

Macroeconomía

Dinámica

EC3024.1 (Santa Fe)

CLASE 12

1

RECESO



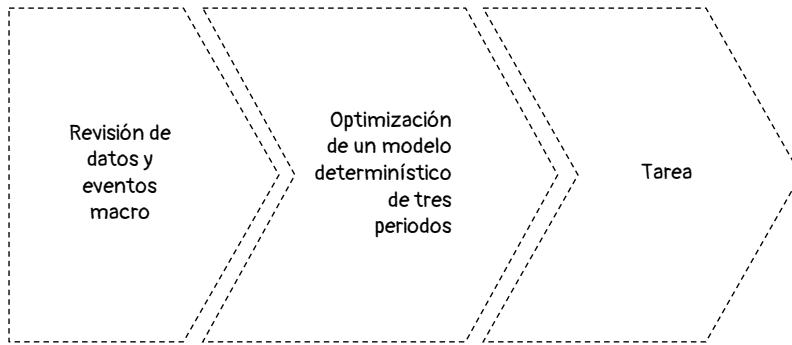
Hoy habrá **dos** **recesos** de 10 minutos:

4:50pm y 5:50pm

2

2

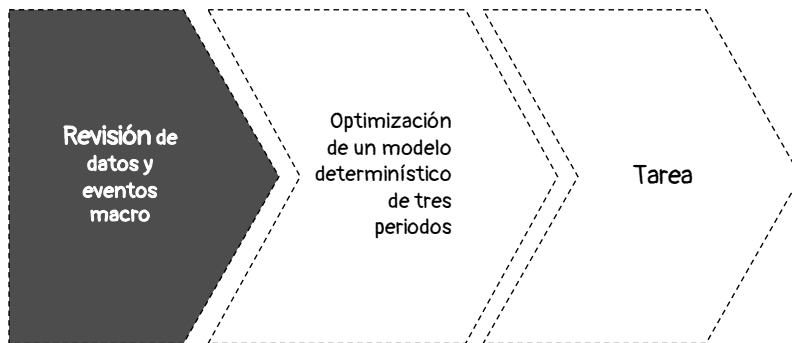
Nuestra agenda de hoy



3

3

Nuestra agenda de hoy

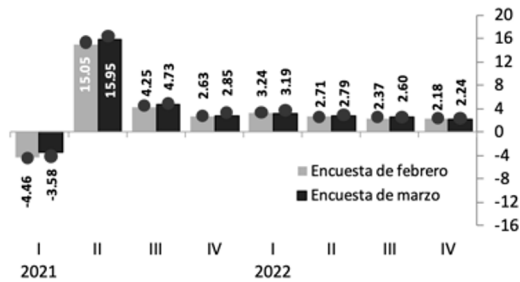


4

4

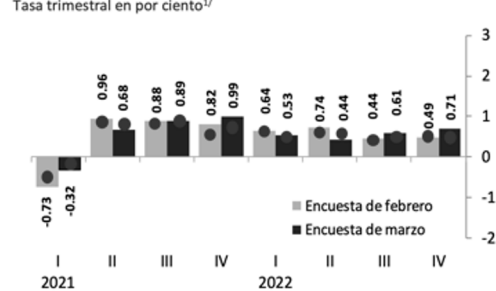
Pronóstico de los analistas

Gráfica 10. Pronósticos de la variación del PIB trimestral
Tasa anual en por ciento^{1/}



1/ Para cada trimestre, la barra y la cifra se refieren a la media, en tanto que el círculo rojo se refiere a la mediana. Las cifras correspondientes a la mediana se pueden consultar en el anexo de este reporte.

Gráfica 11. Pronósticos de la variación del PIB trimestral con ajuste estacional
Tasa trimestral en por ciento^{1/}



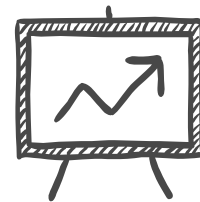
1/ Para cada trimestre, la barra y la cifra se refieren a la media, en tanto que el círculo rojo se refiere a la mediana. Las cifras correspondientes a la mediana se pueden consultar en el anexo de este reporte.

Fuente: Encuesta sobre las expectativas de los especialistas en economía del sector privado: marzo 2021. Liga: <https://www.banxico.org.mx/publicaciones-y-prensa/encuestas-sobre-las-expectativas-de-los-especialis/%7BA9302B4A-04AD-4551-9877-028346F57E96%7D.pdf>

PIB de México de 1T21

ESTIMACIÓN OPORTUNA DEL PRODUCTO INTERNO BRUTO DURANTE EL PRIMER TRIMESTRE DE 2021
CIFRAS DESESTACIONALIZADAS POR ACTIVIDADES ECONÓMICAS

| Concepto | Variación % real respecto al trimestre previo | Variación % real respecto a igual trimestre de 2020 |
|-------------------------|---|---|
| PIB Total | 0.4 | (-) 2.9 |
| Actividades Primarias | (-) 1.3 | 2.8 |
| Actividades Secundarias | 0.0 | (-) 2.3 |
| Actividades Terciarias | 0.7 | (-) 3.6 |



Notas: Cifras Oportunas. La estimación oportuna no reemplaza a la estimación tradicional.

La serie desestacionalizada del agregado se calcula de manera independiente a la de sus componentes.

Fuente: INEGI.

Fuente: INEGI

Última reunión del Banco de México...

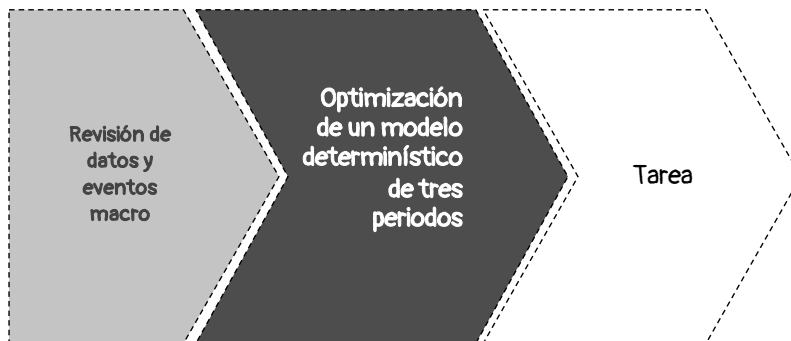
La actualización de los pronósticos para la inflación general y subyacente muestra, para el corto plazo, niveles mayores a los publicados en el último Informe Trimestral. No obstante, se sigue estimando que ambas converjan a la meta de 3% desde el segundo trimestre de 2022. Estas previsiones están sujetas a riesgos. Al alza: i) presiones inflacionarias externas; ii) presiones de costos o reasignaciones de gasto; iii) persistencia en la inflación subyacente; y iv) depreciación cambiaria. A la baja: i) por los efectos de la brecha negativa del producto; ii) mayores medidas de distanciamiento social; y iii) apreciación cambiaria. El balance de los riesgos que podrían incidir en la trayectoria esperada de la inflación en el horizonte de pronóstico es al alza.

Fuente: Encuesta sobre las expectativas de los especialistas en economía del sector privado: marzo 2021. Liga: <https://www.banxico.org.mx/publicaciones-y-prensa/encuestas-sobre-las-expectativas-de-los-especialis/%7BA9302B4A-04AD-4551-9877-028346F57E96%7D.pdf>

7

7

Nuestra agenda de hoy

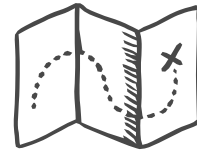


8

8

¿Cómo vamos a aprender DP?

| | Número de periodos de tiempo | Determinístico / Estocástico | Método de solución |
|-------|------------------------------|------------------------------|----------------------------------|
| ✓ (1) | Tres | Determinístico | Lagrange |
| ✓ (2) | Tres | Determinístico | Función de política ¹ |
| 👉 (3) | Tres | Determinístico | Programación Dinámica |
| (4) | Infinito | Determinístico | Programación Dinámica |
| (5) | Tres | Estocástico | Programación Dinámica |
| (6) | Infinito | Estocástico | Programación Dinámica |



1. Realmente no es un método, sino una forma alternativa de expresar las soluciones óptimas, que ayuda a ilustrar la idea conceptual sobre la que descansa la programación dinámica.

9

9

Richard E. Bellman

(1920-1984)

Matemático

Principal aportación:

Programación Dinámica

- Lic. en Matemáticas
Brooklyn College (1941)
- Maestría
University of Wisconsin (1943)
- Doctorado
Princeton University (1946)
- Profesor
Princeton, Stanford, USC



Fuente: https://en.wikipedia.org/wiki/Richard_E._Bellman#/media/File:Richard_Ernest_Bellman.jpg

10

10

Problema de optimización determinístico de tres periodos (función logarítmica)

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^3, \{A_t\}_{t=2}^4} \sum_{t=1}^3 \beta^{t-1} \ln C_t$$

Variable de control

Variable de estado

sujeto a:

$$A_{t+1} = (1 + r_t) A_t + w_t - C_t, \text{ para toda } t$$

$$A_4 \geq 0$$

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^3 \beta^{t-1} \ln C_t + \sum_{t=1}^3 \lambda_t [(1 + r_t) A_t + w_t - C_t - A_{t+1}]$$

11

11

‘Principio de Optimalidad’ de Bellman (1957)

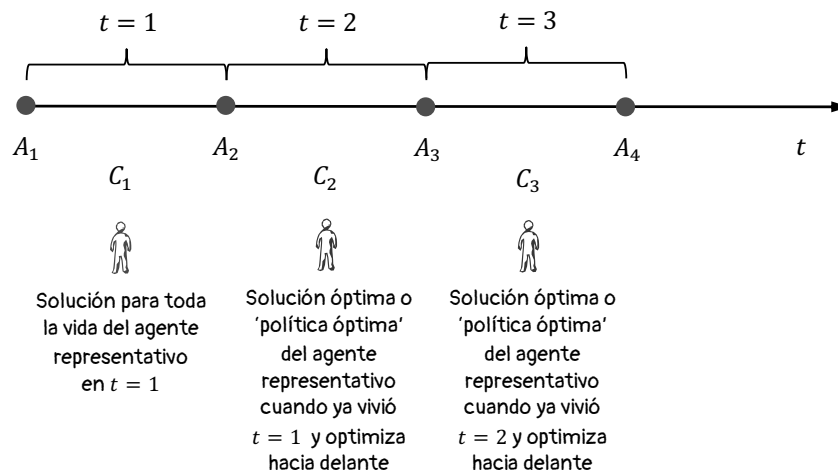
“Una política óptima tiene la propiedad de que cualquiera que haya sido el estado inicial y las decisiones que se hayan tomado, las decisiones hacia delante deben de constituir una política óptima, con respecto al estado que resulte de la primera decisión”

-- Richard Bellman (1957), p. 83

12

12

‘Política óptima’



13

13

Programación Dinámica y Ecuación de Bellman

- Intuitivamente, el método de Programación Dinámica divide un problema complejo de optimización dinámica en subproblemas más simples de resolver

14

14

Programación Dinámica y Ecuación de Bellman

- Intuitivamente, el método de Programación Dinámica divide un problema complejo de optimización dinámica en subproblemas más simples de resolver
- El método calcula 'funciones valor' que dependen de la 'variable de estado' en cada momento

15

15

Programación Dinámica y Ecuación de Bellman

- Intuitivamente, el método de Programación Dinámica divide un problema complejo de optimización dinámica en subproblemas más simples de resolver
- El método calcula 'funciones valor' que dependen de la 'variable de estado' en cada momento
- A la ecuación que relaciona las funciones valor en el tiempo se le llama 'Ecuación de Bellman'

16

16

Programación Dinámica y Ecuación de Bellman

- Intuitivamente, el método de Programación Dinámica divide un problema complejo de optimización dinámica en subproblemas más simples de resolver
- El método calcula 'funciones valor' que dependen de la 'variable de estado' en cada momento
- A la ecuación que relaciona las funciones valor en el tiempo se le llama 'Ecuación de Bellman'
- La Programación Dinámica puede ser especialmente útil en decisiones bajo incertidumbre

17

17

La Ecuación de Bellman y la utilidad 'indirecta'

- Las 'funciones valor' en nuestro caso son similares al concepto de 'función de utilidad indirecta'

18

18

La Ecuación de Bellman y la utilidad 'indirecta'

- Las 'funciones valor' en nuestro caso son similares al concepto de 'función de utilidad indirecta'
- La función de utilidad 'directa' describe las preferencias, independientemente de lo que ocurre en los mercados, mientras que la función de 'utilidad indirecta' refleja condiciones de optimización y precios de mercado

19

19

Digresión: Utilidad indirecta

$$u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}$$

20

20

Digresión: Utilidad indirecta

$$u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}$$

Utilidad
'directa'

21

21

Digresión: Utilidad indirecta

$$u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} \quad \max_{x_1, x_2} \left\{ 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} \mid p_1x_1 + p_2x_2 = m \right\}$$

Utilidad
'directa'

22

22

Digresión: Utilidad indirecta

$$\begin{array}{l}
 \boxed{u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}} \\
 \text{Utilidad} \\
 \text{'directa'}
 \end{array}
 \max_{x_1, x_2} \left\{ 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} \mid p_1x_1 + p_2x_2 = m \right\}$$

$$\mathcal{L} = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} + \lambda(m - p_1x_1 - p_2x_2)$$

23

23

Digresión: Utilidad indirecta

$$\begin{array}{l}
 \boxed{u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}} \\
 \text{Utilidad} \\
 \text{'directa'}
 \end{array}
 \max_{x_1, x_2} \left\{ 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} \mid p_1x_1 + p_2x_2 = m \right\}$$

$$\mathcal{L} = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} + \lambda(m - p_1x_1 - p_2x_2)$$

FOC

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{2}x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} - \lambda p_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{p_1} \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{2}x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{1}{2}} - \lambda p_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{p_2} \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow m - p_1x_1 - p_2x_2 = 0$$

24

24

Digresión: Utilidad indirecta

$$u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} \quad \max_{x_1, x_2} \{2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} \mid p_1x_1 + p_2x_2 = m\}$$

Utilidad
'directa'

$$\mathcal{L} = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} + \lambda(m - p_1x_1 + p_2x_2)$$

