# Macroeconomía Dinámica

EC3024.1 (CCM)

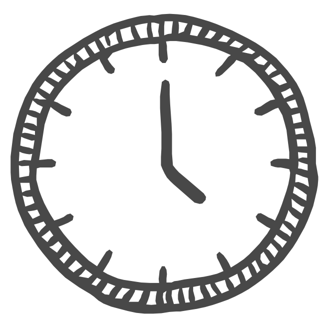
**CLASE 15**

1

# RECESO

Hoy habrá **dos recesos** de 10 minutos:

4:50pm y 5:50pm



2

2

## Nuestra agenda de hoy

- Revisión de datos y eventos macro
- Optimización de un modelo determinístico con agente representativo inmortal
- Dudas s/Examen Final *Take-Home*

3

3

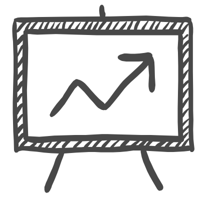
## Nuestra agenda de hoy

- **Revisión de datos y eventos macro**
- Optimización de un modelo determinístico con agente representativo inmortal
- Dudas s/Examen Final *Take-Home*

4

4

# Informe Trimestral Banxico



**Crecimiento del PIB**
%

| Informe | | 2021 | 2022 |
|---|---|---|---|
| Actual | Escenario central | 6.0 | 3.0 |
| | Trayectoria Límite Inferior | 5.0 | 2.0 |
| | Trayectoria Límite Superior | 7.0 | 4.0 |
| Anterior | Escenario central | 4.8 | 3.3 |
| | Trayectoria Límite Inferior | 2.8 | 3.0 |
| | Trayectoria Límite Superior | 6.7 | 3.4 |

**Cuenta Corriente**
% del PIB

| Informe | 2021 | 2022 |
|---|---|---|
| Actual | -0.4 a 0.2 | -1.0 a -0.2 |
| Anterior | -0.5 a 0.3 | -0.9 a -0.2 |

**Variación en los Puestos de Trabajo Afiliados al IMSS**
Miles de Puestos

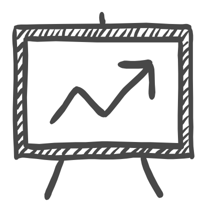
| Informe | 2021 | 2022 |
|---|---|---|
| Actual | 370 a 570 | 390 a 590 |
| Anterior | 250 a 570 | 390 a 590 |

Fuente: Banco de México

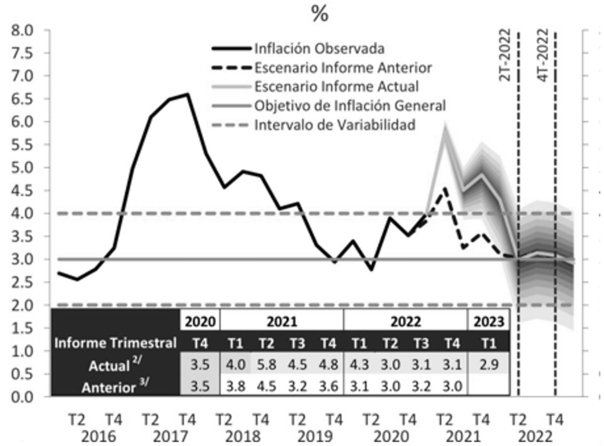




# Informe Trimestral Banxico



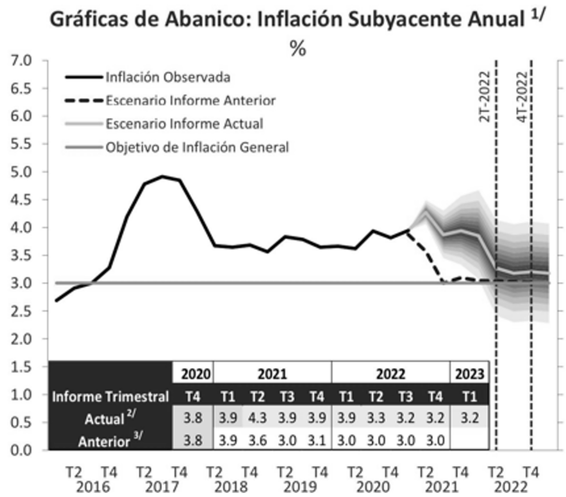
**Gráficas de Abanico: Inflación General Anual [1/]**
%



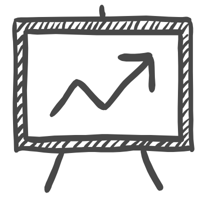

| | 2020 | 2021 | | | | 2022 | | | | 2023 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Informe Trimestral | T4 | T1 | T2 | T3 | T4 | T1 | T2 | T3 | T4 | T1 |
| Actual [2/] | 3.5 | 4.0 | 5.8 | 4.5 | 4.8 | 4.3 | 3.0 | 3.1 | 3.1 | 2.9 |
| Anterior [3/] | 3.5 | 3.8 | 4.5 | 3.2 | 3.6 | 3.1 | 3.0 | 3.2 | 3.0 | |

Fuente: Banco de México

# Informe Trimestral Banxico




| Informe Trimestral | 2020 T4 | 2021 T1 | 2021 T2 | 2021 T3 | 2021 T4 | 2022 T1 | 2022 T2 | 2022 T3 | 2022 T4 | 2023 T1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Actual 2/ | 3.8 | 3.9 | 4.3 | 3.9 | 3.9 | 3.9 | 3.3 | 3.2 | 3.2 | 3.2 |
| Anterior 3/ | 3.8 | 3.9 | 3.6 | 3.0 | 3.1 | 3.0 | 3.0 | 3.0 | 3.0 | |



Fuente: Banco de México

7

7

# Reto Banxico - ¡¡¡Muchas felicidades!!!


8

## Nuestra agenda de hoy

- Revisión de datos y eventos macro
- Optimización de un modelo determinístico con agente representativo inmortal
- Dudas s/Examen Final *Take-Home*

9

9

## Last time on…



10

## Fórmula Benveniste-Scheinkman

Otra forma de ver la relación entre la función valor (o 'utilidad indirecta', en este caso) y la función de utilidad es la siguiente:

Despejemos $\frac{\partial U}{\partial a}$ de $\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1 + r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$

Este resultado va a ser muy útil en el modelo en el que el agente representativo vive de manera infinita

11

11

Lawrence M. Benveniste
(¿? - ...)

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1 + r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$$

Fórmula Benveniste-Scheinkman

Jose A. Scheinkman
(1948 - ...)

Fuente: Benveniste (https://goizueta.emory.edu/faculty/profiles/lawrence-benveniste); Scheinkman (https://epoca.globo.com/economia/perdemos-tres-anos-de-crescimento-diz-professor-de-columbia-24780527)

12

12

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1 + r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$$

Generalizando para toda $t$

$$\frac{\partial V_t}{\partial a} = (1 + r_t)\frac{\partial U}{\partial a}$$

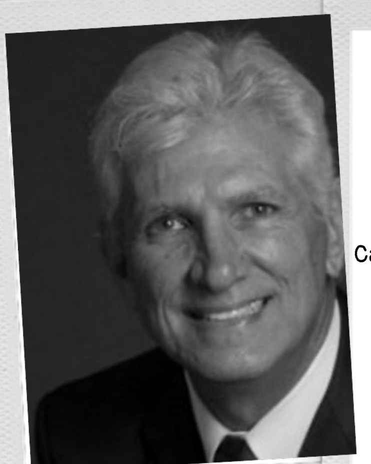
Lawrence M. Benveniste
(¿? - ...)

Fórmula Benveniste-Scheinkman

Jose A. Scheinkman
(1948 - ...)

Fuente: Benveniste (https://goizueta.emory.edu/faculty/profiles/lawrence-benveniste); Scheinkman (https://epoca.globo.com/economia/perdemos-tres-anos-de-crescimento-diz-professor-de-columbia-24780527) 13

13

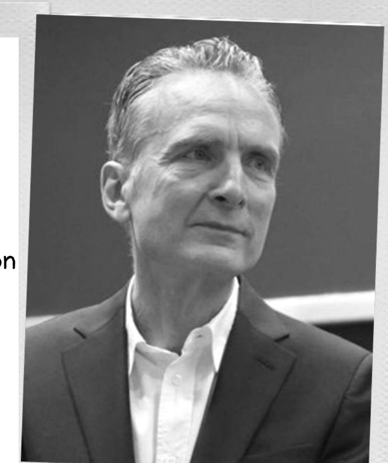


$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1 + r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$$

Generalizando para toda $t$

$$\frac{\partial V_t}{\partial a} = (1 + r_t)\frac{\partial U}{\partial a}$$

Cabe señalar que debido a que la restricción es $A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t$ , $\forall t$



Lawrence M. Benveniste
(¿? - ...)

Fórmula Benveniste-Scheinkman

Jose A. Scheinkman
(1948 - ...)

Fuente: Benveniste (https://goizueta.emory.edu/faculty/profiles/lawrence-benveniste); Scheinkman (https://epoca.globo.com/economia/perdemos-tres-anos-de-crescimento-diz-professor-de-columbia-24780527) 14

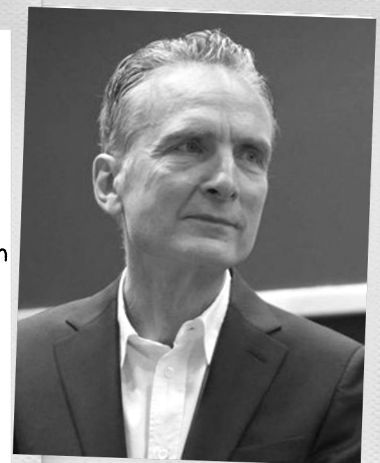
14

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1 + r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$$

Generalizando para toda $t$

$$\frac{\partial V_t}{\partial a} = (1 + r_t)\frac{\partial U}{\partial a}$$

Cabe señalar que debido a que la restricción es $A_{t+1} = (1 + r_t)\ A_t + w_t - C_t\ , \forall t$, entonces la 'función de transformación' de los activos es $f(A_t) = (1 + r_t)\ A_t$



Lawrence M. Benveniste (¿? - ...)

Fórmula Benveniste-Scheinkman

Jose A. Scheinkman (1948 - ...)

Fuente: Benveniste (https://goizueta.emory.edu/faculty/profiles/lawrence-benveniste); Scheinkman (https://epoca.globo.com/economia/perdemos-tres-anos-de-crescimento-diz-professor-de-columbia-24780527) 15

15

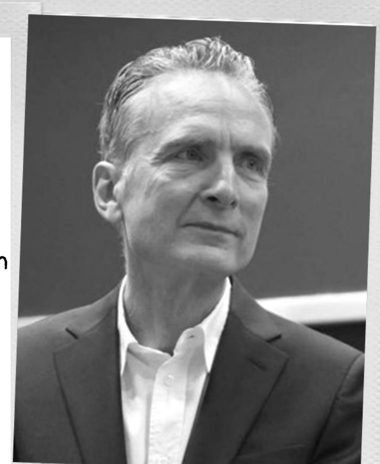
$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1 + r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$$

Generalizando para toda $t$

$$\frac{\partial V_t}{\partial a} = (1 + r_t)\frac{\partial U}{\partial a}$$

Cabe señalar que debido a que la restricción es $A_{t+1} = (1 + r_t)\ A_t + w_t - C_t\ , \forall t$, entonces la 'función de transformación' de los activos es $f(A_t) = (1 + r_t)\ A_t$, por lo que la fórmula queda:

$$V_t'(a) = f'(a)U'(a)$$



Lawrence M. Benveniste (¿? - ...)

Fórmula Benveniste-Scheinkman

Jose A. Scheinkman (1948 - ...)

