+1}(A_{t+1}) \middle| A_{t+1} = (1 + r_t)A_t + w_t - C_t \right\}$$

- Es una función recursiva que relaciona las funciones valor en el tiempo

- La idea es resolver para el último periodo, después para los dos últimos periodos, luego para los tres últimos y así sucesivamente

38

38

Inducción 'hacia atrás' $t = 3$

$$\underbrace{\qquad}_{t=1}\underbrace{\qquad}_{t=2}\underbrace{\qquad}_{t=3}$$

A_1 C_1 A_2 C_2 A_3 C_3 A_4 t

Problema de optimización del agente representativo cuando solo le queda por vivir $t = 3$

maximizar

$U(C_3) + \cancel{\beta V_4(A_4)}$

sujeto a

$(1 + r_3)A_3 + w_3 = C_3 + \cancel{A_4} \rightarrow 0$

Ecuación de Bellman

$V_3(a)$

39

39

Inducción 'hacia atrás' $t = 2$

$$\underbrace{\qquad}_{t=1}\underbrace{\qquad}_{t=2}\underbrace{\qquad}_{t=3}$$

A_1 C_1 A_2 C_2 A_3 C_3 A_4 t

Problema de optimización del agente representativo cuando va a vivir en $t = 2$ y ya maximizó en $t = 3$

maximizar

$U(C_2) + \beta V_3(A_3)$

sujeto a

$(1 + r_2)A_2 + w_2 = C_2 + A_3$

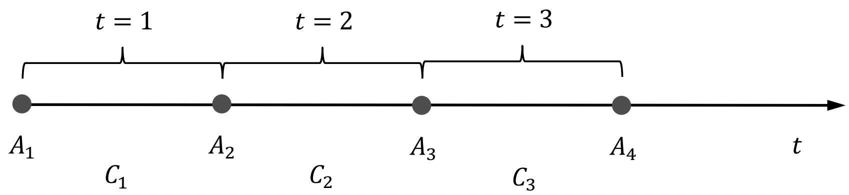
Ecuación de Bellman

$V_2(a)$

40

40

Inducción 'hacia atrás' $t = 1$



Problema de optimización del agente representativo cuando va a vivir en $t = 1$ y ya maximizó en $t = 2$ y $t = 3$

maximizar

$U(C_1) + \beta V_2(A_2)$

sujeto a

$(1 + r_1)A_1 + w_1 = C_1 + A_2$

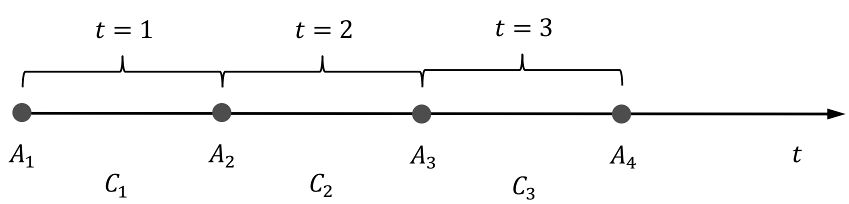
La 'función valor' V_2 ya incorpora las decisiones óptimas en $t = 2$ y $t = 3$ (*i.e.* las funciones de política $\widehat{C_2}, \widehat{A_3}, \widehat{C_3}, \widehat{A_4}$)

Ecuación de Bellman
$V_1(a)$

41

41

Ahora sí, empecemos en $t = 3$



Problema de optimización del agente representativo cuando solo le queda por vivir $t = 3$

maximizar

$U(C_3) + \cancel{\beta V_4(A_4)}$

sujeto a

$(1 + r_3)A_3 + w_3 = C_3 + \cancelto{0}{A_4}$

Ecuación de Bellman
$V_3(a)$

42

42

Programación Dinámica en nuestro problema determinístico de tres periodos

Empecemos por resolver el problema[1] en $t = 3$:

$$V_3(a) = \max_{C_3,\, A_4}\{U(C_3)|(1 + r_3)a + w_3 = C_3 + A_4;\ A_4 \geq 0\}$$

Ya sabemos que dejar activos en $t = 4$ no incrementa el nivel de utilidad del agente representativo, por lo que la función de política –*i.e.* la decisión óptima-, es $\widehat{A_4} = 0$.

