Macroeconomía y Ciclos Económicos

EC3031 (CCM)

CLASE 6

1

Nuestra agenda de hoy

Preparándonos para la decisión de Banxico de mañana 30 de septiembre → Repaso del modelo recursivo → Tarea

2

2

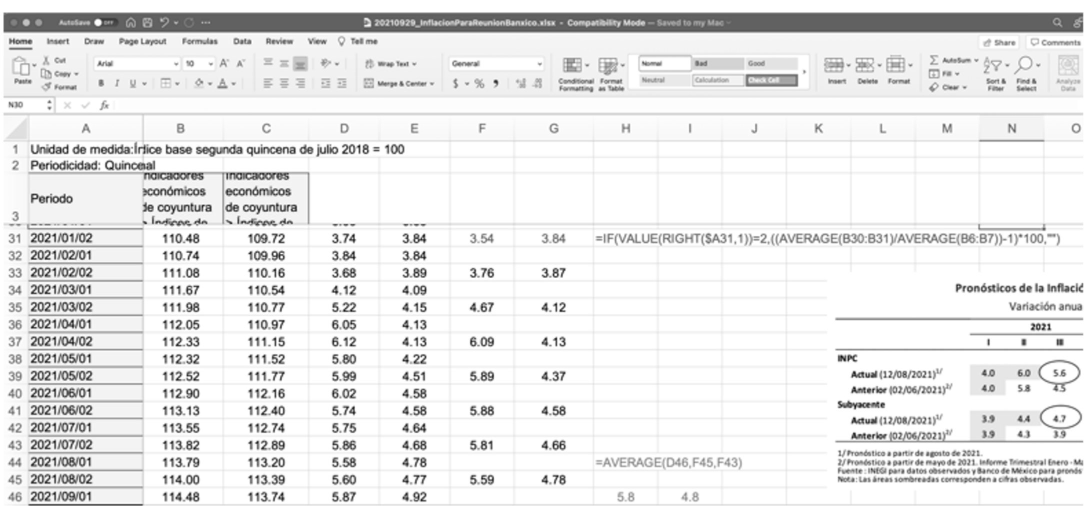
Nuestra agenda de hoy

- Preparándonos para la decisión de Banxico de mañana 30 de septiembre
- Repaso del modelo recursivo
- Tarea

3

3

Pre-Banxico 30-sep-21



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Unidad de medida:Índice base segunda quincena de julio 2018 = 100								
2	Periodicidad: Quincenal								
3	Periodo	Indicadores económicos de coyuntura > Índices de	Indicadores económicos de coyuntura > Índices de						
31	2021/01/02	110.48	109.72	3.74	3.84	3.54	3.84	=IF(VALUE(RIGHT($A31,1))=2,((AVERAGE(B30:B31)/AVERAGE(B6:B7))-1)*100,"")	
32	2021/02/01	110.74	109.96	3.84	3.84				
33	2021/02/02	111.08	110.16	3.68	3.89	3.76	3.87		
34	2021/03/01	111.67	110.54	4.12	4.09				
35	2021/03/02	111.98	110.77	5.22	4.15	4.67	4.12		
36	2021/04/01	112.05	110.97	6.05	4.13				
37	2021/04/02	112.33	111.15	6.12	4.13	6.09	4.13		
38	2021/05/01	112.32	111.52	5.80	4.22				
39	2021/05/02	112.52	111.77	5.99	4.51	5.89	4.37		
40	2021/06/01	112.90	112.16	6.02	4.58				
41	2021/06/02	113.13	112.40	5.74	4.58	5.88	4.58		
42	2021/07/01	113.55	112.74	5.75	4.64				
43	2021/07/02	113.82	112.89	5.86	4.68	5.81	4.66		
44	2021/08/01	113.79	113.20	5.58	4.78			=AVERAGE(D46,F45,F43)	
45	2021/08/02	114.00	113.39	5.60	4.77	5.59	4.78		
46	2021/09/01	114.48	113.74	5.87	4.92			5.8	4.8

Pronósticos de la Inflació

Variación anua

	2021 I	2021 II	2021 III
INPC			
Actual (12/08/2021)1/	4.0	6.0	5.6
Anterior (02/06/2021)2/	4.0	5.8	4.5
Subyacente			
Actual (12/08/2021)1/	3.9	4.4	4.7
Anterior (02/06/2021)2/	3.9	4.3	3.9

1/ Pronóstico a partir de agosto de 2021.
2/ Pronóstico a partir de mayo de 2021. Informe Trimestral Enero - Ma
Fuente : INEGI para datos observados y Banco de México para pronós
Nota: Las áreas sombreadas corresponden a cifras observadas.

4

4

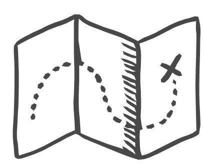
Nuestra agenda de hoy

- Preparándonos para la decisión de Banxico de mañana 30 de septiembre
- Repaso del modelo recursivo
- Tarea

5

5

¿Cómo vamos a aprender DP?



	Número de periodos de tiempo	Determinístico / Estocástico	Método de solución
(1)	Tres	Determinístico	Lagrange
(2)	Tres	Determinístico	Función de política[1]
(3)	Tres	Determinístico	Programación Dinámica
(4)	Infinito	Determinístico	Programación Dinámica
(5)	Tres	Estocástico	Programación Dinámica
(6)	Infinito	Estocástico	Programación Dinámica

1. Realmente no es un método, sino una forma alternativa de expresar las soluciones óptimas, que ayuda a ilustrar la idea conceptual sobre la que descansa la programación dinámica.

6

6

‘Función de política’ (*Policy Function*)

- Una vez más, vamos a utilizar el problema de optimización de la decisión consumo-ahorro (o de consumo inter-temporal) de un agente representativo que vive tres periodos

7

7

‘Función de política’ (*Policy Function*)

- Una vez más, vamos a utilizar el problema de optimización de la decisión consumo-ahorro (o de consumo inter-temporal) de un agente representativo que vive tres periodos

- Sin embargo, en lugar de resolver las trayectorias óptimas de consumo y nivel de activos para todo el periodo en cuestión desde la perspectiva inicial, *i.e.* $t = 1$…

8

8

‘Función de política’ (*Policy Function*)

- Una vez más, vamos a utilizar el problema de optimización de la decisión consumo-ahorro (o de consumo inter-temporal) de un agente representativo que vive tres periodos
- Sin embargo, en lugar de resolver las trayectorias óptimas de consumo y nivel de activos para todo el periodo en cuestión desde la perspectiva inicial, *i.e.* $t = 1$...
- ...vamos a posicionarnos en algún momento intermedio en la vida del agente representativo (*i.e.* , $t = 2$ o $t = 3$, porque en $t = 4$ ya terminó) y resolver el problema de optimización...

9

9

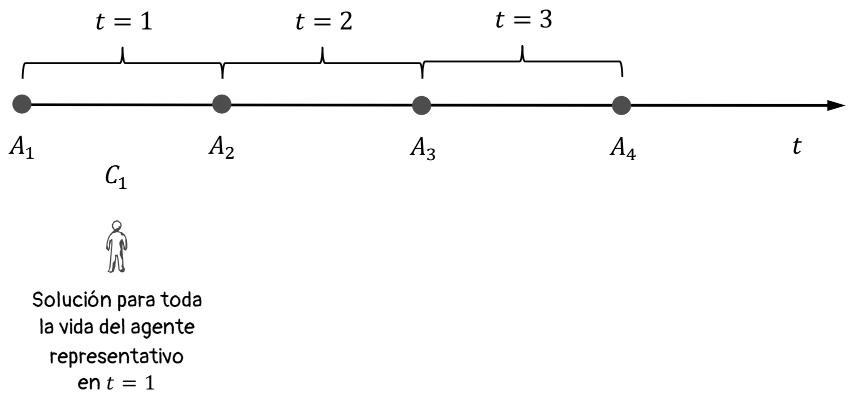
‘Función de política’ (*Policy Function*)

- Una vez más, vamos a utilizar el problema de optimización de la decisión consumo-ahorro (o de consumo inter-temporal) de un agente representativo que vive tres periodos
- Sin embargo, en lugar de resolver las trayectorias óptimas de consumo y nivel de activos para todo el periodo en cuestión desde la perspectiva inicial, *i.e.* $t = 1$...
- ...vamos a posicionarnos en algún momento intermedio en la vida del agente representativo (*i.e.* , $t = 2$ o $t = 3$, porque en $t = 4$ ya terminó) y resolver el problema de optimización...
- Las soluciones que vamos a obtener se conocen también como ‘funciones de política (económica)’, que son una ‘manera alternativa’ de expresar las soluciones óptimas en cada periodo de tiempo

