क्रियाकलाप 1

उद्देश्य

एक दिए हुए समुच्चय के उपसमुच्चयों की सख्ंया ज्ञात करना तथा यह सत्यापित करना कि यदि एक समुच्चय में n अवयव हैं तो कुल उपसमुच्चयों की सख्या 2^n है।

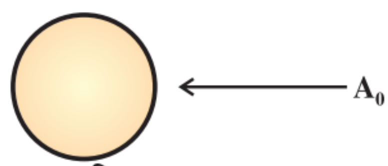
आवश्यक सामग्री

कागज़, विभिन्न रंगों की पेंसिलें

रचना की विधि

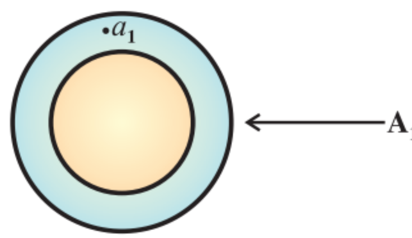
1. एक रिक्त समुच्चय (माना) A_0 लीजिए जिसमें कोई भी अवयव नहीं है।
2. एक समुच्चय (माना) A_1 लीजिए जिसमें केवल एक अवयव (माना) a_1 है।
3. एक समुच्चय (माना) A_2 लीजिए जिसमें दो अवयव (माना) a_1 और a_2 हैं।
4. एक समुच्चय (माना) A_3 लीजिए जिसमें तीन अवयव (माना) a_1, a_2 और a_3 हैं।

प्रदर्शन



आकृति 1.1

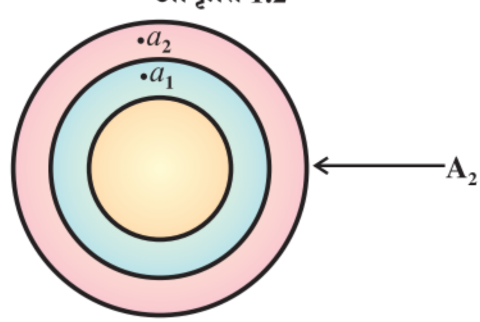
1. A_0 को आकृति 1.1 की तरह दिखाइए यहाँ A_0 के संभव अपसमुच्चय केवल A_0 ही है जिसे चिह्न ϕ द्वारा निरुपित किया जाता है। A के उपसमुच्चयों की संख्या $1 = 2^0$ है।



आकृति 1.2

2. A_1 को आकृति 1.2 की तरह निरुपित कीजिए। यहाँ A_1 के उपसमुच्चय ϕ, $\{a_1\}$ है। A_1 के उपसमुच्चयों की संख्या $2 = 2^1$ है।

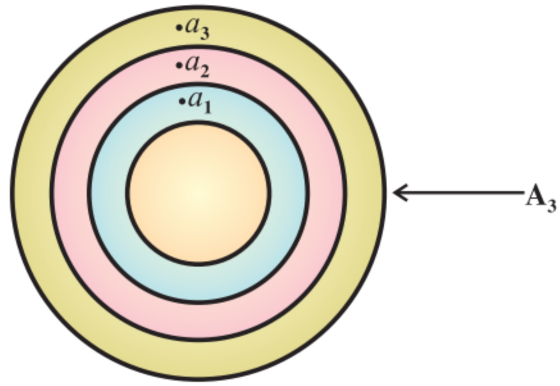
3. A_2 को आकृति 1.3 की तरह दर्शाइए। यहाँ A_2 के उपसमुच्चयों की संख्या ϕ, $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $\{a_1, a_2\}$ है। A_2 के उपसमुच्चयों की संख्या $4 = 2^2$ है।



आकृति 1.3

4. A_3 को आकृति 1.4 की तरह दर्शाइए यहाँ A_3 के उपसमुच्चय $\phi, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3), \{a_1, a_2\}$, $\{a_2, a_3)$,$\{a_3, a_1)$, $\{a_1, a_2, a_3\}$ है। A_3 के उपसमुच्चयों की संख्या $8 = 2^3$ है।

5. इसी प्रकार आगे बढ़ते हुए, एक अवयवों $a_1, a_2, ..., a_n$ वाले समुच्चय A के उपसमुच्चयों की संख्या 2^n है।