FOC

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} - \lambda p_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{p_1} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{1}{2}} - \lambda p_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{p_2} \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 &\Leftrightarrow m - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{p_1} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{p_2} \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ x_2^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} = \frac{p_1}{p_2}x_1^{\frac{1}{2}}x_1^{\frac{1}{2}} \\ x_2 = \frac{p_1}{p_2}x_1 \end{array} \right.$$

25

25

Digresión: Utilidad indirecta

$$u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} \quad \max_{x_1, x_2} \{2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} \mid p_1x_1 + p_2x_2 = m\}$$

Utilidad
'directa'

$$\mathcal{L} = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} + \lambda(m - p_1x_1 + p_2x_2)$$

FOC

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} - \lambda p_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{p_1} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{1}{2}} - \lambda p_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{p_2} \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 &\Leftrightarrow m - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{p_1} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{p_2} \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ x_2^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} = \frac{p_1}{p_2}x_1^{\frac{1}{2}}x_1^{\frac{1}{2}} \\ x_2 = \frac{p_1}{p_2}x_1 \end{array} \right.$$

26

26

Digresión: Utilidad indirecta

$$m - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \quad x_2 = \frac{p_1}{p_2}x_1$$

$$m - p_1x_1 - p_2 \frac{p_1}{p_2}x_1 = 0$$

27

27

Digresión: Utilidad indirecta

$$m - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \quad x_2 = \frac{p_1}{p_2}x_1$$

$$m - p_1x_1 - p_2 \frac{p_1}{p_2}x_1 = 0$$

28

28

Digresión: Utilidad indirecta

$$m - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \quad x_2 = \frac{p_1}{p_2}x_1$$

$$m - p_1x_1 - p_2 \frac{p_1}{p_2}x_1 = 0$$

$$m - p_1x_1 - p_1x_1 = 0 \Leftrightarrow m = 2p_1x_1 \Leftrightarrow x_1^*(p, m) = \frac{m}{2p_1}$$

$$x_2^*(p, m) = \frac{m}{2p_2}$$

29

29

Digresión: Utilidad indirecta

$$m - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \quad x_2 = \frac{p_1}{p_2}x_1$$

$$m - p_1x_1 - p_2 \frac{p_1}{p_2}x_1 = 0$$

$$m - p_1x_1 - p_1x_1 = 0 \Leftrightarrow m = 2p_1x_1 \Leftrightarrow x_1^*(p, m) = \frac{m}{2p_1}$$

$$x_2^*(p, m) = \frac{m}{2p_2}$$

Funciones de
demanda
'Marshalliana'

30

30

Digresión: Utilidad indirecta

$$m - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \quad x_2 = \frac{p_1}{p_2}x_1$$

$$m - p_1x_1 - p_2 \frac{p_1}{p_2}x_1 = 0$$

$$m - p_1x_1 - p_1x_1 = 0 \Leftrightarrow m = 2p_1x_1 \Leftrightarrow x_1^*(p, m) = \frac{m}{2p_1}$$

$$x_2^*(p, m) = \frac{m}{2p_2}$$

Funciones de
demanda
'Marshalliana'

La 'utilidad directa' es: $U(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}$, entonces la 'utilidad indirecta' es: $v(p, m) = U(x_1^*, x_2^*)$

31

31

Digresión: Utilidad indirecta

La 'utilidad directa' es $u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} \dots$

...Entonces la 'utilidad indirecta' es: $v(p, m) = U(x_1^*, x_2^*)$

32

32

Digresión: Utilidad indirecta

La 'utilidad directa' es $u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} \dots$

...Entonces la 'utilidad indirecta' es: $v(p, m) = U(x_1^*, x_2^*)$

$$v(p, m) = 2 \left(\frac{m}{2p_1} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{2p_2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

33

33

Digresión: Utilidad indirecta

La 'utilidad directa' es $u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} \dots$

...Entonces la 'utilidad indirecta' es: $v(p, m) = U(x_1^*, x_2^*)$

$$v(p, m) = 2 \left(\frac{m}{2p_1} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{2p_2} \right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow v(p, m) = \frac{m}{(p_1 p_2)^{\frac{1}{2}}}$$

34

34

Digresión: Utilidad indirecta

La 'utilidad directa' es $u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} \dots$

...Entonces la 'utilidad indirecta' es: $v(p, m) = U(x_1^*, x_2^*)$

$$v(p, m) = 2 \left(\frac{m}{2p_1} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{2p_2} \right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow v(p, m) = \frac{m}{(p_1 p_2)^{\frac{1}{2}}}$$

Utilidad
'indirecta'

35

35

Utilidad indirecta | decisiones óptimas vs. Función valor | funciones de política

| Concepto | Problema estático de optimización de un consumidor con dos bienes | Problema dinámico de optimización de un individuo entre consumir y ahorrar un periodo antes del final |
|------------------|---|---|
| Utilidad directa | $u(x_1, x_2)$ | $U(C_{T-1}, A_T)$ |

36

36

Utilidad indirecta | decisiones óptimas vs. Función valor | funciones de política

| Concepto | Problema estático de optimización de un consumidor con dos bienes | Problema dinámico de optimización de un individuo entre consumir y ahorrar un periodo antes del final |
|--------------------|---|---|
| Utilidad directa | $u(x_1, x_2)$ | $U(C_{T-1}, A_T)$ |
| Decisiones óptimas | $x_1^*(p, m)$ $x_2^*(p, m)$ } 'Demandas Marshallianas' | $\widehat{C}_{T-1}(a; r, w)$ $\widehat{A}_T(a; r, w)$ } 'Funciones de política' |

37

37

Utilidad indirecta | decisiones óptimas vs. Función valor | funciones de política

| Concepto | Problema estático de optimización de un consumidor con dos bienes | Problema dinámico de optimización de un individuo entre consumir y ahorrar un periodo antes del final |
|--------------------|---|---|
| Utilidad directa | $u(x_1, x_2)$ | $U(C_{T-1}, A_T)$ |
| Decisiones óptimas | $x_1^*(p, m)$ $x_2^*(p, m)$ } 'Demandas Marshallianas' | $\widehat{C}_{T-1}(a; r, w)$ $\widehat{A}_T(a; r, w)$ } 'Funciones de política' |
| Utilidad indirecta | $v(p, m) = u[x_1^*(p, m), x_2^*(p, m)]$ | $V_{T-1}(a) = U[\widehat{C}_{T-1}(a; r, w), \widehat{A}_T(a; r, w)]$ 'Función valor' |

38

38

‘Ecuación de Bellman’

- Para nuestro modelo determinístico de consumo inter-temporal, la ‘Ecuación de Bellman’ es la siguiente:

$$V_t(a) = \max_{C_t, A_{t+1}} \{U(C_t) + \beta V_{t+1}(A_{t+1}) | A_{t+1} = (1 + r_t)A_t + w_t - C_t\}$$

39

39

‘Ecuación de Bellman’

- Para nuestro modelo determinístico de consumo inter-temporal, la ‘Ecuación de Bellman’ es la siguiente:

$$V_t(a) = \max_{C_t, A_{t+1}} \{U(C_t) + \beta V_{t+1}(A_{t+1}) | A_{t+1} = (1 + r_t)A_t + w_t - C_t\}$$

- Es una función recursiva que relaciona las funciones valor en el tiempo

40

40

‘Ecuación de Bellman’

- Para nuestro modelo determinístico de consumo inter-temporal, la ‘Ecuación de Bellman’ es la siguiente:

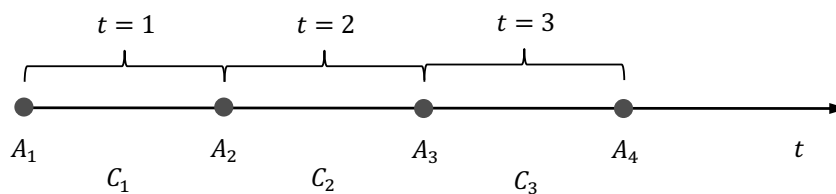
$$V_t(A_t) = \max_{C_t, A_{t+1}} \{U(C_t) + \beta V_{t+1}(A_{t+1}) | A_{t+1} = (1 + r_t)A_t + w_t - C_t\}$$

- Es una función recursiva que relaciona las funciones valor en el tiempo
- La idea es resolver para el último periodo, después para los dos últimos periodos, luego para los tres últimos y así sucesivamente

41

41

Inducción ‘hacia atrás’

 $t = 3$


Problema de optimización del agente representativo cuando solo le queda

por vivir $t = 3$

maximizar

$$U(C_3) + \beta V_4(A_4)$$

sujeto a

$$(1 + r_3)A_3 + w_3 = C_3 + A_4 \rightarrow 0$$

} Ecuación de Bellman
 $V_3(A_3)$

42

42

Inducción 'hacia atrás' t = 2

A_1 C_1 A_2 C_2 A_3 C_3 A_4 t

Problema de optimización del agente
 representativo cuando va a vivir en
 $t = 2$ y ya maximizó en $t = 3$
 maximizar
 $U(C_2) + \beta V_3(A_3)$
 sujeto a
 $(1 + r_2)A_2 + w_2 = C_2 + A_3$

}

Ecuación de Bellman
 $V_2(A_2)$

43

43

Inducción 'hacia atrás' t = 1

A_1 C_1 A_2 C_2 A_3 C_3 A_4 t

Problema de optimización del agente
 representativo cuando va a vivir en
 $t = 1$ y ya maximizó en $t = 2$ y $t = 3$

maximizar
 $U(C_1) + \beta V_2(A_2)$
 sujeto a
 $(1 + r_1)A_1 + w_1 = C_1 + A_2$

}

Ecuación de Bellman
 $V_1(A_1)$

La 'función valor' V_2 ya
 incorpora las decisiones
 óptimas en $t = 2$ y $t = 3$
 (i.e. las funciones de
 política $\widehat{C}_2, \widehat{A}_3, \widehat{C}_3, \widehat{A}_4$)

44

44

Notación en la 'Ecuación de Bellman'

La 'usanza' en cuanto a notación en Programación Dinámica es que no utilizemos el subíndice de tiempo (t) en las variables de control (C_t) y de estado (A_t) y que en su lugar utilizemos letras minúsculas (c y a).

Adicionalmente, se sugiere utilizar el superíndice '+', para referirse al 'siguiente periodo' (e.g. $a = A_t$ y $a^+ = A_{t+1}$), por lo que el problema:

$$V_t(A_t) = \max_{C_t, A_{t+1}} \{U(C_t) + \beta V_{t+1}(A_{t+1}) | A_{t+1} = (1 + r_t)A_t + w_t - C_t\}$$

...quedaría:

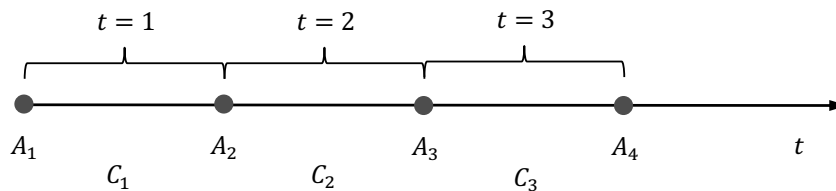
$$V_t(a) = \max_{c, a^+} \{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) | a^+ = (1 + r_t)a + w_t - c\}$$

Además del superíndice '+' para referirse al periodo siguiente, algunos utilizan el apóstrofe '. Sin embargo, a veces se confunde con la derivada.

45

45

Ahora sí, empecemos en $t = 3$



Problema de optimización del agente representativo cuando solo le queda por vivir $t = 3$

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} \\ &U(C_3) + \beta V_4(A_4) \\ &\text{sujeto a} \\ &(1 + r_3)A_3 + w_3 = C_3 + A_4 \end{aligned}$$

Ecuación de Bellman
 $V_3(a)$

46

46

Programación Dinámica en nuestro problema determinístico de tres periodos

Empecemos por resolver el problema¹ en $t = 3$:

$$V_3(A_3) = \max_{C_3, A_4} \{U(C_3) + \beta V_4(A_4) | (1 + r_3)A_3 + w_3 = C_3 + A_4; A_4 \geq 0\}$$

Cambiando la notación:

47

47

Programación Dinámica en nuestro problema determinístico de tres periodos

Empecemos por resolver el problema¹ en $t = 3$:

$$V_3(A_3) = \max_{C_3, A_4} \{U(C_3) + \beta V_4(A_4) | (1 + r_3)A_3 + w_3 = C_3 + A_4; A_4 \geq 0\}$$

Cambiando la notación:

$$V_3(a) = \max_{c, a^+} \{U(c) + \beta V_4(a^+) | (1 + r_3)a + w_3 = c + a^+; a^+ \geq 0\}$$

48

48

Programación Dinámica en nuestro problema determinístico de tres periodos

Empecemos por resolver el problema¹ en $t = 3$:

$$V_3(A_3) = \max_{C_3, A_4} \{U(C_3) + \beta V_4(A_4) | (1 + r_3)A_3 + w_3 = C_3 + A_4; A_4 \geq 0\}$$

Cambiando la notación:

$$V_3(a) = \max_{c, a^+} \{U(c) + \beta V_4(a^+) | (1 + r_3)a + w_3 = c + a^+; a^+ \geq 0\}$$

Ya sabemos que el agente representativo no vive en $t = 4$, por lo que no puede generar utilidad, *i.e.* $V_4(a^+) = 0$. Asimismo, sabemos que dejar activos sin consumir en $t = 4$, no incrementa el nivel de utilidad

49

49

$t = 3$

$$V_3(a) = \max_{c, a^+} \{U(c) + \beta V_4(a^+) | (1 + r_3)a + w_3 = c + a^+; a^+ \geq 0\}$$

...por lo que el problema se simplifica a:

50

50

$$t = 3$$

$$V_3(a) = \max_{c, a^+} \{ U(c) + \beta V_4(a^+) \mid (1 + r_3)a + w_3 = c + a^+; a^+ \geq 0 \}$$

...por lo que el problema se simplifica a:

$$V_3(a) = \max_c \{ U(c) \mid (1 + r_3)a + w_3 = c \}$$

Para resolverlo, despejamos c de la restricción presupuestaria y la sustituimos en la función objetivo $U(\cdot)$:

51

51

$$t = 3$$

$$V_3(a) = \max_{c, a^+} \{ U(c) + \beta V_4(a^+) \mid (1 + r_3)a + w_3 = c + a^+; a^+ \geq 0 \}$$

