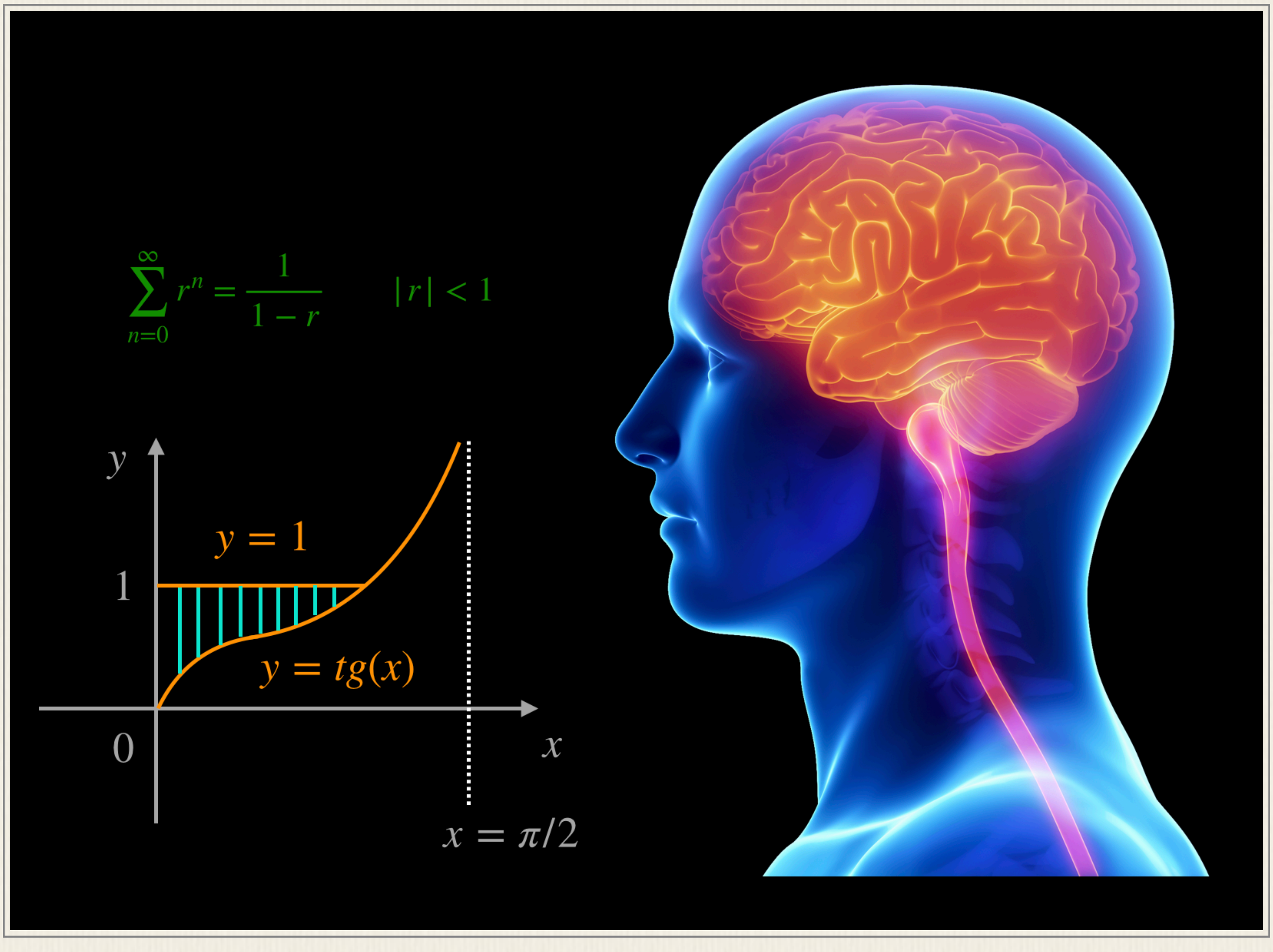
# Análisis Matemático

FACULTAD DE INGENIERÍA DEL EJÉRCITO - UNDEF



# Prefacio

El presente material está destinado a los alumnos de la materia Análisis Matemático I de la Facultad de Ingeniería del Ejército-Universidad de la Defensa Nacional. La asignatura subyacente constituye el primer paso serio en la formación matemática del futuro ingeniero y por eso las autoridades de la Facultad en general y los docentes del Área de Matemática en particular, han puesto manos a la obra en la creación de este software que se encuentra en el límite entre un libro clásico y una moderna app. Esta combinación permite conservar lo positivo de lo primero -rigor, concentración, seriedad- y modernizarlo con gráficos, movimientos y videos que simplemente no serían posibles en tinta y papel.

Este trabajo no hubiera salido a la luz sin el constante apoyo implícito o explícito de varias autoridades de la FIE. El CR Alberto Nadale, el CR David Fiorito y el CR Gustavo Silistria siempre han motivado la creación de este material. Lo mismo vale para el CY Marcos Mansilla y para el GB

Aníbal Intini quien, cuando director de nuestra institución, ha expresado que “los videos marcan y lideran la forma en que los alumnos preparan sus exámenes”. También quisiéramos agradecer al GB Edgardo Serafín, al CY Héctor Anfuso, al TC Andrés Revetria y al TC Marcelo Acuña.

Con la firme esperanza de que sea de utilidad para nuestros alumnos, lo ponemos ya mismo a su disposición junto con la página www.analisis1.com cuyo dominio se explica a sí mismo.


*Martín Maulhardt.*

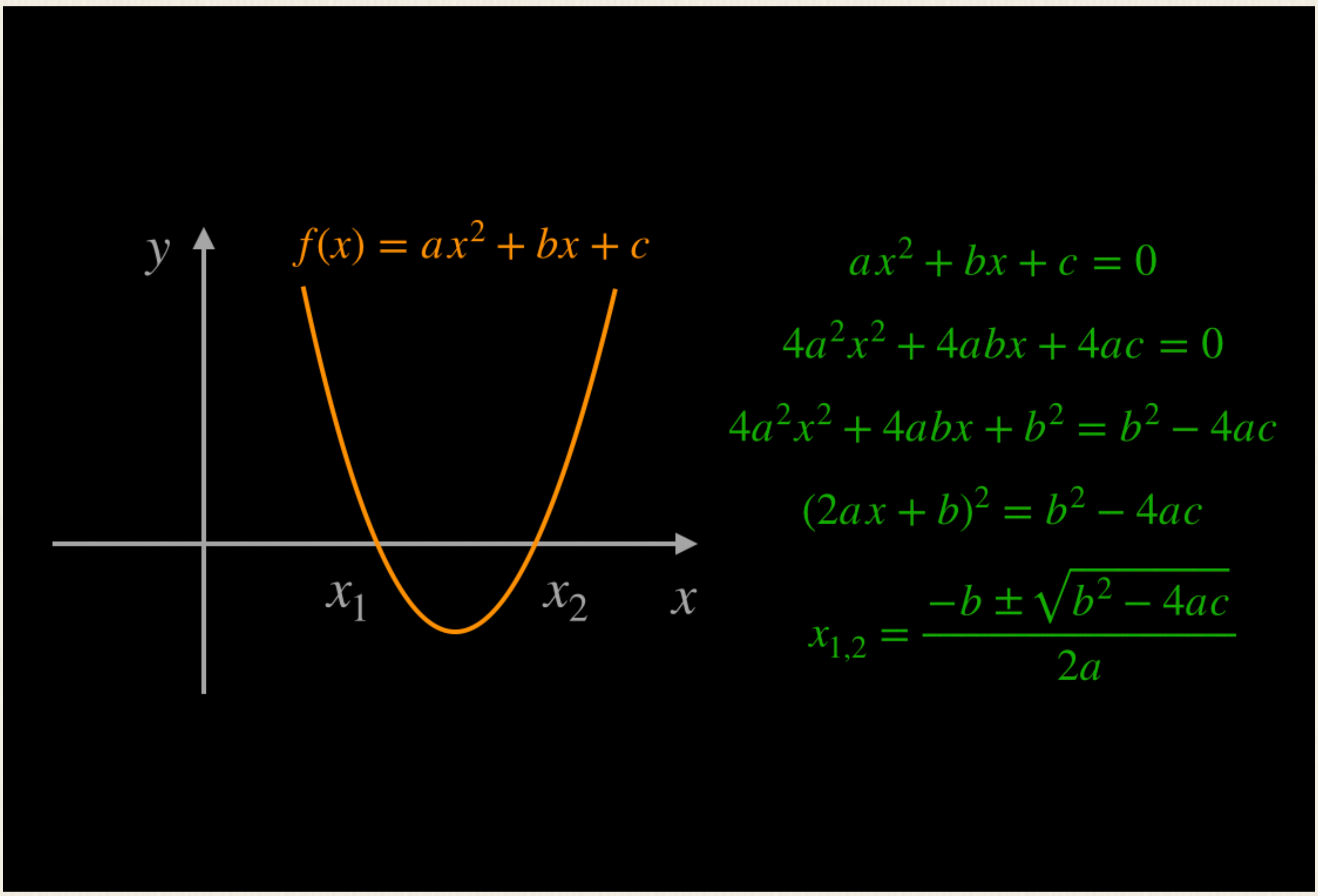
*Facultad de Ingeniería del Ejército.*

*Universidad de la Defensa Nacional.*


*Buenos Aires, 16 de Febrero de 2024.*

CAPÍTULO 1

# Funciones




La función es el elemento capital del análisis matemático. En este primer capítulo estudiaremos la teoría necesaria de funciones para desarrollar el análisis matemático y al mismo tiempo nos familiarizaremos con los tipos más importantes de funciones no solo para nuestra materia sino para gran parte de nuestra carrera.

***Definición (informal).***

Sea $D \subset R$. Una función real en $D$ es una regla que a cada elemento $x \in D$ le hace corresponder un único elemento $y \in R$. Tal elemento $y \in R$ lo denotaremos $f(x)$ y escribiremos $y = f(x)$.

***Nota.***

El conjunto $D \subset R$ de la definición anterior se llama el dominio de la función $f$ y se lo denota $D(f)$. El conjunto

$$Im(f) = \{y \in R \ / \ \exists x \in D : y = f(x)\}$$

se llama imagen de $f$.

Pasemos ahora a estudiar muchos ejemplos de funciones que nos interesarán en el curso y estudiemos también otras cuestiones relacionadas.

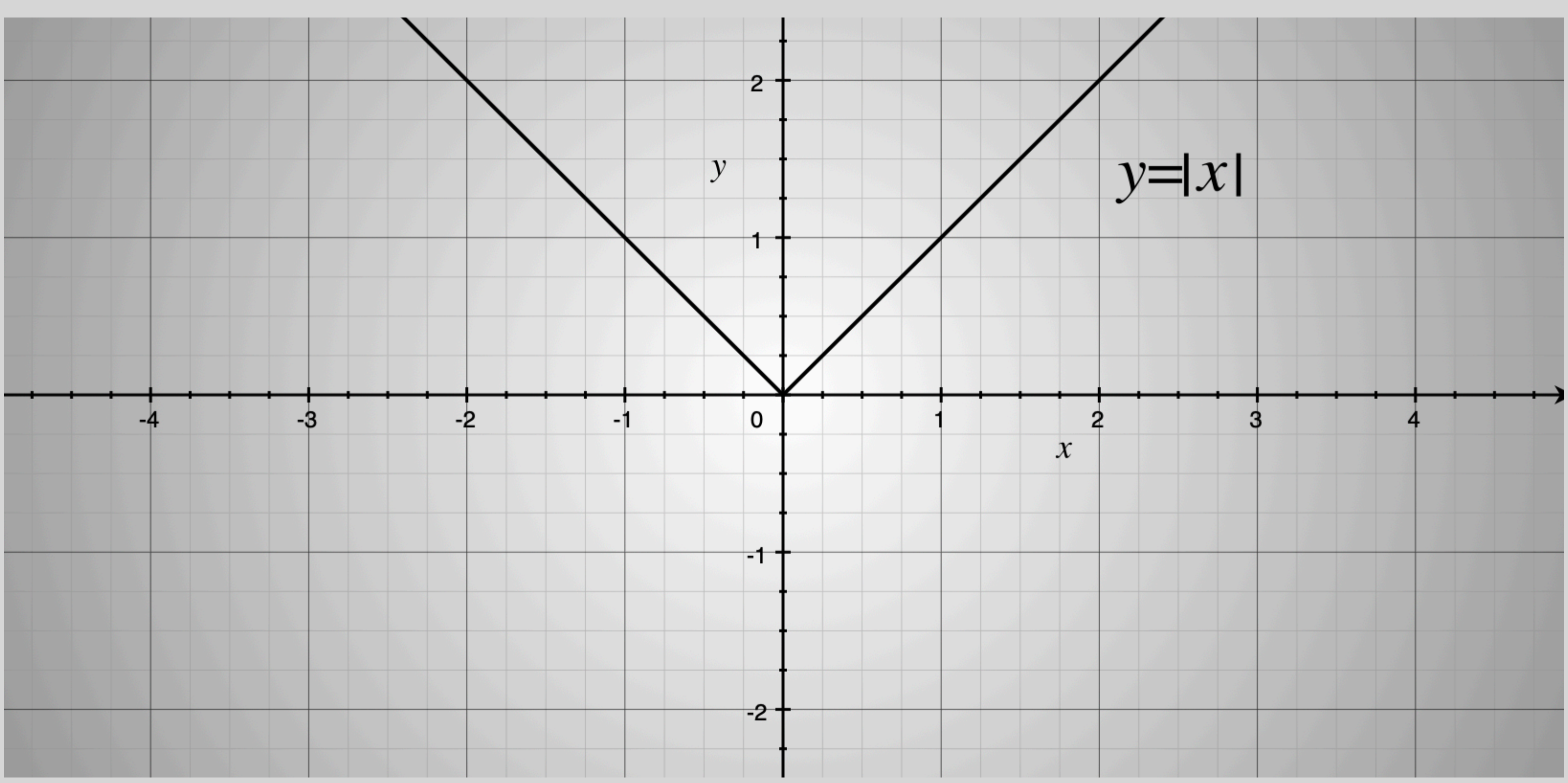
# Función módulo

***Definición.***

Se llama función módulo de $x$, denotada $f(x) = |x|$ a la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}.$$

**Imagen 1**. Gráfica de la función módulo.



El dominio de la función módulo $f(x) = |x|$ es evidentemente $D(f) = R$ y la imagen de dicha función es el conjunto $R_0^+$.

Es importante observar que, puesto que el valor de módulo de $x$ depende del signo de $x$, debemos en cada problema que involucre al módulo separar en dos casos. Un ejemplo de esta situación lo tenemos en el siguiente video on-line que ilustra un ejemplo de solución de desigualdades.

**Ver video**

Terminamos esta sección con una demostración de la importante desigualdad triangular, demostración que nos muestra la potencia de la idea de dividir en casos para atacar a cada uno de ellos por separado.

***Teorema. (Desigualdad triangular.)***

Para todo par de números reales $x, y$ se verifica

$$|x+y| \leq |x|+|y|.$$

***Demostración.***

Si $x \geq 0 \quad \wedge \quad y \geq 0$ entonces $x+y \geq 0$. Luego en este caso

$$|x+y| = x+y = |x|+|y|.$$

Si $x \leq 0 \quad \wedge \quad y \leq 0$ entonces $x+y \leq 0$. Luego en este caso

$$|x+y| = -(x+y) = -x-y = |x|+|y|.$$

Supongamos ahora que $x \geq 0 \quad \wedge \quad y \leq 0.$

Aquí debemos analizar el signo de $x+y$. Si $x+y \geq 0$ entonces $|x+y| = x+y$. Además como $y \leq 0$ tenemos que $y \leq -y$. Luego, en este caso

$$|x + y| = x + y \leq x - y = |x| + |y|.$$

En cambio si $x + y \leq 0$ entonces $|x + y| = -(x + y)$. Luego

$$|x + y| = -(x + y) = -x - y \leq x - y = |x| + |y|.$$

El último caso de signos, a saber: $x \leq 0 \quad \wedge \quad y \geq 0$, es igual al anterior cambiando los nombres de las variables.

$\square$

Antes de pasar a la siguiente sección te recomendamos que veas este otro video sobre resolución de desigualdades con módulo.

**Ver video**

En la siguiente sección estudiaremos los conceptos de función inyectiva y sobreyectiva dando clarísimos ejemplos geométricos.

# Función cuadrática

***Definición.***

Sean $a, b, c \in R$ con $a \neq 0$. Se llama función cuadrática a la función definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Dependiendo del signo de $a$ la gráfica será de uno de los tipos que mostramos en la galería de la página siguiente.

La función cuadrática nos permite ilustrar con claridad el concepto de inyectividad por oposición al mismo. Veamos en concreto cuál es su definición.

***Definición.***

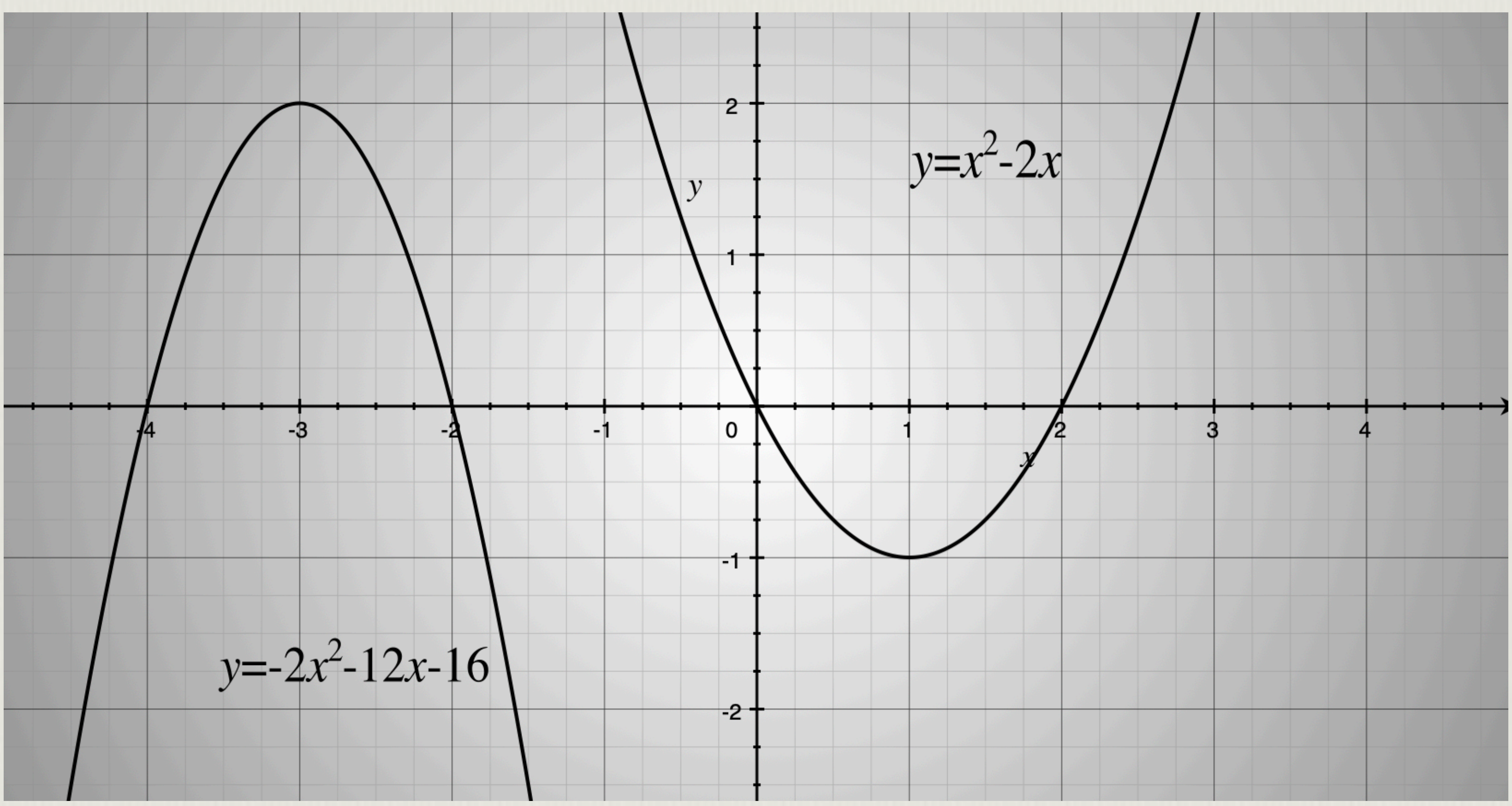
Sea $f : D \subset R \to R$ una función. Se dice que $f$ es inyectiva si para todo par de valores $a, b \in D$ se tiene que

$$f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b$$

o lo que es lo mismo (por definición de contrarrecíproco)

$$a \neq b \Longrightarrow f(a) \neq f(b).$$

**Imagen.** Ejemplo de gráfica de funciones cuadráticas.



Tomemos por ejemplo la función cuadrática $y = x^2 + 1$. ¿Es esta función inyectiva? No, pues tomando en la definición anterior $a = 2, b = -2$ vemos que

$$f(2) = f(-2) = 5$$

y $2 \neq -2$. Luego esta función no es inyectiva.

Las funciones cuadráticas también son útiles para explicar el concepto de sobreyectividad nuevamente por oposición al mismo.

***Definición.***

Sea $f : D \subset R \to R$. Se dice que $f$ es sobreyectiva si

$$\forall y \in R : \exists x \in D \ / \ y = f(x).$$

Nuevamente tomemos la función cuadrática $y = x^2 + 1$. ¿Es esta función sobreyectiva? No, pues tomando $y = 0$

$$\nexists x \in R : 0 = x^2 + 1.$$

La idea anterior nos lleva a definir otro importante concepto.

***Definición.***

Sean $f : D \subset R \to R$, $y_0 \in R$. Se llama preimagen de $y_0$, denotado $f^{-1}(y_0)$, al conjunto

$$f^{-1}(y_0) = \{x \in D : f(x) = y_0\}.$$

Por ejemplo, si $f(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ e $y_0 = 0$ entonces

$$f^{-1}(0) = \left\{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\}$$

es decir, las preimágenes de $0$ son las raíces de la ecuación cuadrática supuestas éstas reales. Si no son reales entonces $f^{-1}(0) = \emptyset$.

# Función homográfica

***Definición.***

Sean $a, b, c, d \in R$. Se llama función homográfica a una función de la forma

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

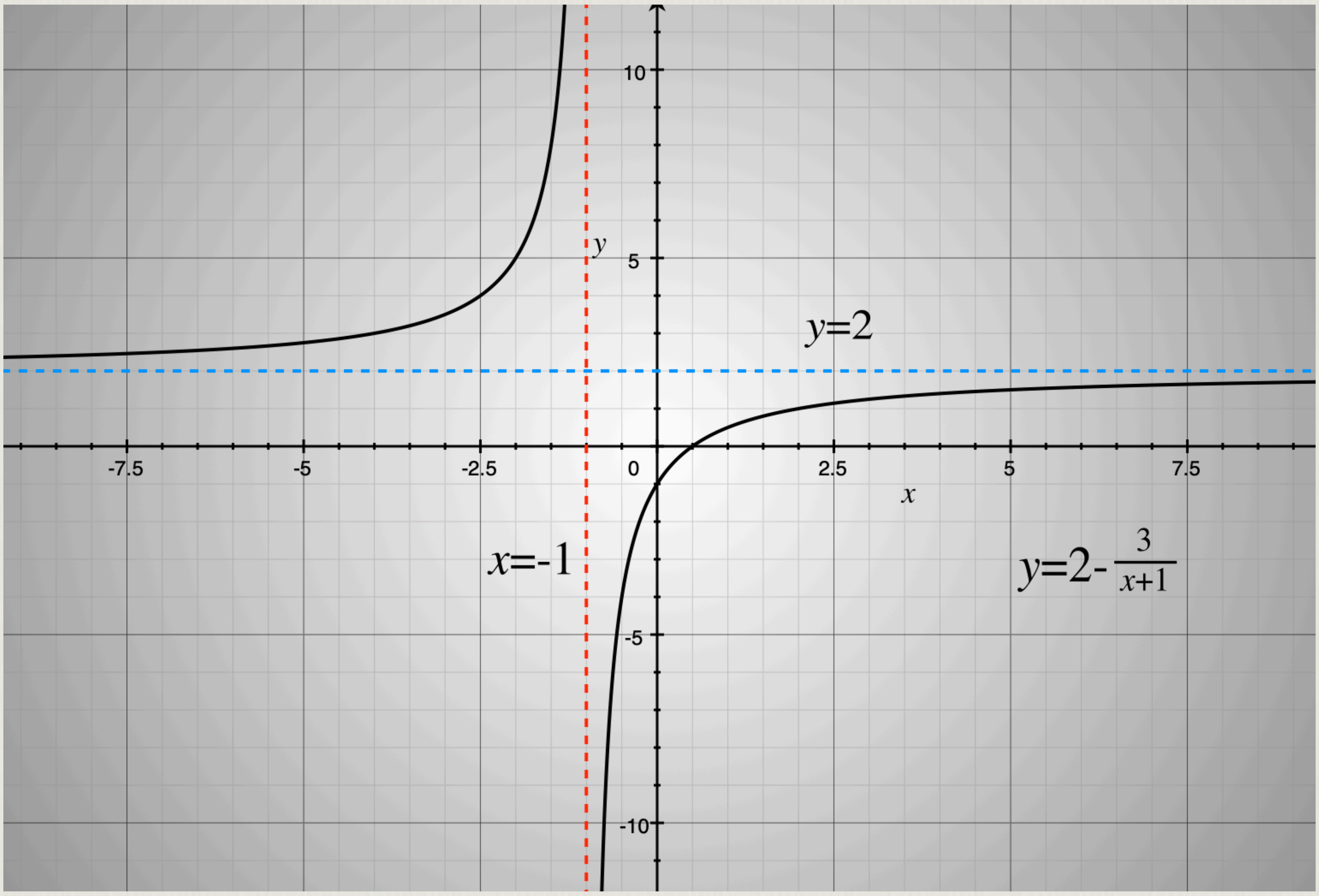
donde supondremos que $ad - bc \neq 0$.

Por ejemplo, la función $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$ es homográfica. Es evidente que nuestra función también puede escribirse así:

$$f(x) = 2 + \frac{-3}{x + 1}$$

lo cual es útil para realizar su gráfico, el cual vemos en la siguiente imagen.

**Imagen.** Función homográfica.




Gráfica de la función con su asíntota vertical en colorado y su asíntota horizontal en azul.

Las funciones homográficas tienen con alguna pequeña restricción de dominio y codominio la propiedad de ser biyectivas.

***Definición.***

Sea $f : D \subset R \to R$. Se dice que la función $f$ es biyectiva si es simultáneamente inyectiva y sobreyectiva.

Probemos que la función

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$$

es inyectiva. Comencemos por calcular el dominio de $f$. Es evidente que

$$D(f) = R - \{-1\}.$$

Ahora bien, recordemos que $f$ es inyectiva si para todo par de valores $a, b \in D$ tenemos

$$f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b.$$

Puesto que otra forma de escribir $f$ es

$$f(x) = 2 + \frac{-3}{x+1}$$

tenemos que si $f(a) = f(b)$, es decir:

$$2 + \frac{-3}{a+1} = 2 + \frac{-3}{b+1}$$

entonces

$$\frac{-3}{a+1} = \frac{-3}{b+1} \Longrightarrow a+1 = b+1 \Longrightarrow a = b.$$

Por lo tanto la función $f$ es inyectiva. Analicemos ahora la sobreyectividad. Si $y \neq 2$ deducimos que existe un valor de $x \in D$ satisface que $f(x) = y$. En efecto, si

$$y = 2 + \frac{-3}{x+1}$$

entonces

$$\frac{y-2}{-3} = \frac{1}{x+1}$$

luego

$$-1 + \frac{-3}{y-2} = x.$$

Esto muestra que si consideramos a nuestra función con el dominio y codominio que definimos a continuación:

$$f : R - \{-1\} \to R - \{2\}$$

entonces la función es biyectiva. Tal tipo de funciones permiten definir una importante función asociada llamada función inversa de $f$.

***Definición.***

Sea $f : D \to D'$ una función biyectiva. La función $g : D' \to D$ definida por

$$g(x) = y \iff f(y) = x$$

se llama función inversa de $f$ y se denota $f^{-1}(x)$.