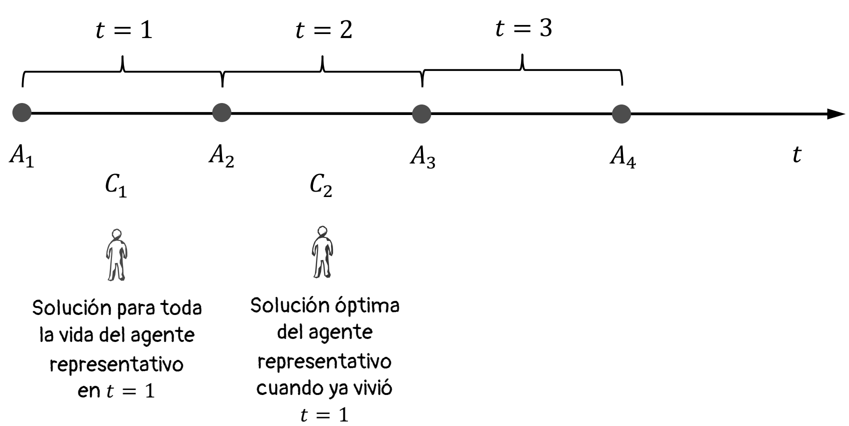
10

10

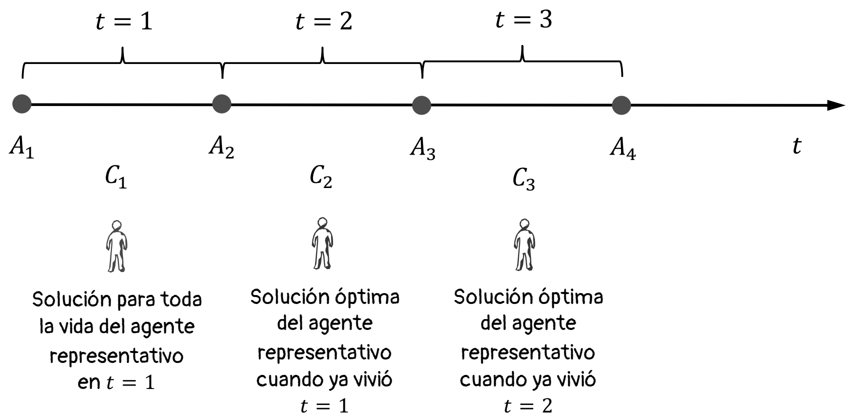
‘Funciones de política’



‘Funciones de política’



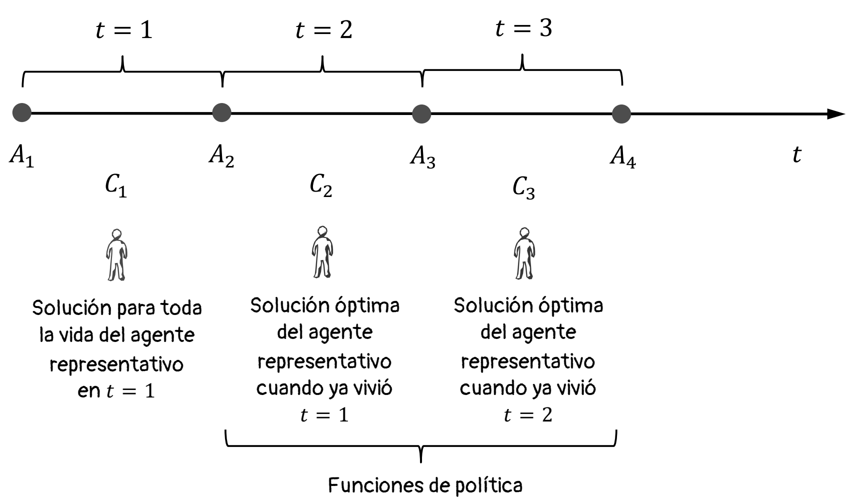
‘Funciones de política’



13

13

‘Funciones de política’



14

14

Soluciones ‘condicionalmente óptimas’

- Entonces vamos a resolver el problema de optimización del agente representativo para $t = 2$ y para $t = 3$

Soluciones ‘condicionalmente óptimas’

- Entonces vamos a resolver el problema de optimización del agente representativo para $t = 2$ y para $t = 3$
- A diferencia de las soluciones óptimas que obtenemos cuando resolvemos el problema para todo el periodo de tiempo, las ‘funciones de política’ son soluciones condicionalmente óptimas

Soluciones 'condicionalmente óptimas'

- Entonces vamos a resolver el problema de optimización del agente representativo para $t = 2$ y para $t = 3$
- A diferencia de las soluciones óptimas que obtenemos cuando resolvemos el problema para todo el periodo de tiempo, las 'funciones de política' son soluciones condicionalmente óptimas
- ¿Por qué 'condicionalmente óptimas'? Porque son decisiónes óptimas, pero están condicionadas a los activos que se desea acumular en el periodo siguiente

17

17

Soluciones 'condicionalmente óptimas'

- Entonces vamos a resolver el problema de optimización del agente representativo para $t = 2$ y para $t = 3$
- A diferencia de las soluciones óptimas que obtenemos cuando resolvemos el problema para todo el periodo de tiempo, las 'funciones de política' son soluciones condicionalmente óptimas
- ¿Por qué 'condicionalmente óptimas'? Porque son decisiónes óptimas, pero están condicionadas a los activos que se desea acumular en el periodo siguiente
- Vamos a denotarlas con un acento circunflejo o 'gorrito' (e.g. $\widehat{C_2}$)

18

18

Soluciones ‘condicionalmente óptimas’

- Entonces vamos a resolver el problema de optimización del agente representativo para $t = 2$ y para $t = 3$
- A diferencia de las soluciones óptimas que obtenemos cuando resolvemos el problema para todo el periodo de tiempo, las ‘funciones de política’ son soluciones condicionalmente óptimas
- ¿Por qué ‘condicionalmente óptimas’? Porque son decisiónes óptimas, pero están condicionadas a los activos que se desea acumular en el periodo siguiente
- Vamos a denotarlas con un acento circunflejo o ‘gorrito’ (e.g. $\widehat{C_2}$)
- Vamos a ver este método como ‘paso intermedio’ para poder entender mejor el concepto de *Programación Dinámica*

19

19

’Funciones de política’ para $t = 2$

Como vamos a optimizar la decisión del agente representativo en $t = 2$, entonces solo se maximiza la función de utilidad aditiva para los periodos 2 y 3 (en el cuarto periodo el agente representativo ya no puede obtener utilidad):

$$\max_{C_2, C_3}\{\ln C_2 + \beta \ln C_3\}$$

¿Sujeto a?

$$(1 + r_1)\, A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} = C_1 + \frac{C_2}{1+r_2} + \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)}$$

20

20

'Funciones de política' para $t = 2$

Como vamos a optimizar la decisión del agente representativo en $t = 2$, entonces solo se maximiza la función de utilidad aditiva para los periodos 2 y 3 (en el cuarto periodo el agente representativo ya no puede obtener utilidad):

$$\max_{C_2, C_3}\{\ln C_2 + \beta \ln C_3\}$$

¿Sujeto a?

$$(1 + \overset{r_2}{\cancel{r_1}})\,\overset{a}{\cancel{A_1}} + \cancel{w_1} + \frac{w_2}{\cancel{1+r_2}} + \frac{w_3}{\cancel{(1+r_2)}(1+r_3)} = \cancel{C_1} + \frac{C_2}{\cancel{1+r_2}} + \frac{C_3}{\cancel{(1+r_2)}(1+r_3)}$$

21

21

'Funciones de política' para $t = 2$

Como vamos a optimizar la decisión del agente representativo en $t = 2$, entonces solo se maximiza la función de utilidad aditiva para los periodos 2 y 3 (en el cuarto periodo el agente representativo ya no puede obtener utilidad):

$$\max_{C_2, C_3}\{\ln C_2 + \beta \ln C_3\}$$

¿Sujeto a?

$$(1 + \overset{r_2}{\cancel{r_1}})\,\overset{a}{\cancel{A_1}} + \cancel{w_1} + \frac{w_2}{\cancel{1+r_2}} + \frac{w_3}{\cancel{(1+r_2)}(1+r_3)} = \cancel{C_1} + \frac{C_2}{\cancel{1+r_2}} + \frac{C_3}{\cancel{(1+r_2)}(1+r_3)}$$

$$(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} = C_2 + \frac{C_3}{1 + r_3}$$

22

22

'Funciones de política' para $t = 2$

$$\max_{c_2, c_3}\{\ln C_2 + \beta \ln C_3\}$$

sujeto a:

$$(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} = C_2 + \frac{C_3}{1 + r_3}$$

23

23

'Funciones de política' para $t = 2$

$$\max_{c_2, c_3}\{\ln C_2 + \beta \ln C_3\}$$

sujeto a:

$$(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} = C_2 + \frac{C_3}{1 + r_3}$$

Podríamos resolverlo con un lagrangiano. Sin embargo, en este caso es más sencillo despejar C_3 de la restricción e incorporar la expresión en la función objetivo. Así lo podemos resolverlo como un problema de optimización no restringido

24

24

’Funciones de política’ para $t = 2$

$$(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} = C_2 + \frac{C_3}{1 + r_3}$$

25

25

’Funciones de política’ para $t = 2$

$$(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} = C_2 + \frac{C_3}{1 + r_3}$$

$$C_2 + \frac{C_3}{1 + r_3} = (1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3}$$

26

26

'Funciones de política' para $t = 2$

$$(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} = C_2 + \frac{C_3}{1+r_3}$$

$$C_2 + \frac{C_3}{1+r_3} = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$\frac{C_3}{1+r_3} = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2$$