आकृति 1.4

प्रेक्षण

1. A_0 के उपसमुच्चयों की संख्या __________ $= 2^{\square}$ है।
2. A_1 के उपसमुच्चयों की संख्या __________ $= 2^{\square}$ है।
3. A_2 के उपसमुच्चयों की संख्या __________ $= 2^{\square}$ है।
4. A_3 के उपसमुच्चयों की संख्या __________ $= 2^{\square}$ है।
5. A_{10} के उपसमुच्चयों की संख्या $= 2^{\square}$ है।
6. A_n के उपसमुच्चयों की संख्या $= 2^{\square}$ है।

26/04/18

क्रियाकलाप 3

उद्देश्य

वेन डाइग्राम के उपयोग से समुच्चय संबंधित सक्रियाओं का निरूपण।

आवश्यक सामग्री

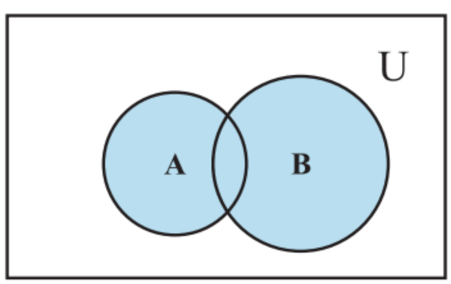
हार्डबोर्ड, सफ़ेद कागज़ की मोटी शीट, पेंसिल, रंग, कैंची, गोंद

रचना की विधि

1. सफ़ेद कागज़ की शीट से आयताकार टुकड़े काट कर कठोर तख्ते में चिपका दीजिए। प्रत्येक आयताकार शीट (टुकड़े) के दाईं और ऊपरी किनारे पर चिह्न U लिखिए।
2. प्रत्येक आयताकार शीट में दो वृत्त A और B बनाइए और आकृति 3.1 से 3.10 में दिखाए अनुसार रंग भरिए।

प्रदर्शन

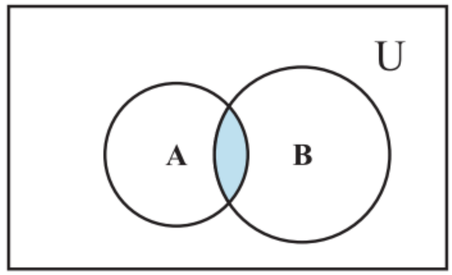
1. U आयत समष्टीय समुच्चय (universal set) निरुपित करता है।
2. वृत्त A और B समष्टीय समुच्चय U के उपसमुच्चयों को निरुपित करते है।
3. A' समुच्चय A का पूरक (कॉम्पलीमेंट) समुच्चय तथा B' समुच्चय B के पूरक समुच्चय को निर्दिष्ट करता है।
4. आकृति 3.1 $A \cup B$ को निरुपित करता है।