En el ejemplo anterior, si

$$f(x) = 2 + \frac{-3}{x+1}$$

entonces, similarmente a lo que hemos hecho para analizar la sobreyectividad de $f$, tenemos que

$$f^{-1}(x) = -1 + \frac{-3}{x-2}.$$

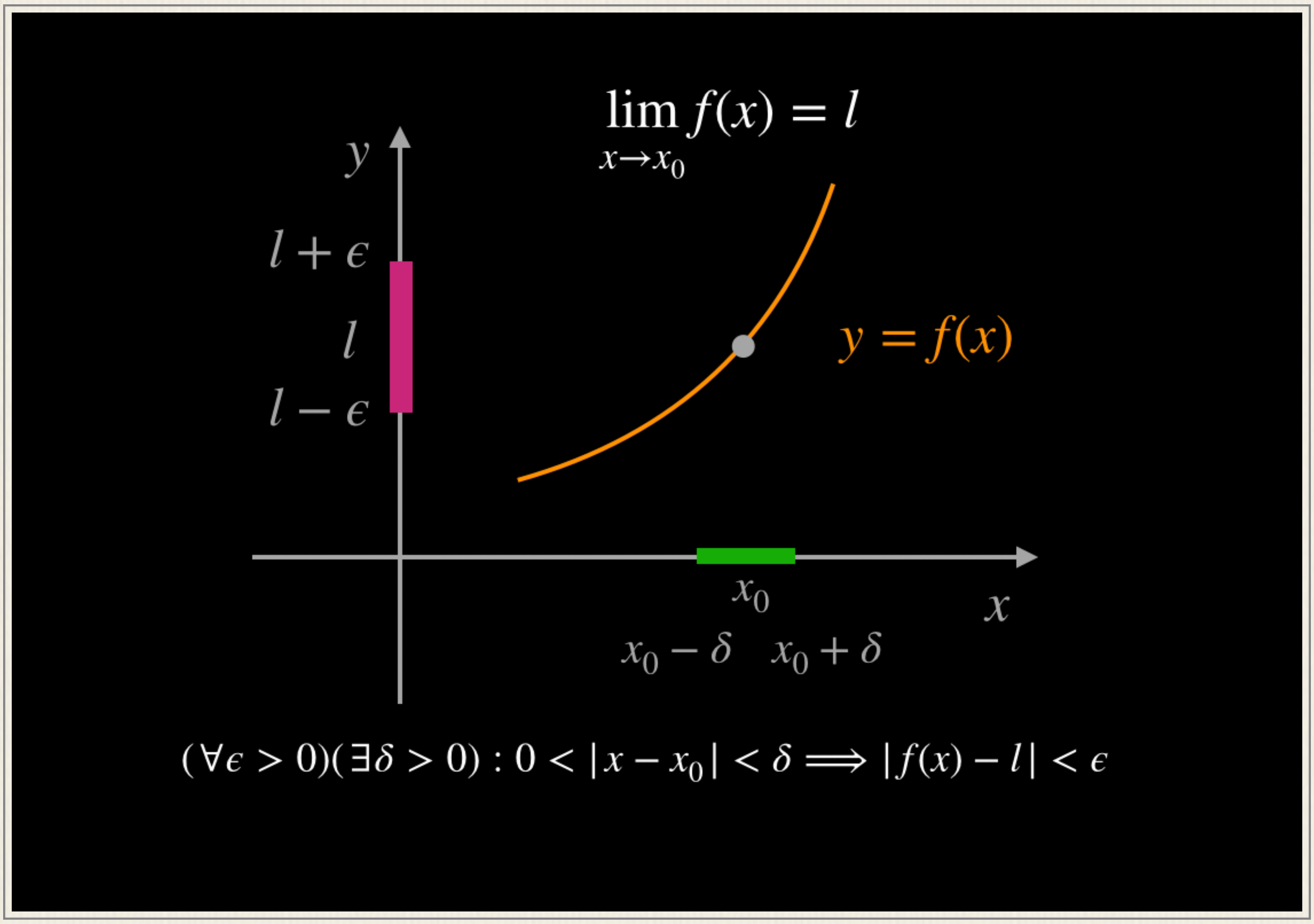
En el siguiente link tenemos un completo video en el cual repasamos los conceptos de inyectividad, sobreyectividad, biyectividad, función inversa y gráfico de una función.

**Ver video**

# Apuntes.

CAPÍTULO 2

# Límites




Con este segundo capítulo comenzamos formalmente el Análisis Matemático. Estudiaremos el concepto de límite, una de las conquistas más grandes del cerebro humano. En este concepto se basan otros que estudiaremos por lo cual es importante tener un buen manejo de él.

***Nota.*** En todos nuestros casos supondremos que el punto $x_0$ de cualquier ejercicio, definición o teorema sobre límites es un punto de acumulación del dominio de la función. Si bien no es una definición formal, que el punto $x_0$ sea de acumulación de un dominio $D$ significa que hay puntos de $D$ tan próximos a $x_0$ como se quiera, pero no iguales a $x_0$.

***Definición.***

Sea $f : D \subset R \to R$ una función. Sea $x_0 \in R$. Se dice que el límite cuando $x$ tiende a $x_0$ de $f$ es el número real $l$, denotado esto

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0) : 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

Informalmente esta definición significa que los valores de $f$ se aproximan tanto como se quiera a $l$ si $x$ se aproxima suficientemente a $x_0$ pero sin ser igual a $x_0$.

Tomemos por ejemplo la función $f(x) = 3x$ y la abscisa $x_0 = 5$. Veamos que

$$\lim_{x \to 5} 3x = 15.$$

Si queremos que los valores de $3x$ disten de $15$ en menos de $\epsilon = \frac{1}{10}$ debe verificarse que

$$|3x - 15| < \frac{1}{10}$$

es decir

$$-\frac{1}{10} < 3x - 15 < \frac{1}{10},$$

o sacando factor común

$$-\frac{1}{10} < 3(x-5) < \frac{1}{10}$$

y dividiendo por $3$

$$-\frac{1}{30} < x-5 < \frac{1}{30}$$

que es lo mismo que

$$|x-5| < \frac{1}{30} = \delta.$$

Si hubiéramos elegido en lugar de $\epsilon = \frac{1}{10}$ el valor $\epsilon = \frac{1}{100}$ hubiéramos concluido que $|x-5| < \frac{1}{300}$ y en general para cualquier valor $\epsilon > 0$ concluiremos que $|x-5| < \frac{\epsilon}{3} = \delta.$

¡Esta fue nuestra primera demostración de límites!

El siguiente teorema nos asegura que el límite, si existe, es único. (Recuérdese la nota sobre puntos de acumulación de la página 22.)

***Teorema.***

Sea $f: D \subset R \to R$ una función y sea $x_0 \in R$. Si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = l'$$

entonces $l = l'$.

Pasemos ahora al concepto de álgebra de límites. Informalmente los límites, siempre que éstos existan y sean finitos, pueden ser tratados como números y el enunciado formal de esta frase es el siguiente teorema.

***Teorema.***

Sean $f: D \subset R \to R$, $g: D' \subset R \to R$. Sea $x_0 \in R$. Si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = l'$$

entonces

$$\lim_{x \to x_0} \left( f(x) + g(x) \right) = l + l'$$

$$\lim_{x \to x_0} \left( f(x)\ g(x) \right) = l\ l'$$

Si además $l' \neq 0$ entonces

$$\lim_{x \to x_0} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{l}{l'}.$$

Pasemos ahora a un teorema importante para demostrar un límite interesante tanto a nivel teórico como práctico.

***Teorema.***

Sean $f, g, h : R - \{x_0\} \subset R \to R$ tres funciones tales que

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \qquad \forall x \in R - \{x_0\}.$$

Si

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to x_0} h(x) = l$$

entonces

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

Utilicemos este teorema para demostrar uno de los límites más importantes de nuestro curso, a saber:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Consideremos la primera figura de la siguiente galería. Observamos que el segmento fucsia mide $\sin(\theta)$ puesto que la hipotenusa del triángulo dibujado mide $1$. Al pasar a la siguiente figura 2 observamos un dibujo del cual quedándonos con distintas partes del mismo tendremos los dibujos coloreados en las figuras 2, 3 y 4.

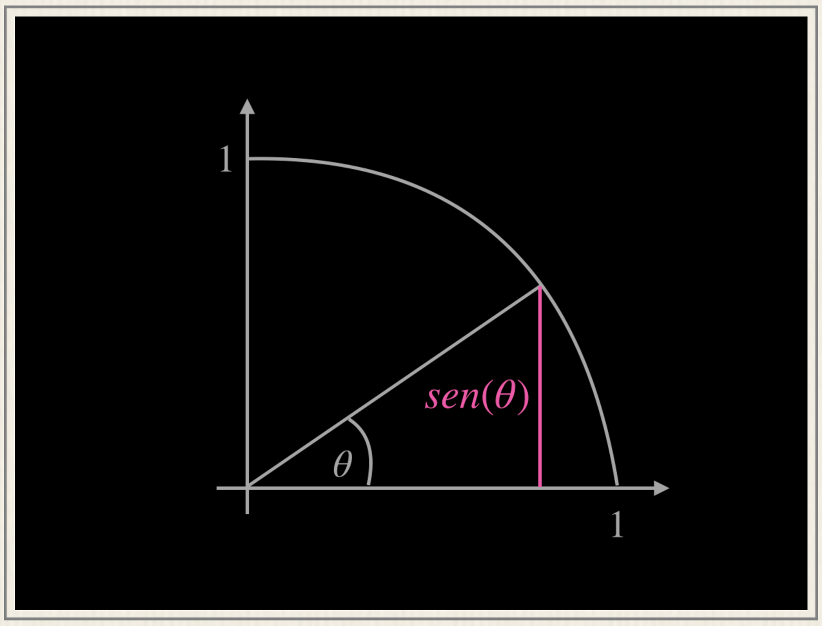



Figura 1

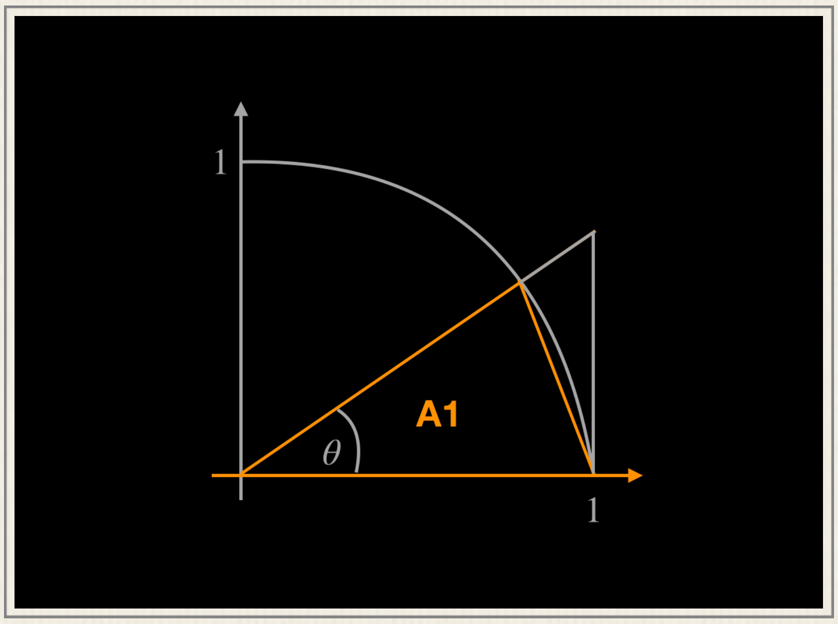



Figura 2

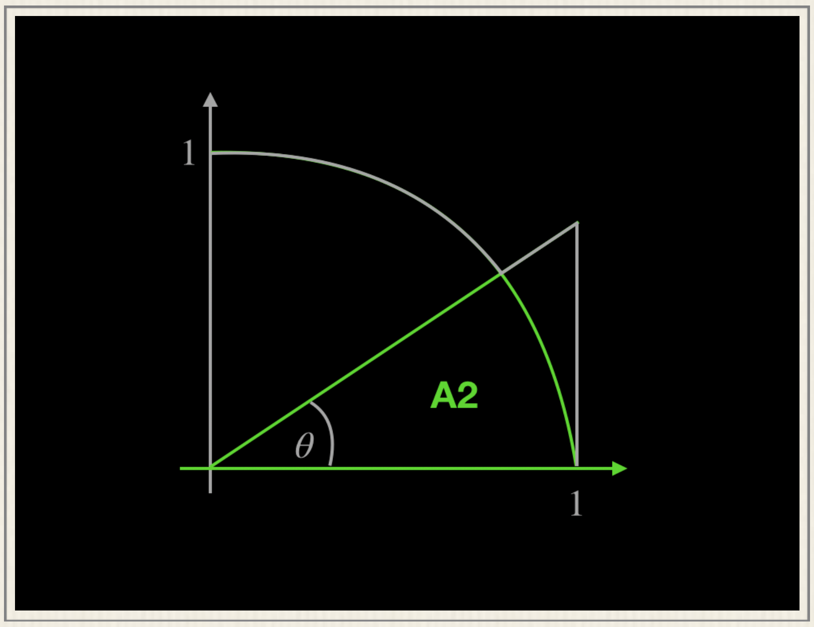



Figura 3

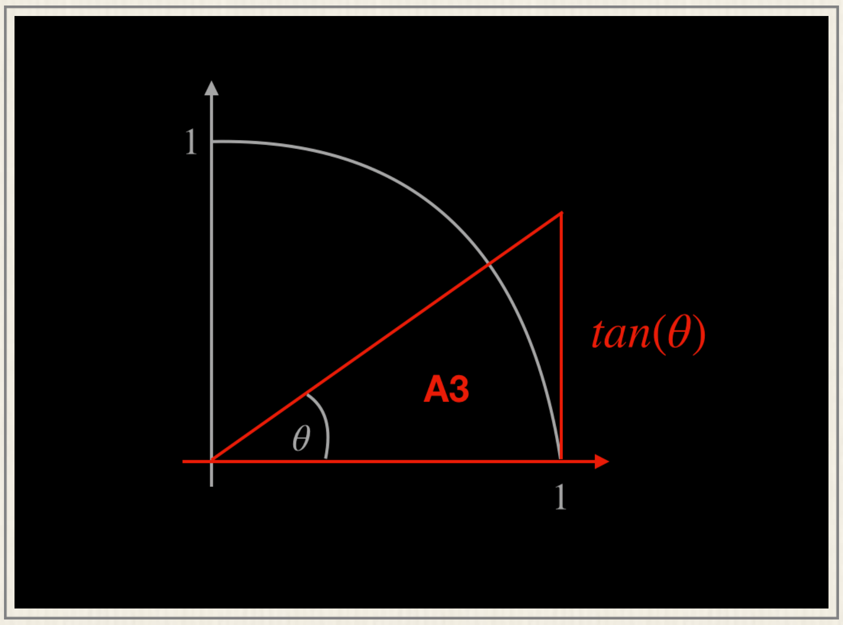



Figura 4

En el triángulo de la figura 2 la altura del mismo es igual a $\sin(\theta)$ como hemos visto en la figura 1. Luego, el área del triángulo anaranjado es

$$A_1 = \frac{\sin(\theta)}{2}.$$

En la figura 3, el área del sector circular es

$$A_2 = \pi\ 1^2\ \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\theta}{2}.$$

Y finalmente, el área del triángulo de la figura 4 es, recordando la definición de tangente, igual a

$$A_3 = \frac{\tan(\theta)}{2}.$$

Es evidente, de la geometría analizada que tenemos

$$A_1 \leq A_2 \leq A_3,$$

es decir

$$\frac{\sin(\theta)}{2} \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\tan(\theta)}{2}.$$

Multiplicando por $\dfrac{2}{\sin(\theta)}$ tenemos, para $0 < \theta \leq \pi/2$, que

$$1 \leq \frac{\theta}{\sin(\theta)} \leq \frac{1}{\cos(\theta)}$$

e invirtiendo estas desigualdades tenemos

$$\cos(\theta) \leq \frac{\sin(\theta)}{\theta} \leq 1.$$

Aplicando ahora el teorema anterior, es decir, tomando límite a estas desigualdades y observando que el primer y tercer miembro tienden a $1$ si $\theta \to 0$ concluimos que el del medio también tiende a $1$, es decir:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

En el análisis y gráfico anteriores hemos supuesto que $x > 0$. El mismo trabajo puede realizarse con $x < 0$ completando la demostración.

Un trabajo similar se realiza para valores de $\theta < 0$.

$\square$

En el siguiente link tenemos un video que ilustra cómo aplicar el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

al cálculo de otros límites cuya dificultad sería grande si no conociéramos este importante resultado.

**Ver video**

Finalizamos esta sección con un resultado conocido coloquialmente con la frase “cero por acotado”.

***Definición.***

Se dice que una función $f : D \subset R \to R$ está acotada si existe un $M > 0$ tal que

$$\forall x \in D : |f(x)| \leq M.$$

Por ejemplo la función $f(x) = sen(x)$ está acotada, pues tomando $M = 1$ tenemos que

$$\forall x \in R : |\sin(x)| \leq 1.$$

La función $g(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ también está acotada por $1$.

La importancia de las funciones acotadas para el cálculo de límites se explica en el siguiente teorema.

***Teorema.***

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ y $g : R \to R$ está acotada, esto es,

$$\exists M > 0 : |g(x)| < M$$

para todo $x \in R$ entonces

$$\lim_{x \to x_0} \Big( f(x)g(x) \Big) = 0.$$

***Demostración.***

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ entonces

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0) : 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - 0| < \epsilon. \quad (1)$$

Como además $g$ está acotada

$$\exists M > 0 : |g(x)| < M. \quad (2)$$

Luego, observando (1) y (2) obtenemos que

$$|f(x)\ g(x)| < M\epsilon$$

si $|x - x_0| < \delta$.

Por lo tanto,

$$\lim_{x \to x_0} \Big(f(x)g(x)\Big) = 0.$$

$\square$

Como un ejemplo de aplicación de este importante teorema estudiemos el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} x\ \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Observemos que la función $f(x) = x$ tiende a cero si $x \to 0$ y que la función $g : R - \{0\} \to R$ definida por

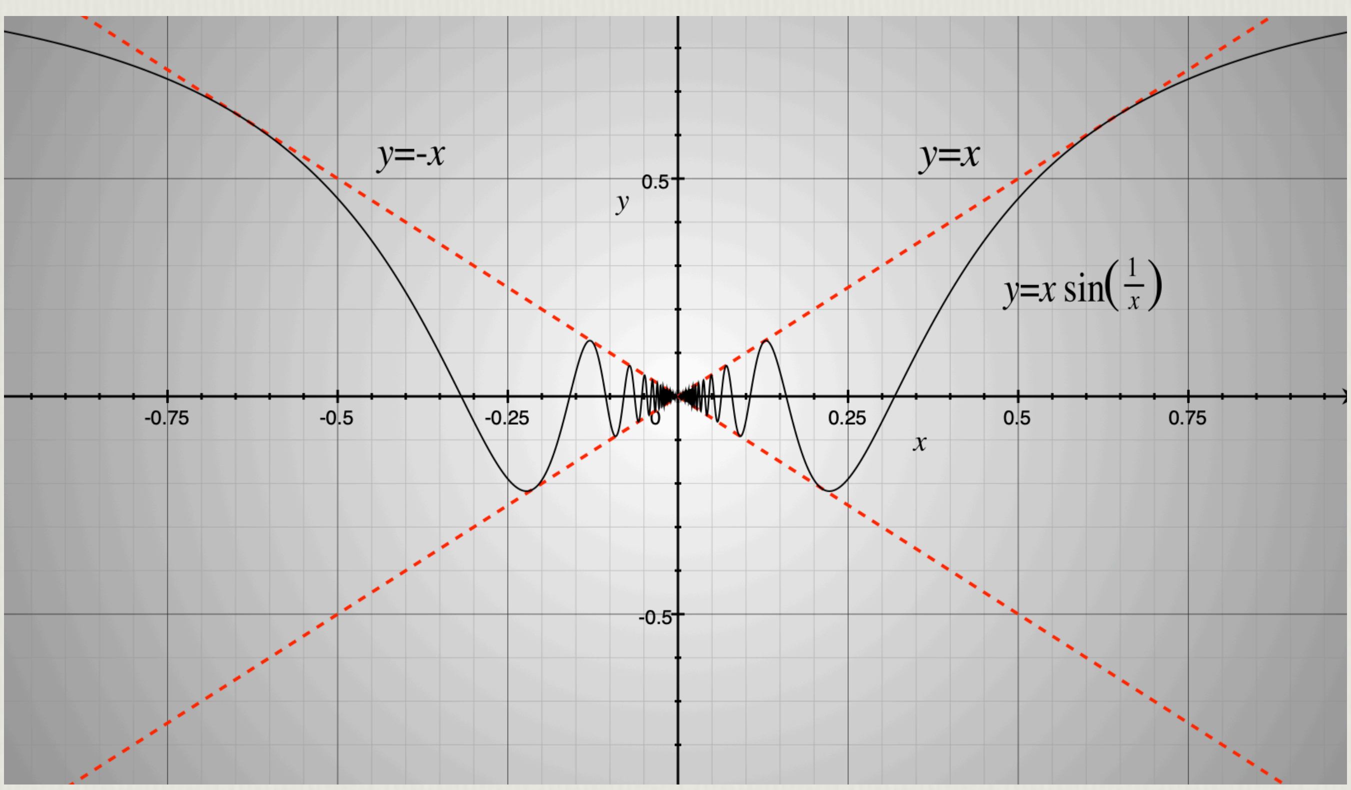
$g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ está acotada por $1$, es decir, $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$.

Luego, utilizando el teorema anterior vemos que

$$\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

En la siguiente imagen podemos ver que este realmente es el caso a pesar del comportamiento errático de esta función cerca de $0$.

**Imagen.** Gráfica de la función $y = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.



# El número e

El número $e$ es el límite más importante de la matemática superior. Si bien todavía no hemos definido el concepto de límite de una sucesión no tendremos dificultades en entender este concepto intuitivamente.

***Definición.***

Sea $f : R \to R$ una función. Se dice que el límite cuando $x$ tiende a infinito de $f$ es igual al número real $l$, denotado este hecho

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists K > 0) : x > K \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

Por ejemplo, veamos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Supongamos que queremos que

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \frac{1}{100},$$

es decir

$$\left|\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{100}.$$

Como $x > 0$ tenemos que

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{100} \Longleftrightarrow x > 100.$$

Luego, tomando $K = 100$ tenemos en la definición anterior que si $x > K$ entonces

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \frac{1}{100}.$$

Analicemos ahora el siguiente límite de variable natural. Consideremos

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

¿Existirá este límite? ¿Será finito? ¿Cuanto vale "exactamente"? Por un lado es evidente que al tender $n$ a infinito el paréntesis tiende a $1$. Parecería entonces que estamos en presencia de una cuenta del tipo $1$ a la "algo". Pero ese "algo" no es un número finito. Luego no podemos asegurar que el valor de nuestro límite sea $1$.

***Teorema.***

El valor del límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

que existe, es mayor que $2$ y menor que $3$.

| n | (1+1/n)^n |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 2,25 |
| 3 | 2,37037037037037 |
| 4 | 2,44140625 |
| 5 | 2,48832 |
| 6 | 2,52162637174211 |
| 7 | 2,54649969704071 |
| 8 | 2,56578451395035 |
| 9 | 2,5811747917132 |
| 10 | 2,5937424601 |
| 11 | 2,60419901189753 |
| 12 | 2,61303529022468 |
| 13 | 2,62060088788573 |
| 14 | 2,62715155630087 |
| 15 | 2,63287871772792 |
| 16 | 2,6379284973666 |
| 17 | 2,64241437518311 |
| 18 | 2,64642582109769 |
| 19 | 2,65003432664044 |
| 20 | 2,65329770514442 |
| 100 | 2,70481382942153 |
| 101 | 2,70494597748516 |
| 102 | 2,7050755574635 |
| 103 | 2,70520264349636 |
| 104 | 2,7053273068968 |
| 105 | 2,70544961628473 |
| 106 | 2,7055696377128 |
| 107 | 2,70568743478516 |
| 108 | 2,7058030687704 |
| 109 | 2,70591659870704 |
| 10000 | 2,71814592682493 |
| 10001 | 2,71814594041324 |
| 10002 | 2,71814595399582 |
| 10003 | 2,71814596757692 |
| 10004 | 2,71814598116075 |
| 10005 | 2,71814599473342 |

Para probar este teorema se siguen varios pasos, los cuales haremos explícitos ayudándonos de los valores de la tabla.

Paso 1. Se prueba que la sucesión de valores es creciente. Esto lo vemos en la segunda columna de la tabla.

Paso 2. Se prueba que la sucesión de valores está acotada superiormente por 3. Esto lo ilustramos en los últimos valores de la tabla.

Luego, como la sucesión de valores es creciente y acotada la sucesión debe tener un límite mayor a $2$ y menor a $3$.

$\square$

Habiendo “probado” el teorema anterior podemos definir el siguiente límite de variable continua.

***Definición.***

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

En el siguiente link tenemos un video que nos ilustra cómo calcular ciertos límites que dependen del número $e$.

**Ver video**

# Límites laterales

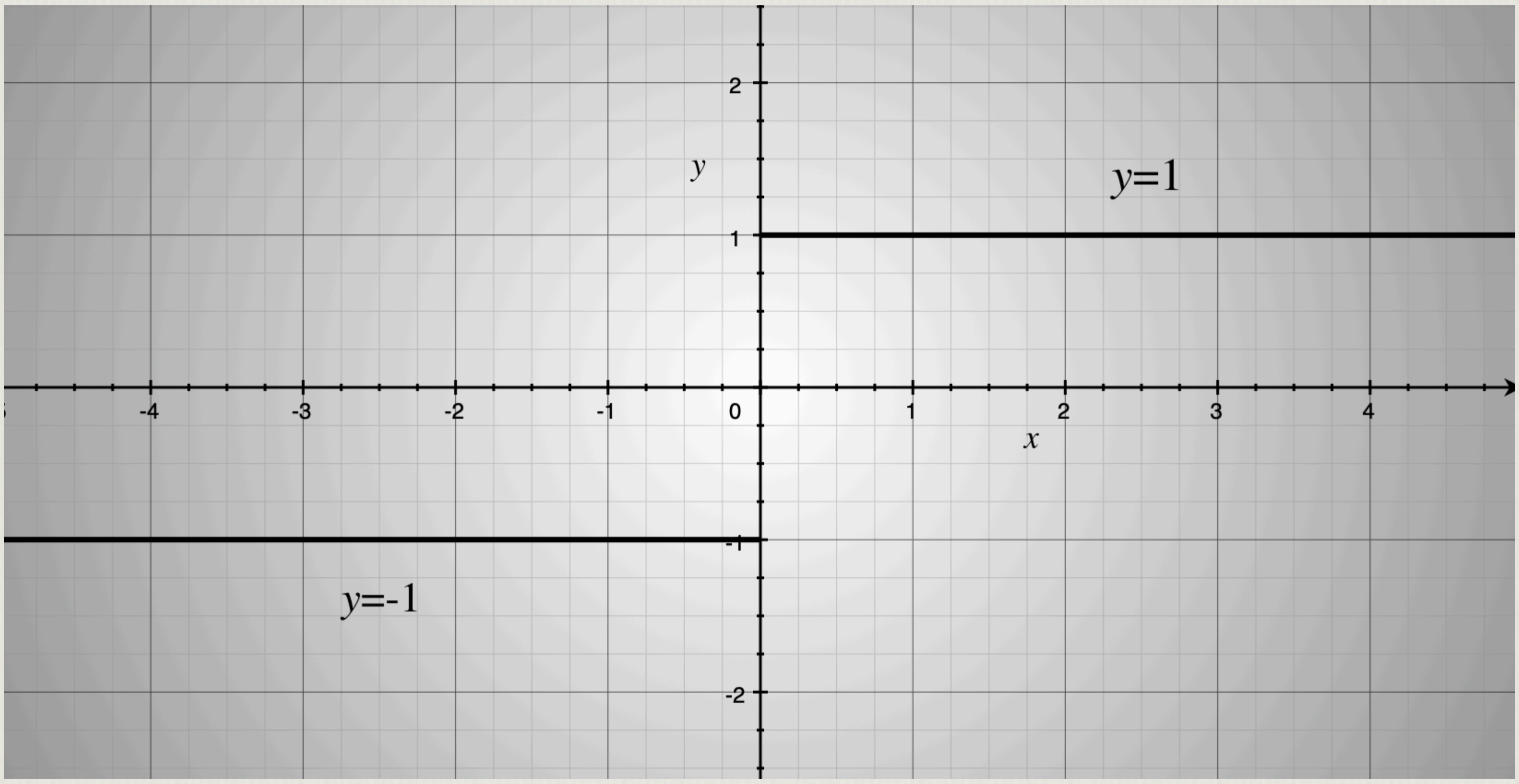
En algunas situaciones puede ser interesante analizar el comportamiento de una función para valores mayores a cierto $x_0$. Por ejemplo, en la función $f(x) = \sqrt{x}$ nos interesan solo los valores que satisfagan la condición $x \geq 0$. Lo mismo ocurre con la función signo definida así:

$$sg(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \geq 0 \\ -1 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

cuyo gráfico es el de la figura de la siguiente página.

Si nos acercamos a $x_0 = 0$ por la derecha vemos que los valores de la función se acercan a $1$ mientras que si lo hacemos por la izquierda la hacen a $-1$. Este y otros ejemplos importantes nos llevan a definir rigurosamente este concepto.

**Imagen.** Gráfico de la función signo.




***Definición.***

Sea $f : D \subset R \rightarrow R$. Decimos que "el límite cuando $x$ tiende a $x_0$ por la derecha es el número real $l$", denotado

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0) : 0 < x - x_0 < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

Similarmente por la izquierda, definimos que

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l'$$

si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0) : 0 < x_0 - x < \delta \Longrightarrow |f(x) - l'| < \epsilon.$$

Calculemos por ejemplo los límites laterales en $x_0 = 0$ de la función $f(x) = \dfrac{3x - sen(2x)}{\sqrt{1 - cos(x)}}$.