27

27

'Funciones de política' para $t = 2$

$$(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} = C_2 + \frac{C_3}{1+r_3}$$

$$C_2 + \frac{C_3}{1+r_3} = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$\frac{C_3}{1+r_3} = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2$$

$$C_3 = (1+r_3)\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2\right]$$

28

28

'Funciones de política' para $t = 2$

$$\max_{c_2} \left\langle \ln C_2 + \beta \ln \left\{ (1+r_3) \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2 \right] \right\} \right\rangle$$

29

29

'Funciones de política' para $t = 2$

$$\max_{c_2} \left\langle \ln C_2 + \beta \ln \left\{ (1+r_3) \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2 \right] \right\} \right\rangle$$

FOC – Condición de primer orden:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial C_2} = 0$$

30

30

'Funciones de política' para $t = 2$

$$\max_{c_2} \left\langle \ln C_2 + \beta \ln \left\{ (1+r_3) \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2 \right] \right\} \right\rangle$$

FOC – Condición de primer orden:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial C_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C_2} - \frac{\beta(1+r_3)}{(1+r_3)\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2\right]} = 0$$

31

31

'Funciones de política' para $t = 2$

$$\max_{c_2} \left\langle \ln C_2 + \beta \ln \left\{ (1+r_3) \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2 \right] \right\} \right\rangle$$

FOC – Condición de primer orden:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial C_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C_2} - \frac{\beta\cancel{(1+r_3)}}{\cancel{(1+r_3)}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2\right]} = 0$$

32

32

’Funciones de política’ para $t = 2$

$$\max_{c_2} \left\langle \ln C_2 + \beta \ln \left\{ (1+r_3) \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2 \right] \right\} \right\rangle$$

FOC – Condición de primer orden:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial C_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C_2} - \frac{\beta\cancel{(1+r_3)}}{\cancel{(1+r_3)}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2\right]} = 0$$

$$(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2 = \beta C_2$$

33

33

’Función de política’ de C para $t = 2$

$$(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2 = \beta C_2$$

34

34

'Función de política' de C para $t = 2$

$$(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2 = \beta C_2$$

$$\beta C_2 + C_2 = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

35

35

'Función de política' de C para $t = 2$

$$(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2 = \beta C_2$$

$$\beta C_2 + C_2 = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$C_2(1+\beta) = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

36

36

'Función de política' de C para $t = 2$

$$(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} - C_2 = \beta C_2$$

$$\beta C_2 + C_2 = (1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3}$$

$$C_2(1 + \beta) = (1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3}$$

$$\boxed{\widehat{C_2} = \frac{1}{1 + \beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3}\right]}$$

37

37

'Función de política' de A en $t = 2$

- Ya tenemos $\widehat{C_2}$

38

38

'Función de política' de A en $t = 2$

- Ya tenemos $\widehat{C_2}$
- Ahora ¿Qué función de política nos falta para tener el equilibrio completo en $t = 2$?

39

39

'Función de política' de A en $t = 2$

- Ya tenemos $\widehat{C_2}$
- Ahora ¿Qué función de política nos falta para tener el equilibrio completo en $t = 2$?
- Podríamos pensar que $\widehat{A_2}$ por ser 'el par en el tiempo' de $\widehat{C_2}$

40

40

'Función de política' de A en $t = 2$

- Ya tenemos $\widehat{C_2}$
- Ahora ¿Qué función de política nos falta para tener el equilibrio completo en $t = 2$?
- Podríamos pensar que $\widehat{A_2}$ por ser 'el par en el tiempo' de $\widehat{C_2}$
- Sin embargo, debido a que A_1 es un parámetro, A_2^* se tuvo que haber obtenido en $t = 1$, por lo que en $t = 2$ tenemos que obtener A_3^*

41

41

'Función de política' de A en $t = 2$

- Ya tenemos $\widehat{C_2}$
- Ahora ¿Qué función de política nos falta para tener el equilibrio completo en $t = 2$?
- Podríamos pensar que $\widehat{A_2}$ por ser 'el par en el tiempo' de $\widehat{C_2}$
- Sin embargo, debido a que A_1 es un parámetro, A_2^* se tuvo que haber obtenido en $t = 1$, por lo que en $t = 2$ tenemos que obtener A_3^*
- No nos dimos cuenta de esto cuando resolvimos el problema de optimización para todo el periodo de tiempo, porque resolvimos todo de manera simultánea. Por esto no nos detuvimos a ver en qué momento en el tiempo el agente representativo toma la decisión sobre su nivel de activos para el siguiente periodo

42

42

'Función de política' de A en $t = 2$ $(\widehat{A_3})$

- Entonces en $t = 2$ tenemos que obtener la función de política de los activos para $t = 3$, *i.e.* $\widehat{A_3}$

'Función de política' de A en $t = 2$ $(\widehat{A_3})$

- Entonces en $t = 2$ tenemos que obtener la función de política de los activos para $t = 3$, *i.e.* $\widehat{A_3}$
- Tomando la restricción o simplemente la expresión (8b):

$$A_3 = (1 + r_2)\, A_2 + w_2 - C_2 \quad \text{(8b)}$$

'Función de política' de A en $t = 2$ ($\widehat{A_3}$)

- Entonces en $t = 2$ tenemos que obtener la función de política de los activos para $t = 3$, *i.e.* $\widehat{A_3}$
- Tomando la restricción o simplemente la expresión (8b):

$$A_3 = (1 + r_2)\, A_2 + w_2 - C_2 \text{..................................} \text{(8b)}$$

- Proponemos la función de política para los activos en $t = 3$:

$$\widehat{A_3} = (1 + r_2)a + w_2 - \widehat{C_2}$$

45

45

'Función de política' de A en $t = 2$ ($\widehat{A_3}$)

- Entonces substituimos $\widehat{C_2}$ en $\widehat{A_3}$:

$$\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$\widehat{A_3} = (1 + r_2)a + w_2 - \widehat{C_2}$$

46

46

'Función de política' de A en $t = 2$ ($\widehat{A_3}$)

- Entonces substituimos $\widehat{C_2}$ en $\widehat{A_3}$:

$$\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$\widehat{A_3} = (1+r_2)a + w_2 - \widehat{C_2}$$

$$\widehat{A_3} = (1+r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

47

47

'Función de política' de A en $t = 2$ ($\widehat{A_3}$)

$$\widehat{A_3} = (1+r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

48

48

'Función de política' de A en $t = 2$ ($\widehat{A_3}$)

$$\widehat{A_3} = (1 + r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + \beta)(1 + r_2)a + (1 + \beta)w_2 - (1 + r_2)a - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

49

49

'Función de política' de A en $t = 2$ ($\widehat{A_3}$)

$$\widehat{A_3} = (1 + r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + \beta)(1 + r_2)a + (1 + \beta)w_2 - (1 + r_2)a - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + \beta)(1 + r_2)a - (1 + r_2)a + (1 + \beta)w_2 - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

50

50

’Función de política’ de A en $t = 2$ ($\widehat{A_3}$)

$$\widehat{A_3} = (1+r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+\beta)(1+r_2)a + (1+\beta)w_2 - (1+r_2)a - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+\beta)(1+r_2)a - (1+r_2)a + (1+\beta)w_2 - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+\beta-1)(1+r_2)a + (1+\beta-1)w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

51

51

’Función de política’ de A en $t = 2$ ($\widehat{A_3}$)

$$\widehat{A_3} = (1+r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+\beta)(1+r_2)a + (1+\beta)w_2 - (1+r_2)a - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+\beta)(1+r_2)a - (1+r_2)a + (1+\beta)w_2 - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+\beta-1)(1+r_2)a + (1+\beta-1)w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[\beta(1+r_2)a + \beta w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

52

52

'Función de política' de A en $t = 2$ ($\widehat{A_3}$)

$$\widehat{A_3} = (1+r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+\beta)(1+r_2)a + (1+\beta)w_2 - (1+r_2)a - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+\beta)(1+r_2)a - (1+r_2)a + (1+\beta)w_2 - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+\beta-1)(1+r_2)a + (1+\beta-1)w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[\beta(1+r_2)a + \beta w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\boxed{\widehat{A_3} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)}$$

53

'Funciones de política' en $t = 2$

- Así, ya obtuvimos las dos funciones de política para el agente representativo en $t = 2$:

$$\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

54

'Funciones de política' en $t = 2$

- Así, ya obtuvimos las dos funciones de política para el agente representativo en $t = 2$:
  $\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$
  $\widehat{A_3} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2]$- $\frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$
- Ambas son funciones condicionalmente óptimas porque están en función de a...
- ...por lo que para que $\widehat{C_2}$ y $\widehat{A_3}$ sean óptimas, se necesita que $a = A_2^*$

55

55

- Entonces las funciones de política $\widehat{C_2}$ y $\widehat{A_3}$ cuando $a = A_2^*$ son:
  $C_2^* = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)A_2^* + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$
  $A_3^* = \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)A_2^* + w_2]$- $\frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$

56

56

- Entonces las funciones de política $\widehat{C_2}$ y $\widehat{A_3}$ cuando $a = A_2^*$ son:

  $$C_2^* = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)A_2^* + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

  $$A_3^* = \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)A_2^* + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