आकृति 3.1

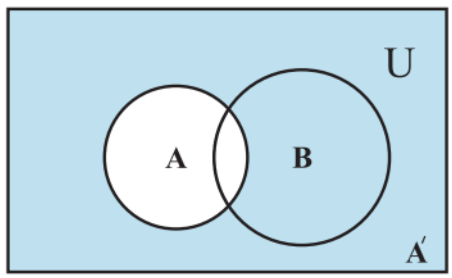
26/04/18

5. आकृति 3.2. में रंगीन भाग $A \cap B$ को दर्शाता है।



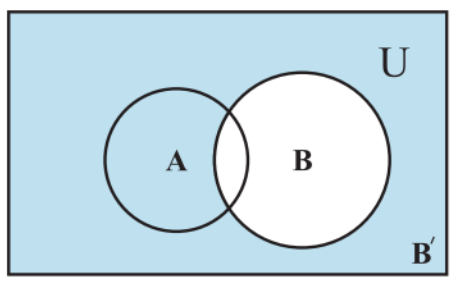
आकृति 3.2

6. आकृति 3.3 में रंगीन भाग A' को दर्शाता है।



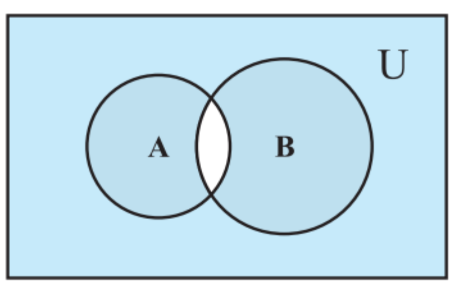
आकृति 3.3

7. आकृति 3.4 में रंगीन भाग B' को निरुपित करता है।



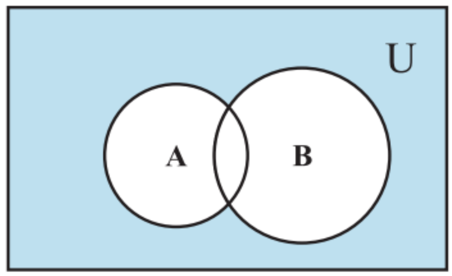
आकृति 3.4

8. आकृति 3.5 में रंगीन भाग $(A \cap B)'$ को निरुपित करता है।



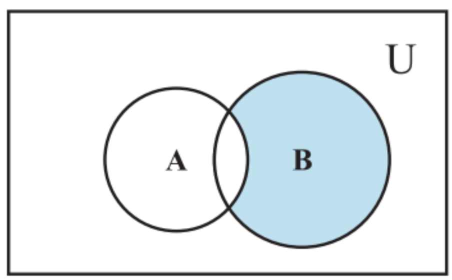
आकृति 3.5

9. आकृति 3.6 में रंगीन भाग $(A \cup B)'$ को निरुपित करता है।



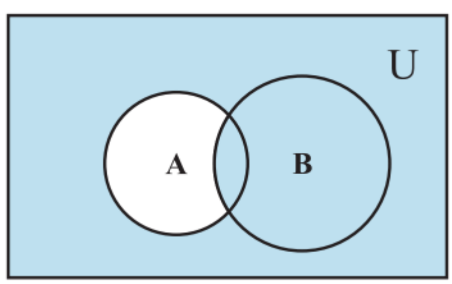
आकृति 3.6

10. आकृति 3.7 में रंगीन भाग $A' \cap B$ को निरुपित करता है। जो कि $B - A$ ही है



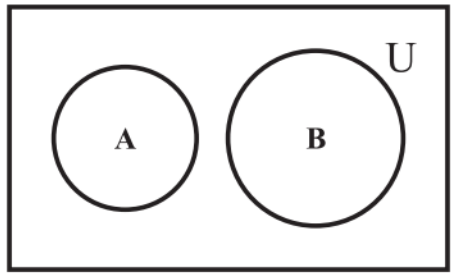
आकृति 3.7

11. आकृति 3.8 में रंगीन भाग $A' \cup B$ को निरुपित करता है।



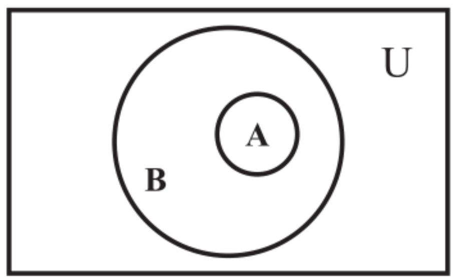
आकृति 3.8

12. आकृति 3.9 दर्शाता है कि $A \cap B = \phi$



आकृति 3.9

13. आकृति 3.10 दर्शाता है कि $A \subset B$



आकृति 3.10

प्रेक्षण

1. आकृति 3.1 में रंगीन भाग ________________ निरुपित करता है।
2. आकृति 3.2 में रंगीन भाग ________________ निरुपित करता है।
3. आकृति 3.3 में रंगीन भाग ________________ निरुपित करता है।
4. आकृति 3.4 में रंगीन भाग ________________ निरुपित करता है।
5. आकृति 3.5 में रंगीन भाग ________________ निरुपित करता है।
6. आकृति 3.6 में रंगीन भाग ________________ निरुपित करता है।
7. आकृति 3.7 में रंगीन भाग ________________ निरुपित करता है।
8. आकृति 3.8 में रंगीन भाग ________________ निरुपित करता है।
9. आकृति 3.9 दर्शाती है कि $(A \cap B) =$ ________________
10. आकृति 3.10 दर्शाती है कि A ________________ B.