Por derecha tenemos que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{3x - sen(2x)}{\sqrt{1 - cos(x)}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{3x - sen(2x)}{\sqrt{1 - cos(x)}} \cdot \frac{\sqrt{1 + cos(x)}}{\sqrt{1 + cos(x)}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{(3x - sen(2x))\sqrt{1 + cos(x)}}{\sqrt{sen^2(x)}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(3x - sen(2x))\sqrt{1 + cos(x)}}{|sen(x)|}$$

Ahora bien, como $x > 0$ tenemos que cerca de $0$

$$sen(x) > 0$$

y entonces

$$|sen(x)| = sen(x). \tag{1}$$

Luego, nuestro límite toma la forma

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(3x - sen(2x))\sqrt{1 + cos(x)}}{sen(x)}.$$

Recordando que $sen(2x) = 2\ sen(x)\ cos(x)$ tenemos que nuestro límite es igual a

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3x - 2\ sen(x)\ cos(x)}{sen(x)}\sqrt{1 + cos(x)}\right) =$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3x}{sen(x)} - \frac{2\ sen(x)\ cos(x)}{sen(x)}\right)\sqrt{1 + cos(x)} = (3 - 2)\sqrt{2}.$$

Es decir

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3x - sen(2x)}{\sqrt{1 - cos(x)}} = \sqrt{2}.$$

Por la izquierda tenemos en (1) que

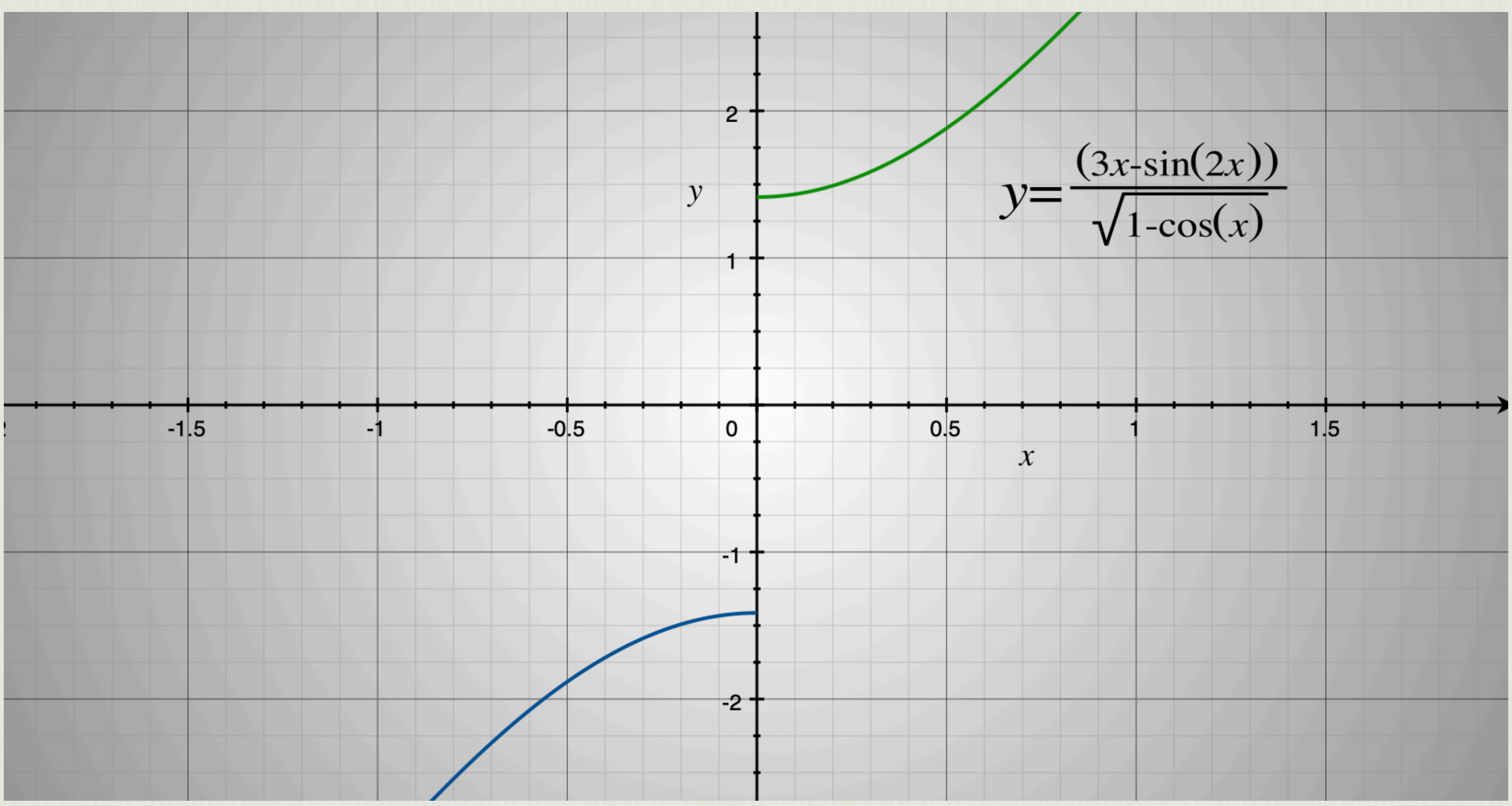
$$|\, sen(x)\,| = -\ sen(x)$$

y repitiendo el proceso llegaremos a que

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{3x - sen(2x)}{\sqrt{1 - cos(x)}} = -\sqrt{2}.$$

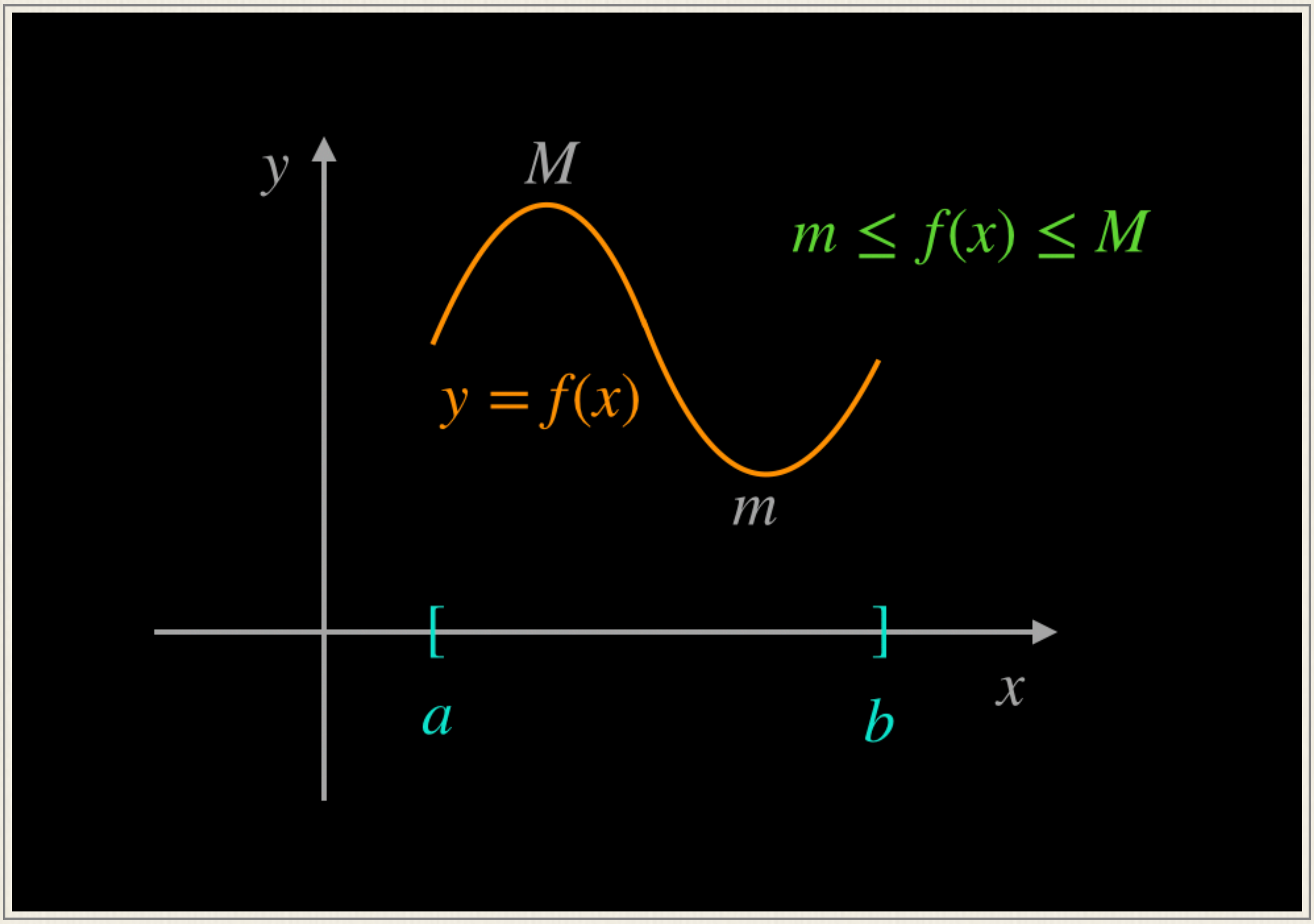
Que el valor de estos dos límites por izquierda y derecha es diferente lo vemos claramente en la gráfica de la siguiente imagen.

**Imagen.** Gráfica de la función $f(x) = \dfrac{3x - sen(2x)}{\sqrt{1 - cos(x)}}$ .



# Apuntes.

# Continuidad




El concepto de continuidad en un punto es una extensión natural del concepto de límite y a este concepto dedicaremos esta primera parte del capítulo. Pero las cosas se ponen mucho más interesantes cuando se define el concepto de continuidad en un intervalo. La segunda parte de este capítulo contiene varios teoremas importantes descubiertos por geniales matemáticos.

***Definición.***

Sea $f : D \subset R \to R$ una función. Se dice que $f$ es continua en $x_0$ si

$$i) \exists \lim_{x \to x_0} f(x)$$

$$ii) \exists f(x_0)$$

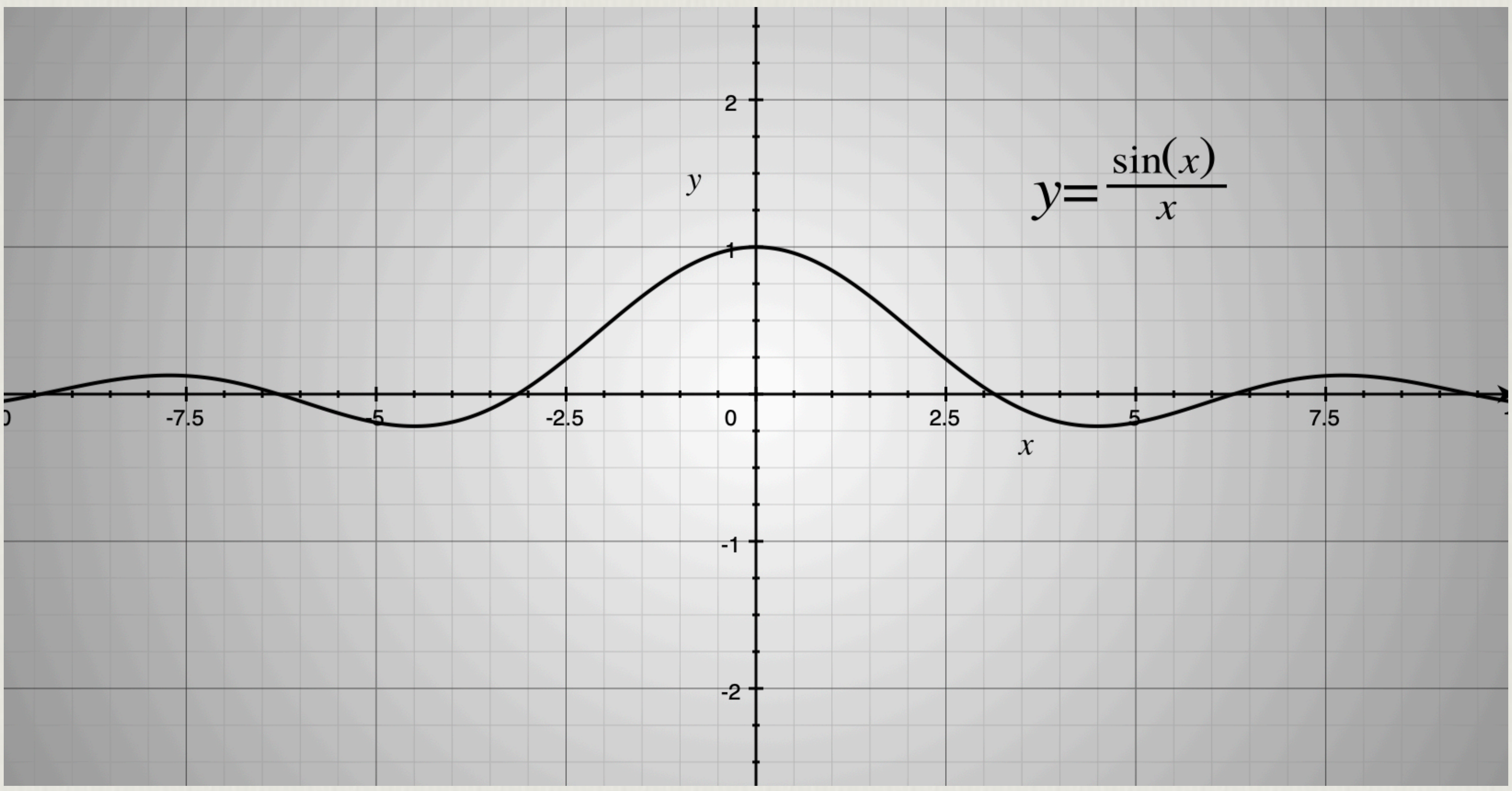
$$iii) \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ .}$$

Por ejemplo, la función $f : R \to R$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sen(x)}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

es una función continua en $x_0 = 0$ ya que sabemos que $\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1 = f(0)$. En la siguiente imagen vemos una gráfica de esta función y observamos visualmente que es continua en $x_0 = 0$.

**Imagen.** Gráfica de una función continua ($f(0) = 1$).




En definitiva, para verificar si una función es continua en un punto es preciso ver si el "límite es igual al valor de la función en ese punto".

En el siguiente botón tenemos un ejercicio típico de examen. La parte a) del mismo es la que nos concierne ahora. La parte b) la estudiaremos en el próximo capítulo sobre derivabilidad.

**Ver video**

Finalizamos esta sección, continuación natural del concepto de límite, con un teorema muy útil para resolver ejercicios donde se nos pide encontrar valores de ciertas constantes para construir una función continua.

***Teorema.***

Una función es continua en un punto $x_0$ si y solo si

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

es decir, si tiene límites laterales y son iguales, y además coinciden con el valor de la función en ese punto.

Y una observación más... En las funciones continuas el límite puede “salir afuera de la función”, esto es: si $f$ es continua en $x_0$ entonces

$$f\left(\lim_{x\to x_0} x\right) = \lim_{x\to x_0} f(x). \tag{1}$$

Esto es trivial pues

$$\lim_{x\to x_0} x = x_0.$$

Luego (1) equivale a

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

que es la definición de continuidad.

# Operaciones con funciones continuas

En el capítulo 2 sobre límites hemos visto que, con ciertas hipótesis, el límite de la suma, del producto y del cociente de dos funciones es la suma, el producto y el cociente de los límites de dichas funciones.

La definición de continuidad en un punto depende tan intrínsecamente de la de límite que es evidente que la suma, el producto y el cociente de dos funciones continuas $f$ y $g$ en $x_0$ es una función continua en $x_0$ con la obvia necesidad de que $g(x_0) \neq 0$.

Por ejemplo, si se nos pide determinar el conjunto de continuidad de la función

$$f(x) = \frac{sen(x^2 - 2x + 8)}{x^2 - 4}$$

podemos contestar inmediatamente dicho conjunto de continuidad de $f$ que denotaremos $Cont(f)$ es

$$Cont(f) = R - \{2, -2\}.$$

Pero ahora tenemos una operación más interesante para estudiar, a saber: la composición.

Recordemos que si $f : R \to R$ y $g : R \to R$ la composición de $f$ y $g$ que denotaremos $f \circ g$ se define para cada $x \in R$ de la siguiente manera:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big).$$

Por ejemplo, si $f(x) = sen(x)$ y $g(x) = x^2 + 5x + 3$ entonces

$$(f \circ g)(x) = sen(x^2 + 5x + 3)$$

y

$$(g \circ f)(x) = sen^2(x) - 5\ sen(x) + 3$$

de donde vemos incidentalmente que la operación de composición de funciones no es conmutativa.

El dominio de la composición $f \circ g$ es

$$D(f \circ g) = \{x \in R : x \in D(g) \quad \wedge \quad g(x) \in D(f)\}.$$

Con este breve repaso sobre composición de funciones estamos ahora en posición de comprender el siguiente teorema. El estudio de la demostración de este teorema es un gran trabajo tuyo y representa un primer triunfo en esta rigurosa ciencia.

***Teorema.***

Sea $f : D \subset R \to R$ continua en $x_0$. Sea $g : D' \subset R \to R$ continua en $f(x_0)$. Entonces $h = g \circ f$ es continua en $x_0$.

***Demostración.***

Introduzcamos la notación común $y = f(x)$. Con ella $y_0 = f(x_0)$.

Como $g$ es continua en $y_0$ tenemos que

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0) : |y - y_0| < \delta \Longrightarrow |g(y) - g(y_0)| < \epsilon. \quad (2)$$

Ahora bien, para el $\delta > 0$ recién obtenido

$$(\exists \delta' > 0) : |x - x_0| < \delta' \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta. \quad (1)$$

Usando la notación definida tenemos que esto último lo podemos escribir

$$(\exists \delta' > 0) : |x - x_0| < \delta' \Longrightarrow |y - y_0| < \delta.$$

Luego, mirando (1) y (2) tenemos por transitividad que

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta' > 0) : |x - x_0| < \delta' \Longrightarrow |g(y) - g(y_0)| < \epsilon.$$

Entonces, usando nuevamente la notación introducida tenemos que

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta' > 0) : |x - x_0| < \delta' \Longrightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \epsilon$$

de lo cual, como $h = g \circ f$ resulta

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta' > 0) : |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |h(x) - h(x_0)| < \epsilon$$

lo que significa que $h$ es continua en $x_0$.

$\square$

***Nota.***

En la demostración anterior hemos usado la equivalencia entre nuestra definición de continuidad y la siguiente, ambas por supuesto equivalentes: $f$ es continua en $x_0$ si y solo si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0) : |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Por supuesto que esta similitud con la definición de límite es porque en las funciones continuas $l = f(x_0)$.

# Continuidad en un intervalo

Por lo que vimos hasta ahora de continuidad parecería que el concepto no es más que una verificación de si el límite cuando $x \to x_0$ de $f(x)$ es igual a $f(x_0)$. Pero la cosa se pone interesante cuando el concepto se extiende a un intervalo y mucho más si este intervalo es cerrado.

***Definición.*** Sea $f : I \to R$ siendo $I$ un intervalo. Se dice que $f$ es continua en $I$ si $f$ es continua en cada punto de $I$.

En la anterior definición si $I = [a, b]$ es un intervalo cerrado entonces que $f$ sea continua en $a$ significa que el límite por la derecha en $a$ coincide con $f(a)$ y que $f$ sea continua en $b$ significa que el límite por la izquierda en $b$ coincide con $f(b)$, es decir

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

El primer teorema que vamos a estudiar relaciona por primera vez un resultado local con uno en un intervalo. Si bien puede parecer trivial es un teorema de mucha importancia pues sirve para probar otros teoremas fuertes. Este teorema expresa en palabras que una función continua conserva su signo en un entorno de un punto.

***Teorema.***

Sea $f: R \to R$ una función continua. Si $f(x_0) > 0$ entonces existe un $\delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > 0.$$

***Demostración.***

Como $f$ es continua en $x_0$

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0) : |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Como esta implicación vale para todo $\epsilon$ positivo vale en particular para $\epsilon = \dfrac{f(x_0)}{2}$. Luego

$$(\exists \delta > 0) : |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}.$$

Pero la última desigualdad significa que

$$-\frac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2}$$

y despejando

$$\frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3}{2} f(x_0).$$

Luego, como $\dfrac{f(x_0)}{2} > 0$ tenemos mirando la primera desigualdad que $f(x) > 0$ si $|x - x_0| < \delta$.

$\square$

Por supuesto que el mismo teorema para valores negativos también es cierto, es decir, si una función es continua en un punto $x_0$ y es negativa allí, entonces es negativa en algún intervalo que contiene a $x_0$. Algunas veces este hecho se expresa diciendo que las funciones continuas conservan el signo cerca del punto.

Ahora estamos en condiciones de probar el siguiente teorema, el primero realmente importante de nuestro curso. Su contenido es intuitivo pero su demostración requiere un concepto previo y no tan sencillo de entender. Es un axioma que se llama axioma de completitud de los números reales.

***Axioma de completitud.***

Todo subconjunto no vacío $A$ de números reales acotado superiormente tiene un supremo.

$\square$

Intuitivamente el supremo de un conjunto $A$ es el menor número $x \in R$ tal que todo $a \in A$ satisface la desigualdad $a \leq x$.

Por ejemplo, si $A = (0,1)$ entonces el supremo de $A$ es $\sup_A = 1$.

Ahora sí ya podemos probar el teorema siguiente:

***Teorema de Bolzano.***

Sea $f : [a, b] \to R$ una función continua. Si $f(a) < 0 < f(b)$ entonces $\exists c \in (a, b) : f(c) = 0$.

***Demostración.***

Definamos el conjunto

$A = \{x \in [a, b] : f$ es negativa en $[a, x]\}$.

Como $a \in A$ el conjunto $A$ no es vacío y como $b \notin A$ el conjunto $A$ está acotado superiormente. Luego, de acuerdo al axioma de completitud, el conjunto $A$ tiene un supremo $\alpha$. Queremos probar que $f(\alpha) = 0$.

Si $f(\alpha) < 0$ entonces, de acuerdo al teorema anterior sobre conservación del signo en las funciones continuas, existe un $\delta > 0$ tal que

$$y \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \Longrightarrow f(y) < 0.$$

Como $\alpha$ es el menor número mayor o igual que todos los elementos de $A$, en el intervalo “izquierdo” $(\alpha - \delta, \alpha)$ hay un elemento $x_0$ de $A$. Para este $x_0$ tenemos que $f$ es negativa en $[a, x_0]$. Si ahora tomamos un elemento $x_1$ en el intervalo “derecho” $(\alpha, \alpha + \delta)$ tenemos que en $[x_0, x_1]$ $f$ es negativa. Por lo tanto, $f$ es negativa en $[a, x_1]$. Pero esto es absurdo pues $\alpha$ era más grande que todos los elementos de $A$ y más grande que $x_1$ no es. ¡Absurdo!

Si $f(\alpha) > 0$ entonces existe un $\delta > 0$ tal que

$$y \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \Longrightarrow f(y) > 0.$$

Sea $x_0 \in A$ en el intervalo “izquierdo” $(\alpha - \delta, \alpha)$, que existe pues $\alpha$ es el supremo de $A$. Entonces en el intervalo $[a, x_0]$ la función $f$ es negativa. Esto también es absurdo pues $f(x_0) > 0$.

Luego la única posibilidad que queda es $f(\alpha) = 0$ completando así la demostración.

$\square$

El teorema de Bolzano es útil para resolver ciertos ejercicios donde hay que calcular el conjunto de positividad de una función y el de negatividad. Dichos conjuntos se denotan y definen así:

$$C^+(f) = \{x \in D(f) : f(x) > 0\}$$

y

$$C^-(f) = \{x \in D(f) : f(x) < 0\}.$$

Por ejemplo, supongamos que tenemos que calcular los conjuntos de positividad y negatividad de

$$f(x) = sen(x)(x^2 - x - 2)$$

en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Si localizamos **todos** los ceros de $f$ sabemos, puesto que $f$ es continua en todo el intervalo $[-\pi, \pi]$, que la función debe tener signo constante en los subintervalos definidos por raíces consecutivas. Resolvamos pues la ecuación que permite hallar los ceros de $f$.

Si

$$sen(x)(x^2 - x - 2) = 0$$

entonces

$$sen(x) = 0 \qquad \text{o} \qquad x^2 - x - 2 = 0.$$

Luego

$$x \in \{-\pi,\ 0,\ \pi\} \qquad \text{o} \qquad x \in \{-1,\ 2\}.$$

Evaluando $f$ por ejemplo en $x_0 = 1$ obtenemos que

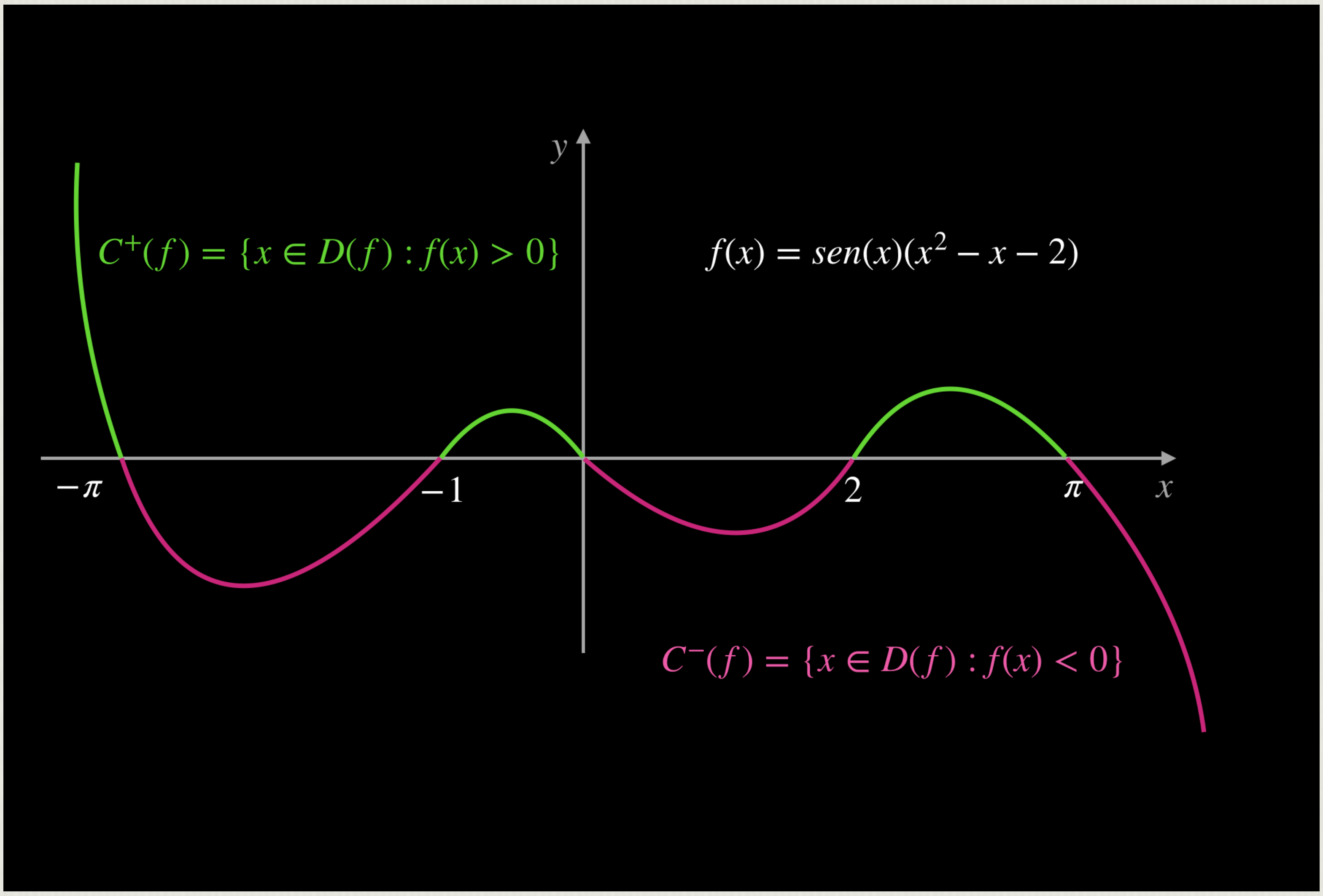
$$f(1) = -2\, sen(1) < 0.$$

Por lo tanto $f$ es negativa en el intervalo $[0,2]$. Repitiendo este proceso es fácil ver que los conjuntos de positividad y negatividad de $f$ son

$$C^{+}(f) = [-1,0] \cup [2,\pi]$$

y

**Imagen.** Conjuntos de positividad y negatividad.



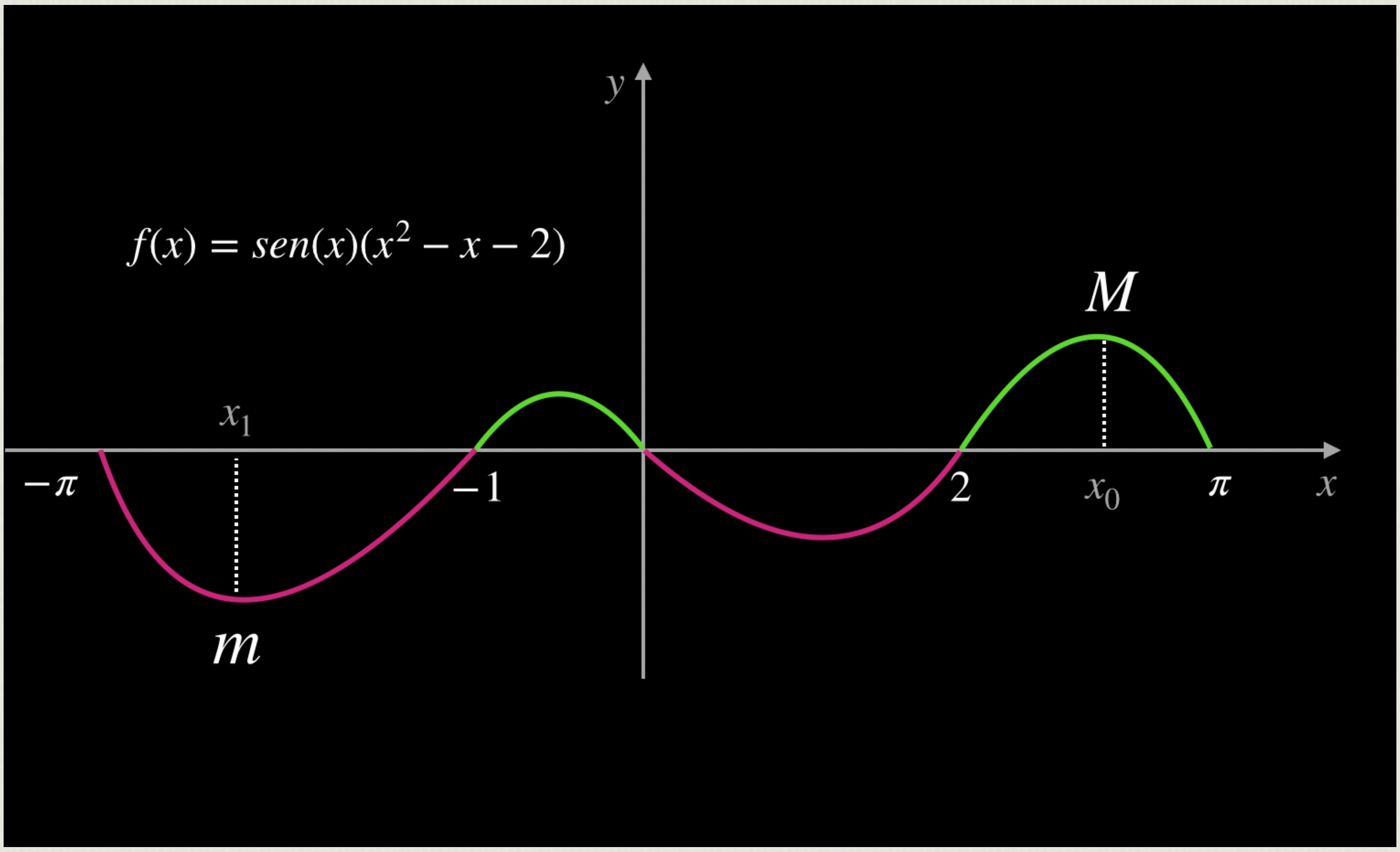
$$C^{-}(f) = [-\pi, -1] \cup [0,2].$$

Los mismos los vemos claramente en la imagen precedente donde hemos ampliado un poco más el dominio de $f$ para mayor claridad.