- ¿En qué se parecen las funciones de política –que son funciones condicionales-, a las soluciones óptimas para todo el periodo?

  $$C_2^* = \frac{\beta(1+r_2)}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

  $$A_3^* = (1+r_2)\left\langle (1+r_1)A_1 + w_1 - \left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}\right\rangle + w_2 - \left\{\frac{\beta(1+r_2)}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}$$

57

57

- Entonces las funciones de política $\widehat{C_2}$ y $\widehat{A_3}$ cuando $a = A_2^*$ son:

  $$C_2^* = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)A_2^* + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

  $$A_3^* = \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)A_2^* + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

- ¿En qué se parecen las funciones de política –que son funciones condicionales-, a las soluciones óptimas para todo el periodo?

  $$C_2^* = \frac{\beta(1+r_2)}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

  $$A_3^* = (1+r_2)\left\langle (1+r_1)A_1 + w_1 - \left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}\right\rangle + w_2 - \left\{\frac{\beta(1+r_2)}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}$$

58

58

'Funciones de política' en $t = 3$

$$\max_{C_3}\{\ln C_3\}$$

sujeto a:

$$(1 + r_3)a + w_3 = C_3 + A_4$$
$$A_4 \geq 0$$

'Funciones de política' en $t = 3$

$$\max_{C_3}\{\ln C_3\}$$

sujeto a:

$$(1 + r_3)a + w_3 = C_3 + A_4$$
$$A_4 \geq 0$$

- Aquí ni siquiera hay necesidad de construir un lagrangiano, ni es necesario obtener alguna derivada. Debido a que sabemos que en óptimo el agente representativo se va a terminar sus recursos (*i.e.* $A_4 = 0$), simplemente con 'cumplir' con la restricción obtenemos el máximo restringido: $\widehat{C_3} = (1 + r_3)a + w_3$

'Funciones de política' en $t = 3$

- $\widehat{C_3} = (1 + r_3)a + w_3$
- Ahora, tomando la primera restricción y despejando A_4, la función de política de A_4 sería:

$$\widehat{A_4} = (1 + r_3)a + w_3 - \widehat{C_3}$$

61

61

'Funciones de política' en $t = 3$

- $\widehat{C_3} = (1 + r_3)a + w_3$
- Ahora, tomando la primera restricción y despejando A_4, la función de política de A_4 sería:

$$\widehat{A_4} = (1 + r_3)a + w_3 - \widehat{C_3}$$

$$\widehat{A_4} = (1 + r_3)a + w_3 - (1 + r_3)a - w_3$$

62

62

'Funciones de política' en $t = 3$

- $\widehat{C_3} = (1 + r_3)a + w_3$
- Ahora, tomando la primera restricción y despejando A_4, la función de política de A_4 sería:

$$\widehat{A_4} = (1 + r_3)a + w_3 - \widehat{C_3}$$

$$\widehat{A_4} = \cancel{(1 + r_3)a} + \cancel{w_3} - \cancel{(1 + r_3)a} - \cancel{w_3}$$

63

63

'Funciones de política' en $t = 3$

- $\widehat{C_3} = (1 + r_3)a + w_3$
- Ahora, tomando la primera restricción y despejando A_4, la función de política de A_4 sería:

$$\widehat{A_4} = (1 + r_3)a + w_3 - \widehat{C_3}$$

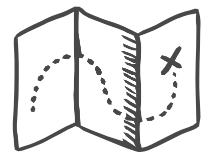
$$\widehat{A_4} = \cancel{(1 + r_3)a} + \cancel{w_3} - \cancel{(1 + r_3)a} - \cancel{w_3}$$

$$\widehat{A_4} = 0 = A_4^*$$

64

64

¿Cómo vamos a aprender DP?



	Número de periodos de tiempo	Determinístico / Estocástico	Método de solución
(1)	Tres	Determinístico	Lagrange
(2)	Tres	Determinístico	Función de política[1]
(3)	Tres	Determinístico	Programación Dinámica
(4)	Infinito	Determinístico	Programación Dinámica
(5)	Tres	Estocástico	Programación Dinámica
(6)	Infinito	Estocástico	Programación Dinámica

1. Realmente no es un método, sino una forma alternativa de expresar las soluciones óptimas, que ayuda a ilustrar la idea conceptual sobre la que descansa la programación dinámica.

65

65

Richard E. Bellman

(1920-1984)

Matemático

Principal aportación:

Programación Dinámica

- Lic. en Matemáticas
  Brooklyn College (1941)
- Maestría
  University of Wisconsin (1943)
- Doctorado
  Princeton University (1946)
- Profesor
  Princeton, Stanford, USC

Fuente: https://en.wikipedia.org/wiki/Richard_E._Bellman#/media/File:Richard_Ernest_Bellman.jpg

66

66

Problema de optimización determinístico de tres periodos (función logarítmica)

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t$$

sujeto a:

$$A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , para } t = 1,2,3$$
$$A_4 \geq 0$$

67

67

Problema de optimización determinístico de tres periodos (función logarítmica)

Variable de control

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t$$

sujeto a:

Variable de estado

$$A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , para } t = 1,2,3$$
$$A_4 \geq 0$$

68

68

‘Principio de Optimalidad’ de Bellman (1957)

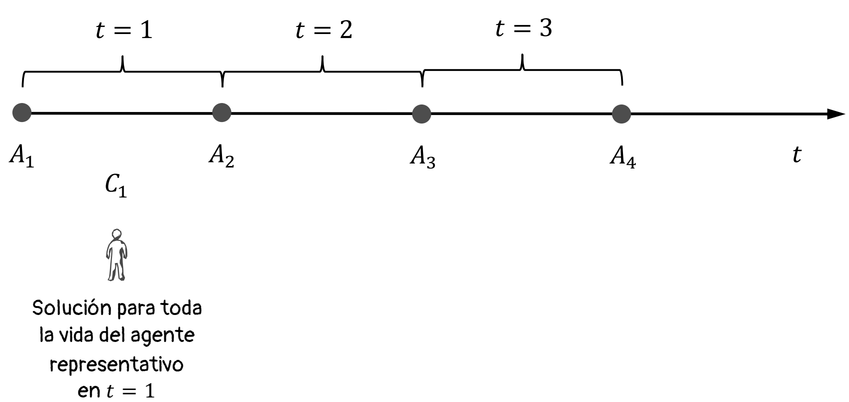
“Una política óptima tiene la propiedad de que cualquiera que haya sido el estado inicial y las decisiónes que se hayan tomado, las decisiónes hacia delante deben de constituir una política óptima, con respecto al estado que resulte de la primera decisión”

-- Richard Bellman (1957), p. 83

69

69

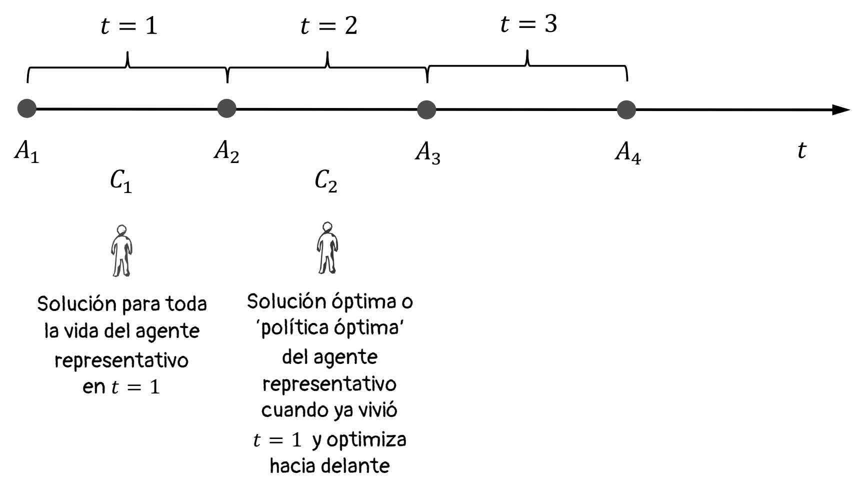
‘Política óptima’



70

70

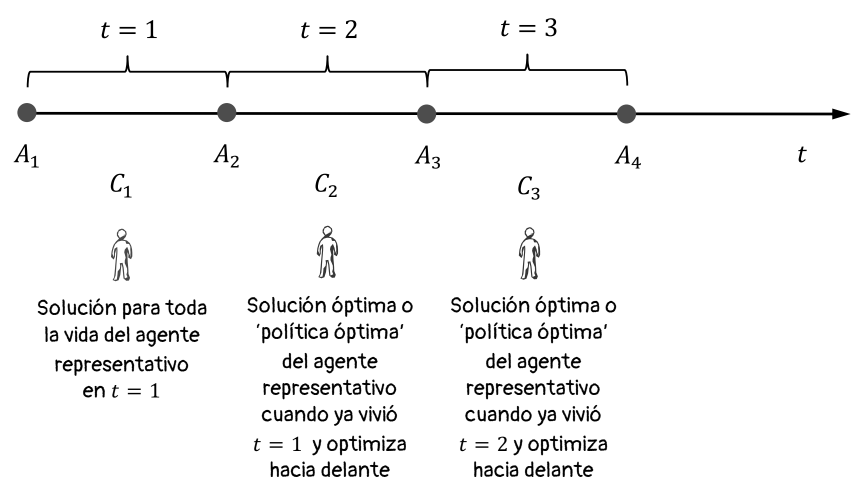
‘Política óptima’