...por lo que el problema se simplifica a:

$$V_3(a) = \max_c \{ U(c) \mid (1 + r_3)a + w_3 = c \}$$

Para resolverlo, despejamos c de la restricción presupuestaria y la sustituimos en la función objetivo $U(\cdot)$:

$$V_3(a) = \max_c \{ U[(1 + r_3)a + w_3] \}$$

52

52

$$t = 3$$

$$V_3(a) = \max_c \{U[(1 + r_3)a + w_3]\}$$

Debido a que en este caso el máximo restringido se alcanza justo en la restricción $c = (1 + r_3)a + w_3$ y $a^+ = 0$, entonces para que $\widehat{C}_3 = c$, se necesita que $\widehat{A}_4 = a^+$, por lo que las funciones de política son:

53

53

$$t = 3$$

$$V_3(a) = \max_c \{U[(1 + r_3)a + w_3]\}$$

Debido a que en este caso el máximo restringido se alcanza justo en la restricción $c = (1 + r_3)a + w_3$ y $a^+ = 0$, entonces para que $\widehat{C}_3 = c$, se necesita que $\widehat{A}_4 = a^+$, por lo que las funciones de política son:

$$\begin{array}{l} \widehat{C}_3 = (1 + r_3)a + w_3 \\ \widehat{A}_4 = 0 \end{array}$$

Llegamos a las mismas funciones de política que en la sección anterior

54

54

$t = 3$

$$V_3(a) = \max_c \{U[(1 + r_3)a + w_3]\}$$

Debido a que en este caso el máximo restringido se alcanza justo en la restricción $c = (1 + r_3)a + w_3$ y $a^+ = 0$, entonces para que $\widehat{C}_3 = c$, se necesita que $\widehat{A}_4 = a^+$, por lo que las funciones de política son:

$$\begin{aligned} \widehat{C}_3 &= (1 + r_3)a + w_3 \\ \widehat{A}_4 &= 0 \end{aligned}$$

Llegamos a las mismas funciones de política que en la sección anterior

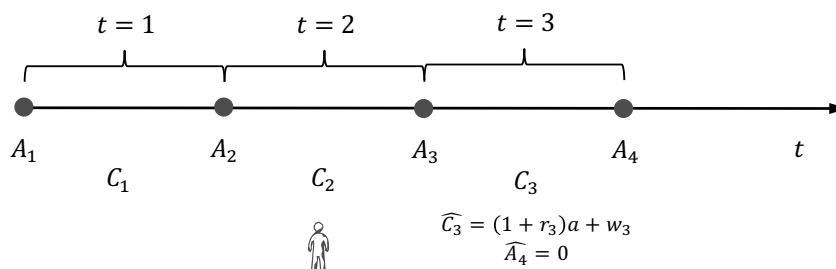
...y por lo tanto:

$$V_3(a) = U[(1 + r_3)a + w_3]$$

55

55

Ahora resolvamos en $t = 2$



Problema de optimización del agente representativo cuando va a vivir en $t = 2$ y ya maximizó en $t = 3$

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} \\ &U(C_2) + \beta V_3(A_3) \\ &\text{sujeto a} \\ &(1 + r_2)A_2 + w_2 = C_2 + A_3 \end{aligned}$$

Ecuación de Bellman
 $V_2(a)$

56

56

$t = 2$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 2$:

$$V_2(A_2) = \max_{C_2, A_3} \{ U(C_2) + \beta V_3(A_3) \mid (1 + r_2)A_2 + w_2 = C_2 + A_3 \}$$

Cambiando la notación:

57

57

$t = 2$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 2$:

$$V_2(A_2) = \max_{C_2, A_3} \{ U(C_2) + \beta V_3(A_3) \mid (1 + r_2)A_2 + w_2 = C_2 + A_3 \}$$

Cambiando la notación:

$$V_2(a) = \max_{c, a^+} \{ U(c) + \beta V_3(a^+) \mid (1 + r_2)a + w_2 = c + a^+ \}$$

58

58

$t = 2$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 2$:

$$V_2(A_2) = \max_{C_2, A_3} \{ U(C_2) + \beta V_3(A_3) \mid (1 + r_2)A_2 + w_2 = C_2 + A_3 \}$$

Cambiando la notación:

$$V_2(a) = \max_{c, a^+} \{ U(c) + \beta V_3(a^+) \mid (1 + r_2)a + w_2 = c + a^+ \}$$

Para resolverlo, podemos despejar a^+ de la restricción [$a^+ = (1 + r_2)a + w_2 - c$] e incorporarlo en la función objetivo:

59

59

$t = 2$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 2$:

$$V_2(A_2) = \max_{C_2, A_3} \{ U(C_2) + \beta V_3(A_3) \mid (1 + r_2)A_2 + w_2 = C_2 + A_3 \}$$

Cambiando la notación:

$$V_2(a) = \max_{c, a^+} \{ U(c) + \beta V_3(a^+) \mid (1 + r_2)a + w_2 = c + a^+ \}$$

Para resolverlo, podemos despejar a^+ de la restricción [$a^+ = (1 + r_2)a + w_2 - c$] e incorporarlo en la función objetivo:

$$\max_c \{ U(c) + \beta V_3[(1 + r_2)a + w_2 - c] \}$$

60

60

$t = 2$

$$V_2(a) = \max_{c, a^+} \{ U(c) + \beta V_3(a^+) \mid (1 + r_2)a + w_2 = c + a^+ \}$$

Para resolverlo, podemos despejar a^+ de la restricción e incorporarlo en la función objetivo:

$$\max_c \{ U(c) + \beta V_3[(1 + r_2)a + w_2 - c] \}$$

61

61

$t = 2$

$$V_2(a) = \max_{c, a^+} \{ U(c) + \beta V_3(a^+) \mid (1 + r_2)a + w_2 = c + a^+ \}$$

Para resolverlo, podemos despejar a^+ de la restricción e incorporarlo en la función objetivo:

$$\max_c \{ U(c) + \beta V_3[(1 + r_2)a + w_2 - c] \}$$

FOC

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial c} = 0 \Leftrightarrow U'(c) - \beta V_3'[(1 + r_2)a + w_2 - c] = 0$$

$$U'(c) = \beta V_3'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$$

62

62

$$t = 2$$

$$V_2(a) = \max_{c, a^+} \{ U(c) + \beta V_3(a^+) \mid (1 + r_2)a + w_2 = c + a^+ \}$$

Para resolverlo, podemos despejar a^+ de la restricción e incorporarlo en la función objetivo:

$$\max_c \{ U(c) + \beta V_3[(1 + r_2)a + w_2 - c] \}$$

FOC

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial c} = 0 \Leftrightarrow U'(c) - \beta V_3'[(1 + r_2)a + w_2 - c] = 0$$

$$U'(c) = \beta V_3'[(1 + r_2)a + w_2 - c] \quad \text{Ecuación de Euler}$$

63

63

$$\max_c \{ U(c) + \beta V_3[(1 + r_2)a + w_2 - c] \}$$

$$V_3(a) = U[(1 + r_3)a + w_3]$$

$$t = 2$$

$$U'(c) = \beta V_3'[(1 + r_2)a + w_2 - c] \quad \text{Ecuación de Euler}$$

Sabemos que $U(c) = \ln c$, entonces $U'(c) = \frac{1}{c}$

64

64

$$\max_c \{U(c) + \beta V_3[(1 + r_2)a + w_2 - c]\}$$

$$V_3(a) = U[(1 + r_3)a + w_3]$$

$$t = 2$$

$$U'(c) = \beta V_3'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$$

Ecuación
de Euler

Sabemos que $U(c) = \ln c$, entonces $U'(c) = \frac{1}{c}$

Ahora solo nos falta obtener $V_3'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$

65

65

$$\max_c \{U(c) + \beta V_3[(1 + r_2)a + w_2 - c]\}$$

$$V_3(a) = U[(1 + r_3)a + w_3]$$

$$t = 2$$

$$U'(c) = \beta V_3'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$$

Ecuación
de Euler

Sabemos que $U(c) = \ln c$, entonces $U'(c) = \frac{1}{c}$

Ahora solo nos falta obtener $V_3'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$

¿Cómo obtenemos V_3 ?

66

66

$$\max_c \{U(c) + \beta V_3[(1 + r_2)a + w_2 - c]\}$$

$$V_3(a) = U[(1 + r_3)a + w_3]$$

$$t = 2$$

$$U'(c) = \beta V_3'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$$

Ecuación
de Euler

Sabemos que $U(c) = \ln c$, entonces $U'(c) = \frac{1}{c}$

Ahora solo nos falta obtener $V_3'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$

¿Cómo obtenemos V_3 ?

Es necesario incorporar las soluciones óptimas o funciones de política \widehat{C}_3 y \widehat{A}_4 en la función de utilidad en $t = 3$ y así obtener la 'función valor'

67

67

$$\max_c \{U(c) + \beta V_3[(1 + r_2)a + w_2 - c]\}$$

$$V_3(a) = U[(1 + r_3)a + w_3]$$

$$t = 2$$

Las funciones de política en $t = 3$:

$$\widehat{C}_3 = (1 + r_3)a + w_3$$

$$\widehat{A}_4 = 0$$

1. La 'usanza' en Programación Dinámica es también ya no escribir de manera explícita los parámetros dentro de los paréntesis cuando nos referimos a las funciones. Es decir, en lugar de escribir $V_3(a; r, w) = U[\widehat{C}_3(a; r, w), \widehat{A}_4(a; r, w)]$, ahora solo la expresamos como $V_3(a) = U[\widehat{C}_3(a), \widehat{A}_4(a)]$

68

68

$$\max_c \{U(c) + \beta V_3[(1+r_2)a + w_2 - c]\}$$

$$V_3(a) = U[(1+r_3)a + w_3]$$

$$t = 2$$

Las funciones de política en $t = 3$:

$$\widehat{C}_3 = (1+r_3)a + w_3$$

$$\widehat{A}_4 = 0$$

La 'función valor' en $t = 3$, es decir $V_3(a) = U[\widehat{C}_3(a), \widehat{A}_4(a)]$ es¹:

1. La 'usanza' en Programación Dinámica es también ya no escribir de manera explícita los parámetros dentro de los paréntesis cuando nos referimos a las funciones. Es decir, en lugar de escribir $V_3(a; r, w) = U[\widehat{C}_3(a; r, w), \widehat{A}_4(a; r, w)]$, ahora solo la expresamos como $V_3(a) = U[\widehat{C}_3(a), \widehat{A}_4(a)]$

69

69

$$\max_c \{U(c) + \beta V_3[(1+r_2)a + w_2 - c]\}$$

$$V_3(a) = U[(1+r_3)a + w_3]$$

$$t = 2$$

Las funciones de política en $t = 3$:

$$\widehat{C}_3 = (1+r_3)a + w_3$$

$$\widehat{A}_4 = 0$$

La 'función valor' en $t = 3$, es decir $V_3(a) = U[\widehat{C}_3(a), \widehat{A}_4(a)]$ es¹:

$$V_3(a) = U[(1+r_3)a + w_3]$$

$$V_3(a) = \ln[(1+r_3)a + w_3]$$

1. La 'usanza' en Programación Dinámica es también ya no escribir de manera explícita los parámetros dentro de los paréntesis cuando nos referimos a las funciones. Es decir, en lugar de escribir $V_3(a; r, w) = U[\widehat{C}_3(a; r, w), \widehat{A}_4(a; r, w)]$, ahora solo la expresamos como $V_3(a) = U[\widehat{C}_3(a), \widehat{A}_4(a)]$

70

70

$$\max_c \{U(c) + \beta V_3[(1+r_2)a + w_2 - c]\}$$

$$V_3(a) = U[(1+r_3)a + w_3]$$

$$t = 2$$

Las funciones de política en $t = 3$:

$$\widehat{C}_3 = (1+r_3)a + w_3$$

$$\widehat{A}_4 = 0$$

La 'función valor' en $t = 3$, es decir $V_3(a) = U[\widehat{C}_3(a), \widehat{A}_4(a)]$ es¹:

$$V_3(a) = U[(1+r_3)a + w_3]$$

$$V_3(a) = \ln[(1+r_3)a + w_3]$$

Por lo que:

$$V_3'(a) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a + w_3}$$

1. La 'usanza' en Programación Dinámica es también ya no escribir de manera explícita los parámetros dentro de los paréntesis cuando nos referimos a las funciones. Es decir, en lugar de escribir $V_3(a; r, w) = U[\widehat{C}_3(a; r, w), \widehat{A}_4(a; r, w)]$, ahora solo la expresamos como $V_3(a) = U[\widehat{C}_3(a), \widehat{A}_4(a)]$

71

71

$$\max_c \{U(c) + \beta V_3[(1+r_2)a + w_2 - c]\}$$

$$V_3(a) = U[(1+r_3)a + w_3]$$

$$t = 2$$

Sin embargo, necesitamos $V_3'(a^+)$, no $V_3'(a)$

$$\text{Si } V_3'(a) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a + w_3}$$

72

72

$$\max_c \{U(c) + \beta V_3[(1+r_2)a + w_2 - c]\}$$

$$V_3(a) = U[(1+r_3)a + w_3]$$

$$t = 2$$

Sin embargo, necesitamos $V_3'(a^+)$, no $V_3'(a)$

$$\text{Si } V_3'(a) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a+w_3}, \text{ entonces } V_3'(a^+) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a^++w_3}$$

73

73

$$\max_c \{U(c) + \beta V_3[(1+r_2)a + w_2 - c]\}$$

$$V_3(a) = U[(1+r_3)a + w_3]$$

$$t = 2$$

Sin embargo, necesitamos $V_3'(a^+)$, no $V_3'(a)$

$$\text{Si } V_3'(a) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a+w_3}, \text{ entonces } V_3'(a^+) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a^++w_3}$$

...y ya sabíamos que por la restricción: $a^+ = (1+r_2)a + w_2 - c$

74

74

$$\max_c \{U(c) + \beta V_3[(1+r_2)a + w_2 - c]\}$$

$$V_3(a) = U[(1+r_3)a + w_3]$$

$$t = 2$$

Sin embargo, necesitamos $V_3'(a^+)$, no $V_3'(a)$

$$\text{Si } V_3'(a) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a+w_3}, \text{ entonces } V_3'(a^+) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a^+ + w_3}$$

...y ya sabíamos que por la restricción: $a^+ = (1+r_2)a + w_2 - c$

Por lo que entonces:

$$V_3'(a^+) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)[(1+r_2)a + w_2 - c] + w_3}$$

75

75

$$t = 2$$

Ahora sí podemos expresar la condición de primer orden:

$$U'(c) = \beta V_3'[(1+r_2)a + w_2 - c] \quad \text{Ecuación de Euler}$$

Con $U'(c)$ y $V_3'[(1+r_2)a + w_2 - c]$ de manera explícita:

76

76

$$t = 2$$

Ahora sí podemos expresar la condición de primer orden:

$$U'(c) = \beta V_3'[(1 + r_2)a + w_2 - c] \quad \text{Ecuación de Euler}$$

Con $U'(c)$ y $V_3'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$ de manera explícita:

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1 + r_3)}{(1 + r_3)[(1 + r_2)a + w_2 - c] + w_3}$$

77

77

$$t = 2$$

Ahora sí podemos expresar la condición de primer orden:

$$U'(c) = \beta V_3'[(1 + r_2)a + w_2 - c] \quad \text{Ecuación de Euler}$$

Con $U'(c)$ y $V_3'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$ de manera explícita:

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1 + r_3)}{(1 + r_3)[(1 + r_2)a + w_2 - c] + w_3}$$

Resolvemos para c y luego sustituir c en la restricción...