***Nota.*** El procedimiento anterior de "indicar" todas las raíces no siempre es posible como muestran las raíces de la función ya considerada $f(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)$. Allí no hay por ejemplo una menor raíz positiva. Pero en nuestro caso sí es posible pues ellas están claramente separadas.

Terminaremos este capítulo con un teorema que relaciona la continuidad de una función con un intervalo cerrado. Precisamos el concepto intuitivo de máximo y de mínimo de una función.

**Imagen.** Máximo y mínimo absolutos de una función.




***Definición.***

Sea $f : D \subset R \to R$ una función. Se dice que en el punto $x_0$ la función alcanza un máximo absoluto con valor $f(x_0) = M$ si

$$\forall x \in D : f(x) \leq f(x_0) = M$$

y simétricamente un mínimo absoluto en $x_1$con valor $f(x_1) = m$ si

$$\forall x \in D : f(x_1) \leq f(x).$$

La idea intuitiva de este concepto la vemos claramente en la imagen anterior.

Ya podemos presentar ahora el siguiente teorema muy importante para todo el análisis matemático.

***Teorema de Weierstrass.***

Sea $f : [a, b] \to R$ una función continua. Entonces existen dos abscisas $x_0, x_1 \in [a, b]$ donde se alcanzan los valores máximo y mínimo de la función en $[a, b]$, esto es:

$$\forall x \in [a, b] : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_0).$$

□

El teorema de Bolzano ligeramente modificado y el anterior de Weierstrass nos permiten probar un importante colorario, a saber, que la imagen por una función continua de un intervalo es un intervalo cuyos extremos izquierdo y derecho son precisamente el mínimo y el máximo de la función respectivamente.

***Teorema.***

Si $f : [a, b] \to R$ es una función continua entonces la imagen de $f$ es un intervalo cerrado y acotado.

***Demostración.***

Como $f : [a, b] \to R$ sabemos, de acuerdo al teorema de Weierstrass que existen dos valores mínimo y máximo de $f$ en $[a, b]$. Sean estos valores mínimo y máximo respectivamente $m = f(c)$ y $M = f(d)$. Supongamos que $c < d$.

Debemos probar ahora que cualquier $y_0 \in (m, M)$ es imagen de al menos un punto $x \in (c, d)$.

En efecto, consideremos la función

$$g(x) = f(x) - y_0.$$

Vemos que $g(c) = f(c) - y_0 = m - y_0 < 0$ y que $g(d) = f(d) - y_0 = M - y_0 > 0$. Entonces la función $g$ es continua en $[c, d]$ y cambia de signo en los extremos del intervalo $[c, d]$. Luego, de acuerdo al teorema de Bolzano, la función $g$ tiene una raíz $r$ en el intervalo $(c, d)$, es decir

$$g(r) = 0.$$

Pero $g(r) = f(r) - y_0 = 0$. Luego

$$f(r) = y_0.$$

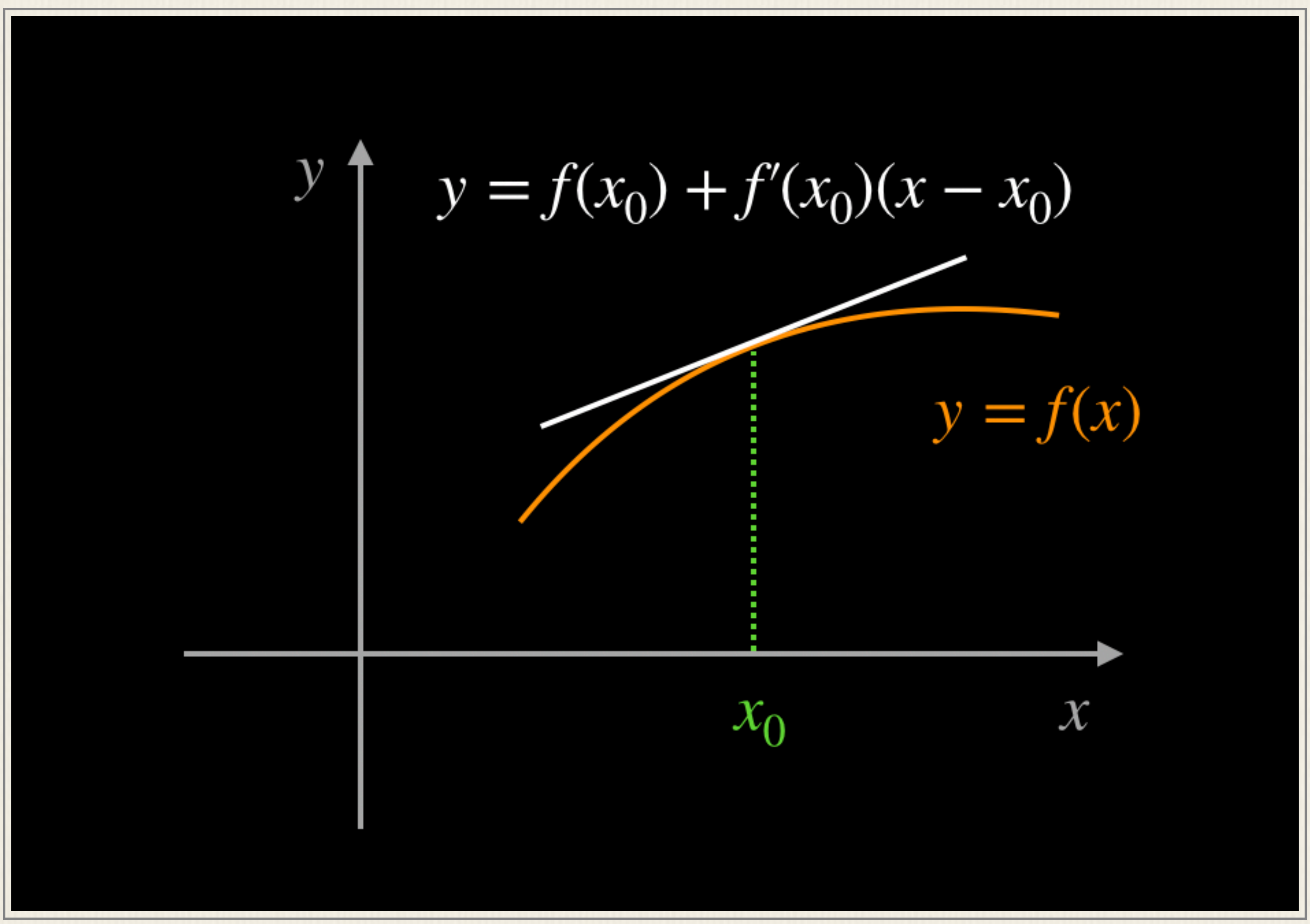
$\square$

Terminamos este capítulo diciendo informalmente que una función continua no tiene saltos pero sí puede tener ángulos como muestra la función $f(x) = |x|$. En el siguiente capítulo intentaremos eliminar la posibilidad de este ángulo resultando como gráfica de una función un dibujo mucho más suave.

# Apuntes.

CAPÍTULO 4

# Derivadas




El concepto de límite comienza a tener aplicaciones importantes a la física, a la ingeniería, a la química, etc. cuando lo aplicamos para definir un límite particular llamado "derivada de $f$ en un punto $x_0$". Con este límite podremos averiguar muchas propiedades de una función como por ejemplo si es creciente, decreciente, cóncava, convexa, etc. Podremos también hallar los máximos y mínimos relativos de una función y realizar un gráfico que nos permitirá estudiar muchos fenómenos de la vida real. A este concepto fundamental dedicamos este capítulo.

Similar a la nota que hemos hecho sobre puntos de acumulación en la definición de límite, en todo teorema, definición, lema, etc. que involucre al concepto de derivada en un punto $x_0$, consideraremos que este punto es un punto interior del dominio de la función. Que este punto sea interior significa coloquialmente que la función está definida en un pequeño intervalo abierto que contiene a este punto $x_0$.

***Definición.***

Sea $f : D \subset R \to R$. Sea $x_0$ un punto interior de $D$. Se llama "derivada de $f$ en el punto $x_0$" denotado $f'(x_0)$ al límite

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Por ejemplo, supongamos que $f(x) = x^2$ y que $x_0 = 1$. Entonces

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h}.$$

Luego, como $f(x) = x^2$ tenemos que

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{(1 + h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2 + h) = 2.$$

En resumen, hemos obtenido que

$$f'(1) = 2.$$

Ahora bien, ¿qué representa este $2$? Respuesta: representa $2$ incrementos infinitesimales de la variable dependiente de la función si la variable independiente recibe 1 incremento infinitesimal en el punto $x_0 = 1$.

Si en vez de calcular el límite anterior en el punto $x_0 = 1$ lo hubiéramos calculado en el punto $x_0 = 2$ hubiéramos obtenido otro valor, a saber, $f'(2) = 4$. (¡Hágase!) En general si dejáramos variable el punto obtendríamos un límite cuyo valor será función del punto. Este límite se llama "función derivada de $f$" o simplemente derivada de $f$ y se denota y define por

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Por ejemplo, continuando con la función $f(x) = x^2$ tenemos que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x + h) = 2x.$$

***Nota.***

Algunas veces el límite de la derivada se define así:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Se pasa de una a otra definición con el cambio de variable

$$h = x - x_0.$$

En efecto, si $x \to x_0$ entonces $h \to 0$ y despejando resulta

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

El siguiente teorema relaciona la continuidad con la derivabilidad de una función.

***Teorema.***

Si $f$ es derivable en $x_0$ entonces $f$ es continua en $x_0$.

***Demostración.***

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \big(f(x) - f(x_0)\big) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = 0.$$

Ahora bien, como existe $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ tenemos que la última equivalencia se puede escribir

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} . \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = 0$$

o lo que es lo mismo

$$f'(x_0) . \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = 0$$

lo cual es cierto si realmente existe $f'(x_0)$. Luego, si existe $f'(x_0)$ tenemos que todas las equivalencias anteriores son ciertas y en particular la primera, es decir

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

que es la definición de continuidad en un punto.

$\square$

Para afianzar el contenido de este teorema tenemos este ejercicio que completa la parte iniciada en el capítulo sobre continuidad.

**Ver video**

# Máximos y mínimos

A partir de ahora asumiremos que el lector conoce las reglas de derivación de la suma, del producto, del cociente y de la composición de funciones así como las derivadas de las funciones más utilizadas como las polinómicas, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas y las resultantes de componer cualesquiera dos de ellas para formar una tercera.

Esta sección se dedica al estudio del crecimiento y decrecimiento de una función así como a la localización de los máximos y mínimos relativos de la misma.

***Definición.***

Sea $f : D \subset R \to R$ una función. Un punto crítico de $f$ es un punto $x_0 \in D$ tal que

$$f'(x_0) = 0 \qquad \text{o} \qquad \nexists\, f'(x_0).$$

Por ejemplo, en la función

$$f(x) = |x|$$

$x_0 = 0$ es un punto crítico de $f$ y en la función

$$g(x) = x^3 - 3x$$

cuya derivada es

$$g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$

los puntos $x_{1,2} = \pm 1$ son puntos críticos de $g$.

Definamos ahora el concepto de máximo local de una función $f$ y veamos qué conexión tiene con el concepto de punto crítico.

***Definición.***

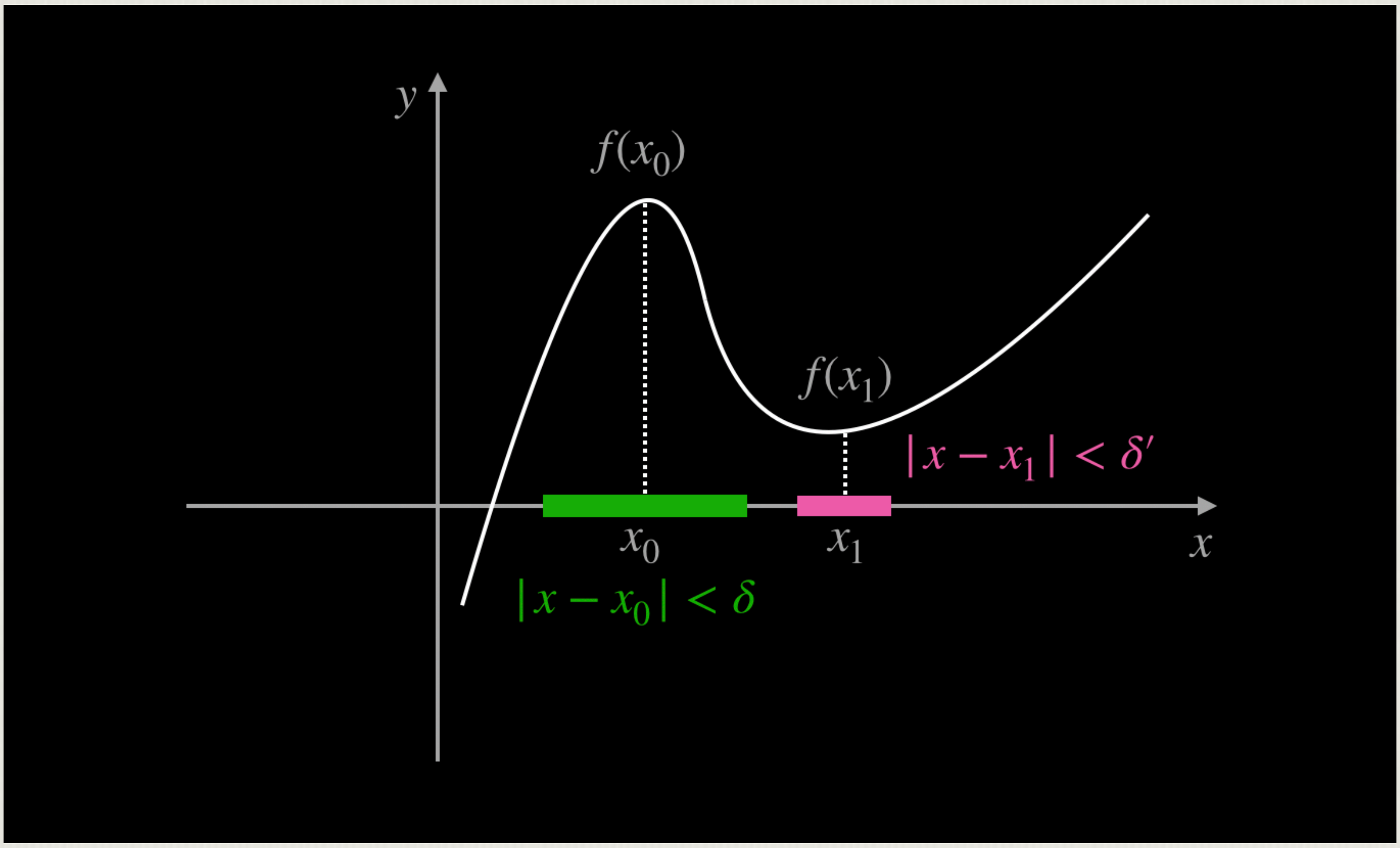
Sea $f : D \subset R \to R$ una función. Se dice que $f$ alcanza un máximo local en el punto $x_0 \in D$ si

$$(\exists\delta > 0) : |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

y un mínimo local si

$$(\exists\delta > 0) : |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x_0) \leq f(x).$$

**Imagen.** Máximos y mínimos locales.



Ahora sí ya podemos enunciar y demostrar el teorema que queríamos.

***Teorema.***

Sea $f:(a,b)\to R$. Si $f$ es derivable en el punto $x_0$ y allí hay un máximo (o mínimo) local entonces $f'(x_0)=0$.

***Demostración.***

Como en $x_0$ hay un máximo local entonces la diferencia

$$f(x_0+h)-f(x_0)\leq 0$$

si $h$ es suficientemente pequeño. Por lo tanto si $h>0$ entonces

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\leq 0$$

mientras que si $h < 0$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Luego

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

y

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Pero como por hipótesis $f$ es derivable en $x_0$ estos límites, que existen, deben coincidir. Luego

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0$$

es decir

$$f'(x_0) = 0.$$

$\square$

El teorema anterior es fundamental para hallar los valores máximo y mínimo absolutos de una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ que sabemos que se alcanzan de acuerdo al teorema de Weierstrass. En efecto, debemos hallar los puntos $x_0 \in [a, b]$ tales que

1. La derivada se anula, esto es, $f'(x_0) = 0$
2. La derivada no existe, esto es, $\nexists\, f'(x_0)$
3. Hallar los valores de $f$ en $a$ y en $b$.

Al calcular las imágenes de los puntos de 1 y 2, y al compararlas con los valores hallados en 3, obtendremos cuál es el valor máximo y mínimo absolutos de $f$ en $[a, b]$.

Esto es tan importante que hemos preparado un video para una óptima comprensión.

**Ver video**

# Teorema de Lagrange

La fascinante sección anterior nos ha enseñado un método para hallar los máximos y mínimos de una función continua en un intervalo cerrado si hay derivabilidad en su interior. Sin embargo la anulación de la derivada no permite clasificar ese punto como máximo o mínimo local. Para hacerlo es necesario estudiar más conceptos y más teoremas. Estos teoremas son los más importantes de todo el cálculo cálculo diferencial.

El primer teorema que vamos a presentar se llama a veces “teorema sobre las raíces de la derivada” y fue descubierto en el año 1691 por Michel Rolle (Francia, 1652 - 1719).

***Teorema de Rolle (1691).***

Sea $f : [a, b] \to R$ una función continua y derivable en $(a, b)$. Si $f(a) = f(b)$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

***Demostración.***

Como $f$ es continua en $[a,b]$ sabemos que alcanza sus valores máximo y mínimo en $[a,b]$. Si alguno de ellos se alcanza dentro del intervalo, es decir, se alcanza en $(a,b)$ entonces en ese punto, digamos $c \in (a,b)$ tenemos que

$$f'(c) = 0.$$

Si no, es decir, si ambos se alcanzan en los extremos, uno será el máximo y el otro el mínimo. Pero como por hipótesis $f(a) = f(b)$ entonces estos valores coinciden. Y si el máximo de una función es igual al mínimo entonces la función es constante en todo el intervalo. Luego, para todo $c \in (a,b)$, $f'(c) = 0$.

$\square$

La hipótesis sobre la derivabilidad de $f$ en $(a,b)$ no puede omitirse. La función $f(x) = |x|$ satisface en $[-1,1]$ todas las hipótesis del teorema salvo ser derivable en $x_0 = 0$. Y vemos que la derivada de $f(x) = |x|$ nunca se anula en $(-1,1)$.

Finalizamos el estudio del teorema de Rolle con este importante video sobre un ejercicio que nos ayudará a identificar el $c$ de este teorema.

Ver video

Ahora sí, nos vamos al teorema más importante del cálculo diferencial. El mismo es una versión "torcida" del teorema de Rolle que algunas veces se llama "teorema sobre los incrementos finitos" o "teorema del valor medio" y fue descubierto por Joseph-Louis Lagrange (Italia, 1736-Francia, 1813).

***Teorema de Lagrange.***

Sea $f:[a,b]\to R$ una función continua y derivable en $(a,b)$. Entonces existe $c\in(a,b)$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

***Demostración.***

Consideremos la función

$$\psi(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\right].$$

Entonces $\psi$ es continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$ y además

$$\psi(a) = \psi(b) = 0.$$

Por eso, a la función $\psi(x)$ se le puede aplicar el teorema de Rolle y concluir que existe $c \in (a, b)$ tal que $\psi'(c) = 0$. Pero como

$$\psi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

tenemos que

$$\psi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

es decir

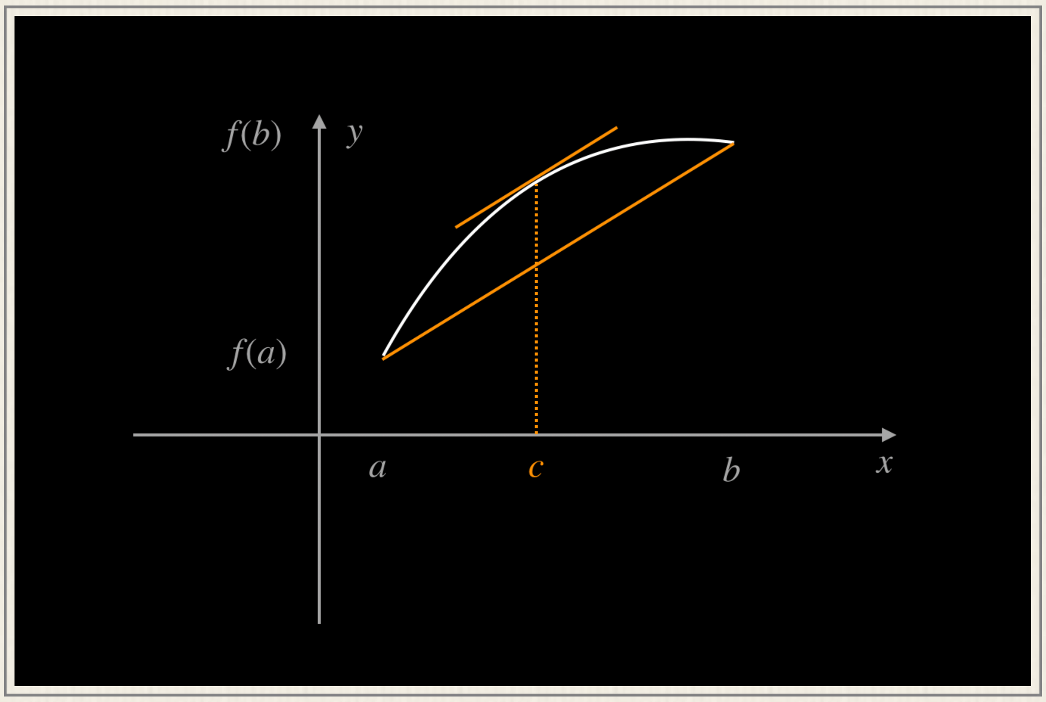
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$\square$

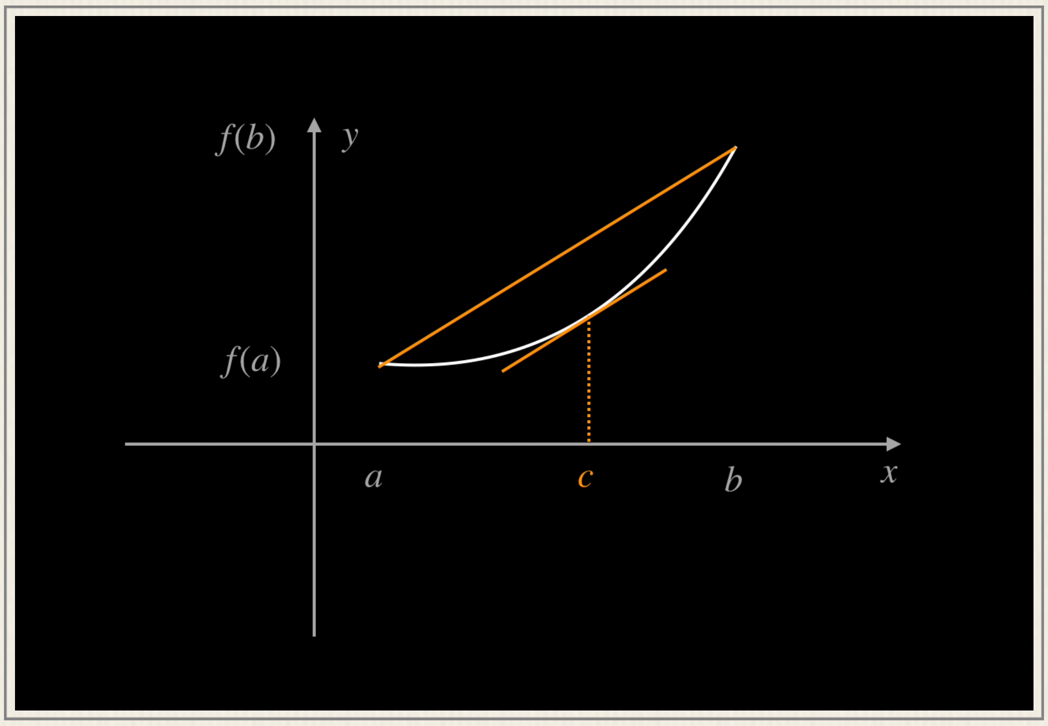
El significado geométrico del teorema de Lagrange es el siguiente: si se considera la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ la pendiente de la misma es $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Luego, el teorema asegura que existe un $c \in (a, b)$ en el cual la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f$ en $c$ es paralela a la recta que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. En la siguiente galería tenemos varios ejemplos geométricos del contenido de este teorema.

Terminamos nuestro estudio del teorema de Lagrange con este video que nos ayudará a identificar el $c$ de este teorema con claridad.

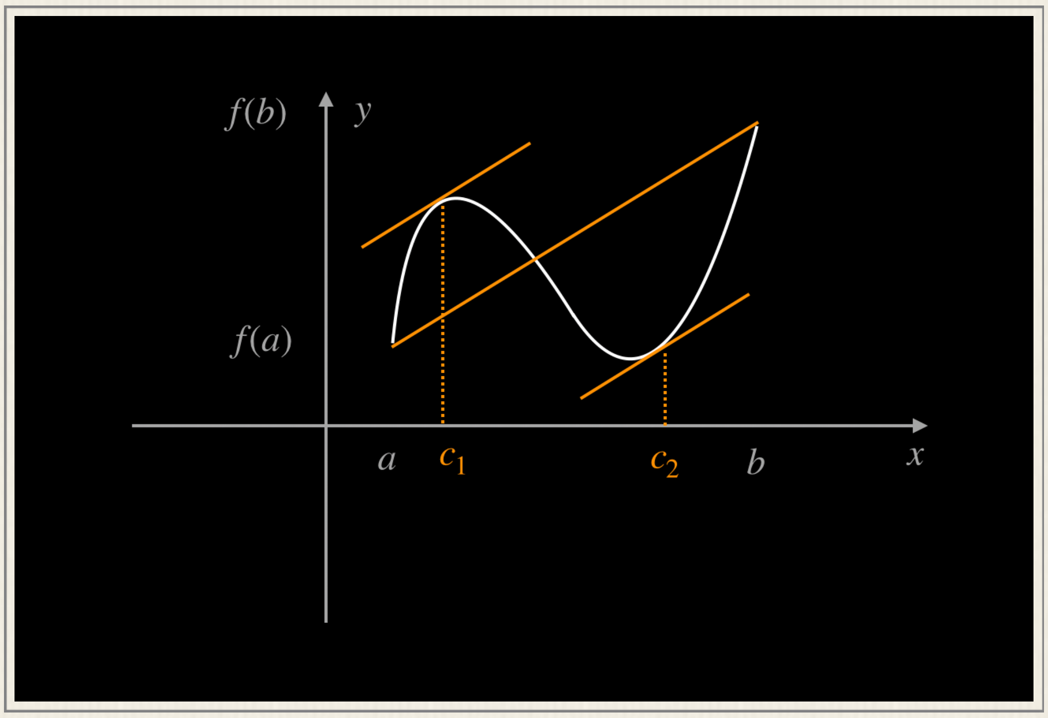
Ver video



f(b)
y
f(a)
a
c
b
x

f(b)
y
f(a)
a
c
b
x

f(b)
y
f(a)
a
$c_1$
$c_2$
b
x

# Crecimiento y decrecimiento

Ahora que ya hemos probado el teorema del valor medio podemos completar, al menos hasta nuestras necesidades, el estudio de los valores máximo y mínimo locales de una función y al mismo tiempo formalizar la idea intuitiva de función creciente y decreciente.