Así, la restricción presupuestaria inter-temporal queda:

$$(1 + r_3)a + w_3 = C_3$$

1. Al igual que cuando abordamos el tema de las funciones de política, denotaremos al nivel de activos en la actualidad como a. Adicionalmente, denotaremos al nivel de activos futuro como a^+, *à la* Heijdra (2017). **Heijdra, Ben J**. *Foundations of Modern Macroeconomics*. 3a ed., Oxford, Reino Unido: Oxford University Press, 2017, p. 674.

$t = 3$

…y el problema se simplifica a:

$$V_3(a) = \max_{C_3}\{U(C_3)\big|(1 + r_3)a + w_3 = C_3\}$$

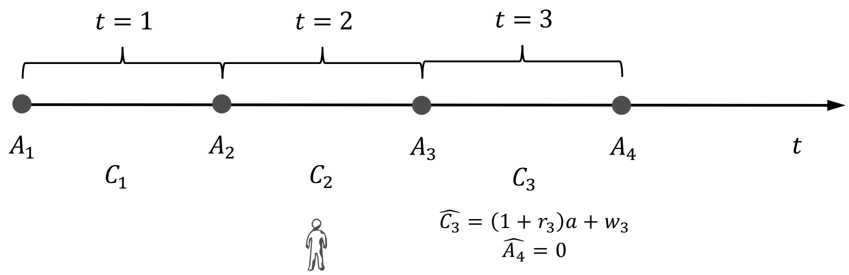
Entonces el nivel óptimo de consumo en $t = 3$ (o 'función de política') es:

$$\widehat{C_3} = (1 + r_3)a + w_3$$

…y el nivel de activos para el periodo $t = 4$ es:

$$\widehat{A_4} = 0$$

Ahora resolvamos en $t = 2$



Problema de optimización del agente representativo cuando va a vivir en $t = 2$ y ya maximizó en $t = 3$

maximizar
$U(C_2) + \beta V_3(A_3)$
sujeto a
$(1 + r_2)A_2 + w_2 = C_2 + A_3$

Ecuación de Bellman
$V_2(a)$

45

45

$t = 2$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 2$:

$$V_2(a) = \max_{C_2, A_3} \left\{ U(C_2) + \beta V_3(A_3) \middle| (1 + r_2)a + w_2 = C_2 + A_3 \right\}$$

46

46

$t = 2$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 2$:

$$V_2(a) = \max_{C_2, A_3} \{ U(C_2) + \beta V_3(A_3) \big| (1 + r_2)a + w_2 = C_2 + A_3 \}$$

La 'usanza' en cuanto a notación en Programación Dinámica es que no utilicemos el subíndice de tiempo (t) en las variables de control y de estado, por lo que el problema queda:

47

47

$t = 2$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 2$:

$$V_2(a) = \max_{C_2, A_3} \{ U(C_2) + \beta V_3(A_3) \big| (1 + r_2)a + w_2 = C_2 + A_3 \}$$

La 'usanza' en cuanto a notación en Programación Dinámica es que no utilicemos el subíndice de tiempo (t) en las variables de control y de estado, por lo que el problema queda:

$$V_2(a) = \max_{c, a^+} \{ U(c) + \beta V_3(a^+) \big| (1 + r_2)a + w_2 = c + a^+ \}$$

48

48

$t = 2$

$$V_2(a) = \max_{c,a^+}\left\{U(c) + \beta V_3(a^+)\middle|(1+r_2)a + w_2 = c + a^+\right\}$$