78

78

$$t = 2$$

$$\beta(1 + r_3)c = (1 + r_3)[(1 + r_2)a + w_2 - c] + w_3$$

79

79

$$t = 2$$

$$\beta(1 + r_3)c = (1 + r_3)[(1 + r_2)a + w_2 - c] + w_3$$

$$\frac{\beta(1 + r_3)c}{1 + r_3} = \frac{(1 + r_3)[(1 + r_2)a + w_2 - c]}{(1 + r_3)} + \frac{w_3}{1 + r_3}$$

80

80

$$t = 2$$

$$\beta(1+r_3)c = (1+r_3)[(1+r_2)a + w_2 - c] + w_3$$

$$\frac{\beta(1+r_3)c}{1+r_3} = \frac{(1+r_3)[(1+r_2)a + w_2 - c]}{(1+r_3)} + \frac{w_3}{1+r_3}$$

81

81

$$t = 2$$

$$\beta(1+r_3)c = (1+r_3)[(1+r_2)a + w_2 - c] + w_3$$

$$\frac{\beta(1+r_3)c}{1+r_3} = \frac{(1+r_3)[(1+r_2)a + w_2 - c]}{(1+r_3)} + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$c + \beta c = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

82

82

$$t = 2$$

$$\beta(1+r_3)c = (1+r_3)[(1+r_2)a + w_2 - c] + w_3$$

$$\frac{\beta(1+r_3)c}{1+r_3} = \frac{(1+r_3)[(1+r_2)a + w_2 - c]}{(1+r_3)} + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$c + \beta c = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$(1+\beta)c = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

83

83

$$t = 2$$

$$\beta(1+r_3)c = (1+r_3)[(1+r_2)a + w_2 - c] + w_3$$

$$\frac{\beta(1+r_3)c}{1+r_3} = \frac{(1+r_3)[(1+r_2)a + w_2 - c]}{(1+r_3)} + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$c + \beta c = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$(1+\beta)c = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$c = \frac{1}{1+\beta} \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$$

84

84

$$t = 2$$

Sustituimos $c = \frac{1}{1+\beta} \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$ en la restricción
 $a^+ = (1+r_2)a + w_2 - c$, para obtener a^+ :

85

85

$$t = 2$$

Sustituimos $c = \frac{1}{1+\beta} \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$ en la restricción
 $a^+ = (1+r_2)a + w_2 - c$, para obtener a^+ :

$$a^+ = (1+r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta} \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$$

86

86

$$t = 2$$

Sustituimos $c = \frac{1}{1+\beta} \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$ en la restricción

$a^+ = (1+r_2)a + w_2 - c$, para obtener a^+ :

$$a^+ = (1+r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta} \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$$

$$a^+ = \frac{1+\beta}{1+\beta} [(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta} [(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta} \left(\frac{w_3}{1+r_3} \right)$$

87

87

$$t = 2$$

Sustituimos $c = \frac{1}{1+\beta} \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$ en la restricción

$a^+ = (1+r_2)a + w_2 - c$, para obtener a^+ :

$$a^+ = (1+r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta} \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$$

$$a^+ = \frac{1+\beta}{1+\beta} [(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta} [(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta} \left(\frac{w_3}{1+r_3} \right)$$

$$a^+ = \frac{1+\beta-1}{1+\beta} [(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta} \left(\frac{w_3}{1+r_3} \right)$$

88

88

$$t = 2$$

Sustituimos $c = \frac{1}{1+\beta} \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$ en la restricción

$a^+ = (1+r_2)a + w_2 - c$, para obtener a^+ :

$$a^+ = (1+r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta} \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$$

$$a^+ = \frac{1+\beta}{1+\beta} [(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta} [(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta} \left(\frac{w_3}{1+r_3} \right)$$

$$a^+ = \frac{\cancel{1+\beta} - 1}{1+\beta} [(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta} \left(\frac{w_3}{1+r_3} \right)$$

89

89

$$t = 2$$

Las 'funciones de política' en $t = 2$ son:

$$c = \frac{1}{1+\beta} \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$$

$$a^+ = \frac{\beta}{1+\beta} [(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta} \left(\frac{w_3}{1+r_3} \right)$$

90

$$t = 2$$

Las 'funciones de política' en $t = 2$ son:

$$c = \frac{1}{1+\beta} \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$$

$$a^+ = \frac{\beta}{1+\beta} [(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta} \left(\frac{w_3}{1+r_3} \right)$$

Para que $\widehat{C}_2 = c$, se necesita que $\widehat{A}_3 = a^+$ y así:

$$\widehat{C}_2 = \frac{1}{1+\beta} \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$$

$$\widehat{A}_3 = \frac{\beta}{1+\beta} [(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta} \left(\frac{w_3}{1+r_3} \right)$$

91

91

$$t = 2$$

Las 'funciones de política' en $t = 2$ son:

$$c = \frac{1}{1+\beta} \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$$

$$a^+ = \frac{\beta}{1+\beta} [(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta} \left(\frac{w_3}{1+r_3} \right)$$

Para que $\widehat{C}_2 = c$, se necesita que $\widehat{A}_3 = a^+$ y así:

$$\widehat{C}_2 = \frac{1}{1+\beta} \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$$

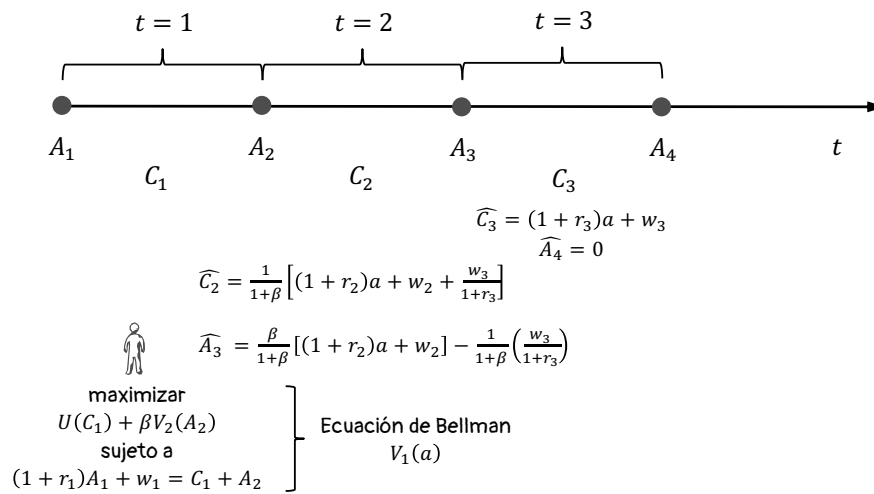
$$\widehat{A}_3 = \frac{\beta}{1+\beta} [(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta} \left(\frac{w_3}{1+r_3} \right)$$

Llegamos a las mismas
funciones de política que
en la sección anterior

92

92

Inducción 'hacia atrás'



93

93

$t = 1$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 1$:

$$V_1(A_1) = \max_{C_1, A_2} \{ U(C_1) + \beta V_2(A_2) \mid (1 + r_1)A_1 + w_1 = C_1 + A_2 \}$$

94

94

$t = 1$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 1$:

$$V_1(A_1) = \max_{C_1, A_2} \{ U(C_1) + \beta V_2(A_2) \mid (1 + r_1)A_1 + w_1 = C_1 + A_2 \}$$

$$V_1(a) = \max_{c, a^+} \{ U(c) + \beta V_2(a^+) \mid (1 + r_1)a + w_1 = c + a^+ \}$$

95

95

$t = 1$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 1$:

$$V_1(A_1) = \max_{C_1, A_2} \{ U(C_1) + \beta V_2(A_2) \mid (1 + r_1)A_1 + w_1 = C_1 + A_2 \}$$

$$V_1(a) = \max_{c, a^+} \{ U(c) + \beta V_2(a^+) \mid (1 + r_1)a + w_1 = c + a^+ \}$$

FOC

$$U'(c) = \beta V_2'[(1 + r_1)a + w_1 - c]$$

Ecuación
de Euler

96

96

$t = 1$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 1$:

$$V_1(A_1) = \max_{C_1, A_2} \{ U(C_1) + \beta V_2(A_2) \mid (1 + r_1)A_1 + w_1 = C_1 + A_2 \}$$

$$V_1(a) = \max_{c, a^+} \{ U(c) + \beta V_2(a^+) \mid (1 + r_1)a + w_1 = c + a^+ \}$$

FOC

$$U'(c) = \beta V_2'[(1 + r_1)a + w_1 - c] \quad \text{Ecuación de Euler}$$

Ahora, al igual que el problema en $t = 2$, necesitamos $U'(c)$ y $V_2'(a^+)$

97

97

$t = 1$

$$U(c) = \ln c$$

$$U'(c) = \frac{1}{c}$$

Ahora solo falta $V_2'(a^+)$ y para obtenerla, necesitamos la función valor en $t + 1$, *i.e.* $V_2(a)$

98

98

$$V_1(a) = \max_{c, a^+} \{U(c) + \beta V_2[(1 + r_1)a + w_1 - c]\} \quad V_2(a) = \max_c \{U(c) + \beta V_3[(1 + r_3)a + w_3]\}$$

$$t = 1 \quad V_2(a) = U(\widehat{C}_2) + \beta V_3[(1 + r_3)\widehat{A}_3 + w_3]$$

99

99

$$V_1(a) = \max_{c, a^+} \{U(c) + \beta V_2[(1 + r_1)a + w_1 - c]\} \quad V_2(a) = \max_c \{U(c) + \beta V_3[(1 + r_3)a + w_3]\}$$

$$t = 1 \quad V_2(a) = U(\widehat{C}_2) + \beta V_3[(1 + r_3)\widehat{A}_3 + w_3]$$

$$V_2(a) = \ln(\widehat{C}_2) + \beta \ln[(1 + r_3)\widehat{A}_3 + w_3]$$

10
0

100

$$V_1(a) = \max_{c, a^+} \{U(c) + \beta V_2[(1 + r_1)a + w_1 - c]\} \quad V_2(a) = \max_c \{U(c) + \beta V_3[(1 + r_3)a + w_3]\}$$

$$t = 1 \quad V_2(a) = U(\widehat{C}_2) + \beta V_3[(1 + r_3)\widehat{A}_3 + w_3]$$

$$V_2(a) = \ln(\widehat{C}_2) + \beta \ln[(1 + r_3)\widehat{A}_3 + w_3]$$

$$\widehat{C}_2 = \frac{1}{1+\beta} \left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$$

$$\widehat{A}_3 = \frac{\beta}{1+\beta} [(1 + r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta} \left(\frac{w_3}{1+r_3} \right)$$

10
1

101

$$V_1(a) = \max_{c, a^+} \{U(c) + \beta V_2[(1 + r_1)a + w_1 - c]\} \quad V_2(a) = \max_c \{U(c) + \beta V_3[(1 + r_3)a + w_3]\}$$

$$t = 1 \quad V_2(a) = U(\widehat{C}_2) + \beta V_3[(1 + r_3)\widehat{A}_3 + w_3]$$

$$V_2(a) = \ln(\widehat{C}_2) + \beta \ln[(1 + r_3)\widehat{A}_3 + w_3]$$

$$\widehat{C}_2 = \frac{1}{1+\beta} \left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$$

$$\widehat{A}_3 = \frac{\beta}{1+\beta} [(1 + r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta} \left(\frac{w_3}{1+r_3} \right)$$

$$V_2(a) = \ln \left\{ \frac{1}{1+\beta} \left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right] \right\} + \beta \ln \left\{ (1 + r_3) \left\{ \frac{\beta}{1+\beta} [(1 + r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta} \left(\frac{w_3}{1+r_3} \right) \right\} + w_3 \right\}$$

10
2

102

$$t = 1$$

$$V_2(a) = \ln \left\{ \frac{1}{1+\beta} \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right] \right\} + \beta \ln \left\langle (1+r_3) \left\{ \frac{\beta}{1+\beta} [(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta} \left(\frac{w_3}{1+r_3} \right) \right\} + w_3 \right\rangle$$

10
3

103

$$t = 1$$

$$V_2(a) = \ln \left\{ \frac{1}{1+\beta} \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right] \right\} + \beta \ln \left\langle (1+r_3) \left\{ \frac{\beta}{1+\beta} [(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta} \left(\frac{w_3}{1+r_3} \right) \right\} + w_3 \right\rangle$$

$$V_2(a) = \ln \left\{ \frac{1}{1+\beta} \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right] \right\} + \beta \ln \left\langle (1+r_3) \left\{ \frac{\beta}{1+\beta} [(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta} \left(\frac{w_3}{1+r_3} \right) + \frac{1+\beta}{1+\beta} \frac{1}{1+r_3} w_3 \right\} \right\rangle$$