***Definición.***

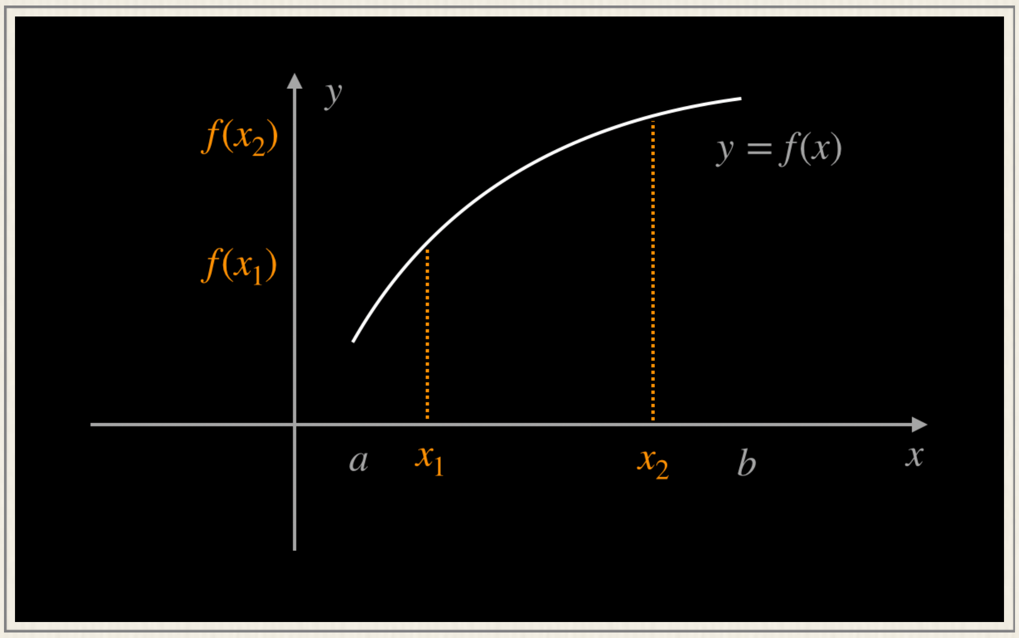
Sea $f : (a, b) \to R$. Se dice que $f$ es creciente en $(a, b)$ si

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

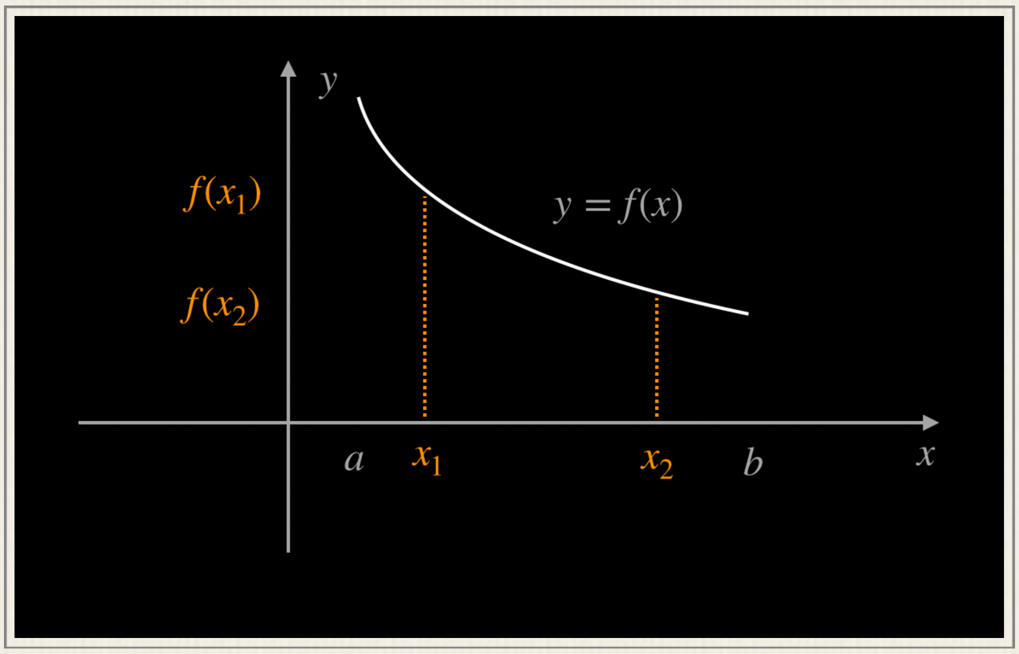
y decreciente si

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Por supuesto que la geometría de una función creciente y decreciente es la que intuimos y representamos geométricamente en la siguiente galería.




Gráfica de una función creciente.




Gráfica de una función decreciente.

Intuitivamente vemos que si la derivada es positiva entonces la función es creciente. Que esto es realmente así es el contenido del siguiente teorema.

***Teorema.***

Sea $f : (a, b) \to R$ una función derivable. Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces $f$ es creciente allí.

***Demostración.***

Sean $x_1 < x_2$ puntos del intervalo $(a, b)$. Entonces, de acuerdo al teorema del valor medio

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \qquad\qquad c \in (x_1, x_2).$$

Luego, como $f'(c) > 0$ tenemos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$ lo cual implica que

$$f(x_1) < f(x_2)$$

es decir, la función es creciente en $(a, b)$.

$\square$

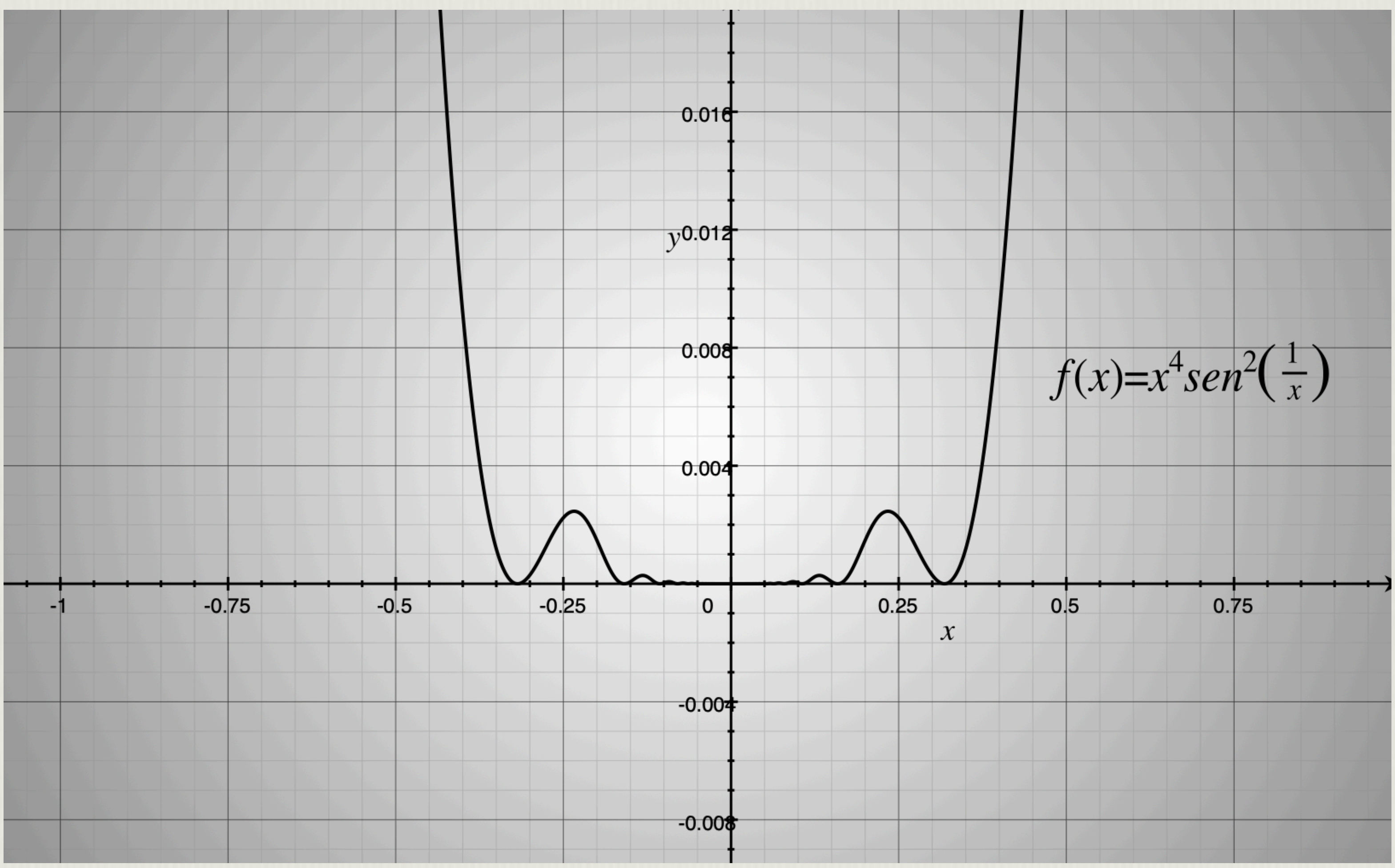
Por supuesto que el teorema análogo para funciones decrecientes también es cierto y te recomendamos como un buen ejercicio que lo enuncies y si podés, que lo demuestres imitando lo que hemos hecho recién.

El teorema anterior nos permite dar un criterio de clasificación de puntos críticos entre máximos y mínimos cuando una función es derivable. En efecto, si en un punto $x_0$ tenemos que $f'(x_0) = 0$ y en un intervalo "inmediatamente" a la izquierda de $x_0$ tenemos que $f'(x) > 0$ y en un intervalo "inmediatamente" a la derecha de $x_0$ tenemos que $f'(x) < 0$ entonces en el punto $x_0$ la función presenta un máximo local. De la misma manera, si en un punto $x_0$ tenemos que $f'(x_0) = 0$ y en un intervalo "inmediatamente" a la izquierda de $x_0$ tenemos que $f'(x) < 0$ y en un intervalo "inmediatamente" a la derecha de $x_0$ tenemos que $f'(x) > 0$ entonces en el punto $x_0$ la función presenta un mínimo local. Esto es fundamental y para afianzar bien este concepto es que tenemos este video especial.

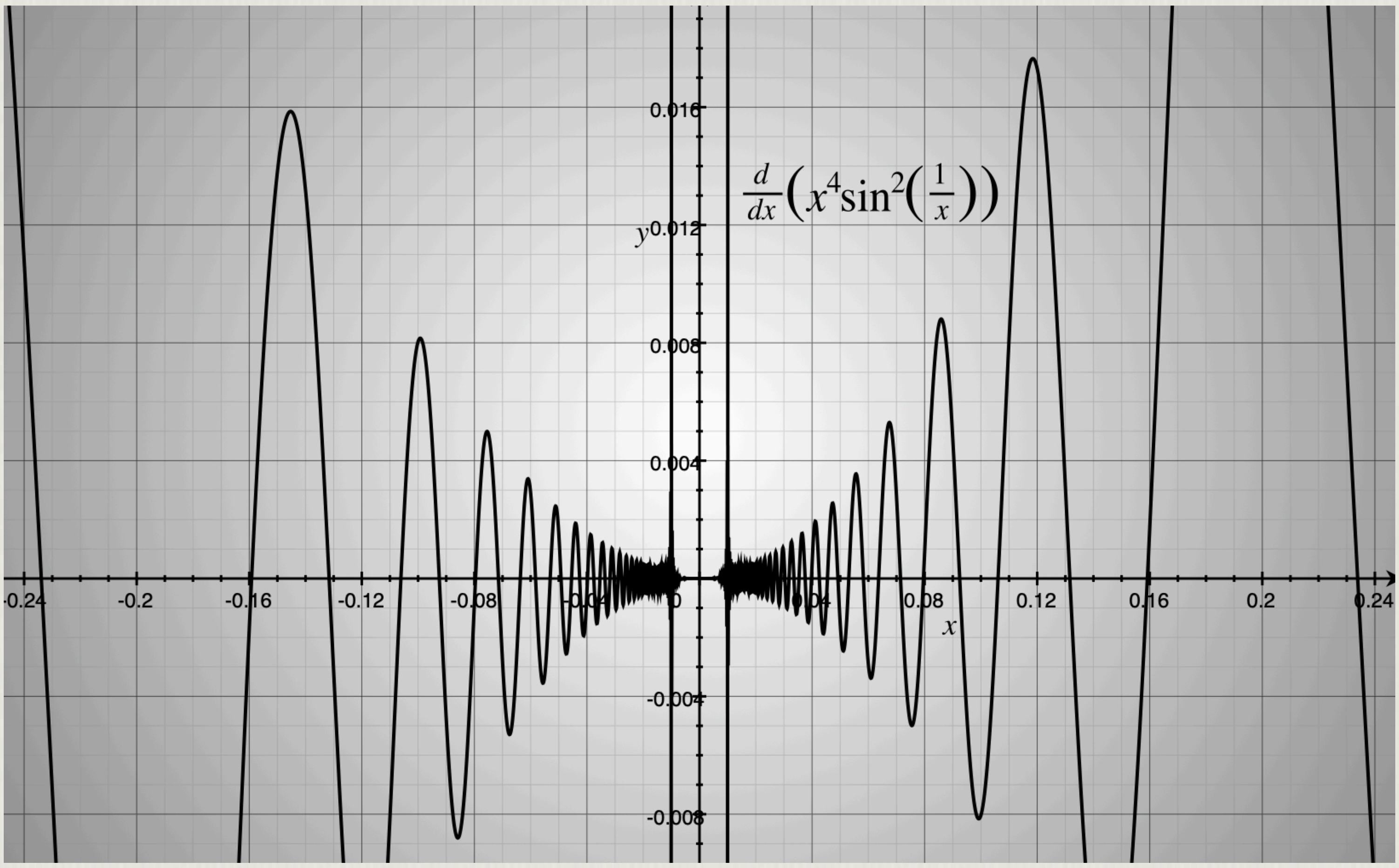
**Ver video**

La frase anterior merece un poco de explicación extra. Un intervalo inmediatamente a izquierda de $x_0$ es un intervalo de la forma $(x_0 - \delta, x_0)$ y uno a la derecha es uno de la forma $(x_0, x_0 + \delta)$. El problema es que tal intervalo puede no existir como muestra la galería siguiente.

**Galería.** Gráfica de la función $f(x) = x^4\, sen^2\left(\dfrac{1}{x}\right)$.



**Galería.** Derivada de $f(x) = x^4\ sen^2\left(\frac{1}{x}\right)$.




Además si la derivada se anula en un punto $x_0$ y en un intervalo inmediatamente a la izquierda la derivada es positiva y en un intervalo inmediatamente a la derecha la derivada es también positiva entonces en $x_0$ no hay ni máximo ni mínimo. Un ejemplo de esto lo constituye la función $f(x) = x^3$. Su derivada $f'(x) = 3x^2$ se anula en $x_0 = 0$ y es positiva tanto a izquierda como a derecha de $x_0 = 0$.

# Teorema de Cauchy

El teorema de Lagrange se puede generalizar para producir un resultado potente para el cálculo de límites llamado regla de L' Hôspital. Dicha generalización, que algunas veces se llama "teorema sobre la razón de los incrementos de dos funciones" fue descubierto y probado por Agustin Louis Cauchy (Francia, 1789-1857)

***Teorema de Cauchy.***

Sean $f, g : [a, b] \to R$ dos funciones continuas y derivables en $(a, b)$. Entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que

$$[f(b) - f(a)]\ g'(c) = [g(b) - g(a)]\ f'(c).$$

Si además $g(b) \neq g(a)$ y $\forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0$ entonces esta última igualdad se puede escribir

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

***Demostración.***

Nuevamente el teorema de Rolle es la herramienta fundamental.

Consideremos la función

$$\psi(x) = [f(b) - f(a)]\ g(x) - [g(b) - g(a)]\ f(x)$$

que por su construcción es continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$ y además

$$\psi(b) = \psi(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b).$$

Por eso a la función $\psi(x)$ se le puede aplicar el teorema de Rolle y entonces existe $c \in (a, b) : \psi'(c) = 0.$

Pero

$$\psi'(c) = [f(b) - f(a)]\ g'(c) - [g(b) - g(a)]\ f'(c)$$

luego existe $c \in (a, b)$ :

$$[f(b) - f(a)]\ g'(c) = [g(b) - g(a)]\ f'(c)$$

$\square$

No daremos una interpretación geométrica del teorema de Cauchy porque al haber dos funciones definidas en un mismo intervalo la representación más razonable requiere el estudio de curvas parametrizadas las cuales se alejan del objetivo fundamental del curso. Pero sí estudiaremos la aplicación más importante del teorema de Cauchy al cálculo de límites indeterminados que se llama comúnmente regla de L' Hôpital (Francia, 1661-1704).

***Teorema (Regla de L' Hôpital)***

Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$. Entonces, si existe el límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existe el límite

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

y además

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

***Demostración.***

La hipótesis de que existe el límite $\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ supone dos cosas:

1. $(\exists\delta>0): x\in(a-\delta,a+\delta)$ existen $f'(x)$ y $g'(x)$ excepto tal vez para $x=a$.

2. $g'(x)\neq 0$ si $x\in(a-\delta,a+\delta)$ excepto tal vez para $x=a$.

Para poder aplicar el teorema de Cauchy tenemos que tener dos funciones continuas en un intervalo $[a, b]$ y derivables en $(a, b)$. Comencemos pues por definir

$$f(a) = g(a) = 0 \qquad (*)$$

y consideremos el intervalo $[a, x]$ siendo $x \in (a, a + \delta)$. Observemos que $g(x) \neq 0$ pues si no entonces $g(a) = g(x) = 0$ y existe (teorema de Rolle) $c \in (a, x) : g'(c) = 0$ en contra de la suposición 2. Luego, aplicando el teorema de Cauchy a las funciones $f$ y $g$ en el intervalo $[a, x]$ tenemos que

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad c \in (a, x).$$

Entonces, por (*) tenemos que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Ahora bien, si $x \to a$ entonces $c \to a$. Luego

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$\square$

Finalizamos esta sección con un ejemplo de aplicación de la regla de L' Hôpital para un cálculo de límites.

Supongamos que queremos calcular el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{cos^2(x) - 1}{x^2}.$$

Con $f(x) = cos^2(x) - 1$ y $g(x) = x^2$ se satisfacen todas las hipótesis de la regla de L' Hôpital incluidas las observaciones 1 y 2 de la demostración. Luego, derivando numerador y denominador tenemos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\ cos(x)\ sen(x)}{2x} = -1$$

Luego, también

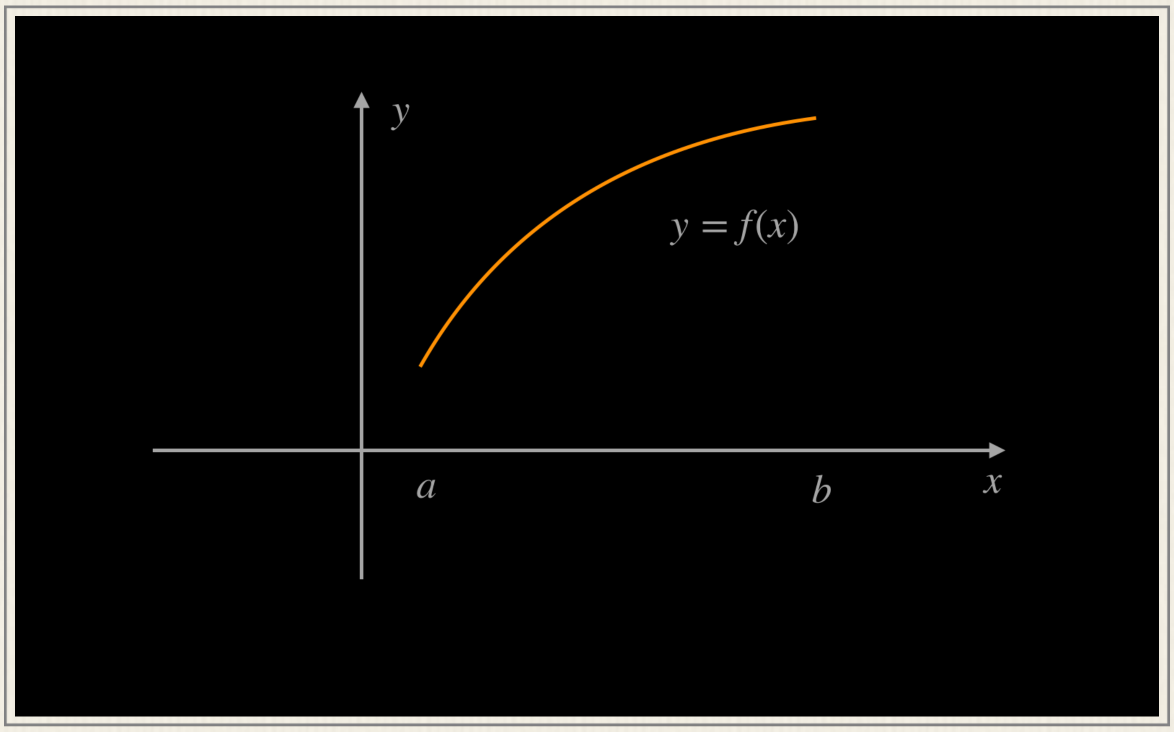
$$\lim_{x\to 0} \frac{cos^2(x) - 1}{x^2} = -1$$

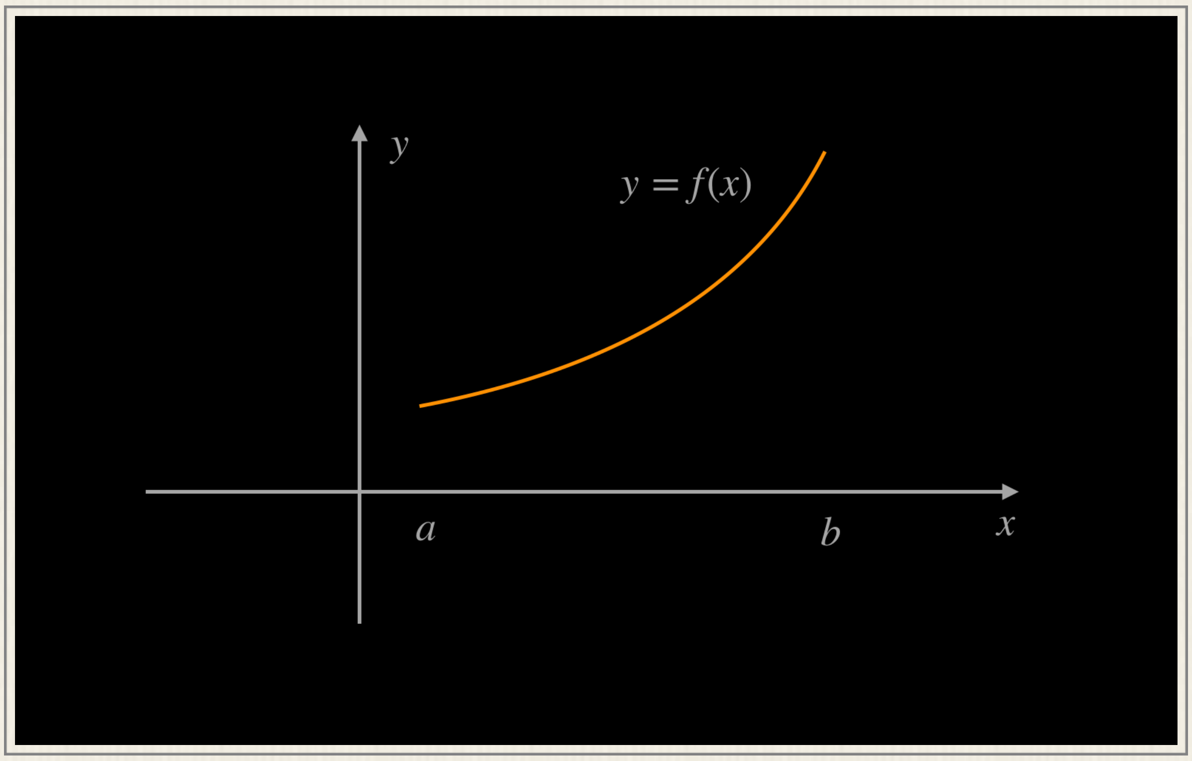
# Convexidad y concavidad

El estudio de la primera derivada de una función es muy útil para determinar si una función es creciente o decreciente en cierto intervalo y también para determinar en ciertas situaciones si un determinado punto $x_0$ es un máximo o un mínimo local de $f$.

Pero miremos las dos gráficas la galería siguiente un instante. Ambas son crecientes pero no parecen tener, al menos intuitivamente, la misma forma si bien no está muy claro qué entendemos por la palabra forma.

La formalización de la frase anterior nos lleva a definir los conceptos de convexidad y concavidad de la gráfica lo cual también nos conducirá al concepto muy asociado de punto de inflexión.



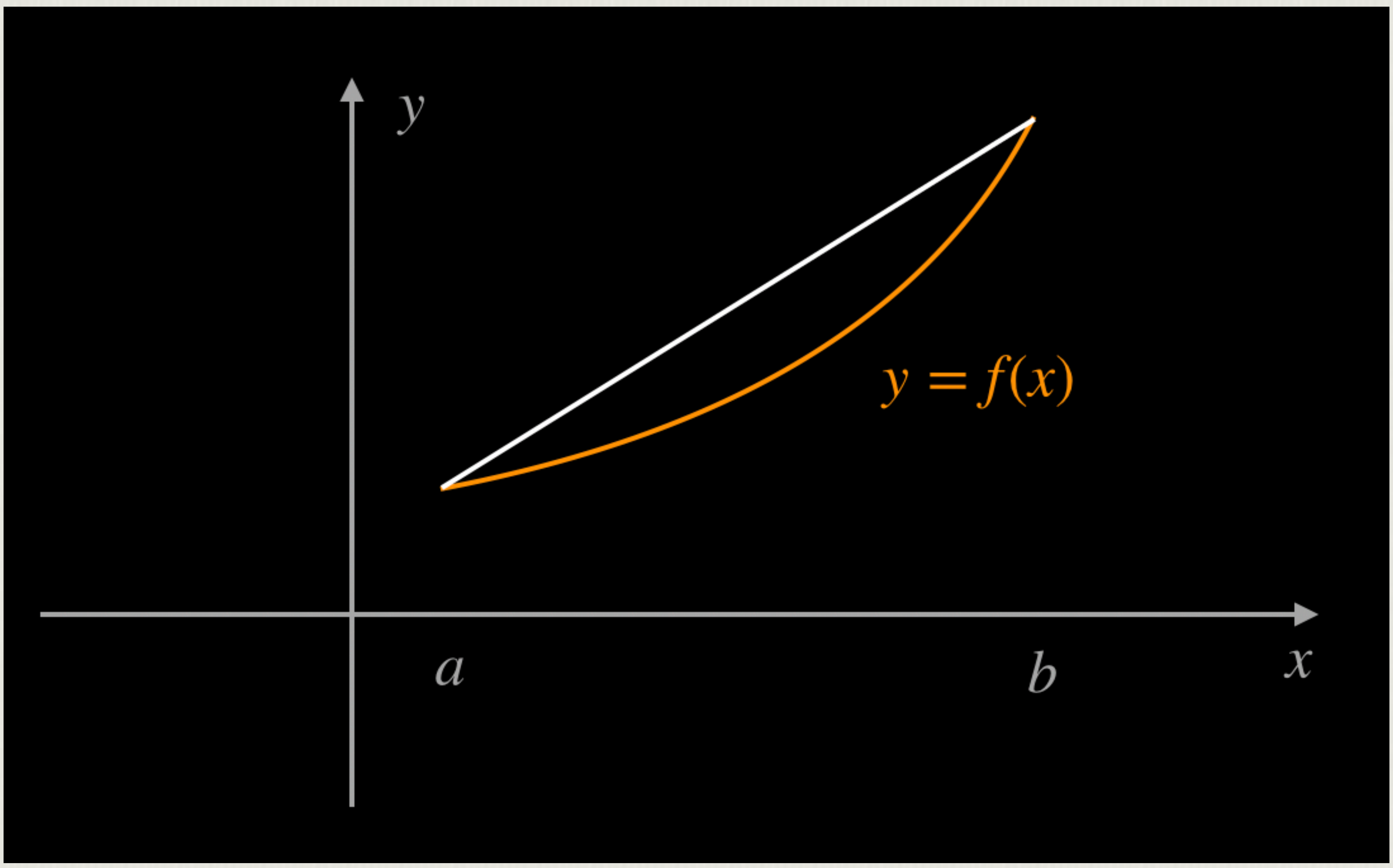




### ***Definición (informal).***

Se dice que una función es convexa en un intervalo si para todos los puntos $a < b$ de dicho intervalo la recta que une dichos puntos cae por encima de la gráfica de $f$.

Algunas veces a las funciones convexas se las llama cóncavas hacia arriba.

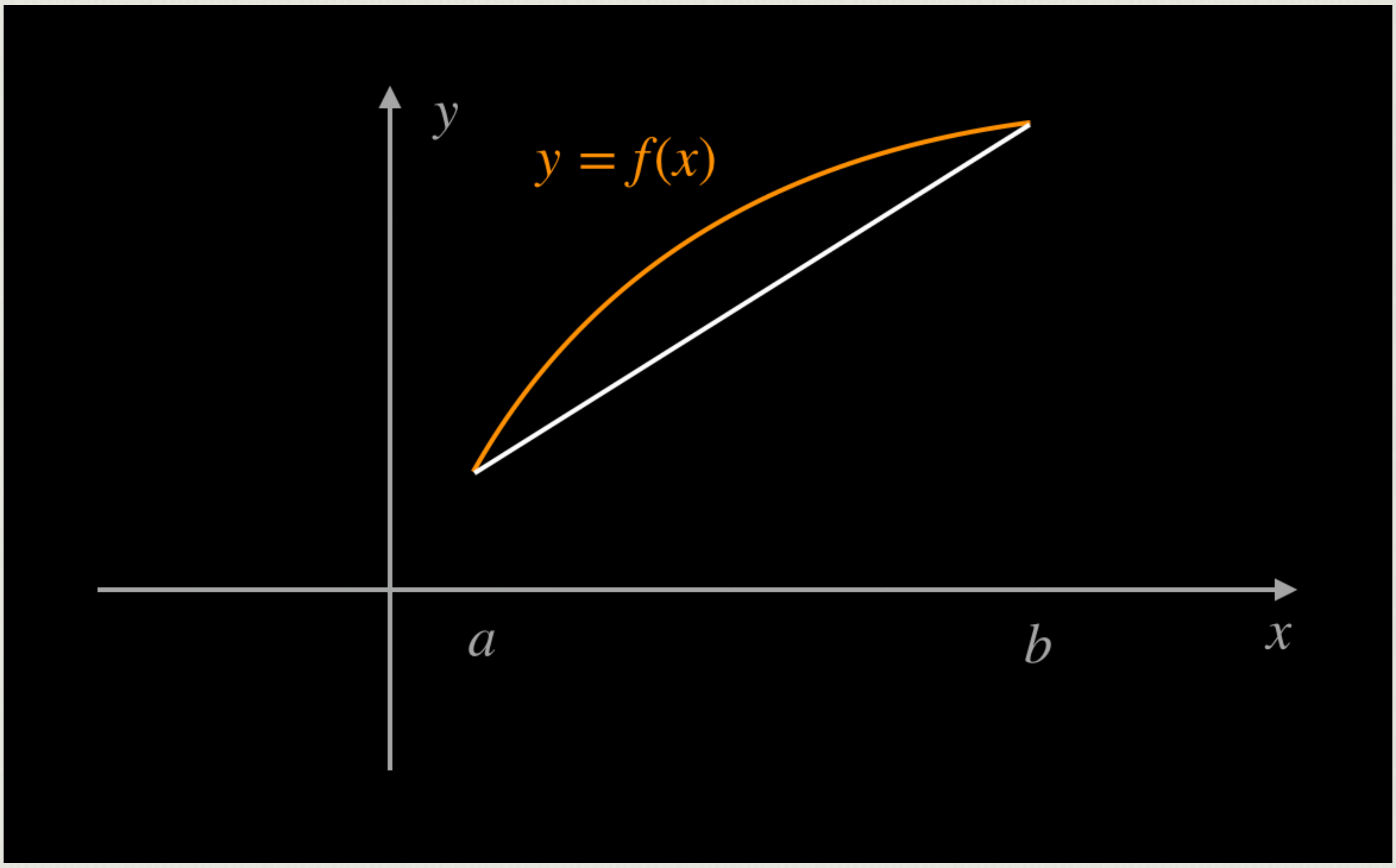
**Imagen.** Funciones convexas.