Para resolverlo, podemos despejar a^+ de la restricción e incorporarlo en la función objetivo:

$$\max_c\{U(c) + \beta V_3[(1+r_2)a + w_2 - c]\}$$

49

49

$t = 2$

$$V_2(a) = \max_{c,a^+}\left\{U(c) + \beta V_3(a^+)\middle|(1+r_2)a + w_2 = c + a^+\right\}$$

Para resolverlo, podemos despejar a^+ de la restricción e incorporarlo en la función objetivo:

$$\max_c\{U(c) + \beta V_3[(1+r_2)a + w_2 - c]\}$$

FOC

$\frac{\partial(\cdot)}{\partial c} = 0 \iff \qquad U'(c) - \beta V_3{}'[(1+r_2)a + w_2 - c] = 0$

$$U'(c) = \beta V_3{}'[(1+r_2)a + w_2 - c]$$

50

50

$$t = 2$$

$$U'(c) = \beta V_3'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$$

Sabemos que $U(c) = \ln c$, entonces $U'(c) = \frac{1}{c}$

51

51

$$t = 2$$

$$U'(c) = \beta V_3'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$$

Sabemos que $U(c) = \ln c$, entonces $U'(c) = \frac{1}{c}$

Ahora solo nos falta obtener $V_3'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$

52

52

$t = 2$

$$U'(c) = \beta V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$$

Sabemos que $U(c) = \ln c$, entonces $U'(c) = \frac{1}{c}$

Ahora solo nos falta obtener $V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$

¿Cómo obtenemos V_3?

53

53

$t = 2$

$$U'(c) = \beta V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$$

Sabemos que $U(c) = \ln c$, entonces $U'(c) = \frac{1}{c}$

Ahora solo nos falta obtener $V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$

¿Cómo obtenemos V_3?

Es necesario incorporar las soluciones óptimas o funciones de política $\widehat{C_3}$ y $\widehat{A_4}$ en la función de utilidad en $t = 3$ y así obtener la 'función valor'

54

54

$t = 2$

Las funciones de política en $t = 3$:
$\widehat{C_3} = (1 + r_3)a + w_3$
$\widehat{A_4} = 0$

1. La 'usanza' en Programación Dinámica es también ya no escribir de manera explícita los parámetros dentro de los paréntesis cuando nos referimos a las funciones. Es decir, en lugar de escribir $V_3(a; r, w) = U[\widehat{C_3}(a; r, w), \widehat{A_4}(a; r, w)]$, ahora solo la expresamos como $V_3(a) = U[\widehat{C_3}(a), \widehat{A_4}(a)]$

$t = 2$

Las funciones de política en $t = 3$:
$\widehat{C_3} = (1 + r_3)a + w_3$
$\widehat{A_4} = 0$
La 'función valor' en $t = 3$, es decir $V_3(a) = U[\widehat{C_3}(a), \widehat{A_4}(a)]$ es[1]:

1. La 'usanza' en Programación Dinámica es también ya no escribir de manera explícita los parámetros dentro de los paréntesis cuando nos referimos a las funciones. Es decir, en lugar de escribir $V_3(a; r, w) = U[\widehat{C_3}(a; r, w), \widehat{A_4}(a; r, w)]$, ahora solo la expresamos como $V_3(a) = U[\widehat{C_3}(a), \widehat{A_4}(a)]$

$t = 2$

Las funciones de política en $t = 3$:
$\widehat{C_3} = (1 + r_3)a + w_3$
$\widehat{A_4} = 0$
La 'función valor' en $t = 3$, es decir $V_3(a) = U\left[\widehat{C_3}(a), \widehat{A_4}(a)\right]$ es[1]:

$$V_3(a) = \ln[(1 + r_3)a + w_3]$$

1. La 'usanza' en Programación Dinámica es también ya no escribir de manera explícita los parámetros dentro de los paréntesis cuando nos referimos a las funciones. Es decir, en lugar de escribir $V_3(a; r, w) = U\left[\widehat{C_3}(a; r, w), \widehat{A_4}(a; r, w)\right]$, ahora solo la expresamos como $V_3(a) = U\left[\widehat{C_3}(a), \widehat{A_4}(a)\right]$