Fuente: Benveniste (https://goizueta.emory.edu/faculty/profiles/lawrence-benveniste); Scheinkman (https://epoca.globo.com/economia/perdemos-tres-anos-de-crescimento-diz-professor-de-columbia-24780527) 16

16

En este caso en particular $f(a) = (1 + r_t)a$

# Resumen: Fórmula Benveniste-Scheinkman

$$V_t{}'(a) = f'(a)U'(a)$$

Ejemplo:

$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t$ s.a. $A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t$ , $\forall t$ y $A_4 \geq 0$

17

17

En este caso en particular $f(a) = (1 + r_t)a$

# Resumen: Fórmula Benveniste-Scheinkman

$$V_t{}'(a) = f'(a)U'(a)$$

Ejemplo:

$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t$ s.a. $A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t$ , $\forall t$ y $A_4 \geq 0$

(1) Proponer ecuación de Bellman para $t$

$V_t(a) = \max_{c,a^+} \{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) \,|\, (1 + r_t)a + w_t = c + a^+ \}$

18

18

En este caso en particular $f(a) = (1 + r_t)a$

# Resumen: Fórmula Benveniste-Scheinkman

$$V_t{}'(a) = f'(a)U'(a)$$

**Ejemplo:**

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t \text{ s.a. } A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , } \forall t \text{ y } A_4 \geq 0$$

(1) Proponer ecuación de Bellman para $t$ $\quad V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) \big| (1 + r_t)a + w_t = c + a^+ \}$

(2) Sustitutir restricción en la función objetivo $\quad V_t(a) = \max_{c}\{U(c) + \beta V_{t+1}[(1 + r_t)a + w_t - c] \}$

19



En este caso en particular $f(a) = (1 + r_t)a$

# Resumen: Fórmula Benveniste-Scheinkman

$$V_t{}'(a) = f'(a)U'(a)$$

**Ejemplo:**

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t \text{ s.a. } A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , } \forall t \text{ y } A_4 \geq 0$$

(1) Proponer ecuación de Bellman para $t$ $\quad V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) \big| (1 + r_t)a + w_t = c + a^+ \}$

(2) Sustitutir restricción en la función objetivo $\quad V_t(a) = \max_{c}\{U(c) + \beta V_{t+1}[(1 + r_t)a + w_t - c] \}$

(3) Obtener las Condiciones de Primer Orden (FOC) $\quad V_t'(a) = 0 \iff U'(c) = \beta V_{t+1}{}'(a^+)$

20

En este caso en particular $f(a) = (1 + r_t)a$

# Resumen: Fórmula Benveniste-Scheinkman

$$V_t{}'(a) = f'(a)U'(a)$$

**Ejemplo:**

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t \text{ s.a. } A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , } \forall t \text{ y } A_4 \geq 0$$

| | |
|---|---|
| (1) Proponer ecuación de Bellman para $t$ | $V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) \| (1 + r_t)a + w_t = c + a^+ \}$ |
| (2) Sustitutir restricción en la función objetivo | $V_t(a) = \max_{c}\{U(c) + \beta V_{t+1}[(1 + r_t)a + w_t - c] \}$ |
| (3) Obtener las Condiciones de Primer Orden (FOC) | $V_t'(a) = 0 \iff U'(c) = \beta V_{t+1}{}'(a^+)$ |
| (4) Utilizar la fórmula de Benveniste-Scheinkman (BS) y encontrar $V_{t+1}{}'(a^+)$ | $V_t{}'(a) = (1 + r_t)U'(c)$ Entonces $V_{t+1}{}'(a^+) = (1 + r_{t+1})U'(c^+)$ |

21

21

En este caso en particular $f(a) = (1 + r_t)a$

# Resumen: Fórmula Benveniste-Scheinkman

$$V_t{}'(a) = f'(a)U'(a)$$

**Ejemplo:**

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t \text{ s.a. } A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , } \forall t \text{ y } A_4 \geq 0$$

| | |
|---|---|
| (1) Proponer ecuación de Bellman para $t$ | $V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) \| (1 + r_t)a + w_t = c + a^+ \}$ |
| (2) Sustitutir restricción en la función objetivo | $V_t(a) = \max_{c}\{U(c) + \beta V_{t+1}[(1 + r_t)a + w_t - c] \}$ |
| (3) Obtener las Condiciones de Primer Orden (FOC) | $V_t'(a) = 0 \iff U'(c) = \beta V_{t+1}{}'(a^+)$ |
| (4) Utilizar la fórmula de Benveniste-Scheinkman (BS) y encontrar $V_{t+1}{}'(a^+)$ | $V_t{}'(a) = (1 + r_t)U'(c)$ Entonces $V_{t+1}{}'(a^+) = (1 + r_{t+1})U'(c^+)$ |
| (5) Sustituir BS en las FOC para obtener la Ecuación de Euler | $U'(c) = \beta(1 + r_{t+1})U'(c^+)$ |

22

22

En este caso en particular $f(a) = (1 + r_t)a$

# Resumen: Fórmula Benveniste-Scheinkman

$$V_t{}'(a) = f'(a)U'(a)$$

**Ejemplo:**

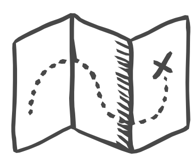
$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t \text{ s.a. } A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , } \forall t \text{ y } A_4 \geq 0$$

| | |
|---|---|
| (1) Proponer ecuación de Bellman para $t$ | $V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) \vert (1 + r_t)a + w_t = c + a^+ \}$ |
| (2) Sustitutir restricción en la función objetivo | $V_t(a) = \max_{c}\{U(c) + \beta V_{t+1}[(1 + r_t)a + w_t - c] \}$ |
| (3) Obtener las Condiciones de Primer Orden (FOC) | $V_t'(a) = 0 \iff U'(c) = \beta V_{t+1}{}'(a^+)$ |
| (4) Utilizar la fórmula de Benveniste-Scheinkman (BS) y encontrar $V_{t+1}{}'(a^+)$ | $V_t{}'(a) = (1 + r_t)U'(c)$<br>Entonces $V_{t+1}{}'(a^+) = (1 + r_{t+1})U'(c^+)$ |
| (5) Sustituir BS en las FOC para obtener la Ecuación de Euler | $U'(c) = \beta(1 + r_{t+1})U'(c^+)$ o $\frac{U'(c)}{U'(c^+)} = \beta(1 + r_{t+1})$ |

23

23

# ¿Cómo vamos a aprender DP?



| | Número de periodos de tiempo | Determinístico / Estocástico | Método de solución |
|---|---|---|---|
| (1) | Tres | Determinístico | Lagrange |
| (2) | Tres | Determinístico | Función de política[1] |
| (3) | Tres | Determinístico | Programación Dinámica |
| (4) | Infinito | Determinístico | Programación Dinámica |
| (5) | Tres | Estocástico | Programación Dinámica |
| (6) | Infinito | Estocástico | Programación Dinámica |

1. Realmente no es un método, sino una forma alternativa de expresar las soluciones óptimas, que ayuda a ilustrar la idea conceptual sobre la que descansa la programación dinámica.

24

24

# Modelo dinámico determinístico con un agente representativo inmortal

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}\{A_t\}_{t=2}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(C_t)$$

Sujeto a:

$A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t$ , para toda $t$

En donde:
$U(C_t)$ es una función de utilidad a partir del consumo en $t$ o $C_t$,
$U'(C_t) > 0$ y $U''(C_t) < 0$
$\beta$ es un factor de descuento, tal que $0 < \beta < 1$
$A_t$ son los activos que tiene en $t$,
$A_1 \geq 0$
$w_t$ es el salario que recibe en $t$

25

25


# Modelo dinámico determinístico con un agente representativo inmortal


$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}\{A_t\}_{t=2}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(C_t)$$

Sujeto a:

$A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t$ , para toda $t$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1 + r_t)} = 0$$


En donde:
$U(C_t)$ es una función de utilidad a partir del consumo en $t$ o $C_t$,
$U'(C_t) > 0$ y $U''(C_t) < 0$
$\beta$ es un factor de descuento, tal que $0 < \beta < 1$
$A_t$ son los activos que tiene en $t$,
$A_1 \geq 0$
$w_t$ es el salario que recibe en $t$


26

26

# Modelo dinámico determinístico con un agente representativo inmortal

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}\{A_t\}_{t=2}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(C_t)$$

Sujeto a:

$A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t$ , para toda $t$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1 + r_t)} = 0$$

'Condición de Solvencia'. El valor presente del nivel de activos conforme el tiempo se acerca al infinito es cero. En pocas palabras, el agente representativo no se puede endeudar

En donde:
$U(C_t)$ es una función de utilidad a partir del consumo en $t$ o $C_t$, $U'(C_t) > 0$ y $U''(C_t) < 0$
$\beta$ es un factor de descuento, tal que $0 < \beta < 1$
$A_t$ son los activos que tiene en $t$, $A_1 \geq 0$
$w_t$ es el salario que recibe en $t$

27

27

# Problema dinámico determinístico de un agente representativo inmortal

El problema del agente representativo es:

$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}\{A_t\}_{t=2}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(C_t)$ s.a. $A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t$ , $\forall t$ y $\lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1+r_t)} = 0$

28

28

# Problema dinámico determinístico de un agente representativo inmortal

El problema del agente representativo es:

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}\{A_t\}_{t=2}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(C_t) \text{ s.a. } A_{t+1} = (1+r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , } \forall t \text{ y } \lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1+r_t)} = 0$$

- La naturaleza de *Programación Dinámica* es es empezar a resolver el problema en el periodo terminal y luego ir resolviendo hacia atrás

29

29


# Problema dinámico determinístico de un agente representativo inmortal

El problema del agente representativo es:

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}\{A_t\}_{t=2}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(C_t) \text{ s.a. } A_{t+1} = (1+r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , } \forall t \text{ y } \lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1+r_t)} = 0$$

- La naturaleza de *Programación Dinámica* es es empezar a resolver el problema en el periodo terminal y luego ir resolviendo hacia atrás

- Sin embargo, en este caso no hay periodo terminal

30

30

## Problema dinámico determinístico de un agente representativo inmortal

El problema del agente representativo es:

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}\{A_t\}_{t=2}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(C_t) \text{ s.a. } A_{t+1} = (1+r_t)\,A_t + w_t - C_t\ , \forall t \text{ y } \lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1+r_t)} = 0$$

- La naturaleza de *Programación Dinámica* es es empezar a resolver el problema en el periodo terminal y luego ir resolviendo hacia atrás
- Sin embargo, en este caso no hay periodo terminal
- Así, existen dos diferencias importantes para resolver este problema:

31

31

## Problema dinámico determinístico de un agente representativo inmortal

El problema del agente representativo es:

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}\{A_t\}_{t=2}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(C_t) \text{ s.a. } A_{t+1} = (1+r_t)\,A_t + w_t - C_t\ , \forall t \text{ y } \lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1+r_t)} = 0$$

- La naturaleza de *Programación Dinámica* es es empezar a resolver el problema en el periodo terminal y luego ir resolviendo hacia atrás
- Sin embargo, en este caso no hay periodo terminal
- Así, existen dos diferencias importantes para resolver este problema:

(1) Proponer una *Ecuación de Bellman* para $t$ -en lugar de para $T$-, obtener las FOC y utilizar BS, para obtener la Ecuación de Euler; y

32

32

## Problema dinámico determinístico de un agente representativo inmortal

El problema del agente representativo es:

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}\{A_t\}_{t=2}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(C_t) \text{ s.a. } A_{t+1} = (1+r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , } \forall t \text{ y } \lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1+r_t)} = 0$$

- La naturaleza de *Programación Dinámica* es es empezar a resolver el problema en el periodo terminal y luego ir resolviendo hacia atrás
- Sin embargo, en este caso no hay periodo terminal
- Así, existen dos diferencias importantes para resolver este problema:

(1) Proponer una *Ecuación de Bellman* para $t$ -en lugar de para $T$-, obtener las FOC y utilizar BS, para obtener la Ecuación de Euler; y

(2) Sustituir la Ecuación de Euler en la restricción 'para toda la vida del individuo' (utilizando la 'Condición de Solvencia')

33

33

## *Ecuación de Bellman* para $t$, obtener FOC y utilizar BS

(1) Proponer Ecuación de Bellman para $t$:

34

34

## *Ecuación de Bellman* para $t$, obtener FOC y utilizar BS

(1) Proponer Ecuación de Bellman para $t$:

$$V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) | a^+ = (1 + r_t)\, a + w_t - c\}$$

35

35



## *Ecuación de Bellman* para $t$, obtener FOC y utilizar BS

(1) Proponer Ecuación de Bellman para $t$:

$$V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) | a^+ = (1 + r_t)\, a + w_t - c\}$$



(2) Substituir la restricción en la función objetivo:

36

36

## *Ecuación de Bellman* para $t$, obtener FOC y utilizar BS

(1) Proponer Ecuación de Bellman para $t$:

$$V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) | a^+ = (1 + r_t)\, a + w_t - c\}$$

(2) Substituir la restricción en la función objetivo:

$$V_t(a) = \max_{c}\{U(c) + \beta V_{t+1}[(1 + r_t)\, a + w_t - c]\}$$

37

37

## *Ecuación de Bellman* para $t$, obtener FOC y utilizar BS

(1) Proponer Ecuación de Bellman para $t$:

$$V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) | a^+ = (1 + r_t)\, a + w_t - c\}$$

(2) Substituir la restricción en la función objetivo:

$$V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}[(1 + r_t)\, a + w_t - c]\}$$

(3) Obtener FOC:

38

38

## *Ecuación de Bellman* para $t$, obtener FOC y utilizar BS

(1) Proponer Ecuación de Bellman para $t$:

$$V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+)|a^+ = (1+r_t)\, a + w_t - c\}$$

(2) Substituir la restricción en la función objetivo:

$$V_t(a) = \max_{c}\{U(c) + \beta V_{t+1}[(1+r_t)\, a + w_t - c]\}$$

(3) Obtener FOC:

$$U'(c) = \beta V'_{t+1}[(1+r_t)\, a + w_t - c]$$

39

39

## *Ecuación de Bellman* para $t$, obtener FOC y utilizar BS

(4) Utilizar la fórmula *Benveniste-Scheinkman*:..