Gráfica ejemplo de una función convexa o cóncava hacia arriba.

De la misma manera se dice que una función es cóncava o cóncava hacia abajo en un intervalo si para todos los puntos $a < b$ de dicho intervalo la recta que une dichos puntos cae por debajo de la gráfica de $f$. En las imágenes vcinas tenemos la geometría representada por las definiciones anteriores.

**Imagen.** Funciones cóncavas.




Gráfica ejemplo de una función cóncava.

Podemos dar una definición analítica de función convexa y de función cóncava expresando en ecuaciones la frase anterior sobre la posición de las rectas respecto de la gráfica. En efecto, si la recta que pasa por $(a, f(a))$ y por $(b, f(b))$ cae por encima de la gráfica de la función $y = f(x)$ entonces para todo $x \in (a, b)$

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Obviamente la misma deducción con el signo de desigualdad opuesto conduce a definir función cóncava si

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Hasta ahora el estudio de la convexidad o concavidad de la gráfica fue con la ayuda de desigualdades. Lo mismo que en la sección sobre crecimiento y decrecimiento la derivada de una función nos daba mucha información sobre estos conceptos, la segunda derivada de una función nos dará una información similar para la convexidad y concavidad.

***Definición.***

Sea $f$ una función derivable en un intervalo $(a, b)$ y llamemos $g$ a la función derivada, esto es $g(x) = f'(x)$. Si la función $g$ tiene derivada en un punto $x_0 \in (a, b)$ escribiremos

$$g'(x_0) = f''(x_0)$$

y diremos que $f$ es dos veces derivable en $x_0$.

Si el punto $x_0$ puede ser cualquiera diremos que la función $f$ es dos veces derivable y denotaremos y definiremos a esta función

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)'.$$

Por ejemplo, si $f(x) = x^4$ entonces $f'(x) = 4x^3$ y por lo tanto $f''(x) = 12x^2$.

Comenzaremos nuestro estudio sobre concavidad y convexidad con el siguiente lema.

***Lema.***

Si $f$ es continua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b)$, si $f(a)=f(b)$ y si además $f'(x)$ es creciente en $(a,b)$ entonces para todo $x \in (a,b)$

$$f(x) \leq f(a) = f(b).$$

***Demostración.***

Como $f(a)=f(b)$, si existiera un $x_0 \in (a,b)$ tal que

$$f(x_0) > f(a) = f(b)$$

entonces el máximo de $f$ en $(a,b)$, que se alcanza siempre por el teorema de Weierstrass, se alcanza en un punto $x_1 \in (a,b)$ y por supuesto que allí $f'(x_1) = 0$.

Aplicando el teorema de Lagrange en el intervalo $[a,x_1]$ a la función $f$ tenemos que

$$\frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} = f'(c) \qquad c \in (a, x_1)$$

Como $f(x_1)$ es máximo, el numerador anterior es positivo y por lo tanto el cociente. Luego $f'(c) > 0$. Pero $f'(x_1) = 0$ con $c < x_1$. Absurdo, pues $f'$ es creciente.

$\square$

El lema anterior nos permite probar el resultado fundamental de esta sección.

***Teorema.***

Sea $f$ continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$. Si $f'(x)$ es creciente en $(a, b)$ entonces $f$ es convexa.

***Demostración.***

Consideremos la función

$$\psi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

La función $\psi$ es continua en $[a, b]$, derivable en $(a, b)$, $\psi'(x)$ es creciente en $(a, b)$ y además

$$\psi(b) = \psi(a) = f(a).$$

Por eso el lema anterior nos dice que

$$\psi(x) \leq f(a)$$

es decir

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

que es la definición de convexidad.

$\square$

El teorema anterior con la hipótesis de existencia de la segunda derivada de $f$ nos permite deducir el siguiente corolario de extrema utilidad para los ejercicios.

***Corolario.***

Sea $f$ continua en $[a,b]$ y dos veces derivable en $(a,b)$ entonces

1. Si $f''(x) > 0$ en $(a,b)$ entonces $f$ es cóncava hacia arriba en $(a,b)$.
2. Si $f''(x) < 0$ en $(a,b)$ entonces $f$ es cóncava hacia abajo en $(a,b)$.

***Demostración.***

Si $f''(x) > 0$ entonces $f'(x)$ es creciente y se puede aplicar el teorema anterior para concluir que $f$ es cóncava hacia arriba. Un razonamiento análogo se utiliza para probar la segunda parte del corolario.

$\square$

Finalizaremos esta sección con el concepto de punto de inflexión. Probablemente ya haya intuido el lector que si una función derivable es convexa en un intervalo entonces la recta tangente en cualquiera de sus puntos está abajo de la gráfica de la función y si es cóncava en ese intervalo está arriba de la gráfica de la función. Un punto en el cual la recta tangente no está ni por encima ni por debajo de la gráfica de la función se llama un punto de inflexión. Para localizar puntos de inflexión es muy útil este teorema cuyo recíproco es falso.

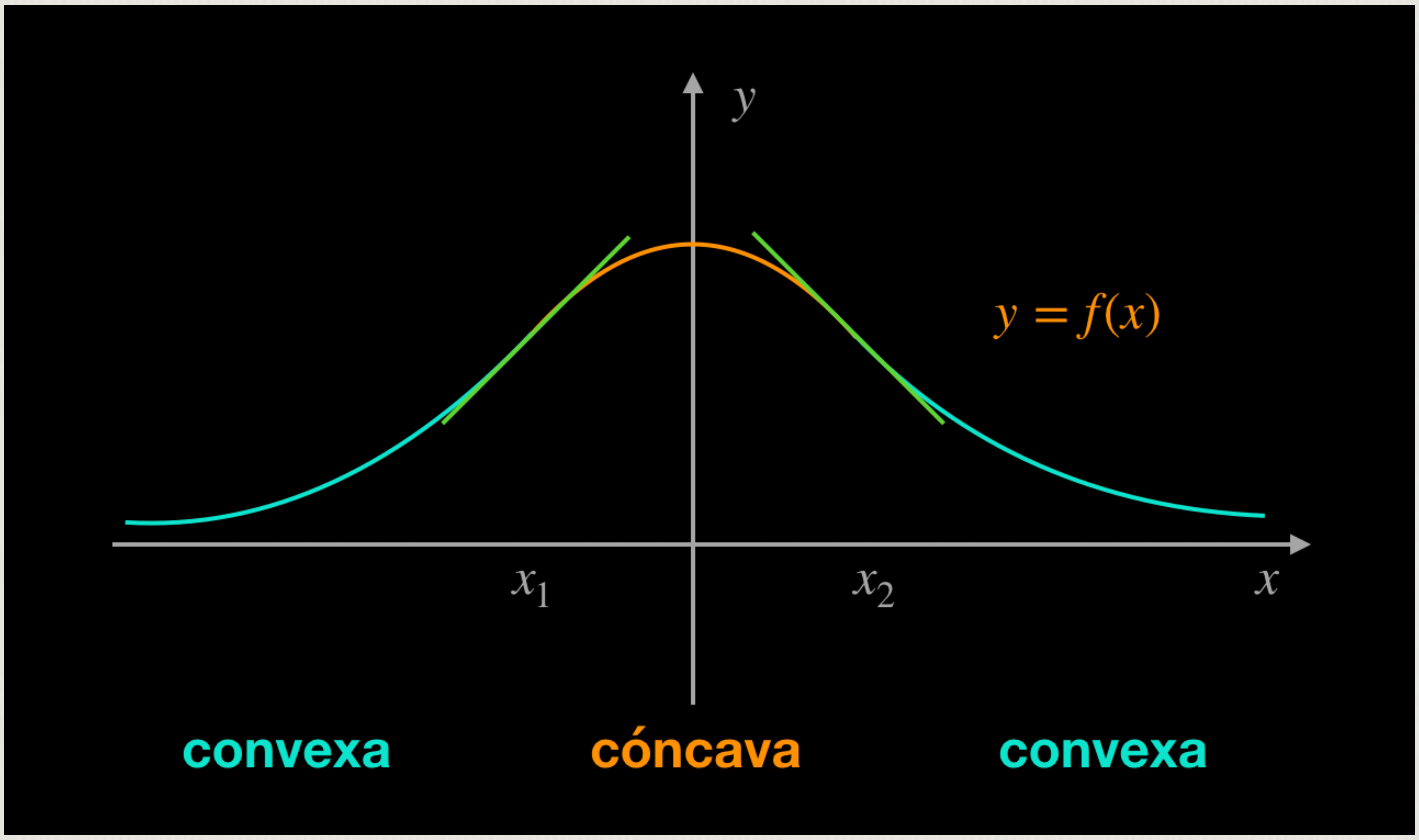
***Teorema.***

Si $f$ es dos veces derivable en $(a, b)$ y $x_0$ es un punto de inflexión entonces

$$f''(x_0) = 0.$$

La demostración de este teorema y de los hechos del párrafo anterior al mismo son similares a otras trabajadas en la sección de crecimiento y decrecimiento y por eso no las daremos. En cambio daremos un gráfico de una función famosa para ilustrar estas ideas, gráfico que arroja más luz que la demostración omitida.

**Imagen.** Puntos de inflexión.




En esta imagen vemos claramente el concepto de punto de inflexión y de concavidad y convexidad de la gráfica de una función.

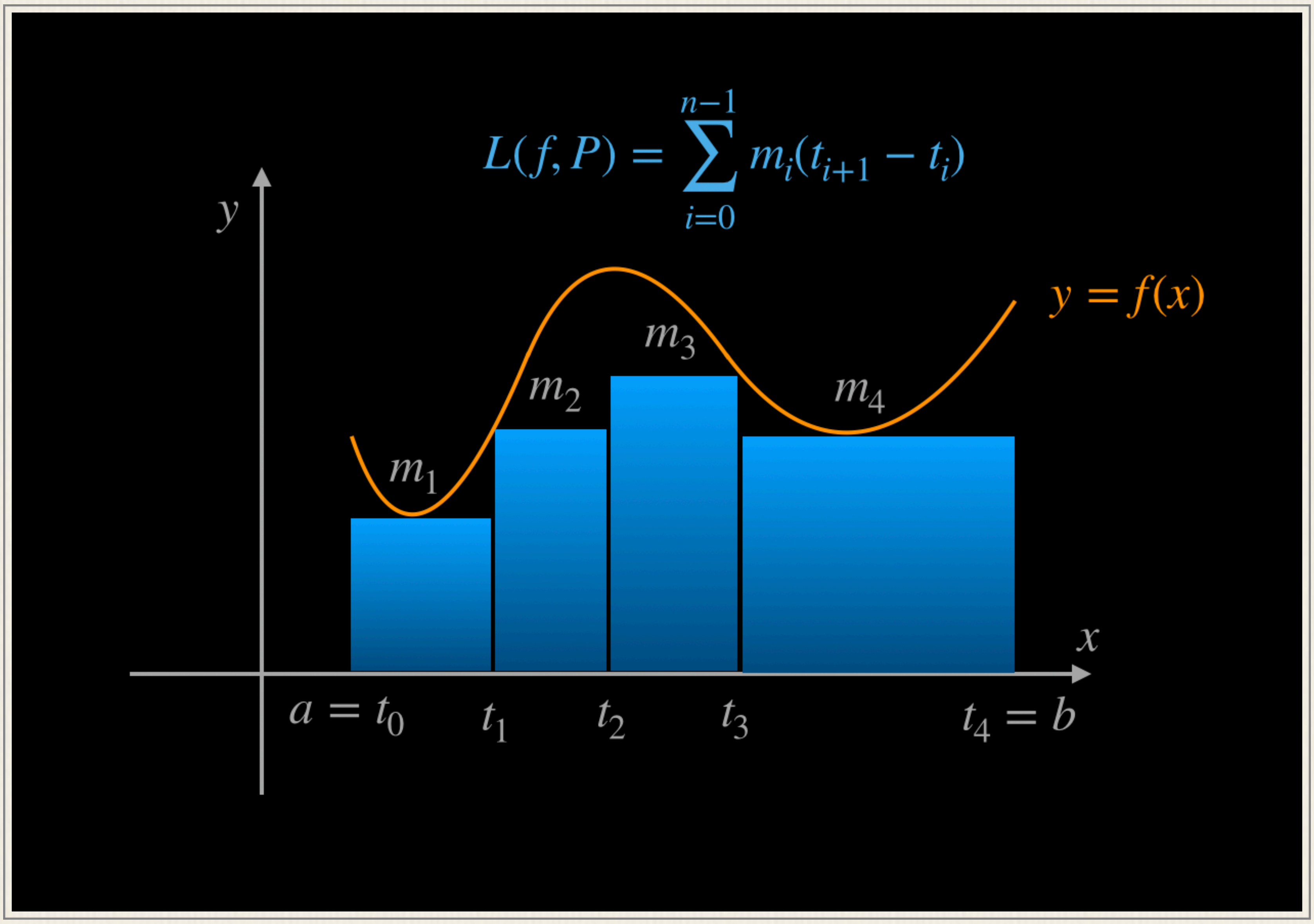
Como un ejercicio fundamental de todo el análisis de funciones tenemos este video para que lo veas cuantas veces haga falta.

Ver video

# Apuntes.

CAPÍTULO 5

# Integrales




El capítulo anterior sobre derivadas fue fundamental para realizar gráficas de funciones, para hallar valores extremos de funciones, para determinar intervalos de crecimiento y decrecimiento, etc. etc. etc. Parecería que queda poco más para estudiar sobre una función. Pero tenemos todavía un problema más: el del área bajo la curva.

Este problema y muchos otros relacionados hacen que las integrales sean un instrumento de gran aplicación para nuestra carrera de ingeniería. Este concepto se utiliza en la noción de trabajo de una fuerza, de longitud de una curva, de masa y de centro de masa de un sistema, de circulación, de flujo, etc. Por eso debemos prestarle una gran atención. En esta primera parte abordaremos el problema de la integral motivándonos con el área, noción que fue la que dio origen a este concepto.

Supongamos que $f : [a, b] \to R$ es continua y además supongamos por ahora que $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$. Dividamos el intervalo $[a, b]$ en cuatro partes

$$[t_0, t_1], \quad [t_1, t_2], \quad [t_2, t_3], \quad [t_3, t_4]$$

donde $t_0 = a$ y $t_4 = b$ como se muestra en la siguiente galería.

En cada subintervalo $[t_i, t_{i+1}]$ la función $f$ toma un valor mínimo $m_i$ y un valor máximo $M_i$. Con ellos formemos las sumas siguientes:

$$L = m_1(t_1 - t_0) + m_2(t_2 - t_1) + m_3(t_3 - t_2) + m_4(t_4 - t_3)$$

$$U = M_1(t_1 - t_0) + M_2(t_2 - t_1) + M_3(t_3 - t_2) + M_4(t_4 - t_3)$$

**Imagen.** Sumas inferiores.

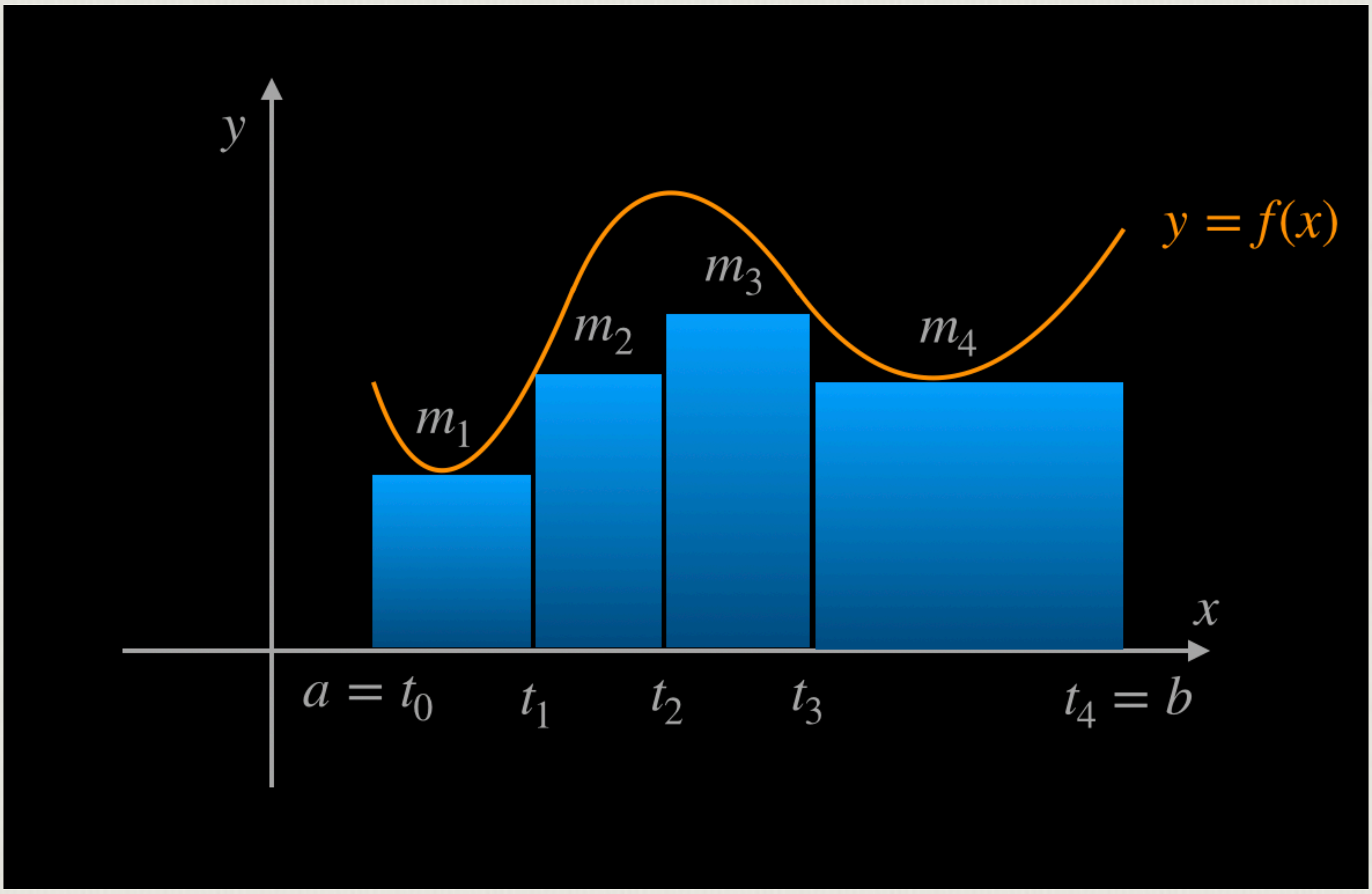
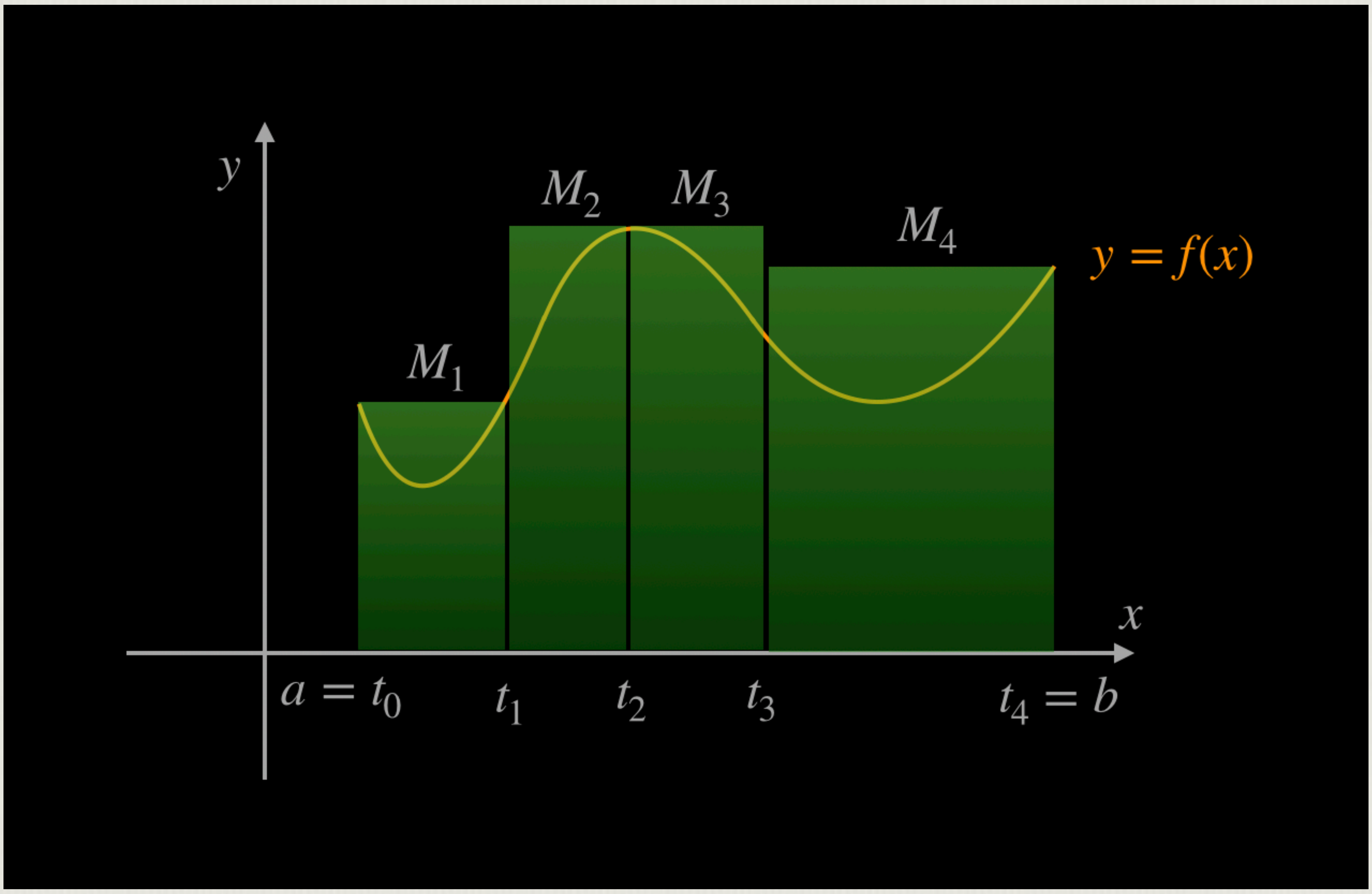


**Imagen.** Sumas superiores.




El significado geométrico de cada término de estas sumas lo vemos en azul en la primera imagen y en verde en la segunda. Parecería entonces que el área comprendida entre el eje $x$, la función positiva $y = f(x)$ y entre las rectas paralelas $x = a$ y $x = b$ que denotaremos $R(f, a, b)$ satisface

$$L \leq R(f, a, b) \leq U.$$

Este es el punto de partida para definir formalmente la noción de integral. Precisemos ahora lo que hemos hecho con los puntos $t_i$.

***Definición.***

Sea $[a, b] \subset R$. Una partición $P$ de $[a, b]$ es un conjunto de puntos $\{a = t_0, t_1, t_2, \ldots, b = t_n\}$.

Por supuesto que hemos definido partición para generalizar lo que hemos hecho con la suma inferior $L$ y con la suma superior $U$.

***Definición.***

Sea $f : [a, b] \to R$ una función acotada y sea $P$ una partición de $[a, b]$. Sean también

$$m_i = \inf\{f(x) : t_i \leq x \leq t_{i+1}\}$$

$$M_i = \sup\{f(x) : t_i \leq x \leq t_{i+1}\}.$$

Se llama suma inferior de $f$ respecto de la partición $P$ al valor

$$L(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \,(t_{i+1} - t_i)$$

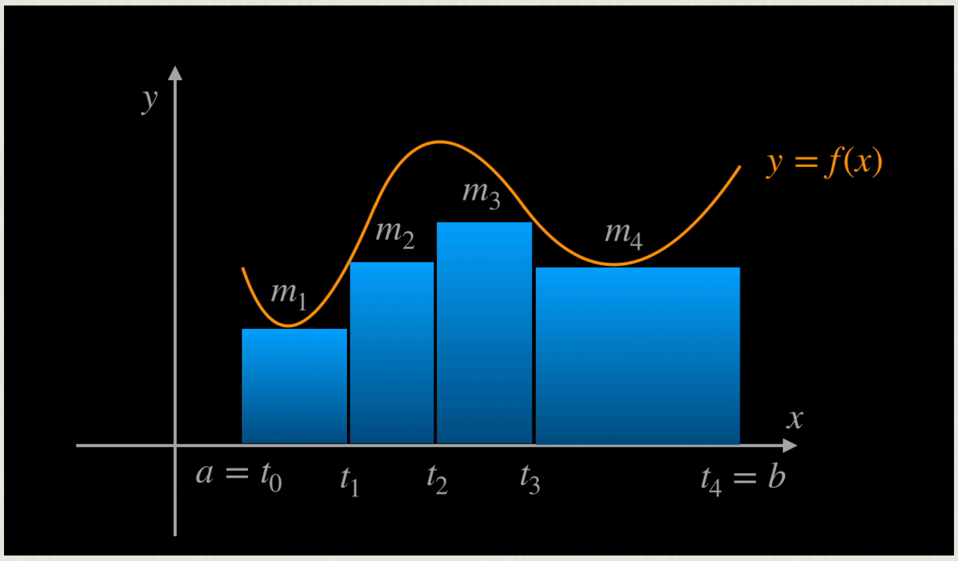
y suma superior de $f$ respecto de la partición $P$ al valor

$$U(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \,(t_{i+1} - t_i).$$

Hemos utilizado al supremo y al ínfimo en la definición anterior porque no hemos pedido que $f$ sea continua, solo acotada. Luego estos supremos e ínfimos existen. Si $f$ es continua como en nuestras imágenes anteriores puede el lector pensar que en lugar de ínfimo y supremo dice mínimo y máximo en estas sumatorias. Pero si la definición no dijera acotada y pidiéramos continuidad, a ciertas funciones que serán integrables no les podríamos aplicar la definición. Finalmente la función de Dirichlet que pronto estudiaremos no será integrable pero si existirán las sumas $L$ y $U$.

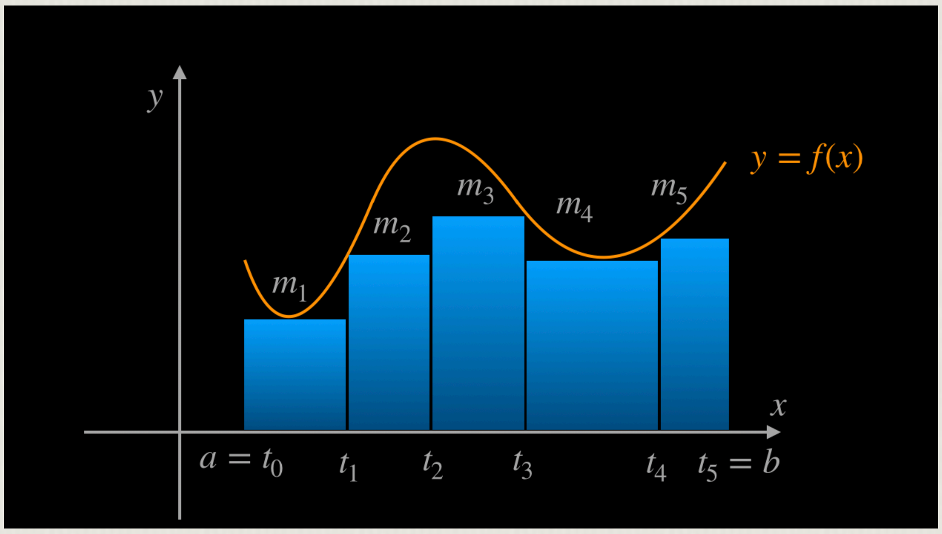
Una propiedad muy intuitiva de las sumas inferiores y superiores es que si a una partición dada $P$ se le agregan puntos entonces las sumas inferiores crecen y las superiores decrecen. Un tecnicismo, que ilustraremos geométricamente, prueba la siguiente propiedad.

**Galería.** Sumas inferiores crecientes.




Una partición con 4 intervalos y su suma inferior. Antes de pasar a la siguiente imagen concentrémonos en el último rectángulo. Pasemos ahora a la siguiente...

**Galería.** Sumas inferiores crecientes.




Vemos que el último rectángulo se dividió en dos rectángulos produciendo un área azul mayor a la de la imagen anterior.

***Lema.***

Si $f:[a,b]\to R$ es acotada y $P$ y $Q$ son dos particiones con $P\subset Q$ entonces

$$L(f,P)\le L(f,Q)$$

y

$$U(f,Q)\le U(f,P).$$

Mirando las imágenes de las sumas inferiores y superiores de las páginas 118 y 119 respectivamente parecería cierto que **cualquier** suma inferior es menor o igual que **cualquier** suma superior. Que esto realmente es así se formaliza con el siguiente teorema.

***Teorema.***

Sea $f:[a,b]\to R$ acotada y sean $P_1$ y $P_2$ dos particiones cualesquiera. Entonces

$$L(f, P_1) \leq U(f, P_2).$$

***Demostración.***

Consideremos la partición formada por todos los puntos de $P_1$ y $P_2$ y llamémosla $Q$, es decir $Q = P_1 \cup P_2$. Entonces, de acuerdo al lema anterior tenemos

$$L(f, P_1) \leq L(f, Q) \leq U(f, Q) \leq U(f, P_2)$$

es decir

$$L(f, P_1) \leq U(f, P_2).$$

$\square$

Recordemos una idea que hemos utilizado para definir el número $e$. Si una sucesión es creciente y acotada superiormente entonces tiene un límite $l$. De la misma manera si una sucesión es decreciente y acotada inferiormente también debe tener un límite. Con esta observación en mente tiene sentido esta gran definición.