57

57

$t = 2$

Las funciones de política en $t = 3$:
$\widehat{C_3} = (1 + r_3)a + w_3$
$\widehat{A_4} = 0$
La 'función valor' en $t = 3$, es decir $V_3(a) = U\left[\widehat{C_3}(a), \widehat{A_4}(a)\right]$ es[1]:

$$V_3(a) = \ln[(1 + r_3)a + w_3]$$

Por lo que $V_3'(a) = \frac{1}{(1+r_3)a+w_3} \cdot (1 + r_3)$ o $V_3'(a) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a+w_3}$

1. La 'usanza' en Programación Dinámica es también ya no escribir de manera explícita los parámetros dentro de los paréntesis cuando nos referimos a las funciones. Es decir, en lugar de escribir $V_3(a; r, w) = U\left[\widehat{C_3}(a; r, w), \widehat{A_4}(a; r, w)\right]$, ahora solo la expresamos como $V_3(a) = U\left[\widehat{C_3}(a), \widehat{A_4}(a)\right]$

58

58

$t = 2$

Sin embargo, necesitamos ${V_3}'(a^+)$, no ${V_3}'(a)$

Si $V_3'(a) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a+w_3}$

59

59

$t = 2$

Sin embargo, necesitamos ${V_3}'(a^+)$, no ${V_3}'(a)$

Si $V_3'(a) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a+w_3}$, entonces $V_3'(a^+) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a^++w_3}$

60

60

$t = 2$

Sin embargo, necesitamos $V_3{}'(a^+)$, no $V_3{}'(a)$

Si $V_3'(a) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a+w_3}$, entonces $V_3'(a^+) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a^+ + w_3}$

...y ya sabíamos que por la restricción: $a^+ = (1 + r_2)a + w_2 - c$

61

61

$t = 2$

Sin embargo, necesitamos $V_3{}'(a^+)$, no $V_3{}'(a)$

Si $V_3'(a) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a+w_3}$, entonces $V_3'(a^+) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a^+ + w_3}$

...y ya sabíamos que por la restricción: $a^+ = (1 + r_2)a + w_2 - c$

Por lo que entonces:

$$V_3'(a^+) = \frac{(1 + r_3)}{(1 + r_3)[(1 + r_2)a + w_2 - c\,] + w_3}$$

62

62

$t = 2$

Ahora sí podemos expresar la condición de primer orden:

$$U'(c) = \beta V_3'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$$

Con $U'(c)$ y $V_3'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$ de manera explícita:

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1 + r_3)}{(1 + r_3)[(1 + r_2)a + w_2 - c\,] + w_3}$$

Resolvemos para c y luego sustituir c en la restricción…

63

63

$t = 2$

Ahora sí podemos expresar la condición de primer orden:

$$U'(c) = \beta V_3'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$$

Con $U'(c)$ y $V_3'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$ de manera explícita:

64

64

$t = 2$

Ahora sí podemos expresar la condición de primer orden:

$$U'(c) = \beta V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$$

Con $U'(c)$ y $V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$ de manera explícita:

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1 + r_3)}{(1 + r_3)[(1 + r_2)a + w_2 - c\,] + w_3}$$

65

65

$t = 2$

Ahora sí podemos expresar la condición de primer orden:

$$U'(c) = \beta V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$$

Con $U'(c)$ y $V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$ de manera explícita:

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1 + r_3)}{(1 + r_3)[(1 + r_2)a + w_2 - c\,] + w_3}$$