40

40

## *Ecuación de Bellman* para $t$, obtener FOC y utilizar BS

(4) Utilizar la fórmula *Benveniste-Scheinkman*:...

$$V'_t(a) = (1 + r_t)U'(c)$$

41

41

## *Ecuación de Bellman* para $t$, obtener FOC y utilizar BS

(4) Utilizar la fórmula *Benveniste-Scheinkman*:...

$$V'_t(a) = (1 + r_t)U'(c)$$

...y obtener $\beta V'_{t+1}$:

42

42

## *Ecuación de Bellman* para $t$, obtener FOC y utilizar BS

(4) Utilizar la fórmula *Benveniste-Scheinkman*:...

$$V'_t(a) = (1 + r_t)U'(c)$$

...y obtener $\beta V'_{t+1}$:

$$V'_{t+1}(a^+) = (1 + r_{t+1})U'(c^+)$$

43

43

## *Ecuación de Bellman* para $t$, obtener FOC y utilizar BS

(4) Utilizar la fórmula *Benveniste-Scheinkman*:...

$$V'_t(a) = (1 + r_t)U'(c)$$

...y obtener $\beta V'_{t+1}$:

$$V'_{t+1}(a^+) = (1 + r_{t+1})U'(c^+)$$

(5) Sustituir el resultado de BS en FOC y obtenemos la Ecuación de Euler:

44

44

## *Ecuación de Bellman* para $t$, obtener FOC y utilizar BS

(4) Utilizar la fórmula *Benveniste-Scheinkman*:…

$$V'_t(a) = (1 + r_t)U'(c)$$

…y obtener $\beta V'_{t+1}$:

$$V'_{t+1}(a^+) = (1 + r_{t+1})U'(c^+)$$

(5) Sustituir el resultado de BS en FOC y obtenemos la Ecuación de Euler:

$$U'(c) = \beta(1 + r_{t+1})U'(c^+)$$

45

45

## *Ecuación de Bellman* para $t$, obtener FOC y utilizar BS

(6) Como utilizamos la función de utilidad $\ln c$, entonces la Ecuación de Euler en este caso es:

46

46

## *Ecuación de Bellman* para $t$, obtener FOC y utilizar BS

(6) Como utilizamos la función de utilidad $\ln c$, entonces la Ecuación de Euler en este caso es:

$$U'(\ c) = \beta(1 + r_{t+1})U'(c^{+})$$

47

47

## *Ecuación de Bellman* para $t$, obtener FOC y utilizar BS

(6) Como utilizamos la función de utilidad $\ln c$, entonces la Ecuación de Euler en este caso es:

$$U'(\ c) = \beta(1 + r_{t+1})U'(c^{+})$$

$$\frac{1}{c} = \beta(1 + r_{t+1})\frac{1}{c^{+}}$$

48

48

## *Ecuación de Bellman* para $t$, obtener FOC y utilizar BS

(6) Como utilizamos la función de utilidad $\ln c$, entonces la Ecuación de Euler en este caso es:

$$U'(c) = \beta(1 + r_{t+1})U'(c^{+})$$

$$\frac{1}{c} = \beta(1 + r_{t+1})\frac{1}{c^{+}}$$

$$c^{+} = \beta(1 + r_{t+1})c$$

49

49

## La importancia de la Ecuación de Euler

La Ecuación de Euler es muy relevante en este caso, debido a que nos permite conocer las soluciones óptimas para el consumo presente y futuro sin tener que obtener las funciones valor o las funciones de política óptima

Leonhard Euler
(1707 – 1783)

Fuente: Imagen de Leonhard Euler (https://jjovel.wordpress.com/2015/12/26/leonhard-euler/)

50

50

## La importancia de la Ecuación de Euler

La Ecuación de Euler es muy relevante en este caso, debido a que nos permite conocer las soluciones óptimas para el consumo presente y futuro sin tener que obtener las funciones valor o las funciones de política óptima

$$c^{+} = \beta(1 + r_{t+1})c$$

Leonhard Euler
(1707 – 1783)

Fuente: Imagen de Leonhard Euler (https://jjovel.wordpress.com/2015/12/26/leonhard-euler/)

51

51

## La importancia de la Ecuación de Euler

La Ecuación de Euler es muy relevante en este caso, debido a que nos permite conocer las soluciones óptimas para el consumo presente y futuro sin tener que obtener las funciones valor o las funciones de política óptima

$$c^{+} = \beta(1 + r_{t+1})c$$

o

$$C_{t+1} = \beta(1 + r_{t+1})C_t$$

Leonhard Euler
(1707 – 1783)

Fuente: Imagen de Leonhard Euler (https://jjovel.wordpress.com/2015/12/26/leonhard-euler/)

52

52

## Restricción para ‘toda la vida’ del agente representativo inmortal

- Para obtener las soluciones de consumo óptimo –y por lo tanto del nivel de activos-, necesitamos sustituir la Ecuación de Euler $C_{t+1} = \beta(1 + r_{t+1})C_t$ en la restricción ‘para toda la vida’ del agente representativo

53

53

## Restricción para ‘toda la vida’ del agente representativo inmortal

- Para obtener las soluciones de consumo óptimo –y por lo tanto del nivel de activos-, necesitamos sustituir la Ecuación de Euler $C_{t+1} = \beta(1 + r_{t+1})C_t$ en la restricción ‘para toda la vida’ del agente representativo

- Pero ¿Cómo vamos a obtener esta restricción si el agente representativo es ‘inmortal’?

54

54

## Restricción para 'toda la vida' del agente representativo inmortal

Empecemos con escribir la ecuación de acumulación de activos hasta $T$:





## Restricción para 'toda la vida' del agente representativo inmortal

Empecemos con escribir la ecuación de acumulación de activos hasta $T$:

$$A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t, \forall t \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t \\ A_{t+2} = (1 + r_{t+2})\, A_{t+1} + w_{t+1} - C_{t+1} \\ A_{t+3} = (1 + r_{t+3})\, A_{t+2} + w_{t+2} - C_{t+2} \\ \qquad \vdots \\ A_T = (1 + r_{T-1})\, A_{T-1} + w_{T-1} - C_{T-1} \end{array} \right.$$

## Ecuación de acumulación de activos

La ecuación de acumulación de activos hasta $T$ se puede expresar así:

Valor presente de $A_T = (1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} - C_1 - \frac{C_2}{1+r_2} - \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} - \cdots - \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$

57

57

## Ecuación de acumulación de activos

La ecuación de acumulación de activos hasta $T$ se puede expresar así:

Valor presente de $A_T = (1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} - C_1 - \frac{C_2}{1+r_2} - \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} - \cdots - \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$

o

$$\frac{A_T}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} = (1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} - C_1 - \frac{C_2}{1+r_2} - \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} - \cdots - \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$$

58

58

## Ecuación de acumulación de activos

Claramente al aplicar la condición de solvencia $\lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1+r_t)} = 0$, nos queda la restricción para toda la vida del agente representativo:

$$\frac{A_T}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} = (1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} - C_1 - \frac{C_2}{1+r_2} - \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} - \cdots - \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$$

59



## Ecuación de acumulación de activos

Claramente al aplicar la condición de solvencia $\lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1+r_t)} = 0$, nos queda la restricción para toda la vida del agente representativo:

$$\cancelto{0}{\frac{A_T}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}} = (1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} - C_1 - \frac{C_2}{1+r_2} - \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} - \cdots - \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$$

60

## Ecuación de acumulación de activos

Claramente al aplicar la condición de solvencia $\lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1+r_t)} = 0$, nos queda la restricción para toda la vida del agente representativo:

$$\cancelto{0}{\frac{A_T}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}} = (1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} - C_1 - \frac{C_2}{1+r_2} - \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} - \cdots - \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$$

$$(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} = C_1 + \frac{C_2}{1+r_2} + \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$$

61

61

## Ecuación de acumulación de activos

Claramente al aplicar la condición de solvencia $\lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1+r_t)} = 0$, nos queda la restricción para toda la vida del agente representativo:

$$\cancelto{0}{\frac{A_T}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}} = (1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} - C_1 - \frac{C_2}{1+r_2} - \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} - \cdots - \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$$

$$(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} = C_1 + \frac{C_2}{1+r_2} + \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$$

Esta es la versión hasta $T$ de la restricción para 'toda la vida' que utilizamos cuando resolvimos el problema utilizando el Lagrangiano.

62

62

# Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Sustituimos la Ecuación de Euler $C_{t+1} = \beta(1 + r_{t+1})C_t$ en:

$$(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} = C_1 + \frac{C_2}{1+r_2} + \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$$

63

63

# Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Sustituimos la Ecuación de Euler $C_{t+1} = \beta(1 + r_{t+1})C_t$ en:

$$(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} = C_1 + \frac{C_2}{1+r_2} + \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$$

Recordemos que $C_2 = \beta(1 + r_2)C_1$, que $C_3 = \beta(1 + r_3)C_2$ y así sucesivamente,…

64

64

## Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Sustituimos la Ecuación de Euler $C_{t+1} = \beta(1+r_{t+1})C_t$ en:

$$(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} = C_1 + \frac{C_2}{1+r_2} + \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$$

Recordemos que $C_2 = \beta(1+r_2)C_1$, que $C_3 = \beta(1+r_3)C_2$ y así sucesivamente,…

…en donde de manera recursiva podemos sustituir $C_2 = \beta(1+r_2)C_1$ en la expresión de $C_3$, *i.e.* $C_3 = \beta(1+r_3)[\beta(1+r_2)C_1]$

65

65

## Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Sustituimos la Ecuación de Euler $C_{t+1} = \beta(1+r_{t+1})C_t$ en:

$$(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} + \cdots = C_1 + \frac{\beta(1+r_2)C_1}{1+r_2} + \frac{\beta(1+r_3)[\beta(1+r_2)C_1]}{(1+r_2)(1+r_3)} + \frac{\beta(1+r_4)\{\beta(1+r_3)[\beta(1+r_2)C_1]\}}{(1+r_2)(1+r_3)(1+r_4)} + \cdots$$

66

66

## Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Habíamos estado usando la restricción hasta $T$ para entenderla. Hagámosla hasta $\infty$

Sustituimos la Ecuación de Euler $C_{t+1} = \beta(1 + r_{t+1})C_t$ en:

$$(1 + r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} + \cdots =$$
$$C_1 + \frac{\beta(1+r_2)C_1}{1+r_2} + \frac{\beta(1+r_3)[\beta(1+r_2)C_1]}{(1+r_2)(1+r_3)} + \frac{\beta(1+r_4)\{\beta(1+r_3)[\beta(1+r_2)C_1]\}}{(1+r_2)(1+r_3)(1+r_4)} + \cdots$$

67



## Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Habíamos estado usando la restricción hasta $T$ para entenderla. Hagámosla hasta $\infty$