71

71

‘Política óptima’



72

72

Programación Dinámica y Ecuación de Bellman

- Intuitivamente, el método de Programación Dinámica divide un problema complejo de optimización dinámica en subproblemas más simples de resolver

73

73

Programación Dinámica y Ecuación de Bellman

- Intuitivamente, el método de Programación Dinámica divide un problema complejo de optimización dinámica en subproblemas más simples de resolver
- El método calcula 'funciones valor' que dependen de la 'variable de estado' en cada momento

74

74

Programación Dinámica y Ecuación de Bellman

- Intuitivamente, el método de Programación Dinámica divide un problema complejo de optimización dinámica en subproblemas más simples de resolver
- El método calcula 'funciones valor' que dependen de la 'variable de estado' en cada momento
- A la ecuación que relaciona las funciones valor en el tiempo se le llama 'Ecuación de Bellman'

75

75

Programación Dinámica y Ecuación de Bellman

- Intuitivamente, el método de Programación Dinámica divide un problema complejo de optimización dinámica en subproblemas más simples de resolver
- El método calcula 'funciones valor' que dependen de la 'variable de estado' en cada momento
- A la ecuación que relaciona las funciones valor en el tiempo se le llama 'Ecuación de Bellman'
- La Programación Dinámica puede ser especialmente útil en decisiónes bajo incertidumbre

76

76

La Ecuación de Bellman y la utilidad 'indirecta'

- Las 'funciones valor' en nuestro caso son similares al concepto de 'función de utilidad indirecta'

77

77

La Ecuación de Bellman y la utilidad 'indirecta'

- Las 'funciones valor' en nuestro caso son similares al concepto de 'función de utilidad indirecta'

- La función de utilidad 'directa' describe las preferencias, independientemente de lo que ocurre en los mercados, mientras que la función de 'utilidad indirecta' refleja condiciones de optimización y precios de mercado

78

78

Digresión: Utilidad indirecta

$u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}$

79

79

Digresión: Utilidad indirecta

$\boxed{u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}}$

Utilidad
'directa'

80

80

Digresión: Utilidad indirecta

$$\boxed{u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}} \qquad \max_{x_1, x_2}\left\{2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} | p_1x_1 + p_2x_2 = m\right\}$$

Utilidad
'directa'

$$\mathcal{L} = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} + \lambda(m - p_1x_1 + p_2x_2)$$

81

81

Digresión: Utilidad indirecta

$$\boxed{u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}} \qquad \max_{x_1, x_2}\left\{2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} | p_1x_1 + p_2x_2 = m\right\}$$

Utilidad
'directa'

$$\mathcal{L} = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} + \lambda(m - p_1x_1 + p_2x_2)$$

FOC

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$$

82

82

Digresión: Utilidad indirecta

$$\boxed{u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}} \quad \max_{x_1, x_2} \left\{ 2x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} | p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \right\}$$

Utilidad 'directa'

$$\mathcal{L} = 2x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} + \lambda(m - p_1 x_1 + p_2 x_2)$$

FOC

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \iff \frac{2}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} - \lambda\, p_1 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{p_1} \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \iff \frac{2}{2} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{1}{2}} - \lambda\, p_2 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{p_2} \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \iff m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$$

83

83

Digresión: Utilidad indirecta

$$\boxed{u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}} \quad \max_{x_1, x_2} \left\{ 2x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} | p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \right\}$$

Utilidad 'directa'

$$\mathcal{L} = 2x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} + \lambda(m - p_1 x_1 + p_2 x_2)$$

FOC

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \iff \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} - \lambda\, p_1 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{p_1} \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \iff \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{1}{2}} - \lambda\, p_2 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{p_2} \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \iff m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$$

84

84

Digresión: Utilidad indirecta

$$\boxed{u(x_1,x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}} \qquad \max_{x_1,x_2}\left\{2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} \middle| p_1x_1 + p_2x_2 = m\right\}$$

Utilidad 'directa'

$$\mathcal{L} = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} + \lambda(m - p_1x_1 + p_2x_2)$$

FOC

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \iff \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} - \lambda\, p_1 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{p_1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \iff \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{1}{2}} - \lambda\, p_2 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{p_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \iff m - p_1x_1 - p_2x_2 = 0$$

$$\frac{1}{p_1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{p_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$x_2^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} = \frac{p_1}{p_2}x_1^{\frac{1}{2}}x_1^{\frac{1}{2}}$$

85

85

Digresión: Utilidad indirecta

$$\boxed{u(x_1,x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}} \qquad \max_{x_1,x_2}\left\{2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} \middle| p_1x_1 + p_2x_2 = m\right\}$$

Utilidad 'directa'

$$\mathcal{L} = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} + \lambda(m - p_1x_1 + p_2x_2)$$

FOC

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \iff \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} - \lambda\, p_1 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{p_1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \iff \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{1}{2}} - \lambda\, p_2 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{p_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \iff m - p_1x_1 - p_2x_2 = 0$$

$$\frac{1}{p_1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{p_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$x_2^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} = \frac{p_1}{p_2}x_1^{\frac{1}{2}}x_1^{\frac{1}{2}}$$

$$x_2 = \frac{p_1}{p_2}x_1$$

86

86

Digresión: Utilidad indirecta

$m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \qquad x_2 = \frac{p_1}{p_2} x_1$

87

87

Digresión: Utilidad indirecta

$m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \qquad x_2 = \frac{p_1}{p_2} x_1$

$m - p_1 x_1 - p_2 \frac{p_1}{p_2} x_1 = 0$

88

88

Digresión: Utilidad indirecta

$m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \qquad x_2 = \frac{p_1}{p_2} x_1$

$m - p_1 x_1 - \cancel{p_2} \frac{p_1}{\cancel{p_2}} x_1 = 0$

89

89

Digresión: Utilidad indirecta

$m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \qquad x_2 = \frac{p_1}{p_2} x_1$

$m - p_1 x_1 - \cancel{p_2} \frac{p_1}{\cancel{p_2}} x_1 = 0$

$m - p_1 x_1 - p_1 x_1 = 0$

90

90

Digresión: Utilidad indirecta

$$m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \qquad x_2 = \frac{p_1}{p_2} x_1$$

$$m - p_1 x_1 - \cancel{p_2} \frac{p_1}{\cancel{p_2}} x_1 = 0$$

$$m - p_1 x_1 - p_1 x_1 = 0 \iff m = 2p_1 x_1 \iff \left.\begin{aligned} x_1^*(p,m) &= \frac{m}{2p_1} \\ x_2^*(p,m) &= \frac{m}{2p_2} \end{aligned}\right\} \text{Funciones de demanda 'Marshalliana'}$$

91

91

Digresión: Utilidad indirecta

$$m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \qquad x_2 = \frac{p_1}{p_2} x_1$$

$$m - p_1 x_1 - \cancel{p_2} \frac{p_1}{\cancel{p_2}} x_1 = 0$$

$$m - p_1 x_1 - p_1 x_1 = 0 \iff m = 2p_1 x_1 \iff \left.\begin{aligned} x_1^*(p,m) &= \frac{m}{2p_1} \\ x_2^*(p,m) &= \frac{m}{2p_2} \end{aligned}\right\} \text{Funciones de demanda 'Marshalliana'}$$

La 'utilidad directa' es: $U(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$, entonces la 'utilidad indirecta' es: $v(p,m) = U(x_1^*, x_2^*)$

92

92

Digresión: Utilidad indirecta

La 'utilidad directa' es $u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}$ ...

...Entonces la 'utilidad indirecta' es: $v(p, m) = U(x_1^*, x_2^*)$

$$v(p,m) = 2\left(\frac{m}{2p_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m}{2p_2}\right)^{\frac{1}{2}} \iff \boxed{v(p,m) = \frac{m}{(p_1p_2)^{\frac{1}{2}}}}$$

Utilidad 'indirecta'

93

93

Utilidad indirecta | decisiónes óptimas vs. Función valor | funciones de política

Concepto	Problema estático de optimización de un consumidor con dos bienes	Problema dinámico de optimización de un individuo entre consumir y ahorrar un periodo antes del final
Utilidad directa	$u(x_1, x_2)$	$U(C_{T-1}, A_T)$

94

94

Utilidad indirecta | decisiónes óptimas vs. Función valor | funciones de política

Concepto	Problema estático de optimización de un consumidor con dos bienes		Problema dinámico de optimización de un individuo entre consumir y ahorrar un periodo antes del final	
Utilidad directa	$u(x_1, x_2)$		$U(C_{T-1}, A_T)$	
decisiónes óptimas	$x_1^*(p,m)$ $x_2^*(p,m)$	'Demandas Marshallianas'	$\widehat{C_{T-1}}(a;r,w)$ $\widehat{A_T}(a;r,w)$	'Funciones de política'

95

95

Utilidad indirecta | decisiónes óptimas vs. Función valor | funciones de política