10
4

104

$$t = 1$$

$$V_2(a) = \ln \left\{ \frac{1}{1+\beta} \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right] \right\} + \beta \ln \left\langle (1+r_3) \left\{ \frac{\beta}{1+\beta} [(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta} \left(\frac{w_3}{1+r_3} \right) \right\} + w_3 \right\rangle$$

$$V_2(a) = \ln \left\{ \frac{1}{1+\beta} \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right] \right\} + \beta \ln \left\langle (1+r_3) \left\{ \frac{\beta}{1+\beta} [(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta} \left(\frac{w_3}{1+r_3} \right) + \frac{1+\beta}{1+\beta} \frac{1}{1+r_3} w_3 \right\} \right\rangle$$

$$V_2(a) = \ln \left\{ \frac{1}{1+\beta} \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right] \right\} + \beta \ln \left\langle (1+r_3) \left\{ \frac{\beta}{1+\beta} [(1+r_2)a + w_2] + \frac{1+\beta-1}{1+\beta} \left(\frac{w_3}{1+r_3} \right) \right\} \right\rangle$$

10
5

105

$$t = 1$$

$$V_2(a) = \ln \left\{ \frac{1}{1+\beta} \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right] \right\} + \beta \ln \left\langle (1+r_3) \left\{ \frac{\beta}{1+\beta} [(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta} \left(\frac{w_3}{1+r_3} \right) \right\} + w_3 \right\rangle$$

$$V_2(a) = \ln \left\{ \frac{1}{1+\beta} \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right] \right\} + \beta \ln \left\langle (1+r_3) \left\{ \frac{\beta}{1+\beta} [(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta} \left(\frac{w_3}{1+r_3} \right) + \frac{1+\beta}{1+\beta} \frac{1}{1+r_3} w_3 \right\} \right\rangle$$

$$V_2(a) = \ln \left\{ \frac{1}{1+\beta} \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right] \right\} + \beta \ln \left\langle (1+r_3) \left\{ \frac{\beta}{1+\beta} [(1+r_2)a + w_2] + \frac{1+\beta-1}{1+\beta} \left(\frac{w_3}{1+r_3} \right) \right\} \right\rangle$$

10
6

106

$$t = 1$$

$$V_2(a) = \ln \left\{ \frac{1}{1+\beta} \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right] \right\} + \beta \ln \left\langle (1+r_3) \left\{ \frac{\beta}{1+\beta} \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right] \right\} \right\rangle$$

10
7

107

$$t = 1$$

$$V_2(a) = \ln \left\{ \frac{1}{1+\beta} \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right] \right\} + \beta \ln \left\langle (1+r_3) \left\{ \frac{\beta}{1+\beta} \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right] \right\} \right\rangle$$

$$V_2(a) = \ln(1) - \ln(1+\beta) + \ln \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right] + \beta \ln(1+r_3) + \ln \beta^\beta - \ln(1+\beta)^\beta + \beta \ln \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$$

10
8

108

$$t = 1$$

$$V_2(a) = \ln \left\{ \frac{1}{1+\beta} \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right] \right\} + \beta \ln \left\langle (1+r_3) \left\{ \frac{\beta}{1+\beta} \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right] \right\} \right\rangle$$

$$V_2(a) = \ln(1) - \ln(1+\beta) + \ln \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right] + \beta \ln(1+r_3) + \ln \beta^\beta - \ln(1+\beta)^\beta + \beta \ln \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$$

10
9

109

$$t = 1$$

$$V_2(a) = \ln \left\{ \frac{1}{1+\beta} \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right] \right\} + \beta \ln \left\langle (1+r_3) \left\{ \frac{\beta}{1+\beta} \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right] \right\} \right\rangle$$

$$V_2(a) = \ln(1) - \ln(1+\beta) + \ln \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right] + \beta \ln(1+r_3) + \ln \beta^\beta - \ln(1+\beta)^\beta + \beta \ln \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$$

$$V_2(a) = -\ln(1+\beta) + \ln \beta^\beta - \ln(1+\beta)^\beta + \beta \ln(1+r_3) + \ln \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right] + \beta \ln \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$$

11
0

110

$$t = 1$$

$$V_2(a) = -\ln(1 + \beta) + \ln \beta^\beta - \ln(1 + \beta)^\beta + \beta \ln(1 + r_3) + \ln \left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right] + \beta \ln \left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$$

11
1

111

$$t = 1$$

$$V_2(a) = -\ln(1 + \beta) + \ln \beta^\beta - \ln(1 + \beta)^\beta + \beta \ln(1 + r_3) + \ln \left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right] + \beta \ln \left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$$

$$V_2(a) = \ln \beta^\beta - \ln(1 + \beta) - \ln(1 + \beta)^\beta + \beta \ln(1 + r_3) + (1 + \beta) \ln \left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$$

11
2

112

$$t = 1$$

$$V_2(a) = -\ln(1 + \beta) + \ln \beta^\beta - \ln(1 + \beta)^\beta + \beta \ln(1 + r_3) + \ln \left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right] + \beta \ln \left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$$

$$V_2(a) = \ln \beta^\beta - \ln(1 + \beta) - \ln(1 + \beta)^\beta + \beta \ln(1 + r_3) + (1 + \beta) \ln \left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$$

$$V_2(a) = \ln \left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}} \right] + \beta \ln(1 + r_3) + (1 + \beta) \ln \left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$$

11
3

113

$$V_1(a) = \max_{c, a^+} \{ U(c) + \beta V_2[(1 + r_1)a + w_1 - c] \}$$

$$t = 1$$

$$V_2(a) = \ln \left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}} \right] + \beta \ln(1 + r_3) + (1 + \beta) \ln \left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$$

11
4

114

$$V_1(a) = \max_{c, a^+} \{ U(c) + \beta V_2[(1+r_1)a + w_1 - c] \}$$

$$t = 1$$

$$V_2(a) = \ln \left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}} \right] + \beta \ln(1+r_3) + (1+\beta) \ln \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$$

Regresamos a la condición de primer orden del problema de optimización del agente representativo en $t = 1$:

$$U'(c) = \beta V_2'[(1+r_1)a + w_1 - c]$$

11
5

115

$$V_1(a) = \max_{c, a^+} \{ U(c) + \beta V_2[(1+r_1)a + w_1 - c] \}$$

$$t = 1$$

$$V_2(a) = \ln \left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}} \right] + \beta \ln(1+r_3) + (1+\beta) \ln \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$$

Regresamos a la condición de primer orden del problema de optimización del agente representativo en $t = 1$:

$$U'(c) = \beta V_2'[(1+r_1)a + w_1 - c]$$

Ecuación
de Euler

$$\text{Entonces obtenemos } V_2'(a) = \frac{(1+\beta)(1+r_2)}{(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}}$$

11
6

116

$$t = 1$$

$$V_2'(a) = \frac{(1 + \beta)(1 + r_2)}{(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3}}$$

Podemos simplificar:

11
7

117

$$t = 1$$

$$V_2'(a) = \frac{(1 + \beta)(1 + r_2)}{(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3}}$$

Podemos simplificar:

$$V_2'(a) = \frac{\frac{(1 + \beta)(1 + r_2)}{1 + r_2}}{\frac{(1 + r_2)a}{1 + r_2} + \frac{w_2}{1 + r_2} + \frac{w_3}{(1 + r_2)(1 + r_3)}}$$

11
8

118

$$t = 1$$

$$V_2'(a) = \frac{(1 + \beta)(1 + r_2)}{(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3}}$$

Podemos simplificar:

$$V_2'(a) = \frac{\frac{(1 + \beta)(1 + r_2)}{1 + r_2}}{\frac{(1 + r_2)a}{1 + r_2} + \frac{w_2}{1 + r_2} + \frac{w_3}{(1 + r_2)(1 + r_3)}}$$

11
9

119

$$t = 1$$

$$V_2'(a) = \frac{(1 + \beta)(1 + r_2)}{(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3}}$$

Podemos simplificar:

$$V_2'(a) = \frac{\frac{(1 + \beta)(1 + r_2)}{1 + r_2}}{\frac{(1 + r_2)a}{1 + r_2} + \frac{w_2}{1 + r_2} + \frac{w_3}{(1 + r_2)(1 + r_3)}}$$

$$V_2'(a) = \frac{1 + \beta}{a + \frac{w_2}{1 + r_2} + \frac{w_3}{(1 + r_2)(1 + r_3)}}$$

12
0

120

$$V_1(a) = \max_{c, a^+} \{ U(c) + \beta V_2[(1+r_1)a + w_1 - c] \}$$

$$t = 1$$

$$V_2'(a) = \frac{1+\beta}{a + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

12
1

121

$$V_1(a) = \max_{c, a^+} \{ U(c) + \beta V_2[(1+r_1)a + w_1 - c] \}$$

$$t = 1$$

$$V_2'(a) = \frac{1+\beta}{a + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

Ya tenemos $V_2'(a)$, ahora nos falta $V_2'(a^+)$...

...en donde $a^+ = (1+r_1)a + w_1 - c$

12
2

122

$$V_1(a) = \max_{c, a^+} \{ U(c) + \beta V_2[(1+r_1)a + w_1 - c] \}$$

$$t = 1$$

$$V_2'(a) = \frac{1+\beta}{a + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

Ya tenemos $V_2'(a)$, ahora nos falta $V_2'(a^+)$...

...en donde $a^+ = (1+r_1)a + w_1 - c$

$$V_2'(a^+) = \frac{1+\beta}{a^+ + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

12
3

123

$$V_1(a) = \max_{c, a^+} \{ U(c) + \beta V_2[(1+r_1)a + w_1 - c] \}$$

$$t = 1$$

$$V_2'(a) = \frac{1+\beta}{a + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

Ya tenemos $V_2'(a)$, ahora nos falta $V_2'(a^+)$...

...en donde $a^+ = (1+r_1)a + w_1 - c$

$$V_2'(a^+) = \frac{1+\beta}{a^+ + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

12
4

124

$$V_1(a) = \max_{c, a^+} \{ U(c) + \beta V_2[(1+r_1)a + w_1 - c] \}$$

$$t = 1$$

$$V_2'(a) = \frac{1+\beta}{a + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

Ya tenemos $V_2'(a)$, ahora nos falta $V_2'(a^+)$...

...en donde $a^+ = (1+r_1)a + w_1 - c$

$$V_2'(a^+) = \frac{1+\beta}{a^+ + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

$$V_2'(a^+) = \frac{1+\beta}{(1+r_1)a + w_1 - c + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

12
5

125

$$t = 1$$

Ecuación
de Euler

La condición de primer orden $U'(c) = \beta V_2'[(1+r_1)a + w_1 - c]$ queda:

12
6

126

$t = 1$

Ecuación
de Euler

La condición de primer orden $U'(c) = \beta V_2'[(1 + r_1)a + w_1 - c]$ queda:

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1 + \beta)}{(1 + r_1)a + w_1 - c + \frac{w_2}{1 + r_2} + \frac{w_3}{(1 + r_2)(1 + r_3)}}$$

12
7

127

$t = 1$

Ecuación
de Euler

La condición de primer orden $U'(c) = \beta V_2'[(1 + r_1)a + w_1 - c]$ queda:

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1 + \beta)}{(1 + r_1)a + w_1 - c + \frac{w_2}{1 + r_2} + \frac{w_3}{(1 + r_2)(1 + r_3)}}$$

Ahora despejamos c y sustituimos la expresión que encontremos en la ecuación a^+

12
8

128

$t = 1$

Ecuación
de Euler

La condición de primer orden $U'(c) = \beta V_2'[(1 + r_1)a + w_1 - c]$ queda:

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1 + \beta)}{(1 + r_1)a + w_1 - c + \frac{w_2}{1 + r_2} + \frac{w_3}{(1 + r_2)(1 + r_3)}}$$

Ahora despejamos c y sustituimos la expresión que encontremos en la ecuación a^+

12
9

129

$t = 1$

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1 + \beta)}{(1 + r_1)a + w_1 - c + \frac{w_2}{1 + r_2} + \frac{w_3}{(1 + r_2)(1 + r_3)}} \quad \text{Ecuación de Euler}$$

13
0

130

$t = 1$

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1 + \beta)}{(1 + r_1)a + w_1 - c + \frac{w_2}{1 + r_2} + \frac{w_3}{(1 + r_2)(1 + r_3)}} \quad \text{Ecuación de Euler}$$

$$c\beta(1 + \beta) = (1 + r_1)a + w_1 - c + \frac{w_2}{1 + r_2} + \frac{w_3}{(1 + r_2)(1 + r_3)}$$

13
1

131

$t = 1$

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1 + \beta)}{(1 + r_1)a + w_1 - c + \frac{w_2}{1 + r_2} + \frac{w_3}{(1 + r_2)(1 + r_3)}} \quad \text{Ecuación de Euler}$$

$$c\beta(1 + \beta) = (1 + r_1)a + w_1 - c + \frac{w_2}{1 + r_2} + \frac{w_3}{(1 + r_2)(1 + r_3)}$$

$$c + c\beta(1 + \beta) = (1 + r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1 + r_2} + \frac{w_3}{(1 + r_2)(1 + r_3)}$$

13
2

132

$$t = 1$$

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1 + \beta)}{(1 + r_1)a + w_1 - c + \frac{w_2}{1 + r_2} + \frac{w_3}{(1 + r_2)(1 + r_3)}} \quad \text{Ecuación de Euler}$$

$$c\beta(1 + \beta) = (1 + r_1)a + w_1 - c + \frac{w_2}{1 + r_2} + \frac{w_3}{(1 + r_2)(1 + r_3)}$$

$$c + c\beta(1 + \beta) = (1 + r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1 + r_2} + \frac{w_3}{(1 + r_2)(1 + r_3)}$$

$$c[1 + \beta(1 + \beta)] = (1 + r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1 + r_2} + \frac{w_3}{(1 + r_2)(1 + r_3)}$$

13
3

133

$$t = 1$$

$$c = \frac{1}{1 + \beta + \beta^2} \left[(1 + r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1 + r_2} + \frac{w_3}{(1 + r_2)(1 + r_3)} \right]$$

13
4

134

$$t = 1$$

$$c = \frac{1}{1 + \beta + \beta^2} \left[(1 + r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1 + r_2} + \frac{w_3}{(1 + r_2)(1 + r_3)} \right]$$