Sustituimos la Ecuación de Euler $C_{t+1} = \beta(1 + r_{t+1})C_t$ en:

$$(1 + r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} + \cdots =$$
$$C_1 + \frac{\beta\cancel{(1+r_2)}C_1}{\cancel{1+r_2}} + \frac{\beta\cancel{(1+r_3)}[\beta\cancel{(1+r_2)}C_1]}{\cancel{(1+r_2)}\cancel{(1+r_3)}} + \frac{\beta\cancel{(1+r_4)}\{\beta\cancel{(1+r_3)}[\beta\cancel{(1+r_2)}C_1]\}}{\cancel{(1+r_2)}\cancel{(1+r_3)}\cancel{(1+r_4)}} + \cdots$$

68

# Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Habíamos estado usando la restricción hasta $T$ para entenderla. Hagámosla hasta $\infty$

Sustituimos la Ecuación de Euler $C_{t+1} = \beta(1+r_{t+1})C_t$ en:

$$(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} + \cdots =$$

$$C_1 + \frac{\beta\cancel{(1+r_2)}C_1}{\cancel{1+r_2}} + \frac{\beta\cancel{(1+r_3)}[\beta\cancel{(1+r_2)}C_1]}{\cancel{(1+r_2)}\cancel{(1+r_3)}} + \frac{\beta\cancel{(1+r_4)}\{\beta\cancel{(1+r_3)}[\beta\cancel{(1+r_2)}C_1]\}}{\cancel{(1+r_2)}\cancel{(1+r_3)}\cancel{(1+r_4)}} + \cdots$$

$$(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} + \cdots =$$

$$C_1 + \beta C_1 + \beta^2 C_1 + \beta^3 C_1 + \cdots$$

69

69

# Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Utilizando las propiedades de las series:

Recordar que: $x + ax + a^2x + \cdots + a^{n-1}x + a^n x + \cdots = \frac{x}{1-a}$ , si $|a| < 1$

70

70

## Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Utilizando las propiedades de las series:

Recordar que: $x + ax + a^2x + \cdots + a^{n-1}x + a^nx + \cdots = \frac{x}{1-a}$ , si $|a| < 1$

Entonces, el lado derecho de la restricción de 'toda la vida' queda:

71

71


## Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Utilizando las propiedades de las series:

Recordar que: $x + ax + a^2x + \cdots + a^{n-1}x + a^nx + \cdots = \frac{x}{1-a}$ , si $|a| < 1$

Entonces, el lado derecho de la restricción de 'toda la vida' queda:


$$C_1 + \beta C_1 + \beta^2 C_1 + \beta^3 C_1 + \cdots = \frac{C_1}{1-\beta}$$

72

72

## Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Así, la restricción de 'toda la vida' queda:

73

73

## Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Así, la restricción de 'toda la vida' queda:

$$(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots = \frac{C_1}{1-\beta}$$

74

74

## Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Así, la restricción de 'toda la vida' queda:

$$(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots = \frac{C_1}{1-\beta}$$

Por lo que si despejamos $C_1$, vamos a obtener la solución de $C_1^*$

75

75


## Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Así, la restricción de 'toda la vida' queda:

$$(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots = \frac{C_1}{1-\beta}$$

Por lo que si despejamos $C_1$, vamos a obtener la solución de $C_1^*$


$$C_1^* = (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots\right]$$

76

76

## Sustituyendo la solución óptima de $C_1$ en la restricción $A_2$

Y si sustituimos $C_1^*$ en la expresión de acumulación de activos $A_2 = (1 + r_1)A_1 + w_1 - C_1$, obtenemos $A_2^*$:

77

77

## Sustituyendo la solución óptima de $C_1$ en la restricción $A_2$

Y si sustituimos $C_1^*$ en la expresión de acumulación de activos $A_2 = (1 + r_1)A_1 + w_1 - C_1$, obtenemos $A_2^*$:

$$A_2^* = (1 + r_1)A_1 + w_1 - (1 - \beta)\left[(1 + r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \dots\right]$$

78

78

## Solución óptima para el agente representativo 'inmortal'

$$C_1^* = (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots\right]$$

$$A_2^* = (1+r_1)A_1 + w_1 - (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots\right]$$

79

79

## Ejemplo con individuo que vive 3 periodos

Si 'acotamos' la solución de $t = \infty$, para $t = 3$, queda:

$$C_1^* = (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots\right]$$

$$A_2^* = (1+r_1)A_1 + w_1 - (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots\right]$$

80

80

## Ejemplo con individuo que vive 3 periodos

Si 'acotamos' la solución de $t = \infty$, para $t = 3$, queda:

$$C_1^* = (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \cancel{+\cdots}\right]$$

$$A_2^* = (1+r_1)A_1 + w_1 - (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \cancel{+\cdots}\right]$$

81

81

## Ejemplo con individuo que vive 3 periodos

Si 'acotamos' la solución de $t = \infty$, para $t = 3$, queda:

$$C_1^* = (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \cancel{+\cdots}\right]$$

$$A_2^* = (1+r_1)A_1 + w_1 - (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \cancel{+\cdots}\right]$$

$$C_1^* = (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$A_2^* = (1+r_1)A_1 + w_1 - (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

82

82

## Ejemplo con individuo que vive 3 periodos

$$C_1^* = (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$A_2^* = (1+r_1)A_1 + w_1 - (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

¿Son iguales a las que obtuvimos con el método de Lagrangiano?

83

83

## Ejemplo con individuo que vive 3 periodos

$$C_1^* = (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$A_2^* = (1+r_1)A_1 + w_1 - (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

¿Son iguales a las que obtuvimos con el método de Lagrangiano?

$$C_1^* = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$A_2^* = (1+r_1)\,A_1 + w_1 - \left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}$$

84

84

## Ejemplo con individuo que vive 3 periodos

$$C_1^* = (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$A_2^* = (1+r_1)A_1 + w_1 - (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

¿Son iguales a las que obtuvimos con el método de Lagrangiano?

$$C_1^* = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$A_2^* = (1+r_1)\,A_1 + w_1 - \left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}$$

85

85

## Beta

¿Qué valores puede tomar $\beta$?

86

86

## Beta

¿Qué valores puede tomar $\beta$?

Definimos que $\beta$ puede tomar valores entre 0 y 1, excluyendo 0 y 1

87

87

## Beta

¿Qué valores puede tomar $\beta$?

Definimos que $\beta$ puede tomar valores entre 0 y 1, excluyendo 0 y 1

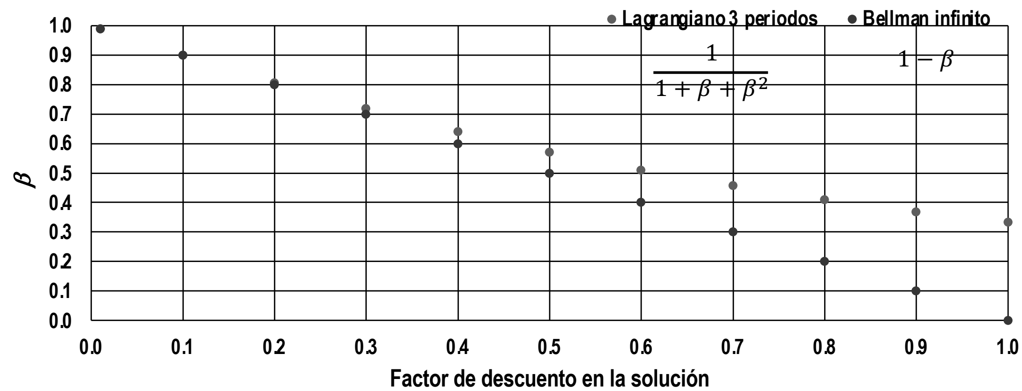
*i.e.* $0 < \beta < 1$

...o $\beta \in (0,1)$

88

88

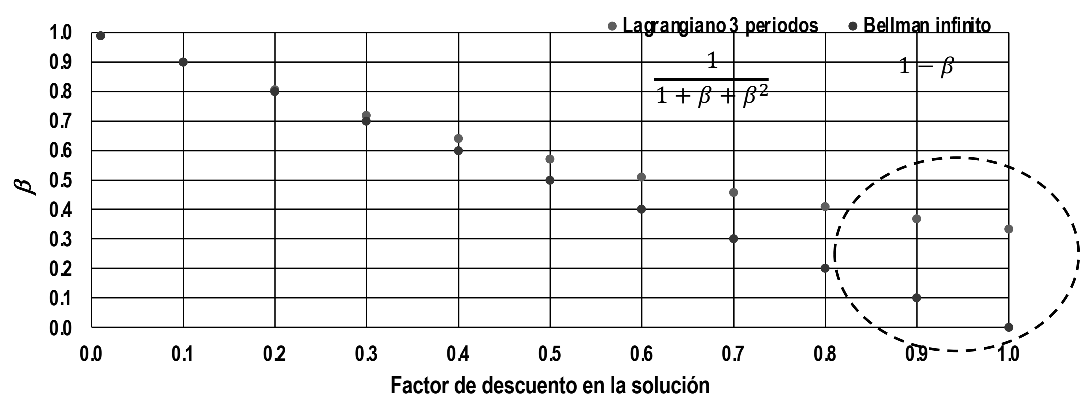
Comportamiento del factor de descuento en las diferentes soluciones para $t = 3$




89

89

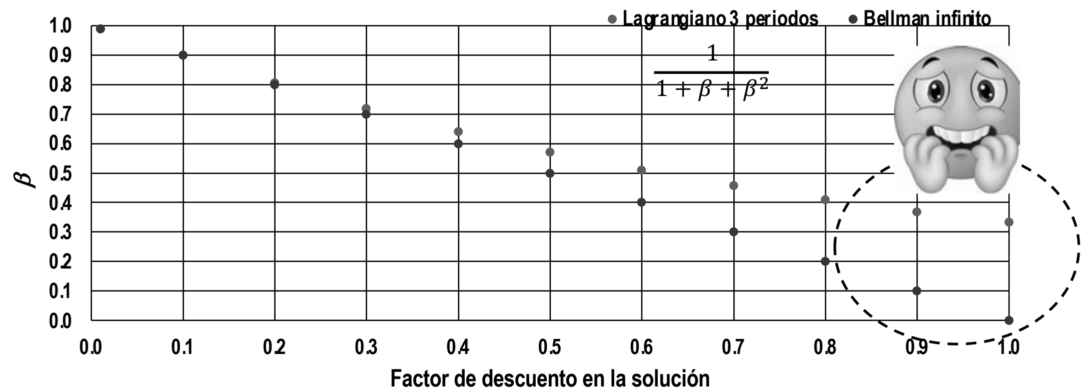
Comportamiento del factor de descuento en las diferentes soluciones para $t = 3$




90

90

## Comportamiento del factor de descuento en las diferentes soluciones para $t = 3$




91

91

## ¿Qué hacemos con estas diferencias?

92

92

## ¿Qué hacemos con estas diferencias?

Federal Reserve Bank of Minneapolis
Quarterly Review Fall 1986

Theory Ahead of Business Cycle Measurement*

Edward C. Prescott
Adviser
Research Department
Federal Reserve Bank of Minneapolis
and Professor of Economics
University of Minnesota

This leaves $\beta$ and $\phi$ still to be determined.

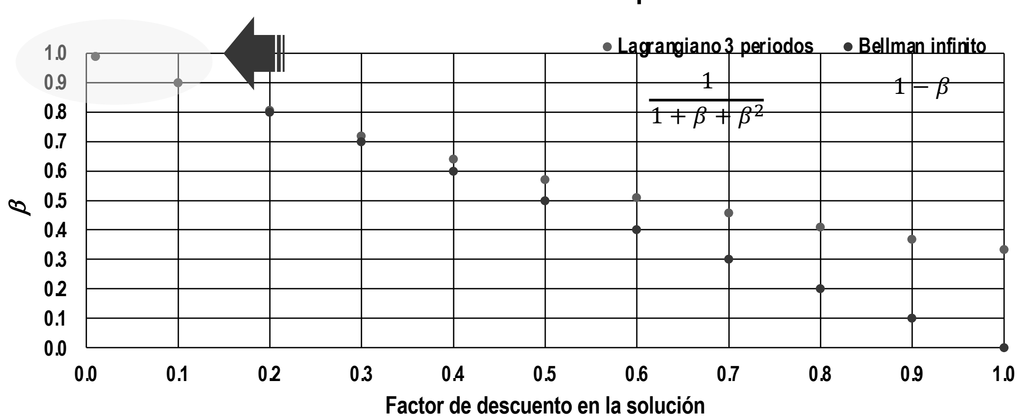
Hansen (1985b) has found that growing economies—that is, those with $z_t$ having a multiplicative, geometrically growing factor $(1+\lambda)^t$ with $\lambda > 0$—fluctuate in essentially the same way as economies for which $\lambda = 0$. This justifies considering only the case $\lambda = 0$. If $\lambda = 0$, then the average interest rate approximately equals the subjective time discount rate.[3] Therefore, we set $\beta$ equal to 0.96 per year or 0.99 per quarter.