***Definición.***

Sea $f : [a, b] \to R$ acotada. Diremos que $f$ es integrable si

$$\sup_P \{L(f, P) : P \text{ es una partición}\} = \inf_P \{U(f, P) : P \text{ es una partición}\}$$

A este número común lo denotaremos $\int_a^b f$ o más comúnmente $\int_a^b f(x)dx$ y lo llamaremos “integral de $f$ entre $a$ y $b$”.

$\square$

De la definición de ínfimo y supremo se puede deducir este teorema que caracteriza a las funciones integrables. La ventaja del mismo reside en se puede definir integrabilidad sin necesidad de recurrir al manejo de ínfimos y supremos que generalmente son difíciles de calcular.

***Teorema.***

Sea $f : [a,b] \to R$ una función acotada. Entonces $f$ es integrable en $[a,b]$ si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe una partición $P$ del intervalo $[a,b]$ tal que

$$U(f,P) - L(f,P) < \epsilon.$$

***Demostración.***

Supongamos que $f$ es integrable en $[a,b]$ y sea $\epsilon > 0$. Por definición de supremo e ínfimo, existen dos particiones $P_1$ y $P_2$ tal que

$$\sup_P L(f,P) \;-\; L(f,P_1) < \frac{\epsilon}{2}$$

$$U(f,P_2) \;-\; \inf_P U(f,P) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea $Q = P_1 \cup P_2$. Entonces

$$\sup_P L(f,P) \;-\; L(f,Q) < \frac{\epsilon}{2}$$

$$U(f, Q) \ - \ \inf_P U(f, P) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Ahora bien, como $f$ es integrable

$$\sup_P L(f, P) = \inf_P U(f, P)$$

y entonces, sumando miembro a miembro

$$U(f, Q) \ - \ L(f, Q) < \epsilon.$$

Recíprocamente, supongamos que existe una partición $P$ tal que $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$. Entonces, como

$$L(f, P) \leq \sup_P L(f, P)$$

y

$$\inf_P U(f, P) \leq U(f, P)$$

tenemos que

$$\sup_P L(f,P) - \inf_P U(f,P) < \epsilon.$$

Pero como esta desigualdad vale para todo $\epsilon > 0$ entonces

$$\sup_P L(f,P) = \inf_P U(f,P)$$

es decir, $f$ es integrable en $[a,b]$.

$\square$

Antes de pasar al siguiente teorema daremos dos ejemplos de sumas inferiores y superiores con sus ínfimos y supremos sobre las distintas particiones para ilustrar la teoría que hemos desarrollado.

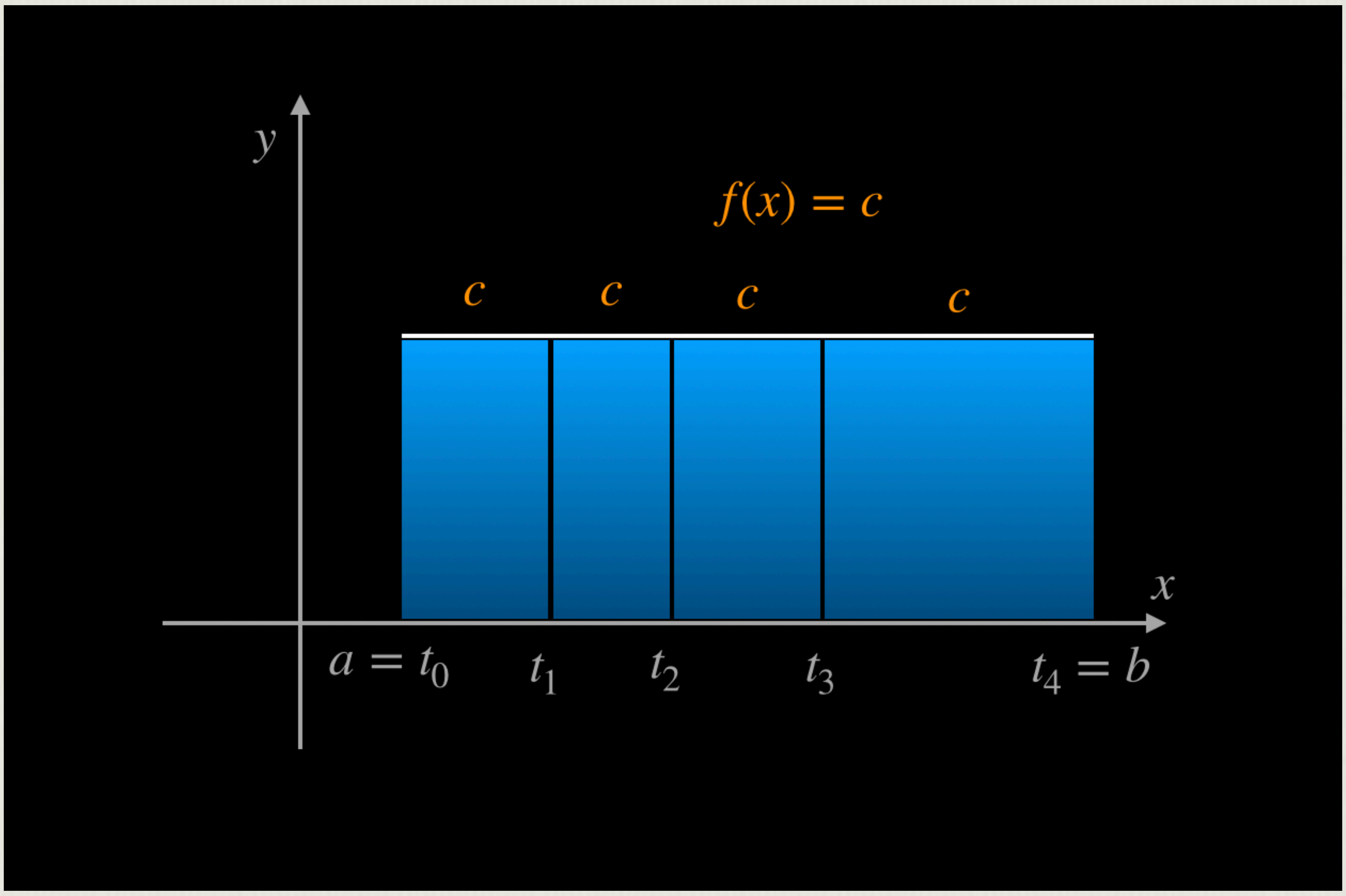
Comencemos por ver si es integrable la función $f(x) = c$ en un intervalo $[a,b]$. El gráfico lo tenemos en la primera imagen de la siguiente galería junto con una partición.

En este caso las sumas inferiores son iguales a las sumas superiores

$$L(f,P)=\sum_{i=0}^{n-1}c(t_{i+1}-t_i)=c(b-a)$$

$$U(f,P)=\sum_{i=0}^{n-1}c(t_{i+1}-t_i)=c(b-a)$$

**Imagen.** Función integrable.



Luego,

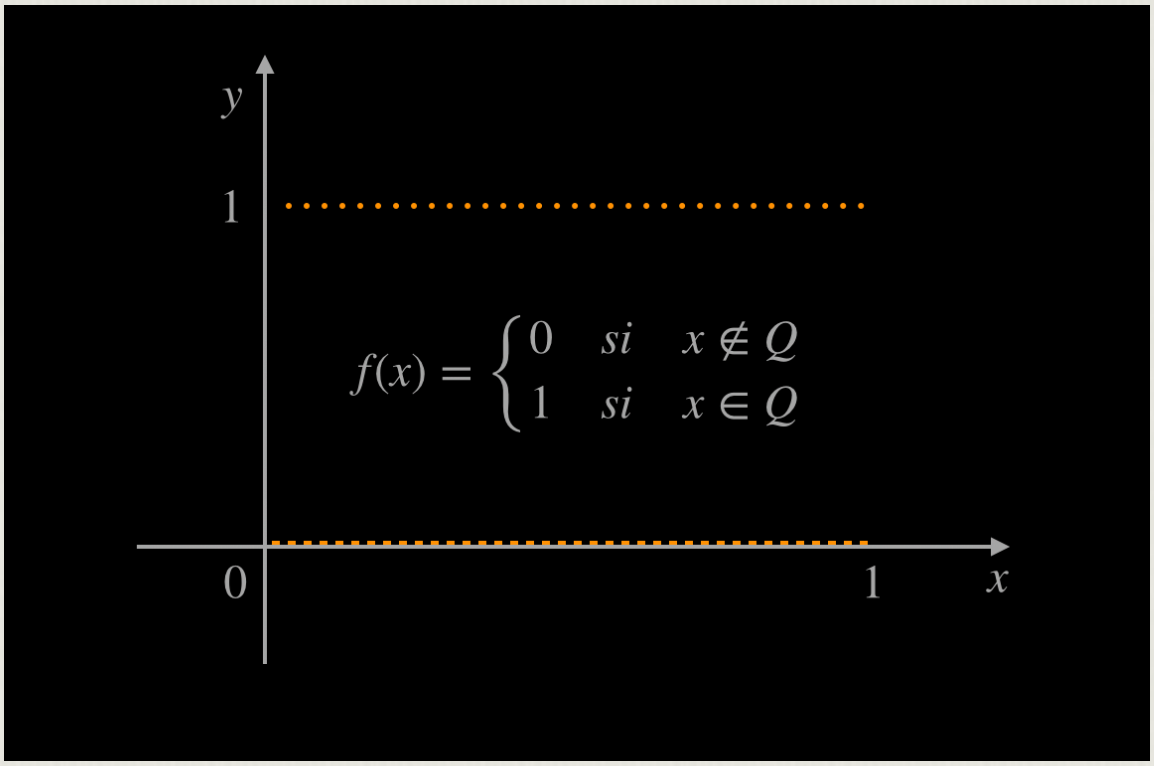
$$\sup_P L(f,P) = \inf_P U(f,P) = c(b-a)$$

y concluimos $f$ es integrable con valor

$$\int_a^b c = c(b-a).$$

Pasemos ahora a considerar una importante función a nivel conceptual para toda la matemática. La función a la

**Imagen.** Función no integrable.




"Gráfica" de la función de Dirichlet.

que hacemos referencia se llama función de Dirichlet y se define para cada $x \in R$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in Q \\ 0 & si \quad x \notin Q \end{cases}$$

La función $f$ si bien es discontinua para todo $x \in R$ es acotada. Por lo tanto, se le pueden calcular las sumas inferiores y superiores. Recordando que en todo intervalo, por pequeño que sea, hay puntos racionales e irracionales vemos, en función de la definición de $f$ que para toda partición $P$ del intervalo $[0,1]$ tenemos

$$L(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} 0(t_{i+1} - t_i) = 0$$

$$U(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} 1(t_{i+1} - t_i) = 1.$$

Vemos entonces que

$$\inf_P U(f,P) = 1 \neq 0 = \sup_P L(f,P)$$

es decir, la función $f$ no es integrable. La "gráfica" de la función de Dirichlet la vemos en la imagen de la página 130.

Recordemos ahora que una función continua en un intervalo $[a,b]$ es acotada y por lo tanto se le puede aplicar toda la teoría recién desarrollada. Por eso no debe sorprendernos el enunciado de este teorema que no probaremos pero que es bastante intuitivo.

***Teorema.***

Sea $f : [a,b] \to R$ una función continua. Entonces $f$ es integrable.

$\square$

Y finalizamos esta sección introductoria con el siguiente teorema, también bastante predecible.

***Teorema.***

Sean $f : [a,b] \to R$ y $g : [a,b] \to R$ integrables en $[a,b]$ y sea $c \in R$. Entonces son integrables las funciones $f+g$ y $cf$ y además

$$\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$$

$$\int_a^b cf = c\int_a^b f$$

$\square$

# Teorema fundamental del cálculo

En la introducción a este capítulo hemos definido la noción de integral de una función en un intervalo y aprendimos que si $f$ es positiva ese número representa "el área bajo la curva". Pero parece un misterio cómo hallar en un caso cualquiera las sumas inferiores y superiores, calcular supremo e ínfimo, verificar que coinciden y recién ahí obtener $R(f, a, b)$.

En esta sección veremos que esto no es necesario, que independientemente de las particiones, de las sumas inferiores y superiores, de los supremos e ínfimos, etc. podremos calcular $R(f, a, b)$. Pero más increíble aún es que nuestro problema quedará resuelto con la ayuda del elemento creado en el capítulo 3: la derivada.

***Teorema.***

Sea $f : [a, b] \to R$ continua. Sean $m$ y M el mínimo y el máximo respectivamente de $f$ en $[a, b]$. Entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

***Demostración.***

Es trivial que una partición de $[a, b]$ es precisamente $[a, b]$. Luego

$$m(b-a) \leq \sup_P L(f, P) \leq \inf_P U(f, P) \leq M(b-a).$$

Como $f$ es continua $f$ es integrable. Luego

$$\sup_P L(f, P) = \int_a^b f = \inf_P U(f, P)$$

y por lo tanto

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

$\square$

Ahora vamos a presentar uno de los teoremas más importantes de toda la matemática. El teorema establece una relación impensada entre la derivada de una función y su integral. Pero para presentarlo correctamente expliquemos primero una idea importante.

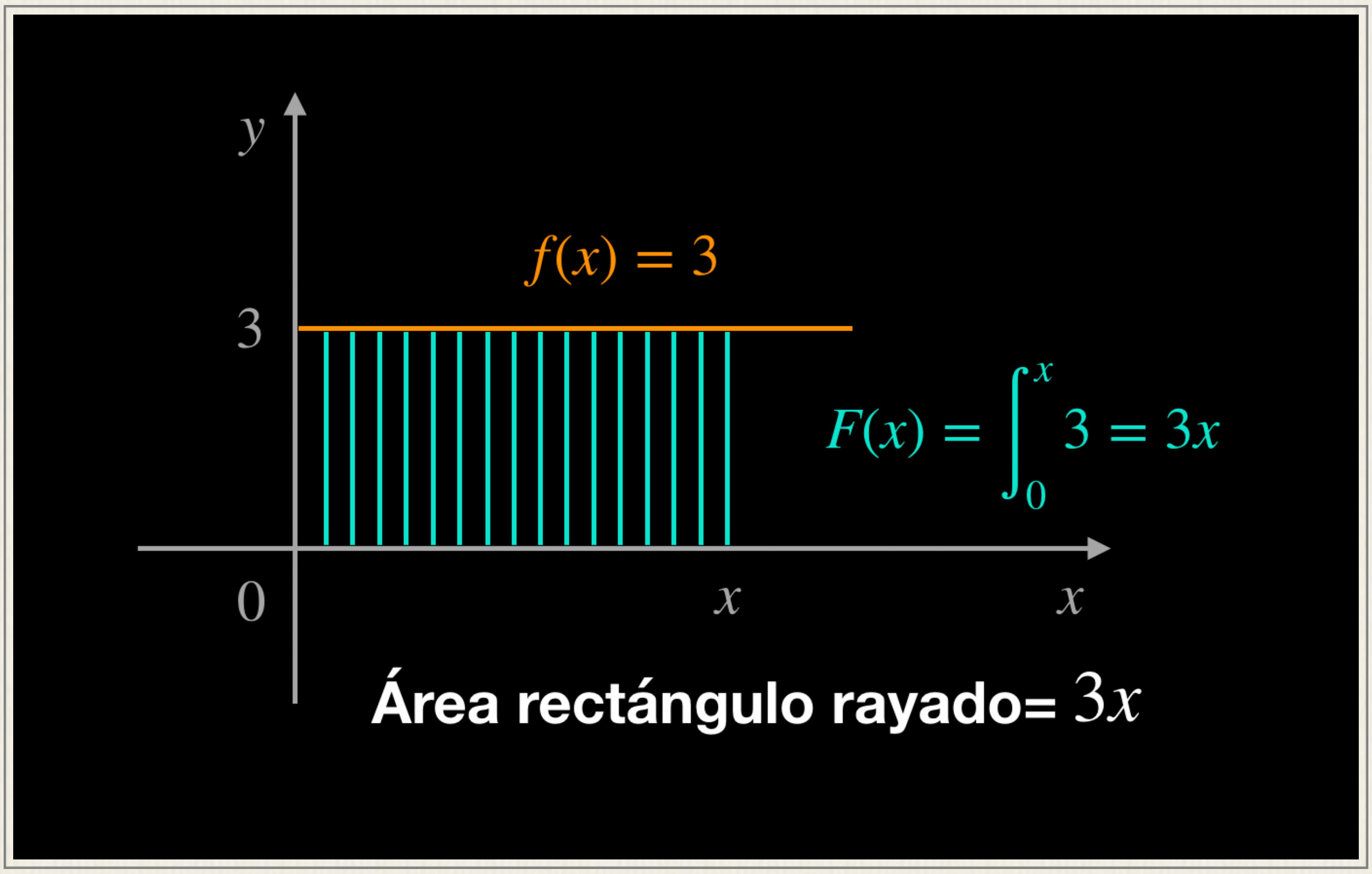
Supongamos que $f$ es una función continua en $[a,b]$ y que $x \in [a,b]$. Entonces podemos definir una función

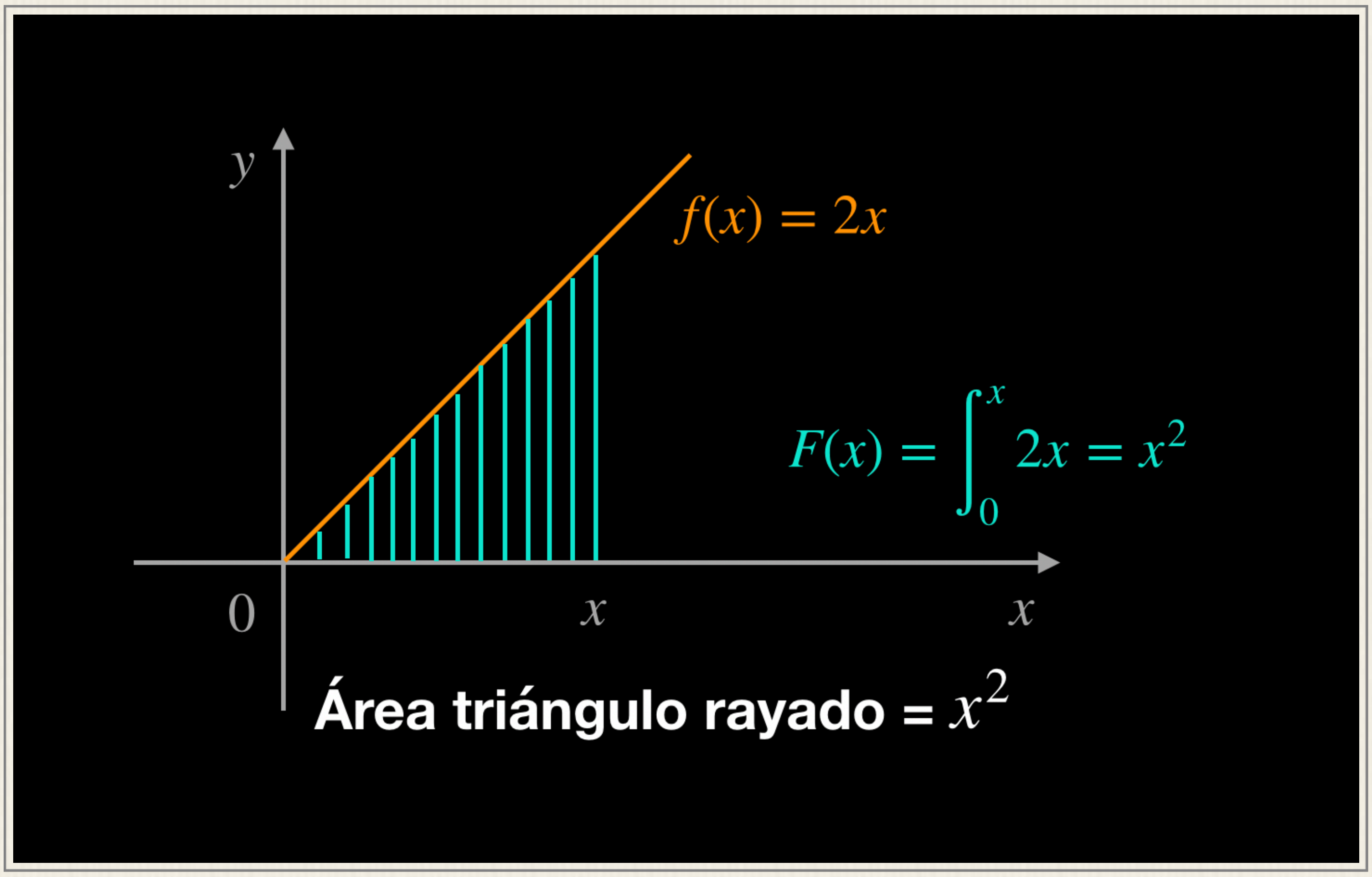
$$F(x) = \int_a^x f$$

cuya interpretación geométrica es el área con signo desde $a$ hasta $x$ como se muestra en la galería siguiente para varios valores de $x$ y para dos ejemplos particulares.

De estos dos ejemplos vemos que si $f(x) = 3$ y $a = 0$ entonces $F(x) = 3x$, y que si $f(x) = 2x$ y $a = 0$ entonces $F(x) = x^2$. Parecería que la función $F$ satisface que

$$F'(x) = f(x).$$




Que esto es siempre así es el contenido del siguiente teorema enorme.

***Teorema fundamental del cálculo.***

Sea $f : [a,b] \to R$ una función continua y sea

$$F(x) = \int_a^x f$$

Sea $c \in [a,b]$. Entonces $F$ es derivable en $c$ y además $F'(c) = f(c)$.

***Nota.*** En los extremos del intervalo se entienden derivadas laterales.

***Demostración.***

Consideremos la diferencia

$$F(c+h) - F(c) = \int_a^{c+h} f - \int_a^c f = \int_c^{c+h} f.$$

Sean

$$m_h = \{\min \ f(x) : x \in [c, c+h]\}$$

$$M_h = \{\max \ f(x) : x \in [c, c+h]\}.$$

Entonces, de acuerdo al teorema anterior tenemos que

$$m_h \ h \leq \int_c^{c+h} f \leq M_h \ h$$

es decir,

$$m_h \ h \leq F(c+h) - F(c) \leq M_h \ h.$$

Luego, si $h > 0$

$$m_h \leq \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leq M_h.$$

Pero como $f$ es continua en $c$ tenemos que

$$\lim_{h \to 0} m_h = \lim_{h \to 0} M_h = f(c)$$

y por lo tanto

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = F'(c) = f(c).$$

Un trabajo similar sea realiza si $h < 0$ y se completa la demostración del teorema.

$\square$

***Notación.***

A partir de ahora utilizaremos la notación de Leibniz para las integrales. Esta notación es

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx.$$

Esta notación está justificada en que la variable $x$ no tiene nada que ver con el número de la izquierda. Lo mismo ocurre con la noción de límite. Por ejemplo, el

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

es el mismo que

$$\lim_{t \to 2} t^2 = 4.$$

Tal vez hubiese sido más conveniente escribir, ya que el límite depende solo del punto y de la función, y no del nombre de la variable, la última de las siguientes igualdades

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{t \to a} f(t) = \lim_{\to a} f$$

pero utilizaremos las otras notaciones más comunes.

Volviendo al teorema fundamental del cálculo el mismo admite una extensión cuando los límites son funciones derivables de $x$. Concretamente si

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt \Longrightarrow F'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x).$$

Para entender bien esta última igualdad tenemos este importante video.

**Ver video**

Terminamos esta sección con un teorema que reduce en muchos casos el cálculo de una integral $\int_a^b f(x)dx$ a una trivialidad. Algunas veces a este teorema se lo llama segundo teorema fundamental del cálculo y otras veces se lo llama regla de Barrow.

***Teorema.***

Sea $f : [a, b] \to R$ continua y sea $g$ una función continua tal que $g' = f$. Entonces

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a).$$

***Demostración.***

Sea

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Entonces, de acuerdo al teorema fundamental del cálculo $F'(x) = f(x) = g'(x)$. Por lo tanto

$$F(x) = g(x) + c.$$

Por otro lado

$$F(a) = 0 = g(a) + c$$

de lo que deducimos

$$c = -\, g(a).$$

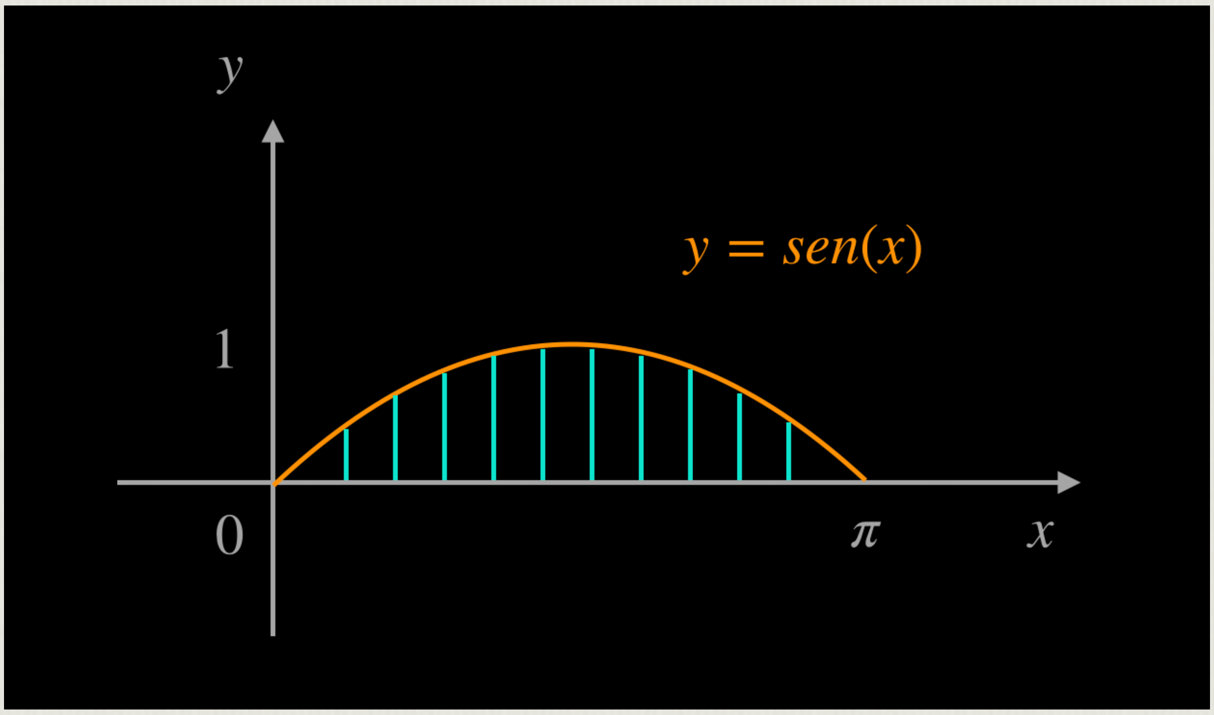
Luego

$$\int_a^x f(t)dt = g(x) - g(a).$$

En particular, evaluando en $x = b$ tenemos

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a).$$

**Imagen.** Regla de Barrow




Vemos la potencia de la regla de Barrow para hallar el área en turquesa con solo una cuenta.

□

Ilustraremos este teorema con esta interesante pregunta. Consideremos la función $f(x) = sen(x)$. ¿Qué área es la rayada en la imagen anterior?

Respuesta trivial a esta altura:

$$\int_0^\pi sen(x)dx = -\,cos(x)\Big|_0^\pi =$$

$$-cos(\pi) + cos(0) = -\,(-1) + 1 = 2.$$

Para ilustrar la potencia del teorema fundamental del cálculo y de la regla de Barrow intente el estudiante calcular esta área a mano.

Finalizamos esta sección con este importantísimo ejercicio de área entre dos curvas.

**Ver video**

# Integración por sustitución

Ahora que ya tenemos bastante teoría de la integral nos enfocaremos en distintos métodos para hallar primitivas. El primer método que estudiaremos se llama método de sustitución y está basado en la regla de la cadena para derivar funciones compuestas.

***Teorema (Integración por sustitución).***

Sean $f, g'$ dos funciones continuas. Entonces

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b (f \circ g)\ g'$$

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = \int_a^b f(g(x))\ g'(x)dx.$$

***Demostración.***

Sea $F$ una primitiva de $f$. Entonces el lado izquierdo de la primera igualdad es

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Por otro lado, como

$$(F \circ g)' = (F' \circ g)\ g' = (f \circ g)\ g'$$

vemos que $F \circ g$ es una primitiva de $(f \circ g)\ g'$. Luego, el lado derecho de la igualdad es también

$$\int_a^b (f \circ g)\ g' = (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a) = F(g(b)) - F(g(a)).$$

$\square$

Como un ejemplo de integración por sustitución resolveremos formalmente

$$\int_a^b 4sen^3(x)\ cos(x)dx.$$

Definiendo $f(u) = 4u^3$ vemos que $F(u) = u^4$ y definiendo $g(x) = sen(x)$ vemos que $g'(x) = cos(x)$. Con esto vemos que el factor $4sen^3(x)$ puede escribirse $f(g(x))$. Por eso nuestra integral es

$$\int_a^b (f \circ g)(x)\ g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

Como $F(u) = u^4$ tenemos que esta última integral es

$$sen^4(b) - sen^4(a).$$

***Nota.***

En general, no hace falta tanto formalismo para resolver esta integral. Los pasos a seguir son dos:

1. Sustituir $g(x)$ por $u$
2. Sustituir $g'(x)dx$ por $du$.

Como un ejemplo de integración por sustitución tenemos este interesante video en el cual calculamos el área comprendida entre dos curvas pero ahora una de las integrales debemos calcularla por el método de sustitución.

**Ver video**

# Integración por partes

Pasamos ahora el estudio de otro importante método de integración llamado integración por partes. El mismo se basa en el siguiente teorema.