Concepto	Problema estático de optimización de un consumidor con dos bienes		Problema dinámico de optimización de un individuo entre consumir y ahorrar un periodo antes del final	
Utilidad directa	$u(x_1, x_2)$		$U(C_{T-1}, A_T)$	
decisiónes óptimas	$x_1^*(p,m)$ $x_2^*(p,m)$	'Demandas Marshallianas'	$\widehat{C_{T-1}}(a;r,w)$ $\widehat{A_T}(a;r,w)$	'Funciones de política'
Utilidad indirecta	$v(p,m) = u[x_1^*(p,m), x_2^*(p,m)]$		$V_{T-1}(a) = U\left[\widehat{C_{T-1}}(a;r,w), \widehat{A_T}(a;r,w)\right]$ 'Función valor'	

96

96

‘Ecuación de Bellman’

- Para nuestro modelo determinístico de consumo inter-temporal, la ‘Ecuación de Bellman’ es la siguiente:

$$V_t(A_t) = \max_{C_t, A_{t+1}} \left\{ U(C_t) + \beta V_{t+1}(A_{t+1}) \middle| A_{t+1} = (1+r_t)A_t + w_t - C_t \right\}$$

97

97

‘Ecuación de Bellman’

- Para nuestro modelo determinístico de consumo inter-temporal, la ‘Ecuación de Bellman’ es la siguiente:

$$V_t(A_t) = \max_{C_t, A_{t+1}} \left\{ U(C_t) + \beta V_{t+1}(A_{t+1}) \middle| A_{t+1} = (1+r_t)A_t + w_t - C_t \right\}$$

- Es una función recursiva que relaciona las funciones valor en el tiempo

98

98

‘Ecuación de Bellman’

- Para nuestro modelo determinístico de consumo inter-temporal, la ‘Ecuación de Bellman’ es la siguiente:

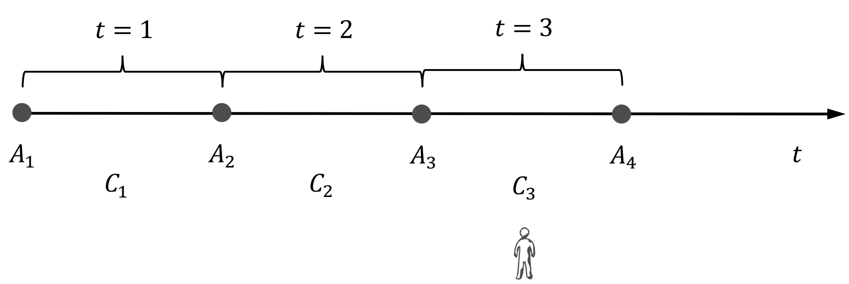
$$V_t(A_t) = \max_{C_t, A_{t+1}} \left\{ U(C_t) + \beta V_{t+1}(A_{t+1}) \middle| A_{t+1} = (1 + r_t)A_t + w_t - C_t \right\}$$

- Es una función recursiva que relaciona las funciones valor en el tiempo
- La idea es resolver para el último periodo, después para los dos últimos periodos, luego para los tres últimos y así sucesivamente

99

99

Inducción ‘hacia atrás’ $t = 3$



Problema de optimización del agente representativo cuando solo le queda por vivir $t = 3$

maximizar

$$U(C_3) + \cancel{\beta V_4(A_4)}$$

sujeto a

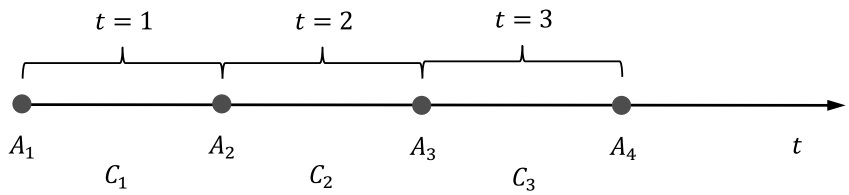
$$(1 + r_3)A_3 + w_3 = C_3 + \cancel{A_4} \rightarrow 0$$

Ecuación de Bellman $V_3(A_3)$

10
0

100

Inducción ‘hacia atrás’ $t = 2$



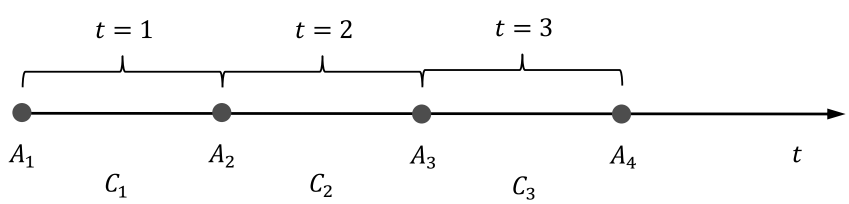
Problema de optimización del agente representativo cuando va a vivir en $t = 2$ y ya maximizó en $t = 3$

$$\left.\begin{array}{c}\text{maximizar}\\ U(C_2) + \beta V_3(A_3)\\ \text{sujeto a}\\ (1 + r_2)A_2 + w_2 = C_2 + A_3\end{array}\right\}\ \begin{array}{c}\text{Ecuación de Bellman}\\ V_2(A_2)\end{array}$$

101

101

Inducción ‘hacia atrás’ $t = 1$



Problema de optimización del agente representativo cuando va a vivir en $t = 1$ y ya maximizó en $t = 2$ y $t = 3$

La ‘función valor’ V_2 ya incorpora las decisiónes óptimas en $t = 2$ y $t = 3$ (*i.e.* las funciones de política $\widehat{C_2}, \widehat{A_3}, \widehat{C_3}, \widehat{A_4}$)

$$\left.\begin{array}{c}\text{maximizar}\\ U(C_1) + \beta V_2(A_2)\\ \text{sujeto a}\\ (1 + r_1)A_1 + w_1 = C_1 + A_2\end{array}\right\}\ \begin{array}{c}\text{Ecuación de Bellman}\\ V_1(A_1)\end{array}$$

102

102

Notación en la 'Ecuación de Bellman'

La 'usanza' en cuanto a notación en Programación Dinámica es que no utilicemos el subíndice de tiempo (t) en las variables de control (C_t) y de estado (A_t) y que en su lugar utilicemos letras minúsculas (c y a). Adicionalmente, se sugiere utilizar el superíndice '$+$', para referirse al 'siguiente periodo' (*e.g.* $a = A_t$ y $a^+ = A_{t+1}$), por lo que el problema:

$$V_t(A_t) = \max_{C_t, A_{t+1}} \left\{ U(C_t) + \beta V_{t+1}(A_{t+1}) \middle| A_{t+1} = (1 + r_t)A_t + w_t - C_t \right\}$$

...quedaría:

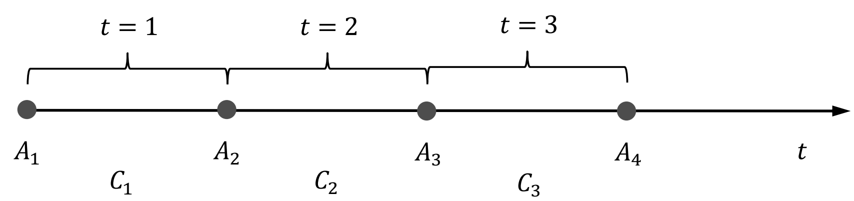
$$V_t(a) = \max_{c, a^+} \{ U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) | a^+ = (1 + r_t)a + w_t - c \}$$

Además del superíndice '+' para referirse al periodo siguiente, algunos utilizan el apóstrofe '. Sin embargo, a veces se confunde con la derivada.

10
3

103

Ahora sí, empecemos en $t = 3$



Problema de optimización del agente representativo cuando solo le queda por vivir $t = 3$

maximizar

$U(C_3) + \cancel{\beta V_4(A_4)}$

sujeto a

$(1 + r_3)A_3 + w_3 = C_3 + \overset{0}{\cancel{A_4}}$

Ecuación de Bellman $V_3(a)$

10
4

104

Programación Dinámica en nuestro problema determinístico de tres periodos

Empecemos por resolver el problema[1] en $t = 3$:

$$V_3(A_3) = \max_{C_3,\, A_4}\{U(C_3) + \beta V_4(A_4) | (1 + r_3)A_3 + w_3 = C_3 + A_4;\, A_4 \geq 0\, \}$$

Cambiando la notación:

$$V_3(a) = \max_{c, a^+}\{U(c) + \beta V_4(a^+) | (1 + r_3)a + w_3 = c + a^+;\, a^+ \geq 0\, \}$$

Ya sabemos que el agente representativo no vive en $t = 4$, por lo que no puede generar utilidad, *i.e.* $V_4(a^+) = 0$. Asimismo, sabemos que dejar activos sin consumir en $t = 4$, no incrementa el nivel de utilidad

$t = 3$

$$V_3(a) = \max_{c, a^+}\{U(c) + \beta \cancelto{0}{V_4(a^+)} | (1 + r_3)a + w_3 = c + \cancelto{0}{a^+};\, a^+ \geq 0\, \}$$