Ahora sustituimos la expresión de c en la ecuación de a^+ ...

$$\dots a^+ = (1 + r_1)a + w_1 - c$$

13
5

135

$$t = 1$$

$$c = \frac{1}{1 + \beta + \beta^2} \left[(1 + r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1 + r_2} + \frac{w_3}{(1 + r_2)(1 + r_3)} \right]$$

Ahora sustituimos la expresión de c en la ecuación de a^+ ...

$$\dots a^+ = (1 + r_1)a + w_1 - c$$

13
6

136

$$t = 1$$

$$c = \frac{1}{1 + \beta + \beta^2} \left[(1 + r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1 + r_2} + \frac{w_3}{(1 + r_2)(1 + r_3)} \right]$$

Ahora sustituimos la expresión de c en la ecuación de a^+ ...

$$\dots a^+ = (1 + r_1)a + w_1 - c$$

$$a^+ = (1 + r_1)a + w_1 - \frac{1}{1 + \beta + \beta^2} \left[(1 + r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1 + r_2} + \frac{w_3}{(1 + r_2)(1 + r_3)} \right]$$

13
7

137

$$t = 1$$

$$c = \frac{1}{1 + \beta + \beta^2} \left[(1 + r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1 + r_2} + \frac{w_3}{(1 + r_2)(1 + r_3)} \right]$$

Ahora sustituimos la expresión de c en la ecuación de a^+ ...

$$\dots a^+ = (1 + r_1)a + w_1 - c$$

$$a^+ = (1 + r_1)a + w_1 - \frac{1}{1 + \beta + \beta^2} \left[(1 + r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1 + r_2} + \frac{w_3}{(1 + r_2)(1 + r_3)} \right]$$

$$a^+ = (1 + r_1)a + w_1 - \frac{1}{1 + \beta + \beta^2} \left[(1 + r_1)a + w_1 \right] - \frac{1}{1 + \beta + \beta^2} \left[\frac{w_2}{1 + r_2} + \frac{w_3}{(1 + r_2)(1 + r_3)} \right]$$

13
8

138

$$t = 1$$

$$a^+ = (1 + r_1)a + w_1 - \frac{1}{1 + \beta + \beta^2} [(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1 + \beta + \beta^2} \left[\frac{w_2}{1 + r_2} + \frac{w_3}{(1 + r_2)(1 + r_3)} \right]$$

13
9

139

$$t = 1$$

$$a^+ = (1 + r_1)a + w_1 - \frac{1}{1 + \beta + \beta^2} [(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1 + \beta + \beta^2} \left[\frac{w_2}{1 + r_2} + \frac{w_3}{(1 + r_2)(1 + r_3)} \right]$$

$$a^+ = \frac{1 + \beta + \beta^2 - 1}{1 + \beta + \beta^2} [(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1 + \beta + \beta^2} \left[\frac{w_2}{1 + r_2} + \frac{w_3}{(1 + r_2)(1 + r_3)} \right]$$

14
0

140

$$t = 1$$

$$a^+ = (1 + r_1)a + w_1 - \frac{1}{1+\beta+\beta^2} [(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

$$a^+ = \frac{1+\beta+\beta^2-1}{1+\beta+\beta^2} [(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

14
1

141

$$t = 1$$

$$a^+ = (1 + r_1)a + w_1 - \frac{1}{1+\beta+\beta^2} [(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

$$a^+ = \frac{1+\beta+\beta^2-1}{1+\beta+\beta^2} [(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

$$a^+ = \frac{\beta+\beta^2}{1+\beta+\beta^2} [(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

14
2

142

$$t = 1$$

$$a^+ = (1 + r_1)a + w_1 - \frac{1}{1+\beta+\beta^2} [(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

$$a^+ = \frac{1+\beta+\beta^2-1}{1+\beta+\beta^2} [(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

$$a^+ = \frac{\beta+\beta^2}{1+\beta+\beta^2} [(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

$$a^+ = \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2} [(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

14
3

143

$$t = 1$$

$$\widehat{C}_1 = c \text{ si } \widehat{A}_2 = a^+, \text{ entonces...}$$

14
4

144

$$t = 1$$

$\widehat{C}_1 = c$ si $\widehat{A}_2 = a^+$, entonces...

$$\widehat{C}_1 = \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

14
5

145

$$t = 1$$

$\widehat{C}_1 = c$ si $\widehat{A}_2 = a^+$, entonces...

$$\widehat{C}_1 = \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

$$\widehat{A}_2 = \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2} [(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

14
6

146

$$t = 1$$

$\widehat{C}_1 = c$ si $\widehat{A}_2 = a^+$, entonces...

$$\widehat{C}_1 = \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

$$\widehat{A}_2 = \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2} [(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

Una vez más, llegamos a las mismas funciones de política que en la sección anterior

14
7

147

$$V_1(a) = \max_{c, a^+} \{ U(c) + \beta V_2[(1+r_1)a + w_1 - c] \}$$

$$t = 1$$

Ahora, a pesar de que haber obtenido las funciones de política óptima sería suficiente, considero que para entender todo el concepto de Programación Dinámica, es necesario calcular la función valor $V_1(a)$

$$V_1(a) = \max_{c, a^+} U(\widehat{C}_1) + \beta V_2(\widehat{A}_2)$$

$$\widehat{C}_1 = \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

$$\widehat{A}_2 = \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2} [(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

14
8

148

$$V_2(a) = \ln \left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}} \right] + \beta \ln(1+r_3) + (1+\beta) \ln \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$$

$t = 1$

Solo que recordemos que...

$$V_2(a) = \ln \left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}} \right] + \beta \ln(1+r_3) + (1+\beta) \ln \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$$

Entonces $\widehat{A}_2 = \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2} [(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$

14
9

149

$t = 1$

$$V_1(a) = U(\widehat{C}_1) + \beta V_2(\widehat{A}_2)$$

15
0

150

$$t = 1$$

$$U(c) = \ln c$$

$$V_1(a) = U(\widehat{C}_1) + \beta V_2(\widehat{A}_2)$$

15
1

151

$$t = 1$$

$$U(c) = \ln c$$

$$V_1(a) = U(\widehat{C}_1) + \beta V_2(\widehat{A}_2)$$

15
2

152

$$t = 1$$

$$V_1(a) = U(\widehat{C}_1) + \beta V_2(\widehat{A}_2)$$

$$U(c) = \ln c$$

$$\widehat{C}_1 = \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

15
3

153

$$t = 1$$

$$V_1(a) = U(\widehat{C}_1) + \beta V_2(\widehat{A}_2)$$

$$U(c) = \ln c$$

$$\widehat{C}_1 = \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

15
4

154

$t = 1$

$$V_1(a) = U(\widehat{C}_1) + \beta V_2(\widehat{A}_2)$$

$$U(c) = \ln c$$

$$\widehat{C}_1 = \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

$V_2(a)$

$$= \ln \left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}} \right] + \beta \ln(1+r_3) + (1+\beta) \ln \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$$

15
5

155

$t = 1$

$$V_1(a) = U(\widehat{C}_1) + \beta V_2(\widehat{A}_2)$$

$$U(c) = \ln c$$

$$\widehat{C}_1 = \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

$V_2(a)$

$$= \ln \left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}} \right] + \beta \ln(1+r_3) + (1+\beta) \ln \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$$

15
6

156

$t = 1$

$$V_1(a) = U(\widehat{C}_1) + \beta V_2(\widehat{A}_2)$$

$$U(c) = \ln c$$

$$\widehat{C}_1 = \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

$$V_2(a)$$

$$= \ln \left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}} \right] + \beta \ln(1+r_3) + (1+\beta) \ln \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$$

$$\widehat{A}_2 = \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2} [(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

15
7

157

$t = 1$

$$V_1(a) = U(\widehat{C}_1) + \beta V_2(\widehat{A}_2)$$

$$U(c) = \ln c$$

$$\widehat{C}_1 = \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

$$V_2(a)$$

$$= \ln \left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}} \right] + \beta \ln(1+r_3) + (1+\beta) \ln \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right]$$

$$\widehat{A}_2 = \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2} [(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

15
8

158

$$t = 1$$

$$V_1(a) = U(\widehat{C}_1) + \beta V_2(\widehat{A}_2)$$

$$V_1(a) = \ln(\widehat{C}_1) + \beta \left\{ \ln \left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}} \right] + \beta \ln(1+r_3) + (1+\beta) \ln \left[(1+r_2)\widehat{A}_2 + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right] \right\}$$

15
9

159

$$t = 1$$

$$V_1(a) = U(\widehat{C}_1) + \beta V_2(\widehat{A}_2)$$

$$V_1(a) = \ln(\widehat{C}_1) + \beta \left\{ \ln \left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}} \right] + \beta \ln(1+r_3) + (1+\beta) \ln \left[(1+r_2)\widehat{A}_2 + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right] \right\}$$

$$V_1(a) = \ln \left\{ \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] \right\} + \beta \left\{ \ln \left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}} \right] + \beta \ln(1+r_3) + (1+\beta) \ln \left[(1+r_2) \left\{ \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2} [(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] \right\} + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right] \right\}$$

16
0

160

$t = 1$

$$V_1(a) = \ln \left\{ \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] \right\} +$$

$$\beta \left(\ln \left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}} \right] + \beta \ln(1+r_3) + (1+\beta) \ln \left[(1+r_2) \left\{ \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2} [(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] \right\} + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right] \right)$$

16
1

161

$t = 1$

$$V_1(a) = \ln \left\{ \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] \right\} +$$

$$\beta \left(\ln \left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}} \right] + \beta \ln(1+r_3) + (1+\beta) \ln \left[(1+r_2) \left\{ \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2} [(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] \right\} + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} \right] \right)$$

$$V_1(a) = \ln \left\{ \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] \right\} +$$

$$\beta \left(\ln \left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}} \right] + \beta \ln(1+r_3) + (1+\beta) \ln \left[(1+r_2) \left\{ \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2} [(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] \right\} + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] \right)$$

16
2

162

$$t = 1$$

$$V_1(a) = \ln \left\{ \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] \right\} + \beta \left\langle \ln \left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}} \right] + \beta \ln(1+r_3) + (1+\beta) \ln \left[(1+r_2) \left\{ \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2} [(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right\} \right] \right\rangle$$

16
3

163

$$t = 1$$

$$V_1(a) = \ln \left\{ \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] \right\} + \beta \left\langle \ln \left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}} \right] + \beta \ln(1+r_3) + (1+\beta) \ln \left[(1+r_2) \left\{ \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2} [(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right\} \right] \right\rangle$$

$$V_1(a) = \ln \left\{ \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] \right\} + \beta \left\langle \ln \left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}} \right] + \beta \ln(1+r_3) + (1+\beta) \ln \left[(1+r_2) \left\{ \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2} [(1+r_1)a + w_1] + \frac{1+\beta+\beta^2-1}{1+\beta+\beta^2} \left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] \right\} \right] \right\rangle$$

16
4

164

$$t = 1$$

$$V_1(a) = \ln \left\{ \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] \right\} + \beta \left\langle \ln \left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}} \right] + \beta \ln(1+r_3) + (1+\beta) \ln \left[(1+r_2) \left\{ \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2} [(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right\} \right] \right\rangle$$

$$V_1(a) = \ln \left\{ \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] \right\} + \beta \left\langle \ln \left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}} \right] + \beta \ln(1+r_3) + (1+\beta) \ln \left[(1+r_2) \left\{ \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2} [(1+r_1)a + w_1] + \frac{1+\beta+\beta^2}{1+\beta+\beta^2} \left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] \right\} \right] \right\rangle$$

16
5

165

$$t = 1$$

$$V_1(a) = \ln \left\{ \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] \right\} + \beta \left\langle \ln \left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}} \right] + \beta \ln(1+r_3) + (1+\beta) \ln \left[(1+r_2) \left\{ \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2} [(1+r_1)a + w_1] + \frac{\beta+\beta^2}{1+\beta+\beta^2} \left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] \right\} \right] \right\rangle$$

16
6

166

$$t = 1$$

$$V_1(a) = \ln \left\{ \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] \right\} + \beta \left\langle \ln \left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}} \right] + \beta \ln(1+r_3) + (1+\beta) \ln \left[(1+r_2) \left\{ \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2} [(1+r_1)a + w_1] + \frac{\beta+\beta^2}{1+\beta+\beta^2} \left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] \right\} \right] \right\rangle$$

$$V_1(a) = \ln \left\{ \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] \right\} + \beta \left\langle \ln \left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}} \right] + \beta \ln(1+r_3) + (1+\beta) \ln \left[(1+r_2) \left\{ \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2} [(1+r_1)a + w_1] + \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2} \left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] \right\} \right] \right\rangle$$

16
7

167

$$t = 1$$

$$V_1(a) = \ln \left\{ \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] \right\} + \beta \left\langle \ln \left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}} \right] + \beta \ln(1+r_3) + (1+\beta) \ln \left[(1+r_2) \left\{ \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2} [(1+r_1)a + w_1] + \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2} \left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] \right\} \right] \right\rangle$$

16
8

168

$$t = 1$$

$$V_1(a) = \ln \left\{ \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] \right\} +$$

$$\beta \left\langle \ln \left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}} \right] + \beta \ln(1+r_3) + (1+\beta) \ln \left[(1+r_2) \left\{ \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2} \left[(1+r_1)a + w_1 \right] + \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2} \left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] \right\} \right] \right\rangle$$

$$V_1(a) = \ln \left\{ \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] \right\} +$$

$$\beta \left\langle \ln \left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}} \right] + \beta \ln(1+r_3) + (1+\beta) \ln \left[(1+r_2) \left\{ \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2} \left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] \right\} \right] \right\rangle$$

16
9

169

$$t = 1$$

$$V_1(a) = \ln \left\{ \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] \right\} +$$

$$\beta \left\langle \ln \left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}} \right] + \beta \ln(1+r_3) + (1+\beta) \ln \left[(1+r_2) \left\{ \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2} \left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] \right\} \right] \right\rangle$$

Aquí ya no voy a poner en rojo lo que voy a modificar, porque tendría que poner en rojo todo.