***Teorema. (Integración por partes)***

Sean $f, g : R \to R$ funciones cuyas derivadas $f', g'$ son continuas. Entonces

$$\int fg' = fg - \int f'g.$$

***Demostración.***

La fórmula de la derivada de un producto nos permite escribir

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Luego, despejando

$$fg' = (fg)' - f'g$$

de lo cual, integrando ambos miembros

$$\int fg' = \int (fg)' - \int f'g.$$

Tomando como una primitiva de $\int (fg)'$ a $fg$ tenemos

$$\int fg' = fg - \int f'g.$$

$\square$

Ilustremos cómo hallar una primitiva de la función $h(x) = xe^x$. Introduciendo, en concordancia con el teorema anterior, $f(x) = x$ y $g'(x) = e^x$ tenemos que nuestro primer miembro es

$$\int fg' = fg - \int f'g.$$

Puesto que entonces $g(x) = e^x$ tenemos que

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x.$$

Aprovechamos un video que tenemos sobre integración por partes para introducir un concepto importante llamado integral impropia de primera especie. Supongamos que $f : [a, \infty) \to R$ es una función continua. Entonces tiene sentido calcular para cada $b \geq a$

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Como estamos suponiendo que el límite varía con $b$, esta integral es función de $b$. Luego se puede tomar límite cuando $b \to \infty$ escribiendo

$$\lim_{b\to\infty} \left( \int_a^b f(x)dx \right).$$

Si este límite existe y es finito diremos que la integral converge y su valor es ese límite y en cualquier otro caso diremos que la integral diverge. Formalmente, introduzcamos la notación

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\left(\int_a^b f(x)dx\right).$$

Por ejemplo, si queremos calcular

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$$

tenemos, por definición que

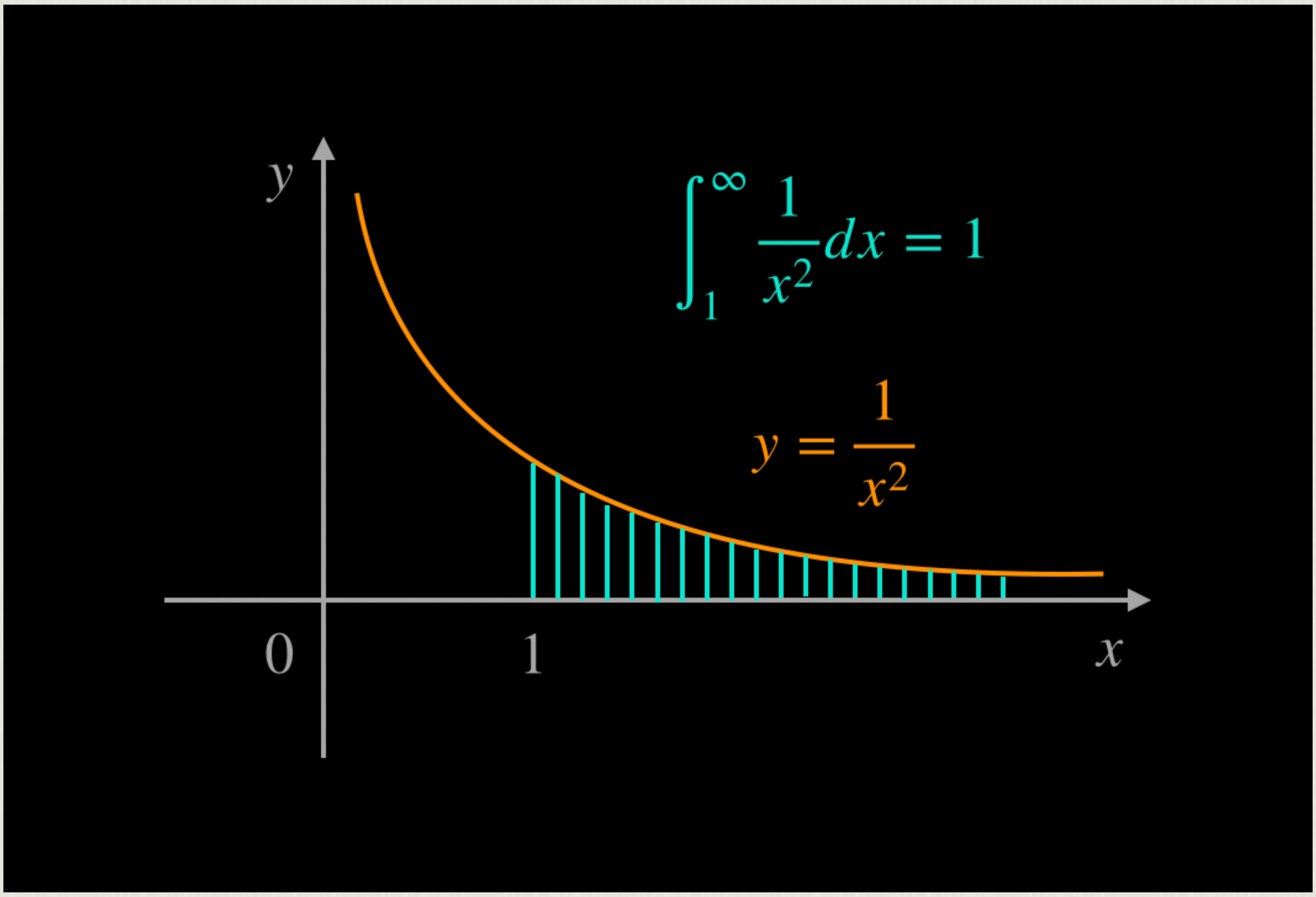
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left(\int_1^b \frac{1}{x^2}dx\right) = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\Big|_1^b\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1.$$

Luego la integral es convergente y su valor es $1$.

La interpretación de este número $1$ la vemos en la siguiente imagen.

**Imagen.** Interpretación geométrica de la integral impropia.




El área rayada en turquesa es $1$. Luego la integral calculada es convergente.

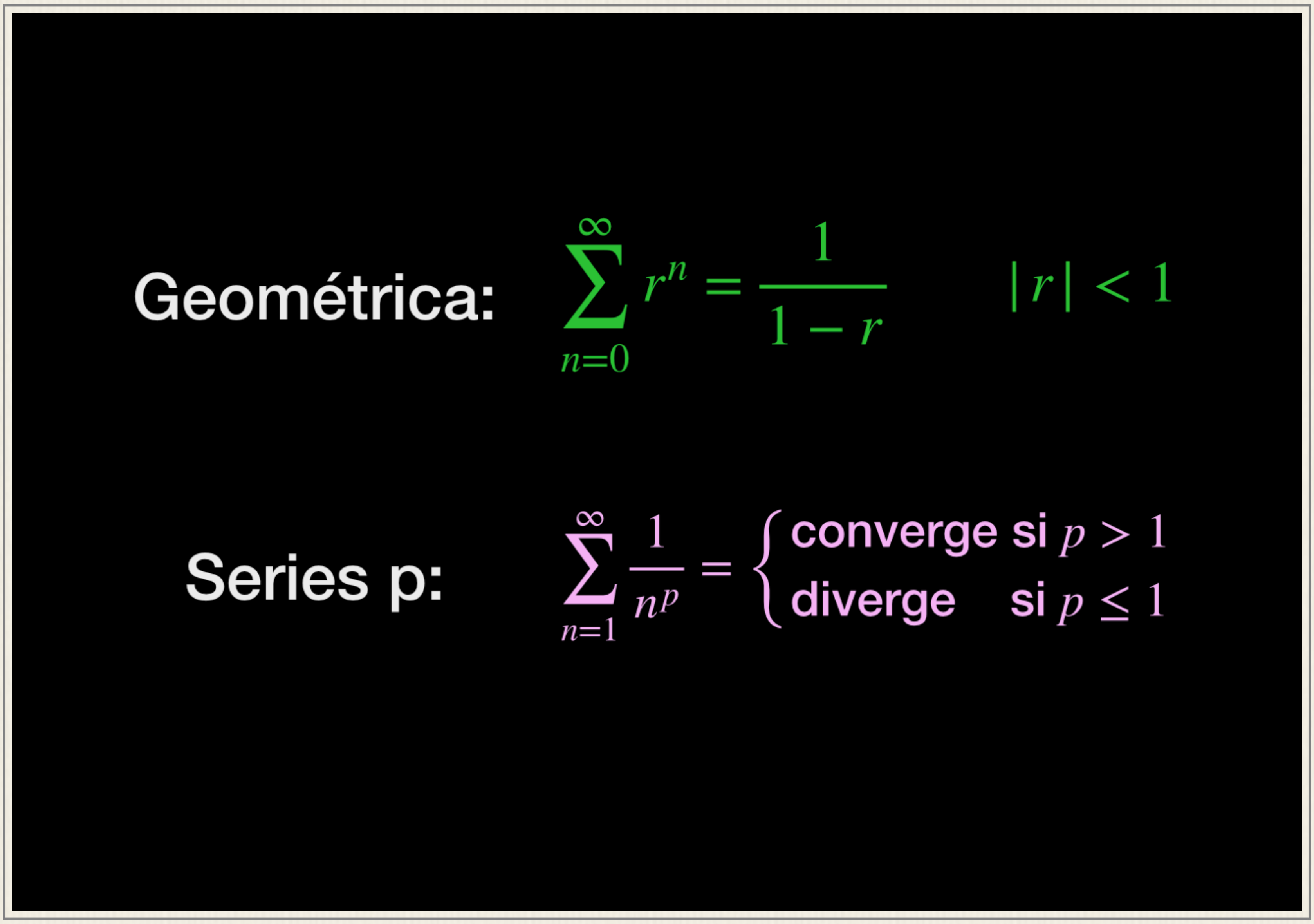
El video al cual hacíamos referencia más arriba contiene este ejercicio interesante sobre integrales impropias donde la primitiva debemos calcularla por el método de integración por partes. Al mismo tiempo repasamos una vez más este importante concepto.

**Ver video**

# Apuntes.

CAPÍTULO 6

# Series




Este capítulo final se dedica al estudio de las series. Estudiaremos conceptos similares a los de convergencia y divergencia de integrales y nos dedicaremos casi todo el capítulo al estudio de otro tipo de variable: la variable discreta.

Antes de empezar formalicemos lo que entendemos por una sucesión. Intuitivamente los siguientes renglones son sucesiones:

$$1,2,3,4,5,\ldots$$

$$1,4,9,16,25,36,\ldots$$

$$1,-1,1,-1,1,-1,\ldots.$$

Parece entonces natural definir una sucesión del modo siguiente.

***Definición.***

Una sucesión de números reales es una función $f: N \to R$.

***Notación.***

El valor de la función en el elemento del dominio $n \in N$ lo denotaremos $a_n$, es decir: $f(n) = a_n$.

Ahora sí, ya podemos definir lo que es una serie.

***Definición.***

Sea $a_n$ una sucesión. La sucesión

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

se llama sucesión de sumas parcial de $a_n$ o serie de la sucesión $a_n$. Si la sucesión de sumas parciales $s_n$ tiene límite $S \in R$ diremos que la serie converge y anotaremos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \left( \sum_{k=0}^{n} a_k \right) = S$$

y en cualquier otro caso diremos que la serie diverge. Si además sabemos que el límite de la sucesión $s_n$ es infinito escribiremos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty.$$

Por ejemplo, consideremos la serie geométrica de razón $r = \dfrac{1}{2}$ siguiente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots.$$

Las sumas parciales en este caso son

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} = s_n.$$

Multiplicando ambos miembros por $\dfrac{1}{2}$ obtenemos

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} s_n$$

y haciendo la "primera menos la segunda" obtenemos

$$1-\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}s_n.$$

Luego

$$s_n=2-\frac{1}{2^n}.$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} s_n=2$$

tenemos, por la definición que acabamos de dar, que la serie converge y su suma es igual a $2$, es decir

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=2.$$

En general, a una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

se la llama serie geométrica con primer término $a$ y razón $r$. Imitando la idea anterior es inmediato que si $|r| < 1$ entonces la serie converge y su suma es

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

y para todo valor de $r$ tal que $|r| \geq 1$ la serie diverge.

Como otro ejemplo de una serie divergente consideremos la serie, llamada armónica, siguiente:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots.$$

Esta suma es mayor o igual que la siguiente

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \ldots.$$

De lo cual obtenemos que nuestra serie armónica es mayor o igual que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots = \infty.$$

Luego la serie armónica diverge.

En el ejemplo de la serie geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$ y en de la serie armónica el término general $a_n$ tiende a cero. La serie armónica prueba entonces la condición $a_n \to 0$ no es suficiente para que la serie converja. Pero sí es cierto que esta condición es necesaria para la convergencia. Concretamente tenemos el siguiente teorema.

***Teorema.***

Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge entonces el término general $a_n$ tienda a cero.

***Demostración.***

Puesto que la serie converge, existe y es finito el límite

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S.$$

Por otro lado,

$$a_n = s_n - s_{n-1}.$$

Luego tomando límite cuando $n \to \infty$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = S - S = 0.$$

$\square$

# Series de términos positivos

De la misma manera que un número es divisible por 3 si y solo si la suma de sus cifras decimales es múltiplo de 3, aún cuando no podamos decir cuánto es la cuenta al dividir ese número por 3 existen, similarmente a la existencia de criterios de divisibilidad, criterios de convergencia o divergencia de series.

***Definición.***

Un serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ se llama de términos positivos si $a_n > 0 \quad \forall n \in N_0$.

Para este tipo de series existen varios criterios el primero muy intuitivo que se llama criterio de comparación.

***Criterio de comparación.***

Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dos series de términos positivos. Supongamos que

$$a_n \leq b_n \qquad \forall n \in N_0.$$

Entonces,

1. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

2. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge.

***Demostración.***

Sean $A_n$ y $B_n$ las sumas parciales de las series (aunque técnicamente serían de las sucesiones $a_n$, $b_n$) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ respectivamente, es decir

$$A_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

$$B_n = b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

Entonces, puesto que $a_n \leq b_n \quad \forall n \in N_0$ tenemos

$$A_n \leq B_n.$$

Como la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ es convergente, existe un número $B \in R$ que es la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ tal que $B_n \leq B$ para todo $n \in N_0$. Pero entonces $A_n \leq B$ para todo $n \in N_0$. Luego la sucesión de sumas parciales $A_n$ está acotada y es creciente. Luego tiene un límite $A \in R$ es decir la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

La segunda parte, en este caso de series de términos positivos, es consecuencia inmediata de lo recién probado, pues la proposición 2 es la contrarrecíproca de la 1.

$\square$

Por ejemplo, supongamos que queremos determinar si la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}}$ converge o diverge.

Comparándola con la serie armónica vemos que

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{(n+1)-1}}$$

donde comparamos el término $n+1$ con el $n$ pues la armónica comienza con $n=1$ y la nuestra con $n=2$.

En efecto, la desigualdad anterior es equivalente "pasando multiplicando" y elevando al cuadrado a

$$n \leq n^2.$$

Luego, como la serie armónica diverge nuestra serie también diverge, es decir

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}} = \infty.$$

Pasamos ahora a un criterio muy útil para determinar la convergencia de varias series.

***Criterio de D'Alembert.***

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos. Si existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

entonces

1. Si $l < 1$ la serie converge.
2. Si $l > 1$ la serie diverge.

***Demostración.***

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ existe un número $0 < r < 1$ tal que si

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < r.$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} a_{n_0+1} &< ra_{n_0} \\ a_{n_0+2} < ra_{n_0+1} &< r^2 a_{n_0} \\ a_{n_0+3} < ra_{n_0+2} < r^2 a_{n_0+1} &< r^3 a_{n_0} \\ &. \\ &. \\ &. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k} < \sum_{n=1}^{\infty} r^n a_0 < \infty.$$

Luego la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

Un trabajo similar prueba la segunda proposición del teorema.

$\square$

Supongamos como ejemplo de aplicación del criterio de D'Alembert que queremos analizar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ converge. Consideremos el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} n!}{(n+1)!2^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(n+1)} = 0 < 1.$$

Luego, por el criterio de D'Alembert la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ converge.

En el siguiente video sobre series de términos positivos determinamos la convergencia y divergencia de dos series utilizando los criterios de comparación y de D'Alembert.

Ver video

Presentamos ahora un tercer criterio muy útil si se conocen métodos de integración. El criterio se llama de la integral y repasa varios conceptos que hemos estudiado.

***Criterio de la integral.***

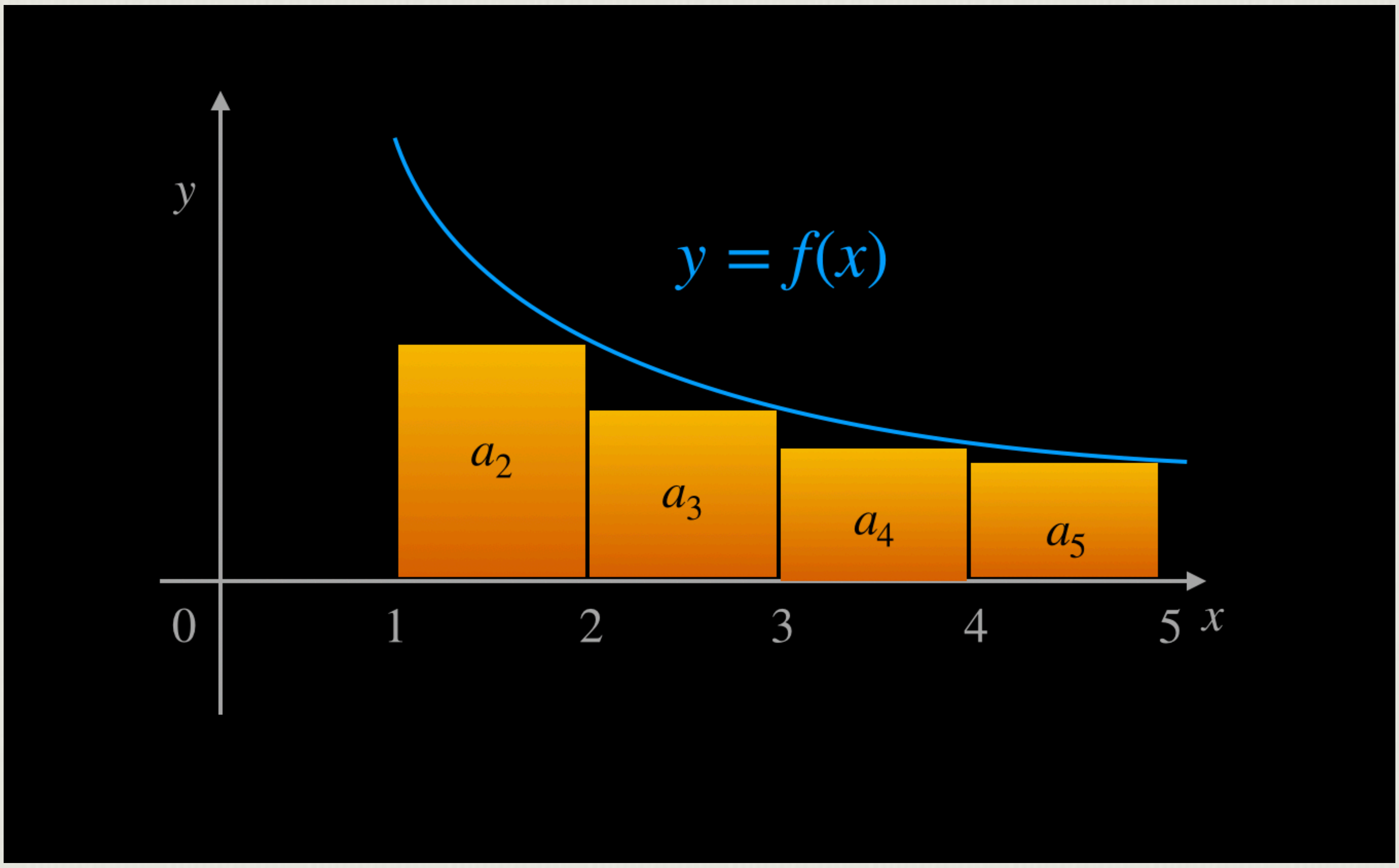
Sea $f:[1,\infty)\to R$ continua, positiva y decreciente. Sea $a_n = f(n)$. Entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \Longleftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx \text{ converge.}$$

***Pseudodemostración.***

La idea es comparar áreas definidas por la función y por la sucesión. Observemos la imagen siguiente.

**Imagen.** Criterio de la integral.




Vemos que, salvo por el primer término $a_1$, si la integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$ es convergente entonces la serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ converge pues representa el área anaranjada que es menor que el área definida por la función cuya gráfica está en azul. Recíprocamente si el área anaranjada en infinita entonces el área definida por la función cuya gráfica está en azul también lo es, pues es mayor que la anaranjada.

$\square$

Para ilustrar el uso del criterio de la integral, supongamos que queremos determinar si la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ ln(n)}$ converge.

Consideremos la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x\ ln(x)}$ de la imagen de la página siguiente. Vemos que esa función es continua, positiva y decreciente en el intervalo $[2,\infty)$. Calculemos entonces la integral

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ ln(x)} dx.$$

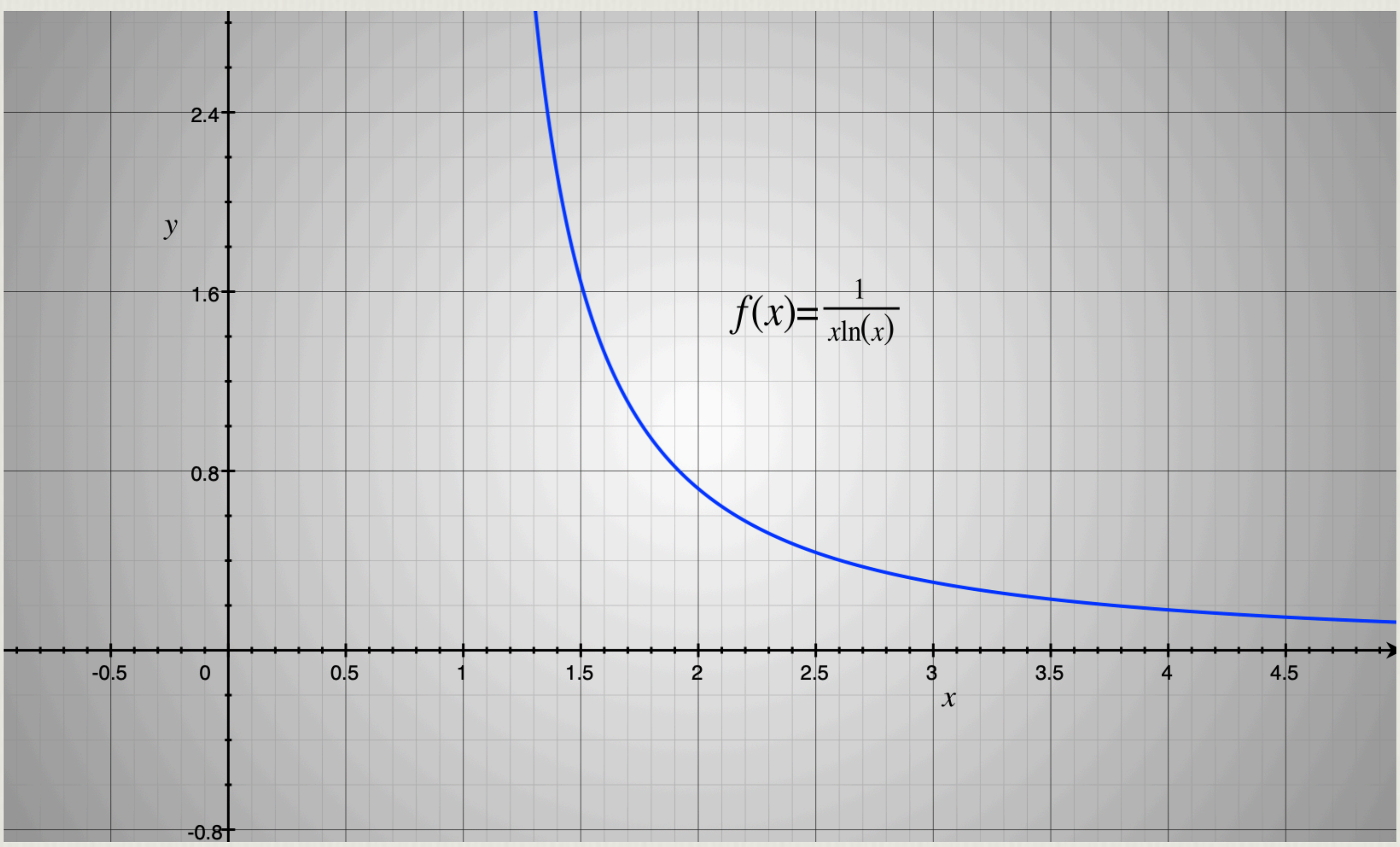
Una primitiva de $f(x) = \frac{1}{x\ ln(x)}$ es $F(x) = ln(ln(x))$.

Luego, como

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ ln(x)} dx = \lim_{b \to \infty} \Big( ln(ln(b)) - ln(ln(2)) \Big) = \infty$$

concluimos que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ ln(n)}$ diverge.

**Imagen.** Gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x\ ln(x)}$.



# Series alternadas

Terminaremos este libro con un tipo especial de series que no tienen todos sus términos positivos sino que sus signos están alternados.

***Definición.***

Sea $a_n : n \in N_0$ una sucesión cuyos términos son todos positivos. Una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \ldots$$

se llama alternada.

Por ejemplo, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

es alternada.

Como la sucesión de sumas parciales de una serie alternada no es creciente no funciona el criterio de comparación y no son aplicables las herramientas de la sección anterior. Pero sí disponemos de una criterio especial para series alternadas.

***Criterio de Leibniz. (Alemania 1646-1716)***

Sea

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \ldots$$

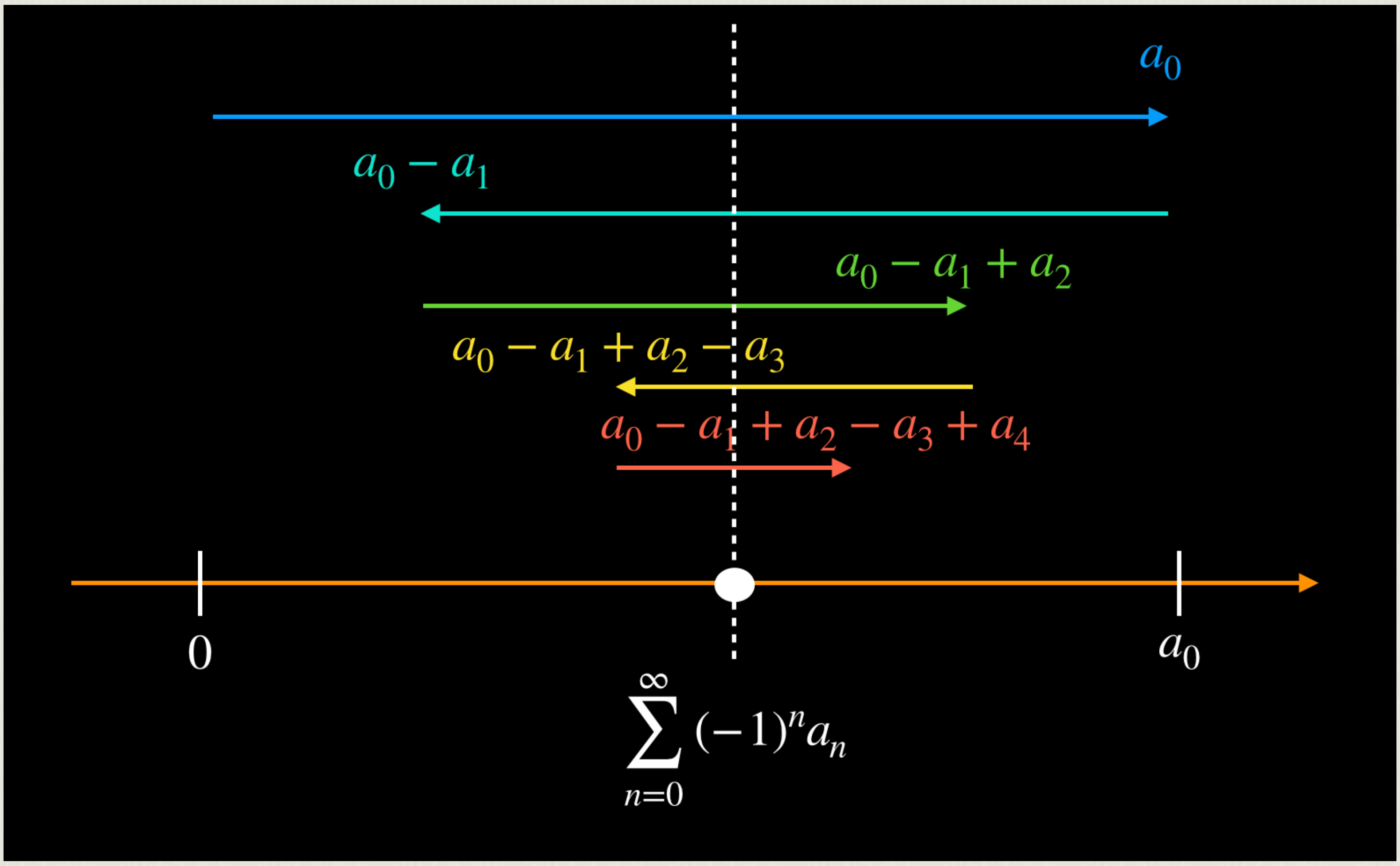
una serie alternada. Si la sucesión $a_n : n \in N_0$ es decreciente, esto es si $a_{n+1} < a_n$ y si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ entonces la serie converge, su suma es positiva, y no supera el primer término.

***Pseudodemostración.***

En la siguiente galería vemos claramente que las sumas parciales, si bien no son crecientes siempre están comprendidas entre las dos anteriores, luego se van encajando en intervalos cada vez más pequeños y la condición $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ obliga a la existencia del límite de las sumas parciales.

$\square$

**Imagen.** Convergencia de series alternadas.




La suma de la serie alternada es el número indicado en blanco.

Como un ejemplo de aplicación del criterio de Leibniz supongamos que queremos determinar si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

es convergente.

Es evidente que cada término es en valor absoluto menor que su precedente, es decir

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

y por supuesto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Luego la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

converge, su suma es positiva y no supera el valor $1$. De hecho, su valor exacto es $ln(2) = 0{,}693147$ pero no probaremos este hecho.

Finalizamos este capítulo y el libro con este completo video sobre series alternadas.

**Ver video**

# Apuntes.

# Cuaderno.