...por lo que el problema se simplifica a:

$$V_3(a) = \max_{c}\{U(c) | (1 + r_3)a + w_3 = c\, \}$$

Para resolverlo, despejamos c de la restricción presupuestaria y la sustituimos en la función objetivo $U(\cdot)$:

$$V_3(a) = \max_{c}\{U[(1 + r_3)a + w_3]\, \}$$

$t = 3$

$$V_3(a) = \max_c \{U[(1+r_3)a + w_3]\}$$

Debido a que en este caso el máximo restringido se alcanza justo en la restricción $c = (1+r_3)a + w_3$ y $a^+ = 0$, entonces para que $\widehat{C_3} = c$, se necesita que $\widehat{A_4} = a^+$, por lo que las funciones de política son:

$$\widehat{C_3} = (1+r_3)a + w_3$$
$$\widehat{A_4} = 0$$

Llegamos a las mismas funciones de política que en la sección anterior

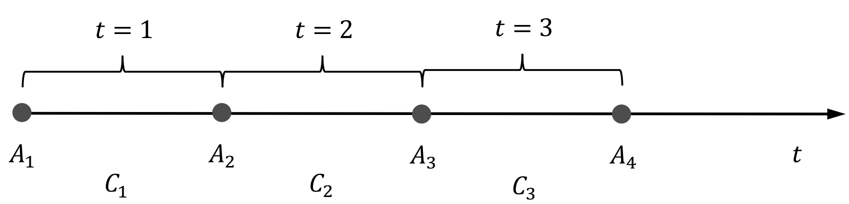
…y por lo tanto:

$$V_3(a) = U[(1+r_3)a + w_3]$$

10
7

107

Ahora resolvamos en $t = 2$



$\widehat{C_3} = (1+r_3)a + w_3$
$\widehat{A_4} = 0$

Problema de optimización del agente representativo cuando va a vivir en $t = 2$ y ya maximizó en $t = 3$

maximizar
$U(C_2) + \beta V_3(A_3)$
sujeto a
$(1+r_2)A_2 + w_2 = C_2 + A_3$

Ecuación de Bellman
$V_2(a)$

10
8

108

$t = 2$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 2$:

$$V_2(A_2) = \max_{C_2, A_3}\{U(C_2) + \beta V_3(A_3) \big| (1 + r_2)A_2 + w_2 = C_2 + A_3\}$$

Cambiando la notación:

$$V_2(a) = \max_{c, a^+}\{U(c) + \beta V_3(a^+) \big| (1 + r_2)a + w_2 = c + a^+\}$$

Para resolverlo, podemos despejar a^+ de la restricción [$a^+ = (1 + r_2)a + w_2 - c$] e incorporarlo en la función objetivo:

$$\max_{c}\{U(c) + \beta V_3[(1 + r_2)a + w_2 - c]\}$$

10
9

109

$t = 2$

$$V_2(a) = \max_{c, a^+}\{U(c) + \beta V_3(a^+) \big| (1 + r_2)a + w_2 = c + a^+\}$$

Para resolverlo, podemos despejar a^+ de la restricción e incorporarlo en la función objetivo:

$$\max_{c}\{U(c) + \beta V_3[(1 + r_2)a + w_2 - c]\}$$

FOC

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial c} = 0 \iff \qquad U'(c) - \beta V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c] = 0$$

$$U'(c) = \beta V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$$

Ecuación de Euler

11
0

110

$\max_c \{U(c) + \beta V_3[(1+r_2)a + w_2 - c]\}$ $\qquad V_3(a) = U[(1+r_3)a + w_3]$

$t = 2$

$$U'(c) = \beta V_3{}'[(1+r_2)a + w_2 - c]$$

Ecuación de Euler

Sabemos que $U(c) = \ln c$, entonces $U'(c) = \frac{1}{c}$

Ahora solo nos falta obtener $V_3{}'[(1+r_2)a + w_2 - c]$

¿Cómo obtenemos V_3?

Es necesario incorporar las soluciones óptimas o funciones de política $\widehat{C_3}$ y $\widehat{A_4}$ en la función de utilidad en $t = 3$ y así obtener la 'función valor'

$\max_c \{U(c) + \beta V_3[(1+r_2)a + w_2 - c]\}$ $\qquad V_3(a) = U[(1+r_3)a + w_3]$

$t = 2$

Las funciones de política en $t = 3$:

$\widehat{C_3} = (1+r_3)a + w_3$

$\widehat{A_4} = 0$

La 'función valor' en $t = 3$, es decir $V_3(a) = U\left[\widehat{C_3}(a), \widehat{A_4}(a)\right]$ es[1]:

$$V_3(a) = U[(1+r_3)a + w_3]$$

$$V_3(a) = \ln[(1+r_3)a + w_3]$$

Por lo que:

$$V_3'(a) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a + w_3}$$

1. La 'usanza' en Programación Dinámica es también ya no escribir de manera explícita los parámetros dentro de los paréntesis cuando nos referimos a las funciones. Es decir, en lugar de escribir $V_3(a;r,w) = U\left[\widehat{C_3}(a;r,w), \widehat{A_4}(a;r,w)\right]$, ahora solo la expresamos como $V_3(a) = U\left[\widehat{C_3}(a), \widehat{A_4}(a)\right]$

$\max_c\{U(c) + \beta V_3[(1+r_2)a + w_2 - c]\}$ $V_3(a) = U[(1+r_3)a + w_3]$

$t = 2$

Sin embargo, necesitamos $V_3{}'(a^+)$, no $V_3{}'(a)$

Si $V_3'(a) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a+w_3}$, entonces $V_3'(a^+) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a^+ + w_3}$

...y ya sabíamos que por la restricción: $a^+ = (1+r_2)a + w_2 - c$

Por lo que entonces:

$$V_3'(a^+) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)[(1+r_2)a + w_2 - c\,] + w_3}$$

113

113

$t = 2$

Ahora sí podemos expresar la condición de primer orden:

$$U'(c) = \beta V_3{}'[(1+r_2)a + w_2 - c]$$

Ecuación de Euler

Con $U'(c)$ y $V_3{}'[(1+r_2)a + w_2 - c]$ de manera explícita:

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1+r_3)}{(1+r_3)[(1+r_2)a + w_2 - c\,] + w_3}$$

Resolvemos para c y luego sustituir c en la restricción...

114

114

$t = 2$

$$\beta(1+r_3)c = (1+r_3)[(1+r_2)a + w_2 - c] + w_3$$

$$\frac{\beta\cancel{(1+r_3)}c}{\cancel{1+r_3}} = \frac{\cancel{(1+r_3)}[(1+r_2)a + w_2 - c]}{\cancel{(1+r_3)}} + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$c + \beta c = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$(1+\beta)c = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$c = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

115

115

$t = 2$

Sustituimos $c = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$ en la restricción $a^+ = (1+r_2)a + w_2 - c$, para obtener a^+:

$$a^+ = (1+r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$a^+ = \frac{1+\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

$$a^+ = \frac{\cancel{1} + \beta \cancel{- 1}}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

116

116

$t = 2$

Las 'funciones de política' en $t = 2$ son:

$$c = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$a^+ = \frac{\beta}{1+\beta}[(1 + r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

Para que $\widehat{C_2} = c$, se necesita que $\widehat{A_3} = a^+$ y así:

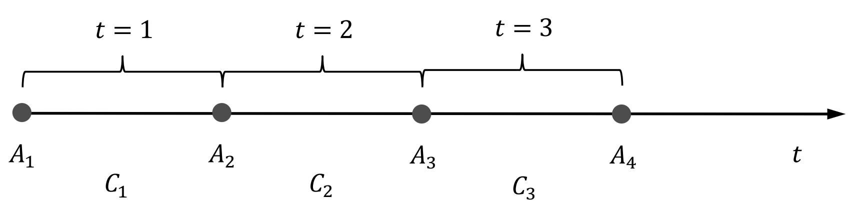
$$\boxed{\begin{aligned}\widehat{C_2} &= \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right] \\ \widehat{A_3} &= \frac{\beta}{1+\beta}[(1 + r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)\end{aligned}}$$

Llegamos a las mismas funciones de política que en la sección anterior

117

117

Inducción 'hacia atrás'



$$\widehat{C_3} = (1 + r_3)a + w_3$$
$$\widehat{A_4} = 0$$

$$\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$\widehat{A_3} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1 + r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{maximizar} \\ U(C_1) + \beta V_2(A_2) \\ \text{sujeto a} \\ (1 + r_1)A_1 + w_1 = C_1 + A_2\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{Ecuación de Bellman} \\ V_1(a)\end{array}$$

118

118

$t = 1$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 1$:

$$V_1(A_1) = \max_{C_1, A_2}\left\{U(C_1) + \beta V_2(A_2)\middle|(1 + r_1)A_1 + w_1 = C_1 + A_2\right\}$$

$$V_1(a) = \max_{c, a^+}\left\{U(c) + \beta V_2(a^+)\middle|(1 + r_1)a + w_1 = c + a^+\right\}$$

FOC

$$U'(c) = \beta V_2{}'[(1 + r_1)a + w_1 - c]$$

Ecuación de Euler

Ahora, al igual que el problema en $t = 2$, necesitamos $U'(c)$ y $V_2{}'(a^+)$

11
9

119

$t = 1$

$$U(c) = \ln c$$

$$U'(c) = \frac{1}{c}$$

Ahora solo falta $V_2{}'(a^+)$ y para obtenerla, necesitamos la función valor en $t + 1$, *i.e.* $V_2(a)$