17
0

170

$$t = 1$$

$$V_1(a) = \ln \left\{ \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] \right\} + \beta \left\langle \ln \left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}} \right] + \beta \ln(1+r_3) + (1+\beta) \ln \left[(1+r_2) \left\{ \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2} \left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] \right\} \right] \right\rangle$$

$$V_1(a) = \ln(1) - \ln(1+\beta+\beta^2) + \ln \left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] + \beta \ln(\beta^\beta) - \beta(1+\beta) \ln(1+\beta) + \beta^2 \ln(1+r_3) + \beta(1+\beta) \ln(1+r_2) + \beta(1+\beta) \ln[\beta(1+\beta)] - \beta(1+\beta) \ln[1+\beta+\beta^2] + \beta(1+\beta) \ln \left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

Aquí ya no voy a poner en rojo lo que voy a modificar, porque tendría que poner en rojo todo.

17
1

171

$$t = 1$$

$$V_1(a) = \ln(\overset{0}{1}) - \ln(1+\beta+\beta^2) + \ln \left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] + \beta \ln(\beta^\beta) - \beta(1+\beta) \ln(1+\beta) + \beta^2 \ln(1+r_3) + \beta(1+\beta) \ln(1+r_2) + \beta(1+\beta) \ln[\beta(1+\beta)] - \beta(1+\beta) \ln[1+\beta+\beta^2] + \beta(1+\beta) \ln \left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

Aquí ya no voy a poner en rojo lo que voy a modificar, porque tendría que poner en rojo todo.

17
2

172

$$t = 1$$

$$V_1(a) = \ln(1) \overset{0}{\leftarrow} - \ln(1 + \beta + \beta^2) + \ln \left[(1 + r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] + \beta \ln(\beta^\beta) - \beta (1 + \beta) \ln(1 + \beta) + \beta^2 \ln(1 + r_3) + \beta (1 + \beta) \ln(1 + r_2) + \beta (1 + \beta) \ln[\beta(1 + \beta)] - \beta (1 + \beta) \ln[1 + \beta + \beta^2] + \beta (1 + \beta) \ln \left[(1 + r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

$$V_1(a) = \beta \ln(\beta^\beta) - \beta (1 + \beta) \ln(1 + \beta) + \beta (1 + \beta) \ln[\beta(1 + \beta)] - \ln(1 + \beta + \beta^2) - \beta (1 + \beta) \ln[1 + \beta + \beta^2] + \beta^2 \ln(1 + r_3) + \beta (1 + \beta) \ln(1 + r_2) + \ln \left[(1 + r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] + \beta (1 + \beta) \ln \left[(1 + r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

Aquí ya no voy a poner en rojo lo que voy a modificar, porque tendría que poner en rojo todo.

17
3

173

$$t = 1$$

$$V_1(a) = \beta \ln(\beta^\beta) - \cancel{\beta (1 + \beta) \ln(1 + \beta)} + \beta (1 + \beta) \ln(\beta) + \cancel{\beta (1 + \beta) \ln(1 + \beta)} - \ln(1 + \beta + \beta^2) - \beta (1 + \beta) \ln(1 + \beta + \beta^2) + \beta^2 \ln(1 + r_3) + \beta (1 + \beta) \ln(1 + r_2) + \ln \left[(1 + r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right] + \beta (1 + \beta) \ln \left[(1 + r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

Aquí ya no voy a poner en rojo lo que voy a modificar, porque tendría que poner en rojo todo.

17
4

174

$$t = 1$$

$$V_1(a) = \beta \ln(\beta^\beta) - \beta(1+\beta)\ln(1+\beta) + \beta(1+\beta)\ln(\beta) + \\ \beta(1+\beta)\ln(1+\beta) - \ln(1+\beta+\beta^2) - \beta(1+\beta)\ln(1+\beta+\beta^2) + \\ \beta^2 \ln(1+r_3) + \beta(1+\beta)\ln(1+r_2) + \ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right] + \beta(1+\beta)\ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$V_1(a) = \beta \ln(\beta^\beta) + \beta(1+\beta)\ln(\beta) - [1+\beta(1+\beta)]\ln(1+\beta+\beta^2) + \beta^2 \ln(1+r_3) + \beta(1+\beta)\ln(1+r_2) + [1+\beta(1+\beta)]\ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

Aquí ya no voy a poner en rojo lo que voy a modificar, porque tendría que poner en rojo todo.

17
5

175

$$t = 1$$

$$V_1(a) = \beta \ln(\beta^\beta) + \beta(1+\beta)\ln(\beta) - [1+\beta(1+\beta)]\ln(1+\beta+\beta^2) + \beta^2 \ln(1+r_3) + \beta(1+\beta)\ln(1+r_2) + [1+\beta(1+\beta)]\ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

Aquí ya no voy a poner en rojo lo que voy a modificar, porque tendría que poner en rojo todo.

17
6

176

$$t = 1$$

$$V_1(a) = \beta \ln(\beta^\beta) + \beta (1 + \beta) \ln(\beta) - [1 + \beta(1 + \beta)] \ln(1 + \beta + \beta^2) + \beta^2 \ln(1 + r_3) + \beta (1 + \beta) \ln(1 + r_2) + [1 + \beta(1 + \beta)] \ln \left[(1 + r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

$$V_1(a) = \beta^2 \ln(\beta) + \beta (1 + \beta) \ln(\beta) - [1 + \beta + \beta^2] \ln(1 + \beta + \beta^2) + \beta^2 \ln(1 + r_3) + \beta (1 + \beta) \ln(1 + r_2) + [1 + \beta(1 + \beta)] \ln \left[(1 + r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

Aquí ya no voy a poner en rojo lo que voy a modificar, porque tendría que poner en rojo todo.

17
7

177

$$t = 1$$

$$V_1(a) = \beta^2 \ln(\beta) + \beta (1 + \beta) \ln(\beta) - [1 + \beta + \beta^2] \ln(1 + \beta + \beta^2) + \beta^2 \ln(1 + r_3) + \beta (1 + \beta) \ln(1 + r_2) + [1 + \beta(1 + \beta)] \ln \left[(1 + r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

Aquí ya no voy a poner en rojo lo que voy a modificar, porque tendría que poner en rojo todo.

17
8

178

$$t = 1$$

$$V_1(a) = \beta^2 \ln(\beta) + \beta (1 + \beta) \ln(\beta) - [1 + \beta + \beta^2] \ln(1 + \beta + \beta^2) + \beta^2 \ln(1 + r_3) + \beta (1 + \beta) \ln(1 + r_2) + [1 + \beta(1 + \beta)] \ln \left[(1 + r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

$$V_1(a) = \beta(1 + 2\beta) \ln(\beta) - [1 + \beta + \beta^2] \ln(1 + \beta + \beta^2) + \beta^2 \ln(1 + r_3) + \beta (1 + \beta) \ln(1 + r_2) + [1 + \beta(1 + \beta)] \ln \left[(1 + r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

Aquí ya no voy a poner en rojo lo que voy a modificar, porque tendría que poner en rojo todo.

17
9

179

$$t = 1$$

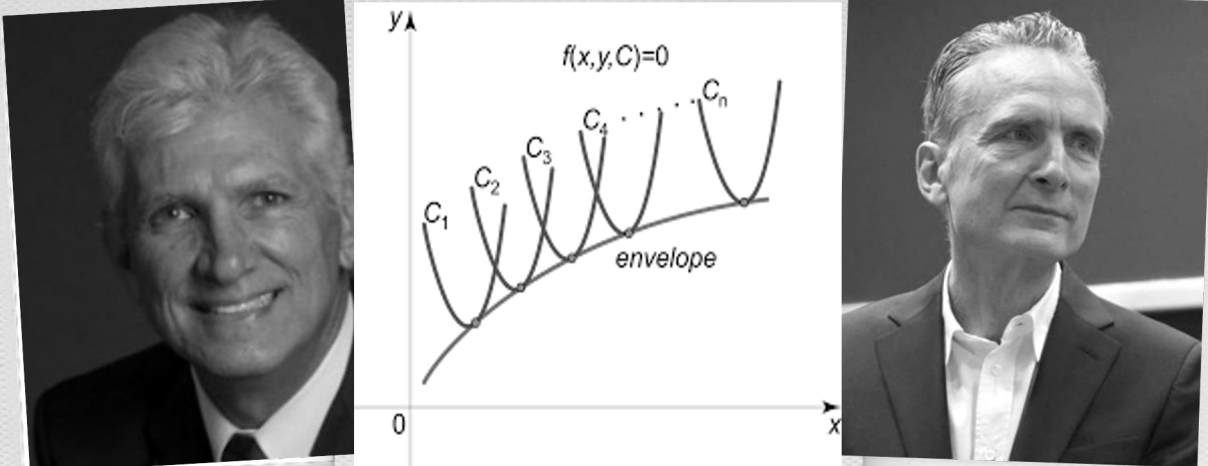
$$V_1(a) = \beta^2 \ln(\beta) + \beta (1 + \beta) \ln(\beta) - [1 + \beta + \beta^2] \ln(1 + \beta + \beta^2) + \beta^2 \ln(1 + r_3) + \beta (1 + \beta) \ln(1 + r_2) + [1 + \beta(1 + \beta)] \ln \left[(1 + r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$


$$V_1(a) = \beta(1 + 2\beta) \ln(\beta) - [1 + \beta + \beta^2] \ln(1 + \beta + \beta^2) + \beta^2 \ln(1 + r_3) + \beta (1 + \beta) \ln(1 + r_2) + [1 + \beta(1 + \beta)] \ln \left[(1 + r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \right]$$

Aquí ya no voy a poner en rojo lo que voy a modificar, porque tendría que poner en rojo todo.


18
0

180




Lawrence M. Benveniste
 (¿? - ...)

Teorema de la Envolvente Dinámico

Jose A. Scheinkman
 (1948 - ...)
 

Fuente: Benveniste (<https://goizueta.emory.edu/faculty/profiles/lawrence-benveniste>); Scheinkman (<https://epoca.globo.com/economia/perdemos-tres-anos-de-crecimiento-diz-profesor-de-columbia-24780527>)

18
1

181

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema de la Envolvente dinámico

- El 'Teorema de la Envolvente' es un resultado muy importante en matemáticas y economía sobre las propiedades de diferenciación de una 'función valor' de un problema parametrizado de optimización

Benveniste, Lawrence M. y Jose A. Scheinkman (1979). On the Differentiability of Value Functions in Dynamic Models of Economics". *Econometrica*, 47: pp. 727-32.

18
2

182

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema de la Envolvente dinámico

- El 'Teorema de la Envolvente' es un resultado muy importante en matemáticas y economía sobre las propiedades de diferenciación de una 'función valor' de un problema parametrizado de optimización
- El Teorema muestra que, en ciertos casos, cambios en los parámetros causan cierta variación de la función objetivo, independientemente si la(s) variable(s) de decisión cambian, como consecuencia del cambio de los parámetros

Benveniste, Lawrence M. y Jose A. Scheinkman (1979). On the Differentiability of Value Functions in Dynamic Models of Economics". *Econometrica*, 47: pp. 727-32.

18
3

183

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema de la Envolvente dinámico

- El 'Teorema de la Envolvente' es un resultado muy importante en matemáticas y economía sobre las propiedades de diferenciación de una 'función valor' de un problema parametrizado de optimización
- El Teorema muestra que, en ciertos casos, cambios en los parámetros causan cierta variación de la función objetivo, independientemente si la(s) variable(s) de decisión cambian, como consecuencia del cambio de los parámetros
- Larry Benveniste y Jose Scheinkman demostraron que hay una aplicación del 'Teorema de la Envolvente' para los modelos de optimización dinámica

Benveniste, Lawrence M. y Jose A. Scheinkman (1979). On the Differentiability of Value Functions in Dynamic Models of Economics". *Econometrica*, 47: pp. 727-32.

18
4

184

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolverte dinámico

Vamos a ilustrar el Teorema Benveniste-Scheinkman (1979) con la función valor en $t = 2$:

$$V_2(a) \equiv U[\widehat{C}_2(a)] + \beta V_3[\widehat{A}_3(a)]$$

18
5

185

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolverte dinámico

Vamos a ilustrar el Teorema Benveniste-Scheinkman (1979) con la función valor en $t = 2$:

$$V_2(a) \equiv U[\widehat{C}_2(a)] + \beta V_3[\widehat{A}_3(a)]$$

Recordemos que $\widehat{A}_3(a) = (1 + r_2)a + w_2 - \widehat{C}_2(a)...$

18
6

186

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

Vamos a ilustrar el Teorema Benveniste-Scheinkman (1979) con la función valor en $t = 2$:

$$V_2(a) \equiv U[\widehat{C}_2(a)] + \beta V_3[\widehat{A}_3(a)]$$

Recordemos que $\widehat{A}_3(a) = (1 + r_2)a + w_2 - \widehat{C}_2(a)$...