Fuente: **Prescott, Edward C.** "Theory ahead of business cycle measurement". *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review* 10, Fall 1986, pp- 9-22 (https://www.minneapolisfed.org/research/quarterly-review/theory-ahead-of-business-cycle-measurement)

93

93

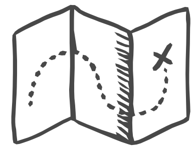
## Comportamiento del factor de descuento en las diferentes soluciones para $t = 3$




94

94

# ¿Cómo vamos a aprender DP?



| | Número de periodos de tiempo | Determinístico / Estocástico | Método de solución |
|---|---|---|---|
| (1) | Tres | Determinístico | Lagrange |
| (2) | Tres | Determinístico | Función de política[1] |
| (3) | Tres | Determinístico | Programación Dinámica |
| (4) | Infinito | Determinístico | Programación Dinámica |
| (5) | Tres | Estocástico | Programación Dinámica |
| (6) | Infinito | Estocástico | Programación Dinámica |

1. Realmente no es un método, sino una forma alternativa de expresar las soluciones óptimas, que ayuda a ilustrar la idea conceptual sobre la que descansa la programación dinámica.

95

95

# El problema del agente representativo

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}\{A_t\}_{t=2}^{\infty}} E\left[\sum_{t=1}^{\infty}\beta^{t-1}U(C_t)\right]$$

Sujeto a:

$A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + \eta_t w_t - C_t$ , para toda $t$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1+r_t)} = 0$$

En donde:
$U(C_t)$ es una función de utilidad a partir del consumo en $t$ o $C_t$, $U'(C_t) > 0$ y $U''(C_t) < 0$
$\beta$ es un factor de descuento, tal que $0 < \beta < 1$
$A_t$ son los activos que tiene en $t$, $A_1 \geq 0$
$w_t$ es el salario que recibe en $t$, con un choque estocástico $\eta_t$

96

96

Regresamos a al agente representativo que solo vive tres periodos

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} E\left[\sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} U(C_t)\right]$$

Sujeto a:

$A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + \eta_t w_t - C_t$ , para $t = 1, 2\ y\ 3$

$$A_4 \geq 0$$

97

97

## Definamos el choque estocástico $\eta_t$

En la realidad, el ingreso futuro siempre enfrenta riesgos. Así, se incorpora un choque $\eta_t$ a la productividad laboral que sigue un *Proceso de Markov*.

98

98

## Definamos el choque estocástico $\eta_t$

- La mayoría de los modelos macroeconómicos dinámicos y estocásticos, utiliza dos herramientas clave: (1) Programación Dinámica; y (2) choques estocásticos tipo 'Cadena de Márkov'
- *Cadena de Márkov*: Es una secuencia de valores de una variable aleatoria en las que el valor de la variable en el futuro depende del valor de la variable en el presente, pero es independiente de la historia de dicha variable

Andréi Márkov
(1856 – 1922)

Fuente: Imagen de Andréi Márkov (https://es.wikipedia.org/wiki/Andréi_Márkov)





## Definamos el choque estocástico $\eta_t$

En la realidad, el ingreso futuro siempre enfrenta riesgos. Así, se incorpora un choque $\eta_t$ a la productividad laboral que sigue un *Proceso de Markov*.

(1) Los *valores realizados u observados* de la variable estocástica $\eta_t$ se denotan con la variable $e_i$, definida por tres estados ($i = 1, 2, 3$):

$$\eta_t \in \begin{cases} e_1 \rightarrow \text{ estado 'malo'} \\ e_2 \rightarrow \text{ estado 'promedio'} \\ e_3 \rightarrow \text{ estado 'bueno'} \end{cases}$$

## Definamos el choque estocástico $\eta_t$

En la realidad, el ingreso futuro siempre enfrenta riesgos. Así, se incorpora un choque $\eta_t$ a la productividad laboral que sigue un *Proceso de Markov*.

(1) Los *valores realizados u observados* de la variable estocástica $\eta_t$ se denotan con la variable $e_i$, definida por tres estados $(i = 1, 2, 3)$:

$$\eta_t \in \begin{cases} e_1 \rightarrow \text{estado 'malo'} \\ e_2 \rightarrow \text{estado 'promedio'} \\ e_3 \rightarrow \text{estado 'bueno'} \end{cases}$$

(2) El agente representativo tiene un *nivel de productividad* 'promedio' *al nacer*, es decir, $\eta_1 = e_2$ y de hecho, toma el valor de $1$, *i.e.* $e_2 = 1$;

10
1

101

## Definamos el choque estocástico $\eta_t$

(3) $p_{i,j}$ es la *probabilidad de 'transición'*. Es decir, la probabilidad de que el estado de la productividad sea $e_j$ en el siguiente periodo $t+1$, dado que en $t$ el estado fue $e_i$ , *i.e.* $p_{i,j} = \text{Prob}(\eta_{t+1} = e_j | \eta_t = e_i)$ en donde $0 < p_{i,j} < 1$;

10
2

102

## Definamos el choque estocástico $\eta_t$

(3) $p_{i,j}$ es la *probabilidad de 'transición'*. Es decir, la probabilidad de que el estado de la productividad sea $e_j$ en el siguiente periodo $t+1$, dado que en $t$ el estado fue $e_i$ , *i.e.* $p_{i,j} = \text{Prob}(\eta_{t+1} = e_j | \eta_t = e_i)$ en donde $0 < p_{i,j} < 1$;

(4) Entonces, la *matriz de probabilidades de transición* $P$ entre los tres estados es:

$$P = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

10
3

103

## Definamos el choque estocástico $\eta_t$

(3) $p_{i,j}$ es la *probabilidad de 'transición'*. Es decir, la probabilidad de que el estado de la productividad sea $e_j$ en el siguiente periodo $t+1$, dado que en $t$ el estado fue $e_i$ , *i.e.* $p_{i,j} = \text{Prob}(\eta_{t+1} = e_j | \eta_t = e_i)$ en donde $0 < p_{i,j} < 1$;

(4) Entonces, la *matriz de probabilidades de transición* $P$ entre los tres estados es:

$$P = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

...en donde $\sum_{j=1}^{3} p_{i,j} = 1$, *e.g.* $p_{1,1} + p_{1,2} + p_{1,3} = 1$

10
4

104

## Definamos el choque estocástico $\eta_t$

(5) Además de las probabilidades de transición para los diferentes estados, necesitamos las probabilidades de ocurrencia de los estados en cada momento en el tiempo, es decir, las *probabilidades no condicionales,* denotadas por los vectores $\pi_t$:

10
5

105

## Definamos el choque estocástico $\eta_t$

(5) Además de las probabilidades de transición para los diferentes estados, necesitamos las probabilidades de ocurrencia de los estados en cada momento en el tiempo, es decir, las *probabilidades no condicionales,* denotadas por los vectores $\pi_t$:

$\pi_1 = \begin{bmatrix} \pi_{1,1} \\ \pi_{1,2} \\ \pi_{1,3} \end{bmatrix}$, en donde $\pi_{1,2}$, por ejemplo, es la probabilidad de que el estado que se observe sea el 2 (o 'promedio') en el tiempo $t = 1$

10
6

106

## Definamos el choque estocástico $\eta_t$

(5) Además de las probabilidades de transición para los diferentes estados, necesitamos las probabilidades de ocurrencia de los estados en cada momento en el tiempo, es decir, las *probabilidades no condicionales,* denotadas por los vectores $\pi_t$:

$\pi_1 = \begin{bmatrix} \pi_{1,1} \\ \pi_{1,2} \\ \pi_{1,3} \end{bmatrix}$, en donde $\pi_{1,2}$, por ejemplo, es la probabilidad de que el estado que se observe sea el 2 (o 'promedio') en el tiempo $t = 1$

Cabe recordar que $\pi_{1,1} + \pi_{1,2} + \pi_{1,3} = 1$

10
7

107

## Definamos el choque estocástico $\eta_t$

(6) Ahora hay que relacionar las matrices de probabilidad de transición, con las de probabilidad no condicional:

10
8

108

# Definamos el choque estocástico $\eta_t$

(6) Ahora hay que relacionar las matrices de probabilidad de transición, con las de probabilidad no condicional:

La matriz de probabilidad no condicional en $t = 1$ es muy sencilla:

10
9

109

Definamos el choque estocástico $\eta_t$

(6) Ahora hay que relacionar las matrices de probabilidad de transición, con las de probabilidad no condicional:

La matriz de probabilidad no condicional en $t = 1$ es muy sencilla:

Debido a que al nacer, el agente representativo tiene un nivel de productividad dado, *i.e.* $\eta_1 = e_2 = 1$, la matriz de probabilidad no condicional $\pi_1$ es:

$$\pi_1 = \begin{bmatrix} \pi_{1,1} \\ \pi_{1,2} \\ \pi_{1,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

11
0

110

# Definamos el choque estocástico $\eta_t$

(6) …

No obstante lo anterior, hay que obtener $\pi_2$ y $\pi_3$:

$\pi_2' = \pi_1' P$ y $\pi_3' = \pi_2' P$

11
1

111

Definamos el choque estocástico $\eta_t$

(6) …

No obstante lo anterior, hay que obtener $\pi_2$ y $\pi_3$:

$\pi_2' = \pi_1' P$ y $\pi_3' = \pi_2' P$

Así, $\pi_2' = \pi_1' P$:

11
2

112

# Definamos el choque estocástico $\eta_t$

(6) …

No obstante lo anterior, hay que obtener $\pi_2$ y $\pi_3$:

$\pi_2' = \pi_1' P$ y $\pi_3' = \pi_2' P$

Así, $\pi_2' = \pi_1' P$:

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}]_{1\times 3} = [\pi_{1,1} \quad \pi_{1,2} \quad \pi_{1,3}]_{1\times 3} \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

113

113

# Definamos el choque estocástico $\eta_t$

(6) … $\pi_2' = \pi_1' P$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [\pi_{1,1} \quad \pi_{1,2} \quad \pi_{1,3}] \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

114

114

Definamos el choque estocástico $\eta_t$

(6) $\ldots \pi_2' = \pi_1' P$

$$\begin{bmatrix} \pi_{2,1} & \pi_{2,2} & \pi_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{1,1} & \pi_{1,2} & \pi_{1,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \pi_{2,1} & \pi_{2,2} & \pi_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

115

115

Definamos el choque estocástico $\eta_t$

(6) $\ldots \pi_2' = \pi_1' P$

$$\begin{bmatrix} \pi_{2,1} & \pi_{2,2} & \pi_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{1,1} & \pi_{1,2} & \pi_{1,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \pi_{2,1} & \pi_{2,2} & \pi_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

116

116

## Definamos el choque estocástico $\eta_t$

(6) $\ldots\ \pi_2' = \pi_1' P$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [\pi_{1,1} \quad \pi_{1,2} \quad \pi_{1,3}] \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [p_{2,1} \quad p_{2,2} \quad p_{2,3}]$$

11
7

117

## Definamos el choque estocástico $\eta_t$

(6) $\ldots\ \pi_2' = \pi_1' P$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [\pi_{1,1} \quad \pi_{1,2} \quad \pi_{1,3}] \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [p_{2,1} \quad p_{2,2} \quad p_{2,3}]$$

Debido a que $\sum_{j=1}^{3} p_{i,j} = 1$,

11
8

118

## Definamos el choque estocástico $\eta_t$

(6) $\ldots \pi_2' = \pi_1' P$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [\pi_{1,1} \quad \pi_{1,2} \quad \pi_{1,3}] \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [p_{2,1} \quad p_{2,2} \quad p_{2,3}]$$