Resolvemos para c y luego sustituir c en la restricción…

66

66

$t = 2$

$$\beta(1 + r_3)c \ = (1 + r_3)[(1 + r_2)a + w_2 - c] + w_3$$

67

67

$t = 2$

$$\beta(1 + r_3)c \ = (1 + r_3)[(1 + r_2)a + w_2 - c] + w_3$$

$$\frac{\beta(1 + r_3)c}{1 + r_3} = \frac{(1 + r_3)[(1 + r_2)a + w_2 - c]}{(1 + r_3)} + \frac{w_3}{1 + r_3}$$

68

68

$t = 2$

$$\beta(1+r_3)c = (1+r_3)[(1+r_2)a + w_2 - c] + w_3$$

$$\frac{\beta\cancel{(1+r_3)}c}{\cancel{1+r_3}} = \frac{\cancel{(1+r_3)}[(1+r_2)a + w_2 - c]}{\cancel{(1+r_3)}} + \frac{w_3}{1+r_3}$$

69

69

$t = 2$

$$\beta(1+r_3)c = (1+r_3)[(1+r_2)a + w_2 - c] + w_3$$

$$\frac{\beta\cancel{(1+r_3)}c}{\cancel{1+r_3}} = \frac{\cancel{(1+r_3)}[(1+r_2)a + w_2 - c]}{\cancel{(1+r_3)}} + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$c + \beta c = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

70

70

$t = 2$

$$\beta(1+r_3)c = (1+r_3)[(1+r_2)a + w_2 - c] + w_3$$

$$\frac{\beta\cancel{(1+r_3)}c}{\cancel{1+r_3}} = \frac{\cancel{(1+r_3)}[(1+r_2)a + w_2 - c]}{\cancel{(1+r_3)}} + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$c + \beta c = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$(1+\beta)c = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

71

71

$t = 2$

$$\beta(1+r_3)c = (1+r_3)[(1+r_2)a + w_2 - c] + w_3$$

$$\frac{\beta\cancel{(1+r_3)}c}{\cancel{1+r_3}} = \frac{\cancel{(1+r_3)}[(1+r_2)a + w_2 - c]}{\cancel{(1+r_3)}} + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$c + \beta c = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$(1+\beta)c = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$c = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

72

72

$t = 2$

Sustituimos $c = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$ en la restricción $a^+ = (1+r_2)a + w_2 - c$, para obtener a^+:

73

73

$t = 2$

Sustituimos $c = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$ en la restricción $a^+ = (1+r_2)a + w_2 - c$, para obtener a^+:

$$a^+ = (1+r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

74

74

$t = 2$

Sustituimos $c = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$ en la restricción $a^+ = (1+r_2)a + w_2 - c$, para obtener a^+:

$$a^+ = (1+r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$a^+ = \frac{1+\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

75

75

$t = 2$

Sustituimos $c = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$ en la restricción $a^+ = (1+r_2)a + w_2 - c$, para obtener a^+:

$$a^+ = (1+r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$a^+ = \frac{1+\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

$$a^+ = \frac{1+\beta-1}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

76

76

$t = 2$

Sustituimos $c = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$ en la restricción $a^+ = (1+r_2)a + w_2 - c$, para obtener a^+:

$$a^+ = (1+r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$a^+ = \frac{1+\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

$$a^+ = \frac{\cancel{1} + \beta \cancel{- 1}}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

77

77

$t = 2$

Las 'funciones de política' en $t = 2$ son:

$c = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$

$a^+ = \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$

78

$t = 2$

Las 'funciones de política' en $t = 2$ son:

$$c = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$a^+ = \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

Para que $\widehat{C_2} = c$, se necesita que $\widehat{A_3} = a^+$ y así:

$$\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$\widehat{A_3} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

79

79

$t = 2$

Las 'funciones de política' en $t = 2$ son:

$$c = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$a^+ = \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

Para que $\widehat{C_2} = c$, se necesita que $\widehat{A_3} = a^+$ y así:

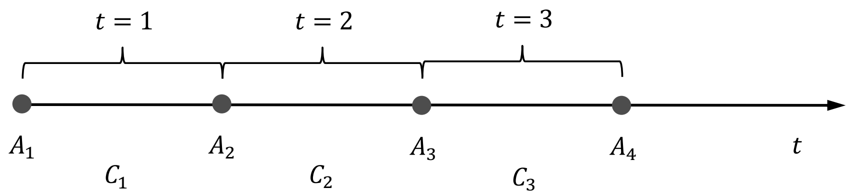
$$\boxed{\begin{aligned}\widehat{C_2} &= \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right] \\ \widehat{A_3} &= \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)\end{aligned}}$$

Llegamos a las mismas funciones de política que en la sección anterior

80

80

Inducción ‘hacia atrás’



$$\widehat{C_3} = (1 + r_3)a + w_3$$
$$\widehat{A_4} = 0$$

$$\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$\widehat{A_3} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1 + r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

maximizar
$U(C_1) + \beta V_2(A_2)$
sujeto a
$(1 + r_1)A_1 + w_1 = C_1 + A_2$

Ecuación de Bellman
$V_1(a)$

81

81

$t = 1$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 1$:

$$V_1(a) = \max_{C_1, A_2}\left\{U(C_1) + \beta V_2(A_2) \middle| (1 + r_1)a + w_1 = C_1 + A_2\right\}$$

82

82

$t = 1$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 1$:

$$V_1(a) = \max_{C_1, A_2} \{ U(C_1) + \beta V_2(A_2) | (1 + r_1)a + w_1 = C_1 + A_2 \}$$

$$V_1(a) = \max_{c, a^+} \{ U(c) + \beta V_2(a^+) | (1 + r_1)a + w_1 = c + a^+ \}$$

83

83

$t = 1$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 1$:

$$V_1(a) = \max_{C_1, A_2} \{ U(C_1) + \beta V_2(A_2) | (1 + r_1)a + w_1 = C_1 + A_2 \}$$

$$V_1(a) = \max_{c, a^+} \{ U(c) + \beta V_2(a^+) | (1 + r_1)a + w_1 = c + a^+ \}$$

FOC

$$U'(c) = \beta V_2{}'[(1 + r_1)a + w_1 - c]$$

84

84

$t = 1$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 1$:

$$V_1(a) = \max_{C_1, A_2} \{ U(C_1) + \beta V_2(A_2) \big| (1 + r_1)a + w_1 = C_1 + A_2 \}$$

$$V_1(a) = \max_{c, a^+} \{ U(c) + \beta V_2(a^+) \big| (1 + r_1)a + w_1 = c + a^+ \}$$

FOC

$$U'(c) = \beta V_2{}'[(1 + r_1)a + w_1 - c]$$

Ahora, al igual que el problema en $t = 2$, necesitamos $U'(c)$ y $V_2{}'(a^+)$

85

85

$t = 1$

$$U(c) = \ln c$$

$$U'(c) = \frac{1}{c}$$

Ahora solo falta $V_2{}'(a^+)$ y para obtenerla, necesitamos la función valor en $t + 1$, *i.e.* $V_2(a)$

86

86

$t = 1$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 1$:

$$V_1(a) = \max_{C_1, A_2} \{ U(C_1) + \beta V_2(A_2) \big| (1 + r_1)a + w_1 = C_1 + A_2 \}$$

$$V_1(a) = \max_{c, a^+} \{ U(c) + \beta V_2(a^+) \big| (1 + r_1)a + w_1 = c + a^+ \}$$