अनुप्रयोग

वेन चित्रण (डाइग्राम) का प्रयोग तर्क (Logic) तथा गणित में होता है।

क्रियाकलाप 7

उद्देश्य

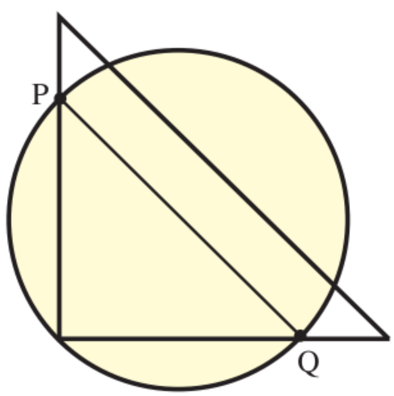
एक कोण के डिग्री माप तथा रेडियन माप में संबंध ज्ञात करना।

आवश्यक सामग्री

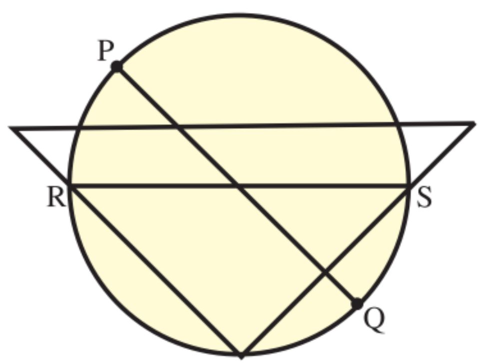
चूड़ी, ज्यामित बाक्स, प्रोट्रेक्टर (चांदा), डोरा, चिह्निक (marker), गत्ता, सफ़ेद कागज़।

रचना की विधि

1. उपयुक्त आकार का एक गत्ता लीजिए और उस पर सफ़ेद कागज़ चिपकाइए।
2. सफ़ेद कागज़ पर चूड़ी की सहायता से एक वृत्त बनाइए।
3. सेट-स्क्वेयर लेकर उसे दो भिन्न स्थितियों में रख कर वृत्त के व्यास PQ और RS ज्ञात कीजिए जैसा कि आकृति 7.1 और आकृति 7.2 में दिखाया गया है।

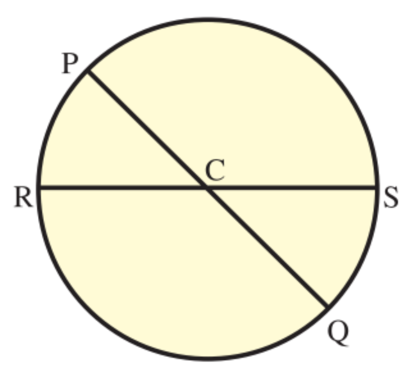


आकृति 7.1



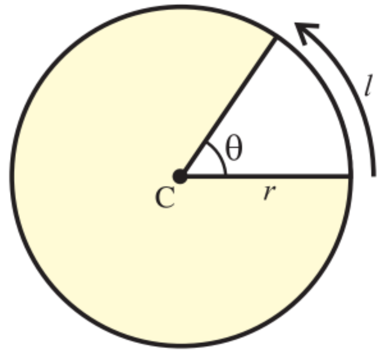
आकृति 7.2

4. माना PQ और RS बिंदु C पर प्रतिच्छेद करते हैं। बिंदु C वृत्त का केंद्र होगा। (आकृति 7.3)
5. स्पष्टत: CP = CR = CS = CQ = वृत्त की त्रिज्या



आकृति 7.3

प्रदर्शन



आकृति 7.4

1. माना वृत्त की त्रिज्या r है और चाप l जो केंद्र C पर कोण θ बनाता है जैसा कि आकृति 7.4. में दिखाया गया है,

   $\theta = \frac{l}{r}$ रेडियन।

2. यदि डिग्री माप $\theta = \frac{l}{2\pi r} \times 360$ डिग्री

   तब $\frac{l}{r}$ रेडियन $= \frac{l}{2\pi r} \times 360$ डिग्री

   या 1 रेडियन $= \frac{180}{\pi}$ डिग्री $= 57.27$ डिग्री

प्रेक्षण

डोरे के प्रयोग से चापों RP, PS, RQ, QS की लंबाईया मापिए और इनको नीचे दी गई सारणीं में प्रविष्ट कीजिए।