Debido a que $\sum_{j=1}^{3} p_{i,j} = 1$, entonces $p_{2,1} + p_{2,2} + p_{2,3} = 1$

11
9

119

## Definamos el choque estocástico $\eta_t$

(6) $\ldots \pi_2' = \pi_1' P$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [\pi_{1,1} \quad \pi_{1,2} \quad \pi_{1,3}] \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [p_{2,1} \quad p_{2,2} \quad p_{2,3}]$$

Debido a que $\sum_{j=1}^{3} p_{i,j} = 1$, entonces $p_{2,1} + p_{2,2} + p_{2,3} = 1$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [p_{2,1} \quad p_{2,2} \quad 1 - p_{2,1} - p_{2,2}]$$

12
0

120

## Definamos el choque estocástico $\eta_t$

(6) $\ldots \pi_3' = \pi_2' P$

$$[\pi_{3,1} \quad \pi_{3,2} \quad \pi_{3,3}] = [p_{2,1} \quad p_{2,2} \quad p_{2,3}] \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

Para visualizar mejor la multiplicación, mejor vemos de manera transpuesta:

$$\begin{bmatrix} \pi_{3,1} \\ \pi_{3,2} \\ \pi_{3,3} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} p_{2,1}p_{1,1} + p_{2,2}p_{2,1} + p_{2,3}p_{3,1} \\ p_{2,1}p_{1,2} + p_{2,2}p_{2,2} + p_{2,3}p_{3,2} \\ p_{2,1}p_{1,3} + p_{2,2}p_{2,3} + p_{2,3}p_{3,3} \end{bmatrix}'$$

12
1

121

## Definamos el choque estocástico $\eta_t$

(6) $\ldots \pi_3' = \pi_2' P$

$$\begin{bmatrix} \pi_{3,1} \\ \pi_{3,2} \\ \pi_{3,3} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} p_{2,1}p_{1,1} + p_{2,2}p_{2,1} + p_{2,3}p_{3,1} \\ p_{2,1}p_{1,2} + p_{2,2}p_{2,2} + p_{2,3}p_{3,2} \\ p_{2,1}p_{1,3} + p_{2,2}p_{2,3} + p_{2,3}p_{3,3} \end{bmatrix}'$$

Simplificando (y ordenando):

$$\begin{bmatrix} \pi_{3,1} \\ \pi_{3,2} \\ \pi_{3,3} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} p_{2,1}(p_{1,1} + p_{2,2}) + p_{2,3}p_{3,1} \\ p_{1,2}p_{2,1} + p_{2,2}^2 + p_{2,3}p_{3,2} \\ p_{1,3}p_{2,1} + p_{2,3}(p_{2,2} + p_{3,3}) \end{bmatrix}'$$

12
2

122

## Definamos el choque estocástico $\eta_t$

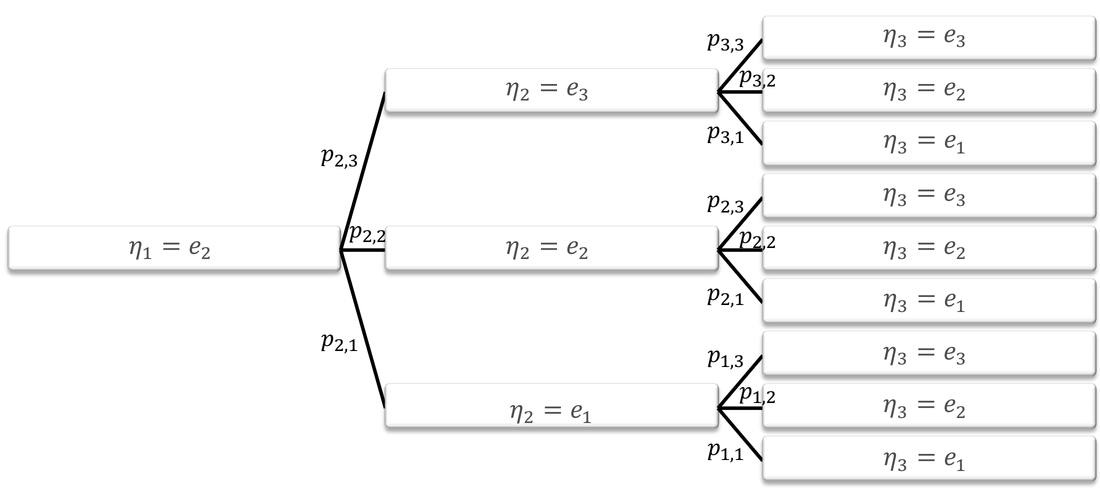
(6) …

La interpretación de $\pi_{3,j}$ es la probabilidad que le asigna el agente representativo en $t = 1$ a estar en el estado $j$ en el periodo $t = 3$





## Definamos el choque estocástico $\eta_t$



## Así, regresamos al problema de optimización del agente representativo

- Iniciemos con el método 'tradicional' y luego procedemos a resolverlo con *Programación Dinámica*

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} E\left[\sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} U(C_t) \,\middle|\, A_{t+1} = (1+r_t)\, A_t + \eta_t w_t - C_t, A_4 \geq 0\right]$$

- Método 'tradicional': Debido a que es un problema que ya conocemos y en el que podemos sustituir la restricción –despejando $C_t$-, en la función objetivo, no es necesario resolverlo con el método de Lagrange





## Método 'tradicional'

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} E\left[\sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} U(C_t) \,\middle|\, A_{t+1} = (1+r_t)\, A_t + \eta_t w_t - C_t, A_4 \geq 0\right]$$

## Método ‘tradicional’

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} E\left[\sum_{t=1}^{3}\beta^{t-1}U(C_t)\,\middle|A_{t+1}=(1+r_t)\,A_t+\eta_t w_t-C_t, A_4\geq 0\right]$$

Concentrémonos en la utilidad esperada…

12
7

127

## Método ‘tradicional’

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} E\left[\sum_{t=1}^{3}\beta^{t-1}U(C_t)\,\middle|A_{t+1}=(1+r_t)\,A_t+\eta_t w_t-C_t, A_4\geq 0\right]$$

Concentrémonos en la utilidad esperada…

$t=1 \qquad \beta^0 U(C_1) \qquad\qquad C_1=(1+r_1)\,A_1+\eta_1 w_1-A_2$

12
8

128

## Método 'tradicional'

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} E\left[\sum_{t=1}^{3}\beta^{t-1}U(C_t)\,\middle|A_{t+1}=(1+r_t)\,A_t+\eta_t w_t-C_t, A_4\geq 0\right]$$

Concentrémonos en la utilidad esperada…

$t=1 \quad \overset{1}{\cancel{\beta^{0}}}U(C_1) \qquad C_1=(1+r_1)\,A_1+\eta_1 w_1-A_2$

12
9

129

## Método 'tradicional'

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} E\left[\sum_{t=1}^{3}\beta^{t-1}U(C_t)\,\middle|A_{t+1}=(1+r_t)\,A_t+\eta_t w_t-C_t, A_4\geq 0\right]$$

Concentrémonos en la utilidad esperada…

$t=1 \quad \overset{1}{\cancel{\beta^{0}}}U(C_1) \qquad C_1=(1+r_1)\,A_1+\eta_1 w_1-A_2$

$t=2 \quad \beta^{1}\,U(C_2) \qquad C_2=(1+r_2)\,A_2+\eta_2 w_2-A_3$

13
0

130

## Método ‘tradicional’

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} E\left[\sum_{t=1}^{3}\beta^{t-1}U(C_t)\,\middle|A_{t+1}=(1+r_t)\,A_t+\eta_t w_t-C_t, A_4\geq 0\right]$$

Concentrémonos en la utilidad esperada…

$t=1$ $\quad \overset{1}{\beta^0} U(C_1)$ $\quad C_1=(1+r_1)\,A_1+\eta_1 w_1-A_2$

$t=2$ $\quad \beta^1 U(C_2)$ $\quad C_2=(1+r_2)\,A_2+\eta_2 w_2-A_3$

13
1

131

## Método ‘tradicional’

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} E\left[\sum_{t=1}^{3}\beta^{t-1}U(C_t)\,\middle|A_{t+1}=(1+r_t)\,A_t+\eta_t w_t-C_t, A_4\geq 0\right]$$

Concentrémonos en la utilidad esperada…

$t=1$ $\quad \overset{1}{\beta^0} U(C_1)$ $\quad C_1=(1+r_1)\,A_1+\eta_1 w_1-A_2$

$t=2$ $\quad \beta^1 U(C_2)$ $\quad C_2=(1+r_2)\,A_2+\eta_2 w_2-A_3$

$t=3$ $\quad \beta^2 U(C_3)$ $\quad C_3=(1+r_3)\,A_3+\eta_3 w_3-A_4$

13
2

132

# Método 'tradicional'

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} E\left[\sum_{t=1}^{3}\beta^{t-1}U(C_t)\,\middle|A_{t+1}=(1+r_t)\,A_t+\eta_t w_t-C_t, A_4\geq 0\right]$$

Concentrémonos en la utilidad esperada…

| | | |
|---|---|---|
| $t=1$ | $\beta^0 U(C_1)$ | $C_1=(1+r_1)\,A_1+\eta_1 w_1-A_2$ |
| $t=2$ | $\beta^1 U(C_2)$ | $C_2=(1+r_2)\,A_2+\eta_2 w_2-A_3$ |
| $t=3$ | $\beta^2 U(C_3)$ | $C_3=(1+r_3)\,A_3+\eta_3 w_3-A_4$ |

En donde el agente representativo tiene 'visión perfecta' *('perfect foresight'* en cuanto a las tasas de interés y al salario (*i.e.* no hay agregación de incertidumbre) y conoce las características del proceso estocástico

133

133

# Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Incorporemos las restricciones de cada $t$ en la función de utilidad de dicho momento en el tiempo y propongamos la utilidad esperada para cada $t$ :

134

134

## Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Incorporemos las restricciones de cada $t$ en la función de utilidad de dicho momento en el tiempo y propongamos la utilidad esperada para cada $t$ :

$t = 1 \qquad U(C_1) = U[(1 + r_1)\, A_1 + e_2 w_1 - A_2]$

13
5

135

## Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Incorporemos las restricciones de cada $t$ en la función de utilidad de dicho momento en el tiempo y propongamos la utilidad esperada para cada $t$ :

$t = 1 \qquad U(C_1) = U[(1 + r_1)\, A_1 + e_2 w_1 - A_2]$

$$t = 2 \qquad \beta \begin{cases} \pi_{2,1} & U(C_2) = U[(1 + r_2)\, A_2 + e_1 w_2 - A_3] \\ \pi_{2,2} & U(C_2) = U[(1 + r_2)\, A_2 + e_2 w_2 - A_3] \\ \pi_{2,3} & U(C_2) = U[(1 + r_2)\, A_2 + e_3 w_2 - A_3] \end{cases}$$

13
6

136

## Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Incorporemos las restricciones de cada $t$ en la función de utilidad de dicho momento en el tiempo y propongamos la utilidad esperada para cada $t$ :

$$t = 1 \qquad U(C_1) = U[(1 + r_1)\, A_1 + e_2 w_1 - A_2]$$

$$t = 2 \qquad \beta \begin{cases} \pi_{2,1} & U(C_2) = U[(1 + r_2)\, A_2 + e_1 w_2 - A_3] \\ \pi_{2,2} & U(C_2) = U[(1 + r_2)\, A_2 + e_2 w_2 - A_3] \\ \pi_{2,3} & U(C_2) = U[(1 + r_2)\, A_2 + e_3 w_2 - A_3] \end{cases}$$

$$t = 3 \qquad \beta^2 \begin{cases} \pi_{3,1} & U(C_3) = U[(1 + r_3)\, A_3 + e_1 w_3 - A_4] \\ \pi_{3,2} & U(C_3) = U[(1 + r_3)\, A_3 + e_2 w_3 - A_4] \\ \pi_{3,3} & U(C_3) = U[(1 + r_3)\, A_3 + e_3 w_3 - A_4] \end{cases}$$

137

137

## Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Así, la utilidad esperada que ya incorpora las restricciones queda:

138

138

## Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Así, la utilidad esperada que ya incorpora las restricciones queda:

$$E_1[\Lambda_1] = U[(1+r_1)\,A_1 + e_2 w_1 - A_2] + \cdots$$

13
9

139

## Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Así, la utilidad esperada que ya incorpora las restricciones queda:

$$\begin{aligned}
&E_1[\Lambda_1] \\
&= U[(1+r_1)\,A_1 + e_2 w_1 - A_2] \\
&+ \beta\{\pi_{2,1} U[(1+r_2)\,A_2 + e_1 w_2 - A_3] + \pi_{2,2} U[(1+r_2)\,A_2 + e_2 w_2 - A_3] \\
&+ \pi_{2,3} U[(1+r_2)\,A_2 + e_3 w_2 - A_3]\} + \cdots
\end{aligned}$$

14
0

140

# Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Así, la utilidad esperada que ya incorpora las restricciones queda:

$$
\begin{aligned}
&E_1[\Lambda_1] \\
&= U[(1+r_1)\,A_1 + e_2 w_1 - A_2] \\
&+ \beta\{\pi_{2,1} U[(1+r_2)\,A_2 + e_1 w_2 - A_3] + \pi_{2,2} U[(1+r_2)\,A_2 + e_2 w_2 - A_3] \\
&+ \pi_{2,3} U[(1+r_2)\,A_2 + e_3 w_2 - A_3]\} \\
&+ \beta^2\{\pi_{3,1} U[(1+r_3)\,A_3 + e_1 w_3 - A_4] + \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_2 w_3 - A_4] \\
&+ \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_3 w_3 - A_4]\}
\end{aligned}
$$

14
1

141


# Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Así, la utilidad esperada que ya incorpora las restricciones queda:

$$
\begin{aligned}
&E_1[\Lambda_1] \\
&= U[(1+r_1)\,A_1 + e_2 w_1 - A_2] \\
&+ \beta\{\pi_{2,1} U[(1+r_2)\,A_2 + e_1 w_2 - A_3] + \pi_{2,2} U[(1+r_2)\,A_2 + e_2 w_2 - A_3] \\
&+ \pi_{2,3} U[(1+r_2)\,A_2 + e_3 w_2 - A_3]\} \\
&+ \beta^2\{\pi_{3,1} U[(1+r_3)\,A_3 + e_1 w_3 - A_4] + \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_2 w_3 - A_4] \\
&+ \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_3 w_3 - A_4]\}
\end{aligned}
$$


¿Ahora qué hacemos?

14
2

142

## Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Así, la utilidad esperada que ya incorpora las restricciones queda:

$$
\begin{aligned}
&E_1[\Lambda_1] \\
&= U[(1+r_1)\,A_1 + e_2 w_1 - A_2] \\
&+ \beta\{\pi_{2,1} U[(1+r_2)\,A_2 + e_1 w_2 - A_3] + \pi_{2,2} U[(1+r_2)\,A_2 + e_2 w_2 - A_3] \\
&+ \pi_{2,3} U[(1+r_2)\,A_2 + e_3 w_2 - A_3]\} \\
&+ \beta^2\{\pi_{3,1} U[(1+r_3)\,A_3 + e_1 w_3 - A_4] + \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_2 w_3 - A_4] \\
&+ \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_3 w_3 - A_4]\}
\end{aligned}
$$

¿Ahora qué hacemos?

Las variables de decisión ahora son $A_2$, $A_3$ y $A_4$

14
3

143

## Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Podemos derivar la utilidad esperada con respecto a $A_2$, $A_3$ y $A_4$ , igualar a cero y resolver las ecuaciones para obtener $C_1^*$, $C_2^*$ y $C_3^*$ y $A_2^*$, $A_3^*$ y $A_4^*$:

$$
\begin{aligned}
&E_1[\Lambda_1] \\
&= U[(1+r_1)\,A_1 + e_2 w_1 - A_2] \\
&+ \beta\{\pi_{2,1} U[(1+r_2)\,A_2 + e_1 w_2 - A_3] + \pi_{2,2} U[(1+r_2)\,A_2 + e_2 w_2 - A_3] + \pi_{2,3} U[(1+r_2)\,A_2 + e_3 w_2 - A_3]\} \\
&+ \beta^2\{\pi_{3,1} U[(1+r_3)\,A_3 + e_1 w_3 - A_4] + \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_2 w_3 - A_4] + \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_3 w_3 - A_4]\}
\end{aligned}
$$

14
4

144

## Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Podemos derivar la utilidad esperada con respecto a $A_2$, $A_3$ y $A_4$ , igualar a cero y resolver las ecuaciones para obtener $C_1^*$, $C_2^*$ y $C_3^*$ y $A_2^*$, $A_3^*$ y $A_4^*$:

$$\begin{aligned} &E_1[\Lambda_1] \\ &= U[(1+r_1)\, A_1 + e_2 w_1 - A_2] \\ &+ \beta\{\pi_{2,1} U[(1+r_2)\, A_2 + e_1 w_2 - A_3] + \pi_{2,2} U[(1+r_2)\, A_2 + e_2 w_2 - A_3] + \pi_{2,3} U[(1+r_2)\, A_2 + e_3 w_2 - A_3]\} \\ &+ \beta^2\{\pi_{3,1} U[(1+r_3)\, A_3 + e_1 w_3 - A_4] + \pi_{3,3} U[(1+r_3)\, A_3 + e_2 w_3 - A_4] + \pi_{3,3} U[(1+r_3)\, A_3 + e_3 w_3 - A_4]\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E_1[\Lambda_1]}{\partial A_2} = 0$$

14
5

145

## Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Podemos derivar la utilidad esperada con respecto a $A_2$, $A_3$ y $A_4$ , igualar a cero y resolver las ecuaciones para obtener $C_1^*$, $C_2^*$ y $C_3^*$ y $A_2^*$, $A_3^*$ y $A_4^*$:

$$\begin{aligned} &E_1[\Lambda_1] \\ &= U[(1+r_1)\, A_1 + e_2 w_1 - A_2] \\ &+ \beta\{\pi_{2,1} U[(1+r_2)\, A_2 + e_1 w_2 - A_3] + \pi_{2,2} U[(1+r_2)\, A_2 + e_2 w_2 - A_3] + \pi_{2,3} U[(1+r_2)\, A_2 + e_3 w_2 - A_3]\} \\ &+ \beta^2\{\pi_{3,1} U[(1+r_3)\, A_3 + e_1 w_3 - A_4] + \pi_{3,3} U[(1+r_3)\, A_3 + e_2 w_3 - A_4] + \pi_{3,3} U[(1+r_3)\, A_3 + e_3 w_3 - A_4]\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E_1[\Lambda_1]}{\partial A_2} = 0 \Leftrightarrow -U'[(1+r_1)\, A_1 + e_2 w_1 - A_2] + \beta(1+r_2)\{\pi_{2,1} U'[(1+r_2)$$
$$A_2 + e_1 w_2 - A_3] + \pi_{2,2} U'[(1+r_2)\, A_2 + e_2 w_2 - A_3] + \pi_{2,3} U'[(1+r_2)$$
$$A_2 + e_3 w_2 - A_3]\} = 0$$

14
6

146

# Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Podemos derivar la utilidad esperada con respecto a $A_2$, $A_3$ y $A_4$ , igualar a cero y resolver las ecuaciones para obtener $C_1^*$, $C_2^*$ y $C_3^*$ y $A_2^*$, $A_3^*$ y $A_4^*$:

$$
\begin{aligned}
&E_1[\Lambda_1] \\
&= U[(1+r_1)\,A_1 + e_2 w_1 - \,A_2] \\
&+ \beta\{\pi_{2,1}U[(1+r_2)\,A_2 + e_1 w_2 - \,A_3] + \pi_{2,2}U[(1+r_2)\,A_2 + e_2 w_2 - \,A_3] + \pi_{2,3}U[(1+r_2)\,A_2 + e_3 w_2 - \,A_3]\} \\
&+ \beta^2\{\pi_{3,1}U[(1+r_3)\,A_3 + e_1 w_3 - \,A_4] + \pi_{3,3}U[(1+r_3)\,A_3 + e_2 w_3 - \,A_4] + \pi_{3,3}U[(1+r_3)\,A_3 + e_3 w_3 - \,A_4]\}
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial E_1[\Lambda_1]}{\partial A_3} = 0$$





# Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Podemos derivar la utilidad esperada con respecto a $A_2$, $A_3$ y $A_4$ , igualar a cero y resolver las ecuaciones para obtener $C_1^*$, $C_2^*$ y $C_3^*$ y $A_2^*$, $A_3^*$ y $A_4^*$:

$$
\begin{aligned}
&E_1[\Lambda_1] \\
&= U[(1+r_1)\,A_1 + e_2 w_1 - \,A_2] \\
&+ \beta\{\pi_{2,1}U[(1+r_2)\,A_2 + e_1 w_2 - \,A_3] + \pi_{2,2}U[(1+r_2)\,A_2 + e_2 w_2 - \,A_3] + \pi_{2,3}U[(1+r_2)\,A_2 + e_3 w_2 - \,A_3]\} \\
&+ \beta^2\{\pi_{3,1}U[(1+r_3)\,A_3 + e_1 w_3 - \,A_4] + \pi_{3,3}U[(1+r_3)\,A_3 + e_2 w_3 - \,A_4] + \pi_{3,3}U[(1+r_3)\,A_3 + e_3 w_3 - \,A_4]\}
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial E_1[\Lambda_1]}{\partial A_3} = 0 \Leftrightarrow -\beta\{\pi_{2,1}U'[(1+r_2)\,A_2 + e_1 w_2 - \,A_3] + \pi_{2,2}U'[(1+r_2)\,A_2 + e_2 w_2 - \,A_3] + \pi_{2,3}U'[(1+r_2)\,A_2 + e_3 w_2 - \,A_3]\} + \beta^2(1+r_3)\{\pi_{3,1}U'[(1+r_3)\,A_3 + e_1 w_3 - \,A_4] + \pi_{3,2}U'[(1+r_3)\,A_3 + e_2 w_3 - \,A_4] + \pi_{3,3}U'[(1+r_3)\,A_3 + e_3 w_3 - \,A_4]\} = 0$$

## Condiciones de primer orden:

$\frac{\partial E_1[\Lambda_1]}{\partial A_2} = 0 \Leftrightarrow -U'[(1+r_1)\, A_1 + e_2 w_1 - A_2] + \beta(1+r_2)\{\pi_{2,1}U'[(1+r_2)$
$A_2 + e_1 w_2 - A_3] + \pi_{2,2}U'[(1+r_2)\, A_2 + e_2 w_2 - A_3] + \pi_{2,3}U'[(1+r_2)$
$A_2 + e_3 w_2 - A_3]\} = 0$

$\frac{\partial E_1[\Lambda_1]}{\partial A_3} = 0 \Leftrightarrow -\beta\{\pi_{2,1}U'[(1+r_2)\, A_2 + e_1 w_2 - A_3] + \pi_{2,2}U'[(1+r_2)$
$A_2 + e_2 w_2 - A_3] + \pi_{2,3}U'[(1+r_2)\, A_2 + e_3 w_2 - A_3]\} + \beta^2(1+$
$r_3)\{\pi_{3,1}U'[(1+r_3)\, A_3 + e_1 w_3 - A_4] + \pi_{3,2}U'[(1+r_3)\, A_3 + e_2 w_3 - A_4] +$
$\pi_{3,3}U'[(1+r_3)\, A_3 + e_3 w_3 - A_4]\} = 0$

14
9

149

## Condiciones de primer orden:

$\frac{\partial E_1[\Lambda_1]}{\partial A_2} = 0 \Leftrightarrow -U'[(1+r_1)\, A_1 + e_2 w_1 - A_2] + \beta(1+r_2)\{\pi_{2,1}U'[(1+r_2)\, A_2 + e_1 w_2 -$
$A_3] + \pi_{2,2}U'[(1+r_2)\, A_2 + e_2 w_2 - A_3] + \pi_{2,3}U'[(1+r_2)\, A_2 + e_3 w_2 - A_3]\} = 0$