12
0

120

$V_1(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_2[(1+r_1)a + w_1 - c]\}$ $\quad V_2(a) = \max_{c}\{U(c) + \beta V_3[(1+r_3)a + w_3]\}$

$t = 1$

$$V_2(a) = U\left(\widehat{C_2}\right) + \beta V_3\left[(1+r_3)\widehat{A_3} + w_3\right]$$

$$V_2(a) = \ln\left(\widehat{C_2}\right) + \beta \ln\left[(1+r_3)\widehat{A_3} + w_3\right]$$

$$\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$\widehat{A_3} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta \ln\left\langle(1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)\right\} + w_3\right\rangle$$

12
1

121

$t = 1$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta \ln\left\langle(1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)\right\} + w_3\right\rangle$$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta \ln\left\langle(1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right) + \frac{1+\beta}{1+\beta}\frac{1}{1+r_3}w_3\right\}\right\rangle$$

12
2

122

$t = 1$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta \ln\left\langle (1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)\right\} + w_3 \right\rangle$$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta \ln\left\langle (1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right) + \frac{1+\beta}{1+\beta}\frac{1}{1+r_3}w_3\right\}\right\rangle$$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta \ln\left\langle (1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] + \frac{1+\beta-1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)\right\}\right\rangle$$

12
3

123

$t = 1$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta \ln\left\langle (1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)\right\} + w_3 \right\rangle$$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta \ln\left\langle (1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right) + \frac{1+\beta}{1+\beta}\frac{1}{1+r_3}w_3\right\}\right\rangle$$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta \ln\left\langle (1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] + \frac{\cancel{1}+\beta\cancel{-1}}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)\right\}\right\rangle$$

12
4

124

$t = 1$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta \ln\left\langle (1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\}\right\rangle$$

$$V_2(a) = \overset{0}{\ln(1)} - \ln(1+\beta) + \ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right] + \beta\ln(1+r_3) + \ln\beta^\beta - \ln(1+\beta)^\beta + \beta\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$V_2(a) = -\ln(1+\beta) + \ln\beta^\beta - \ln(1+\beta)^\beta + \beta\ln(1+r_3) + \ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right] + \beta\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

125

125

$t = 1$

$$V_2(a) = -\ln(1+\beta) + \ln\beta^\beta - \ln(1+\beta)^\beta + \beta\ln(1+r_3) + \ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right] + \beta\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$V_2(a) = \ln\beta^\beta - \ln(1+\beta) - \ln(1+\beta)^\beta + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$V_2(a) = \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

126

126

$V_1(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_2[(1+r_1)a + w_1 - c]\}$

$t = 1$

$$V_2(a) = \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta \ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

Regresamos a la condición de primer orden del problema de optimización del agente representativo en $t = 1$:

$$U'(c) = \beta V_2{}'[(1+r_1)a + w_1 - c]$$

Ecuación de Euler

Entonces obtenemos $V_2{}'(a) = \frac{(1+\beta)(1+r_2)}{(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}}$

12
7

127

$t = 1$

$$V_2{}'(a) = \frac{(1+\beta)(1+r_2)}{(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}}$$

Podemos simplicar:

$$V_2{}'(a) = \frac{\frac{(1+\beta)\cancel{(1+r_2)}}{\cancel{1+r_2}}}{\frac{\cancel{(1+r_2)}a}{\cancel{1+r_2}} + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

$$V_2{}'(a) = \frac{1+\beta}{a + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

12
8

128

$V_1(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_2[(1+r_1)a + w_1 - c]\}$

$$t = 1$$

$$V_2{}'(a) = \frac{1+\beta}{a+\frac{w_2}{1+r_2}+\frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

Ya tenemos $V_2{}'(a)$, ahora nos falta $V_2{}'(a^+)$...
...en donde $a^+ = (1+r_1)a + w_1 - c$

$$V_2{}'(a^+) = \frac{1+\beta}{a^+ + \frac{w_2}{1+r_2}+\frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

$$V_2{}'(a^+) = \frac{1+\beta}{(1+r_1)a+w_1-c+\frac{w_2}{1+r_2}+\frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

12
9

129

$$t = 1$$

Ecuación
de Euler

La condición de primer orden $U'(c) = \beta V_2{}'[(1+r_1)a + w_1 - c]$ queda:

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1+\beta)}{(1+r_1)a+w_1-c+\frac{w_2}{1+r_2}+\frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

Ahora despejamos c y substituimos la expresión que encontremos en la ecuación a^+

13
0

130

$t = 1$

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1+\beta)}{(1+r_1)a + w_1 - c + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

Ecuación de Euler

$$c\beta(1+\beta) = (1+r_1)a + w_1 - c + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}$$

$$c + c\beta(1+\beta) = (1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}$$

$$c[1+\beta(1+\beta)] = (1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}$$

13
1

131

$t = 1$

$$c = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

Ahora sustituimos la expresión de c en la ecuación de a^+ ...

$\ldots a^+ = (1+r_1)a + w_1 - c$

$$a^+ = (1+r_1)a + w_1 - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$a^+ = (1+r_1)a + w_1 - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

13
2

132

$t = 1$

$$a^{+} = (1 + r_1)a + w_1 - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}[(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$a^{+} = \frac{\cancel{1}+\beta+\beta^2 \cancel{-1}}{1+\beta+\beta^2}[(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$a^{+} = \frac{\beta+\beta^2}{1+\beta+\beta^2}[(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$a^{+} = \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

13
3

133

$t = 1$

$\widehat{C_1} = c$ si $\widehat{A_2} = a^{+}$, entonces…

$$\widehat{C_1} = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1 + r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

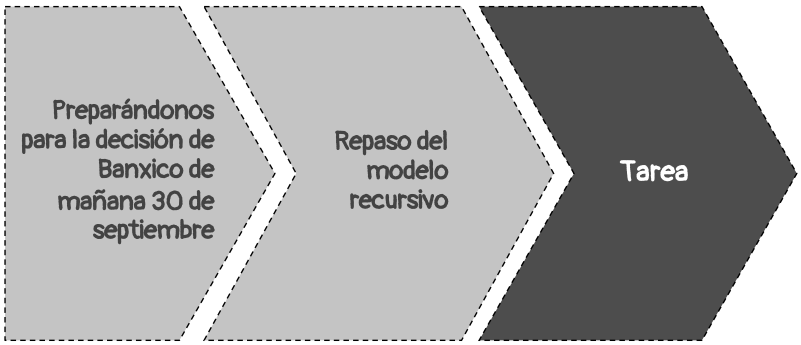
$$\widehat{A_2} = \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

Una vez más, llegamos a las mismas funciones de política que en la sección anterior

13
4

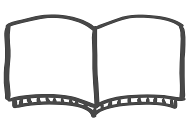
134

Nuestra agenda de hoy

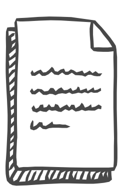


135

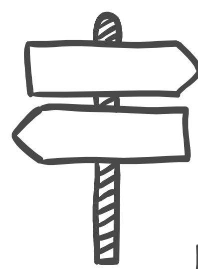
135

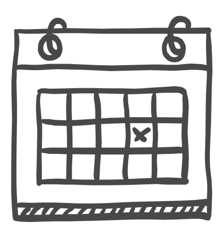


(1) Leer mi columna "¿Qué hará Banxico este jueves?" en *El Financiero* (28-sep)
1 página
https://www.elfinanciero.com.mx/opinion/gabriel-casillas/



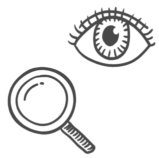
(2) Realizar 'a mano' la Tarea 6, que es un repaso de la solución de un modelo recursivo con función de 'política'
6 páginas
En el sitio de Internet www.gabrielcasillas.mx





136

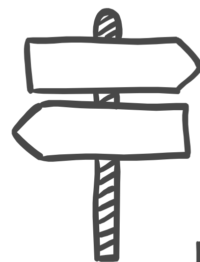
136

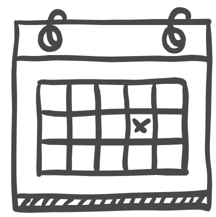


(3) Estar atentos y revisar los datos y eventos económicos que se van a publicar en la semana (en “Global: Flashes recientes”)

1 página

https://www.banorte.com/
wps/portal/ixe-
xima/Home/inicio/!ut/p/z
1/hY7LDoIwEEW_hQVbOkJBdN
dqwjPiI0bsxoDBqimUFITfFx
8bEx-
zu3PPmQyiKEG0TvuSpV0p6pS
P-
UCto6tPbM9wIIwXoQHEX5u7D
V65OAK0_wfQsYYvQ-4-
fSCOSzw8jQBi7OpA7GWAt-
ZMB996AT9uBIqyLrLnu6TODJ
shKvNzLnOpXeW4LrquaecqqD





13
7

137

Muchas gracias!

13
8

138

SlidesCarnival

Free templates for all your presentation needs

For PowerPoint and Google Slides

100% free for personal or commercial use

Ready to use, professional and customizable

Blow your audience away with attractive visuals

139