क्र. सख्या	चाप	चाप की लंबाई (l)	वृत्त की त्रिज्या	रेडियन माप
1.	$\overset{\frown}{RP}$	--------	--------	$\angle RCP = \frac{\overset{\frown}{RP}}{r} =$ __
2.	$\overset{\frown}{PS}$	--------	--------	$\angle PCS = \frac{\overset{\frown}{PS}}{r} =$ __
3.	$\overset{\frown}{SQ}$	--------	--------	$\angle SCQ = \frac{\overset{\frown}{SQ}}{r} =$ __
4.	$\overset{\frown}{QR}$	--------	--------	$\angle QCR = \frac{\overset{\frown}{QR}}{r} =$ __

2. प्रोट्रेक्टर की सहायता से कोणों को डिग्री में मापिए तथा दी गई सारणी को पूरा कीजिए।

कोण	**डिग्री माप**	**रेडियन माप**	**अनुपात** $= \frac{\textbf{डिग्री माप}}{\textbf{रेडियन माप}}$
$\angle$ RCP	-------	-------	-------
$\angle$ PCS	-------	-------	-------
$\angle$ QCS	-------	-------	-------
$\angle$ QCR	-------	-------	-------

3. एक रेडियन का मान ________ डिग्री के बराबर है।

अनुप्रयोग

यह परिणाम त्रिकोणमितीय फलनों के अध्ययन में उपयोगी है।

क्रियाकलाप 8

उद्देश्य

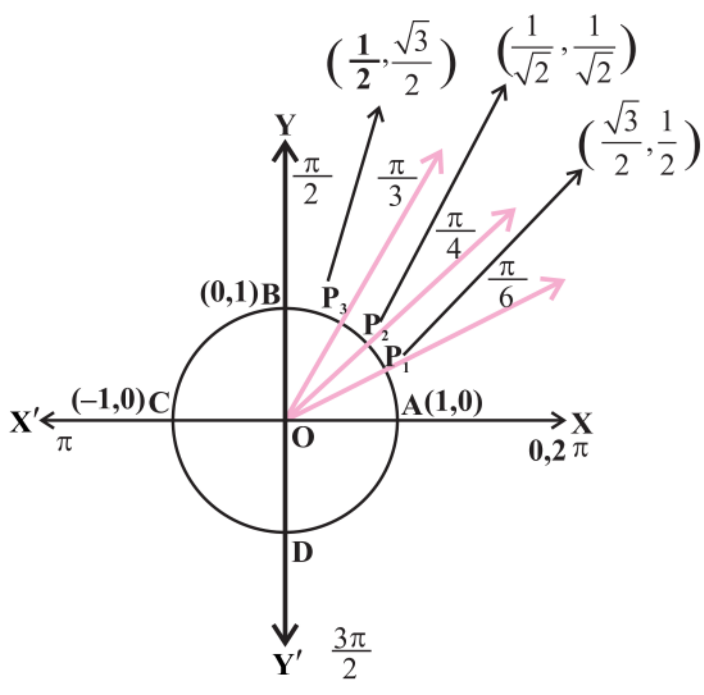
प्रथम चतुर्थांश में साइन और कोसाइन के मानों का प्रयोग करके दूसरे, तीसरे और चौथे चतुर्थांश में उनके मान ज्ञात करना।

आवश्यक सामग्री

गत्ता, सफ़ेद चार्ट पेपर, रूलर, रंगीन पेन, गोंद, लोहे के तार और सुई

रचना की विधि

1. उपयुक्त आकार का एक गत्ता लीजिए और उसके ऊपर सफ़ेद चार्ट पेपर चिपकाइए।
2. चार्ट पेपर पर एकक त्रिज्या वाला एक वृत्त खींचिए जिसका केंद्र O है।
3. केंद्र से दो लम्बवत् रेखाएँ X′OX और YOY′ क्रमशः x-अक्ष और y-अक्ष को निरुपित करने वाली रेखाएँ खींचिए जैसा आकृति 8.1 में दिखाया गया है।



आकृति 8.1

4. जहाँ वृत्त x–अक्ष और y–अक्ष को काटता है उन बिदुओं को A, B, C, D से अंकित कीजिए जैसा आकृति 8.1 में दिखाया गया है।