FOC

$$U'(c) = \beta V_2{}'[(1 + r_1)a + w_1 - c]$$

Ahora, al igual que el problema en $t = 2$, necesitamos $U'(c)$ y $V_2{}'(a^+)$

87

87

$t = 1$

$$V_2(a) = U(\widehat{C_2}) + \beta V_3[(1 + r_3)\widehat{A_3} + w_3]$$

88

88

$t = 1$

$$V_2(a) = U(\widehat{C_2}) + \beta V_3[(1 + r_3)\widehat{A_3} + w_3]$$

$$V_2(a) = \ln(\widehat{C_2}) + \beta \ln[(1 + r_3)\widehat{A_3} + w_3]$$

89

89

$t = 1$

$$V_2(a) = U(\widehat{C_2}) + \beta V_3[(1 + r_3)\widehat{A_3} + w_3]$$

$$V_2(a) = \ln(\widehat{C_2}) + \beta \ln[(1 + r_3)\widehat{A_3} + w_3]$$

$$\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$\widehat{A_3} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1 + r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

90

90

$t = 1$

$$V_2(a) = U(\widehat{C_2}) + \beta V_3[(1+r_3)\widehat{A_3} + w_3]$$

$$V_2(a) = \ln(\widehat{C_2}) + \beta \ln[(1+r_3)\widehat{A_3} + w_3]$$

$$\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$\widehat{A_3} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta \ln\left\langle(1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)\right\} + w_3\right\rangle$$

91

91

$t = 1$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta \ln\left\langle(1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)\right\} + w_3\right\rangle$$

92

92

$t = 1$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta \ln\left\langle(1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)\right\} + w_3\right\rangle$$

Sugiero hacer más sencilla la parte de la derecha de la expresión, para poder utilizar las leyes de los logaritmos y simplificar la ecuación completa

93

93

$t = 1$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta \ln\left\langle(1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)\right\} + w_3\right\rangle$$

Sugiero hacer más sencilla la parte de la derecha de la expresión, para poder utilizar las leyes de los logaritmos y simplificar la ecuación completa

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta \ln\left\langle(1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\}\right\rangle$$

94

94

$t = 1$

$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta\ln\left\langle(1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}\left[(1+ r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\}\right\rangle$

95

95

$t = 1$

$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta\ln\left\langle(1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}\left[(1+ r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\}\right\rangle$

$V_2(a) = \ln(1) - \ln(1+\beta) + \ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right] + \beta\ln(1+ r_3) + \ln\beta^\beta - \ln(1+\beta)^\beta + \beta\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$

96

96

$t = 1$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta \ln\left\langle(1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\}\right\rangle$$

$$V_2(a) = \overset{0}{\ln(1)} - \ln(1+\beta) + \ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right] + \beta\ln(1+r_3) + \ln\beta^{\beta} - \ln(1+\beta)^{\beta} + \beta\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

97

97

$t = 1$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta \ln\left\langle(1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\}\right\rangle$$

$$V_2(a) = \overset{0}{\ln(1)} - \ln(1+\beta) + \ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right] + \beta\ln(1+r_3) + \ln\beta^{\beta} - \ln(1+\beta)^{\beta} + \beta\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$V_2(a) = -\ln(1+\beta) + \ln\beta^{\beta} - \ln(1+\beta)^{\beta} + \beta\ln(1+r_3) + \ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right] + \beta\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

98

98

$t = 1$

$V_2(a) = -\ln(1+\beta) + \ln\beta^\beta - \ln(1+\beta)^\beta + \beta\ln(1+r_3) + \ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right] + \beta\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$

99

99

$t = 1$

$V_2(a) = -\ln(1+\beta) + \ln\beta^\beta - \ln(1+\beta)^\beta + \beta\ln(1+r_3) + \ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right] + \beta\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$

$V_2(a) = \ln\beta^\beta - \ln(1+\beta) - \ln(1+\beta)^\beta + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$

100

100

$t = 1$

$V_2(a) = -\ln(1+\beta) + \ln\beta^{\beta} - \ln(1+\beta)^{\beta} + \beta\ln(1+r_3) + \ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right] + \beta\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$

$V_2(a) = \ln\beta^{\beta} - \ln(1+\beta) - \ln(1+\beta)^{\beta} + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$

$V_2(a) = \ln\left[\frac{\beta^{\beta}}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$