$\frac{\partial E_1[\Lambda_1]}{\partial A_3} = 0 \Leftrightarrow -\beta\{\pi_{2,1}U'[(1+r_2)\, A_2 + e_1 w_2 - A_3] + \pi_{2,2}U'[(1+r_2)\, A_2 + e_2 w_2 -$
$A_3] + \pi_{2,3}U'[(1+r_2)\, A_2 + e_3 w_2 - A_3]\} + \beta^2(1+r_3)\{\pi_{3,1}U'[(1+r_3)\, A_3 + e_1 w_3 -$
$A_4] + \pi_{3,2}U'[(1+r_3)\, A_3 + e_2 w_3 - A_4] + \pi_{3,3}U'[(1+r_3)\, A_3 + e_3 w_3 - A_4]\} = 0$

Debido a que ya sabemos que $A_4^* = 0$, entonces tenemos un sistema de dos ecuaciones, con dos incógnitas ($A_2$ y $A_3$) ... Tal vez solo utilizando la función de utilidad explícita, $\ln C_t$, podríamos obtener las soluciones óptimas explícitas para $A_2^*$ y $A_3^*$ y sustituyéndolas, obtener $C_1^*$ , $C_2^*$ y $C_3^*$

15
0

150

## Condiciones de primer orden:

- No obstante lo anterior, no hay solución explícita

15
1

151

## Condiciones de primer orden:

- No obstante lo anterior, no hay solución explícita
- Entonces, para esto es muy relevante utilizar *Programación Dinámica*

15
2

152

## Condiciones de primer orden:

- No obstante lo anterior, no hay solución explícita
- Entonces, para esto es muy relevante utilizar *Programación Dinámica*
- De manera similar como lo hicimos en el problema de optimización de tres periodos, en esta caso vamos a empezar en $t = 3$, luego en $t = 2$ y por último en $t = 1$

15
3

153

## Programación Dinámica

### $t = 3$

Proponemos la ecuación de Bellman:

$$V_3(a, \eta) \equiv U\left[\widehat{C_3}(a, \eta)\right] + \beta V_4\left[\widehat{A_4}(a^+, \eta^+\ )\right]$$

15
4

154

## Programación Dinámica

$t = 3$

Proponemos la ecuación de Bellman:

$$V_3(a,\eta) \equiv U\left[\widehat{C_3}(a,\eta)\right] + \beta \overset{0}{V_4\left[\widehat{A_4}(a^+,\eta^+)\right]}$$

15
5

155

## Programación Dinámica

$t = 3$

Proponemos la ecuación de Bellman:

$$V_3(a,\eta) \equiv U\left[\widehat{C_3}(a,\eta)\right] + \beta \overset{0}{V_4\left[\widehat{A_4}(a^+,\eta^+)\right]}$$

Recordemos que $U\left[\widehat{C_3}(a,\eta)\right] = \ln[(1+r_3)a + \eta w_3]$ y que $V_4(\cdot) = 0$

Entonces:

15
6

156

## Programación Dinámica

### $t = 3$

Proponemos la ecuación de Bellman:

$$V_3(a,\eta) \equiv U\left[\widehat{C_3}(a,\eta)\right] + \cancelto{0}{\beta V_4\left[\widehat{A_4}(a^+,\eta^+)\right]}$$

Recordemos que $U\left[\widehat{C_3}(a,\eta)\right] = \ln[(1+r_3)a + \eta w_3]$ y que $V_4(\cdot) = 0$

Entonces:

$$V_3(a,\eta) = \ln[(1+r_3)a + \eta w_3]$$

15
7

157

## Programación Dinámica

### $t = 3$

Proponemos la ecuación de Bellman:

$$V_3(a,\eta) \equiv U\left[\widehat{C_3}(a,\eta)\right] + \cancelto{0}{\beta V_4\left[\widehat{A_4}(a^+,\eta^+)\right]}$$

Recordemos que $U\left[\widehat{C_3}(a,\eta)\right] = \ln[(1+r_3)a + \eta w_3]$ y que $V_4(\cdot) = 0$

Entonces:

$$V_3(a,\eta) = \ln[(1+r_3)a + \eta w_3]$$

$$V_3{}'(a,\eta) = \frac{1+r_3}{(1+r_3)a + \eta w_3}$$

15
8

158

## Programación Dinámica

$t = 3$

Debido a que $\eta$ tiene tres escenarios -$e_1$, $e_2$ y $e_3$ -, entonces hay que calcular la función valor y la derivada para cada escenario:

$$V_3(a; e_1)$$
$$V_3(a; e_2)$$
$$V_3(a; e_3)$$
$$V_3{}'(a; e_1)$$
$$V_3{}'(a; e_2)$$
$$V_3{}'(a; e_3)$$

15
9

159

## Programación Dinámica

$t = 2$

Proponemos la ecuación de Bellman:

$$V_2(a, \eta) = \max_{c,a^+}\left\{U(c) + \beta E_{\eta^+|\eta} V_3(a^+, \eta^+) | a^+ = (1 + r_2)a + \eta w_2 - c\right\}$$

En donde:

$$E_{\eta^+|\eta} V_3(a^+; \eta^+) = \sum_{j=1}^{3} p_{i,j} V_3\left(a^+, \eta_j\right)$$

A diferencia de $t = 3$, en donde solo estaba el choque estocástico en $t = 3$, *i.e.* $\eta$, que podía tomar los valores de $e_1$, $e_2$ y $e_3$, ahora para calcular la función valor esperado para $t = 3$ hay que tomar en cuenta los escenarios $j$ para, dado que en $t = 2$ ocurrió un escenario $i$

16
0

160

# Programación Dinámica
## $t = 2$

Entonces, procedemos de la siguiente manera:

(1) Obtenemos las condiciones de primer orden;
(2) Sustituimos $V_3{}'(\cdot)$ del paso interior;
(3) Definimos que $\eta = e_i$ y $\eta^+ = e_j$; y
(4) Sustituimos la restricción en las condiciones de primer orden, en donde ya se reflejará que en $t = 3$ ya se definió el $i$-ésimo estado

16
1

161

# Programación Dinámica
## $t = 2$

(1) Obtenemos las condiciones de primer orden:

$$U'(c) = \beta E_{\eta^+|\eta} V_3'(a^+, \eta^+)$$

$$U'(c) = \beta \sum_{j=1}^{3} p_{i,j} V_3{}'\left(a^+, \eta_j\right)$$

a

(2) Sustituimos $V_3{}'(\cdot)$ del paso interior:
Sabemos de la solución en $t = 3$ que $V_3\left(a, \eta_j\right) = \ln[(1 + r_3)a + \eta w_3]$ y que $V_3{}'\left(a, \eta_j\right) = \frac{1+r_3}{(1+r_3)a+\eta w_3}$, por lo que $V_3{}'\left(a^+, \eta_j\right) = \frac{1+r_3}{(1+r_3)a^+ + \eta_j w_3}$

16
2

162

# Programación Dinámica

$t = 2$

$$U'(c) = \beta \sum_{j=1}^{3} p_{i,j} V_3{}'(a^+, \eta_j)$$

Sabemos que $U'(c) = \frac{1}{c}$

(3) Definimos que $\eta = e_i$ y $\eta^+ = e_j$; y

$$\frac{1}{c} = \beta \sum_{j=1}^{3} p_{i,j} \frac{1 + r_3}{(1 + r_3)a^+ + e_j w_3}$$

a

16
3

163

# Programación Dinámica

$t = 2$

$$\frac{1}{c} = \beta \sum_{j=1}^{3} p_{i,j} \frac{1 + r_3}{(1 + r_3)a^+ + e_j w_3}$$

a

(4) Sustituimos la restricción en las condiciones de primer orden $a^+ = (1 + r_2)a + \eta w_2 - c$, en donde ya se reflejará que en $t = 3$ ya se definió el $i$-ésimo estado → $a^+ = (1 + r_2)a + e_i w_2 - c$

$$\frac{1}{c} = \beta \sum_{j=1}^{3} p_{i,j} \frac{1 + r_3}{(1 + r_3)[(1 + r_2)a + e_i w_2 - c\,] + e_j w_3}$$

16
4

164

## Programación Dinámica

$t = 2$

$$\frac{1}{c} = \beta \sum_{j=1}^{3} p_{i,j} \frac{1 + r_3}{(1 + r_3)[(1 + r_2)a + e_i w_2 - c\,] + e_j w_3}$$

$$\frac{1}{c} = \beta \sum_{j=1}^{3} p_{i,j} \frac{\cancel{\dfrac{1 + r_3}{1 + r_3}}}{\dfrac{\cancel{(1 + r_3)}[(1 + r_2)a + e_i w_2 - c\,]}{\cancel{1 + r_3}} + \dfrac{e_j w_3}{1 + r_3}}$$

16
5

165

## Programación Dinámica

$t = 2$

$$\frac{1}{c} = \beta \sum_{j=1}^{3} p_{i,j} \frac{1}{(1 + r_2)a + e_i w_2 - c + \dfrac{e_j w_3}{1 + r_3}}$$

- Ahora hay que despejar $c$. Sin embargo, dado que está tanto de lado izquierdo, como derecho de la ecuación y de lado derecho es probabilística, solo es posible hacerlo con métodos numéricos. Así se puede calcular $\widehat{C_2}(a, \eta)$ y $\widehat{A_3}(a, \eta)$
- Sin embargo, haber utilizado el enfoque de *Programación Dinámica* permite hacer problemas más sencillos y poderlos resolver numéricamente.

16
6

166

# Programación Dinámica
## $t = 1$

(1) Proponemos la Ecuación de Bellman;
(2) Obtenemos las condiciones de primer orden (FOC);
(3) Sustituimos $V_2{}'(\cdot)$ del paso interior, pero ahora utilizamos la fórmula Benveniste–Scheinkman (BS);
(4) Sustituimos el resultado BS en FOC;

16
7

167

# Programación Dinámica
## $t = 1$

(1) Proponemos la Ecuación de Bellman:

$$V_1(a,\eta) = \max_{c,a^+}\left\{U(c) + \beta E_{\eta^+|\eta} V_2(a^+,\eta^+) | a^+ = (1+r_1)a + \eta w_1 - c\right\}$$

(2) Obtenemos las condiciones de primer orden:

$$U'(c) = \beta E_{\eta^+|\eta}[V_2'(a^+,\eta^+)]$$

(3) Sustituimos $V_2{}'(\cdot)$ del paso interior, pero ahora utilizamos la fórmula Benveniste–Sheinkman;

$$V_2(a,\eta) = U\left[\widehat{C_2}(a,\eta)\right] + \beta E_{\eta^+|\eta} V_3\left[\widehat{A_3},(a,\eta),\eta^+\right]$$

$$V_2{}'(a,\eta) = (1+r_2)U'\left[\widehat{C_2}(a,\eta)\right]$$

16
8

168

## Programación Dinámica

$t = 1$

(4) Sustituimos el resultado BS $V_2{}'(a,\eta) = (1 + r_2)U'\left[\widehat{C_2}(a,\eta)\right]$ en FOC $U'(c) = \beta E_{\eta^+|\eta}[V_2'(a^+,\eta^+)]$:

$$U'\left[\widehat{C_1}(a,\eta)\right] = \beta E_{\eta^+|\eta}\,(1 + r_2)U'\left[\widehat{C_2}(a^+,\eta^+)\right]$$

Calculamos las funciones de política numéricamente y de ahí obtenemos esta nueva Ecuación de Euler y numéricamente también, las soluciones óptimas para $\widehat{C_1}$ y $\widehat{A_2}$

16
9

169

## Conclusión

- ¿Para qué aprender *Programación Dinámica* e ir resolviendo de manera determinística, para después llegar a la parte estocástica y tener que utilizar métodos numéricos?
- Puede haber muchas razones, sin embargo, considero que estas dos son las más relevantes:

(1) Porque podemos crear modelos determinísticos, conocer las características dinámicas en las funciones de política y las trayectorias óptimas y después incorporar la parte estocástica y compararla con la realidad económica;

(2) Utilizamos *Programación Dinámica* en la parte estocástica para poderlo resolver, aunque sea numéricamente

17
0

170

# Nuestra agenda de hoy

- Revisión de datos y eventos macro
- Optimización de un modelo determinístico de tres periodos
- Dudas s/Examen Final *Take-Home*

171

171

# Muchas gracias!

172

172

Slides Carnival

**Free templates for all your presentation needs**

For PowerPoint and Google Slides

100% free for personal or commercial use

Ready to use, professional and customizable

Blow your audience away with attractive visuals

173