Entonces:

$$V_2(a) \equiv U[\widehat{C}_2(a)] + \beta V_3[(1 + r_2)a + w_2 - \widehat{C}_2(a)]$$

18
7

187

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$V_2(a) \equiv U[\widehat{C}_2(a)] + \beta V_3[(1 + r_2)a + w_2 - \widehat{C}_2(a)]$$

Entonces si obtenemos la derivada de $V_2(a)$ con respecto a a , queda:

$$\frac{\partial V_2(a)}{\partial a} = \frac{\partial U[\widehat{C}_2(a)]}{\partial a} \frac{\partial \widehat{C}_2(a)}{\partial a} + \beta \frac{\partial V_3[\widehat{A}_3(a)]}{\partial a} \left[(1 + r_2) - \frac{\partial \widehat{C}_2(a)}{\partial a} \right]$$

18
8

188

Digresión: Benveniste-Scheinkman

Teorema del Envolvente dinámico

$$V_2(a) \equiv U[\widehat{C}_2(a)] + \beta V_3[(1 + r_2)a + w_2 - \widehat{C}_2(a)]$$

Entonces si obtenemos la derivada de $V_2(a)$ con respecto a a , queda:

$$\frac{\partial V_2(a)}{\partial a} = \frac{\partial U[\widehat{C}_2(a)]}{\partial a} \frac{\partial \widehat{C}_2(a)}{\partial a} + \beta \frac{\partial V_3[\widehat{A}_3(a)]}{\partial a} \left[(1 + r_2) - \frac{\partial \widehat{C}_2(a)}{\partial a} \right]$$

Vamos a factorizar $\frac{\partial \widehat{C}_2(a)}{\partial a}$ y a utilizar la condición de primer orden

$U'(c) = \beta V_3'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$, para probar que:

$$V_2'(a) = (1 + r_2) U'[\widehat{C}_2(a)]$$

18
9

189

Digresión: Benveniste-Scheinkman

Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2(a)}{\partial a} = \frac{\partial U[\widehat{C}_2(a)]}{\partial a} \frac{\partial \widehat{C}_2(a)}{\partial a} + \beta \frac{\partial V_3[\widehat{A}_3(a)]}{\partial a} \left[(1 + r_2) - \frac{\partial \widehat{C}_2(a)}{\partial a} \right]$$

19
0

190

Digresión: Benveniste-Scheinkman

Teorema del Envolverte dinámico

$$\frac{\partial v_2(a)}{\partial a} = \frac{\partial U[\widehat{C}_2(a)]}{\partial a} \frac{\partial \widehat{C}_2(a)}{\partial a} + \beta \frac{\partial v_3[\widehat{A}_3(a)]}{\partial a} \left[(1 + r_2) - \frac{\partial \widehat{C}_2(a)}{\partial a} \right]$$

Por simplicidad, quitemos los paréntesis de las funciones:

$$\frac{\partial v_2}{\partial a} = \frac{\partial U}{\partial a} \frac{\partial \widehat{C}_2}{\partial a} + \beta \frac{\partial v_3}{\partial a} \left[(1 + r_2) - \frac{\partial \widehat{C}_2}{\partial a} \right]$$

19
1

191

Digresión: Benveniste-Scheinkman

Teorema del Envolverte dinámico

$$\frac{\partial v_2(a)}{\partial a} = \frac{\partial U[\widehat{C}_2(a)]}{\partial a} \frac{\partial \widehat{C}_2(a)}{\partial a} + \beta \frac{\partial v_3[\widehat{A}_3(a)]}{\partial a} \left[(1 + r_2) - \frac{\partial \widehat{C}_2(a)}{\partial a} \right]$$

Por simplicidad, quitemos los paréntesis de las funciones:

$$\frac{\partial v_2}{\partial a} = \frac{\partial U}{\partial a} \frac{\partial \widehat{C}_2}{\partial a} + \beta \frac{\partial v_3}{\partial a} \left[(1 + r_2) - \frac{\partial \widehat{C}_2}{\partial a} \right]$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial a} = \frac{\partial U}{\partial a} \frac{\partial \widehat{C}_2}{\partial a} + \beta(1 + r_2) \frac{\partial v_3}{\partial a} - \beta \frac{\partial v_3}{\partial a} \frac{\partial \widehat{C}_2}{\partial a}$$

19
2

192

Digresión: Benveniste-Scheinkman

Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial v_2(a)}{\partial a} = \frac{\partial U[\widehat{C}_2(a)]}{\partial a} \frac{\partial \widehat{C}_2(a)}{\partial a} + \beta \frac{\partial v_3[\widehat{A}_3(a)]}{\partial a} \left[(1 + r_2) - \frac{\partial \widehat{C}_2(a)}{\partial a} \right]$$

Por simplicidad, quitemos los paréntesis de las funciones:

$$\frac{\partial v_2}{\partial a} = \frac{\partial U}{\partial a} \frac{\partial \widehat{C}_2}{\partial a} + \beta \frac{\partial v_3}{\partial a} \left[(1 + r_2) - \frac{\partial \widehat{C}_2}{\partial a} \right]$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial a} = \frac{\partial U}{\partial a} \frac{\partial \widehat{C}_2}{\partial a} + \beta(1 + r_2) \frac{\partial v_3}{\partial a} - \beta \frac{\partial v_3}{\partial a} \frac{\partial \widehat{C}_2}{\partial a}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta \frac{\partial v_3}{\partial a} \right) \frac{\partial \widehat{C}_2}{\partial a} + \beta(1 + r_2) \frac{\partial v_3}{\partial a}$$

19
3

193

Digresión: Benveniste-Scheinkman

Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial v_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta \frac{\partial v_3}{\partial a} \right) \frac{\partial \widehat{C}_2}{\partial a} + \beta(1 + r_2) \frac{\partial v_3}{\partial a}$$

19
4

194

Digresión: Benveniste-Scheinkman
Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial v_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta \frac{\partial v_3}{\partial a} \right) \frac{\partial \widehat{C}_2}{\partial a} + \beta(1 + r_2) \frac{\partial v_3}{\partial a}$$

Utilizamos la condición de primer orden: $U' = \beta V_3'$ o $\frac{\partial U}{\partial a} = \beta \frac{\partial v_3}{\partial a}$:

19
5

195

Digresión: Benveniste-Scheinkman
Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial v_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta \frac{\partial v_3}{\partial a} \right) \frac{\partial \widehat{C}_2}{\partial a} + \beta(1 + r_2) \frac{\partial v_3}{\partial a}$$

Utilizamos la condición de primer orden: $U' = \beta V_3'$ o $\frac{\partial U}{\partial a} = \beta \frac{\partial v_3}{\partial a}$:

$$\frac{\partial v_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta \frac{\partial v_3}{\partial a} \right) \frac{\partial \widehat{C}_2}{\partial a} + \beta(1 + r_2) \frac{\partial v_3}{\partial a}$$

19
6

196

Digresión: Benveniste-Scheinkman

Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial v_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta \frac{\partial v_3}{\partial a} \right) \frac{\partial \widehat{c}_2}{\partial a} + \beta(1+r_2) \frac{\partial v_3}{\partial a}$$

Utilizamos la condición de primer orden: $U' = \beta V_3'$ o $\frac{\partial U}{\partial a} = \beta \frac{\partial v_3}{\partial a}$:

$$\frac{\partial v_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta \frac{\partial v_3}{\partial a} \right) \frac{\partial \widehat{c}_2}{\partial a} + \beta(1+r_2) \frac{\partial v_3}{\partial a}$$

19
7

197

Digresión: Benveniste-Scheinkman

Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial v_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta \frac{\partial v_3}{\partial a} \right) \frac{\partial \widehat{c}_2}{\partial a} + \beta(1+r_2) \frac{\partial v_3}{\partial a}$$

Utilizamos la condición de primer orden: $U' = \beta V_3'$ o $\frac{\partial U}{\partial a} = \beta \frac{\partial v_3}{\partial a}$:

$$\frac{\partial v_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta \frac{\partial v_3}{\partial a} \right) \frac{\partial \widehat{c}_2}{\partial a} + \beta(1+r_2) \frac{\partial v_3}{\partial a}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \frac{\partial U}{\partial a} \right) \frac{\partial \widehat{c}_2}{\partial a} + (1+r_2) \frac{\partial U}{\partial a}$$

19
8

198

Digresión: Benveniste-Scheinkman
Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial v_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta \frac{\partial v_3}{\partial a} \right) \frac{\partial \widehat{C}_2}{\partial a} + \beta(1+r_2) \frac{\partial v_3}{\partial a}$$

Utilizamos la condición de primer orden: $U' = \beta V_3'$ o $\frac{\partial U}{\partial a} = \beta \frac{\partial v_3}{\partial a}$:

$$\frac{\partial v_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta \frac{\partial v_3}{\partial a} \right) \frac{\partial \widehat{C}_2}{\partial a} + \beta(1+r_2) \frac{\partial v_3}{\partial a}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \frac{\partial U}{\partial a} \right) \frac{\partial \widehat{C}_2}{\partial a} + (1+r_2) \frac{\partial v_3}{\partial a}$$

19
9

199

Digresión: Benveniste-Scheinkman
Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial v_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta \frac{\partial v_3}{\partial a} \right) \frac{\partial \widehat{C}_2}{\partial a} + \beta(1+r_2) \frac{\partial v_3}{\partial a}$$

Utilizamos la condición de primer orden: $U' = \beta V_3'$ o $\frac{\partial U}{\partial a} = \beta \frac{\partial v_3}{\partial a}$:

$$\frac{\partial v_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta \frac{\partial v_3}{\partial a} \right) \frac{\partial \widehat{C}_2}{\partial a} + \beta(1+r_2) \frac{\partial v_3}{\partial a}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \frac{\partial U}{\partial a} \right) \frac{\partial \widehat{C}_2}{\partial a} + (1+r_2) \frac{\partial v_3}{\partial a}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial a} = (1+r_2) \frac{\partial v_3}{\partial a}$$

20
0

200

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta \frac{\partial V_3}{\partial a} \right) \frac{\partial \widehat{C}_2}{\partial a} + \beta(1+r_2) \frac{\partial V_3}{\partial a}$$

Utilizamos la condición de primer orden: $U' = \beta V_3'$ o $\frac{\partial U}{\partial a} = \beta \frac{\partial V_3}{\partial a}$:

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta \frac{\partial V_3}{\partial a} \right) \frac{\partial \widehat{C}_2}{\partial a} + \beta(1+r_2) \frac{\partial V_3}{\partial a}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \frac{\partial U}{\partial a} \right) \frac{\partial \widehat{C}_2}{\partial a} + (1+r_2) \frac{\partial U}{\partial a}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1+r_2) \frac{\partial U}{\partial a} \quad \left. \vphantom{\frac{\partial V_2}{\partial a}} \right\} \text{Aquí se muestra la relación que existe entre la función valor y la función de utilidad}$$

20
1

201

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

Otra forma de ver la relación entre la función valor (o 'utilidad indirecta', en este caso) y la función de utilidad es la siguiente:

$$\text{Despejemos } \frac{\partial U}{\partial a} \text{ de } \frac{\partial V_2}{\partial a} = (1+r_2) \frac{\partial U}{\partial a}$$

20
2

202

Digresión: Benveniste-Scheinkman

Teorema del Envolvente dinámico

Otra forma de ver la relación entre la función valor (o 'utilidad indirecta', en este caso) y la función de utilidad es la siguiente:

Despejemos $\frac{\partial U}{\partial a}$ de $\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1 + r_2) \frac{\partial U}{\partial a}$:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{\partial V_2}{1 + r_2}$$

20
3

203

Digresión: Benveniste-Scheinkman

Teorema del Envolvente dinámico

Otra forma de ver la relación entre la función valor (o 'utilidad indirecta', en este caso) y la función de utilidad es la siguiente:

Despejemos $\frac{\partial U}{\partial a}$ de $\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1 + r_2) \frac{\partial U}{\partial a}$:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{\partial V_2}{1 + r_2}$$

La utilidad marginal es igual al valor presente de la derivada de la función valor (o utilidad marginal 'indirecta') en el mismo momento en el tiempo

20
4

204

Digresión: Benveniste-Scheinkman

Teorema del Envolvente dinámico

Otra forma de ver la relación entre la función valor (o 'utilidad indirecta', en este caso) y la función de utilidad es la siguiente:

Despejemos $\frac{\partial U}{\partial a}$ de $\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1 + r_2) \frac{\partial U}{\partial a}$:



Este resultado va a ser muy útil en el modelo en el que el agente representativo vive de manera infinita

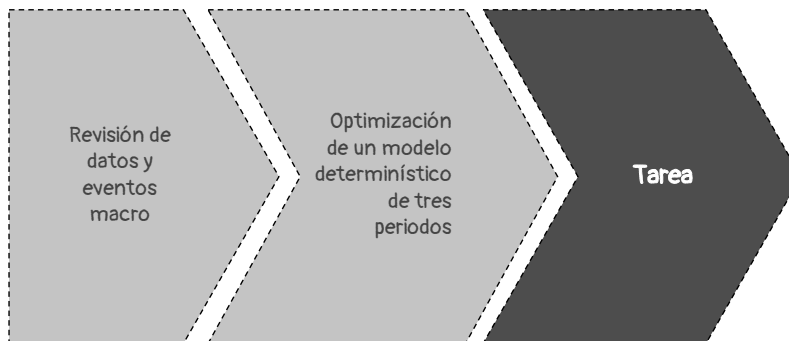
$$\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{\partial V_2}{1 + r_2}$$

La utilidad marginal es igual al valor presente de la derivada de la función valor (o utilidad marginal 'indirecta') en el mismo momento en el tiempo

20
5

205

Nuestra agenda de hoy



20
6

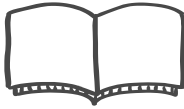
206



(1) Estar atentos y revisar los datos y eventos económicos que se van a publicar en la semana

2 páginas

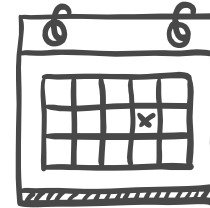
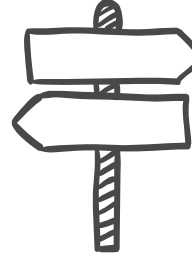
https://www.banorte.com/cms/casadebolsabanorteixe/analisisyestrategia/analisiseconomico/otros/20210524_Calendario.pdf



(2) Leer mi columna en *El Financiero* (martes 11-may) sobre el PIB en 1T21

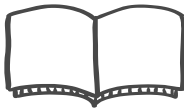
1 página

<https://www.elfinanciero.com.mx/opinion/gabriel-casillas/>



20
7

207



(3) Leer "El largo y sinuoso camino de la inflación pandémica" de Jonathan Heath (jueves 13 de mayo)

2 página

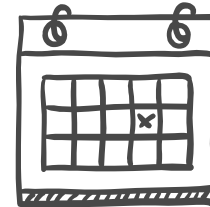
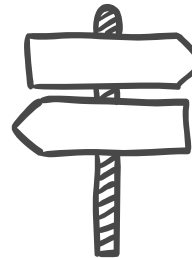
<https://jonathanheath.net/el-largo-y-sinuoso-camino-de-la-inflacion-pandemica/>



(4) Escuchar el episodio 19 del podcast 'Norte Económico' de la 2ª Temporada (mié 26-may) - Entrevista con Gerardo Esquivel (Banco de México)

50 minutos

<https://podcasts.apple.com/mx/podcast/norte-económico/id1515320115>



20
8

208

Muchas
gracias!



20
9

209

Slides Carnival

Free templates for all your presentation needs

For PowerPoint and
Google Slides

100% free for personal
or commercial use

Ready to use,
professional and
customizable

Blow your audience
away with attractive
visuals

210