101

101

$t = 1$

$V_2(a) = \ln\left[\frac{\beta^{\beta}}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$

Regresamos a la condición de primer orden del problema de optimización del agente representativo en $t = 1$:

$$U'(c) = \beta V_2{}'[(1+r_1)a + w_1 - c]$$

Entonces obtenemos $V_2{}'(a) = \frac{(1+\beta)\mathrm{l}(1+r_2)}{(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}}$

102

102

$t = 1$

$$V_2{}'(a) = \frac{(1+\beta)(1+r_2)}{(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}}$$

Podemos simplicar:

$$V_2{}'(a) = \frac{\frac{(1+\beta)\cancel{(1+r_2)}}{\cancel{1+r_2}}}{\frac{\cancel{(1+r_2)}a}{\cancel{1+r_2}} + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

$$V_2{}'(a) = \frac{1+\beta}{a + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

103

103

$t = 1$

$$V_2{}'(a) = \frac{1+\beta}{a + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

Ya tenemos $V_2{}'(a)$, ahora nos falta $V_2{}'(a^+)$...
...en donde $a^+ = (1+r_1)a + w_1 - c$

$$V_2{}'(a^+) = \frac{1+\beta}{a^+ + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

$$V_2{}'(a^+) = \frac{1+\beta}{(1+r_1)a + w_1 - c + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

104

104

$t = 1$

La condición de primer orden $U'(c) = \beta V_2{}'[(1+r_1)a + w_1 - c]$ queda:

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1+\beta)}{(1+r_1)a + w_1 - c\ + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

Ahora despejamos c y substituimos la expresión que encontremos en la ecuación a^+

10
5

105

Nuestra agenda de hoy

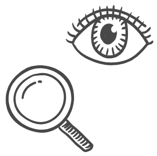
Revisión de datos y eventos macro

Optimización de un modelo determinístico de tres periodos

Tarea

10
6

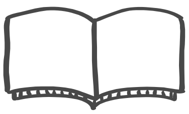
106



(1) Estar atentos y revisar los datos y eventos económicos que se van a publicar en la semana

2 páginas

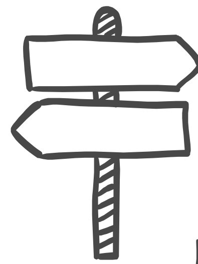
https://www.banorte.com/cms/casadebolsabanorteixe/analisisyestrategia/analisiseconomico/otros/20210517_Calendario.pdf

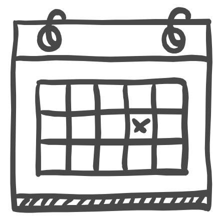


(2) Leer "El largo y sinuoso camino de la inflación pandémica" de Jonathan Heath (jueves 13 de mayo)

2 página

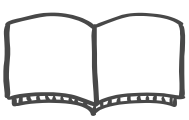
https://jonathanheath.net/el-largo-y-sinuoso-camino-de-la-inflacion-pandemica/





10
7

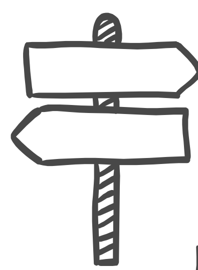
107

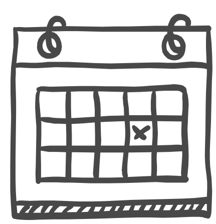


(3) Leer mi columna en *El Financiero* (martes 18-may) sobre las finanzas públicas

1 página

https://www.elfinanciero.com.mx/opinion/gabriel-casillas/2021/05/18/sostenibilidad-de-las-finanzas-publicas-en-el-corto-plazo/





10
8

108

Muchas gracias!

10
9

109

Slides Carnival

Free templates for all your presentation needs

For PowerPoint and Google Slides

100% free for personal or commercial use

Ready to use, professional and customizable

Blow your audience away with attractive visuals

110