5. बिंदु O से कोंण P_1OX, P_2OX, और P_3OX बनाइए जिनके माप क्रमशः $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ and $\frac{\pi}{3}$ हैं।

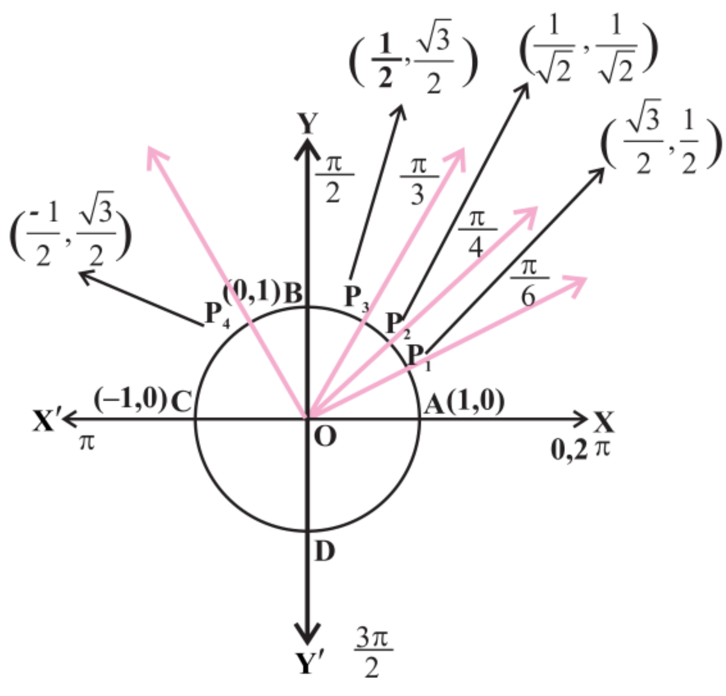
6. एकक इकाई की एक सुई लीजिए। इसके एक सिरे को वृत्त के केंद्र पर, इस प्रकार स्थिर कीजिए कि दूसरा सिरा स्वतंत्र रूप से वृत्त के अनुदिश घूम सके।

प्रेक्षण

1. बिंदु P_1 के निर्देशांक $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}\right)$ हैं क्योंकि इसका x-निर्देशांक $\cos\frac{\pi}{6}$ और y-निर्देशांक $\sin\frac{\pi}{6}$ है। बिंदुओं P_2 और P_3 के निर्देशांक क्रमशः $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ और $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ हैं।

2. दूसरे चतुर्थांश में किसी कोण (माना) $\frac{2\pi}{3}$ के साइन और कोसाइन मान को ज्ञात करने के लिए सुई को घड़ी की विपरीत दिशा (वामावर्त) में घुमाइए जिससे x–अक्ष की धनात्मक दिशा से कोण P_4OX का माप $\frac{2\pi}{3} =$ 120° हो।

3. आकृति 8.2 में सुई की स्थिति OP_4 देखिए। क्योंकि $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, है इसलिए OP_4, y–अक्ष के सापेक्ष



आकृति 8.2

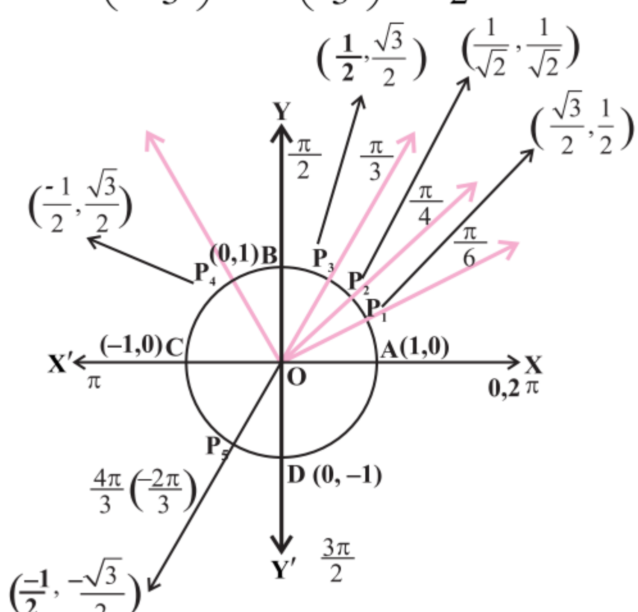
OP_3 का दर्पण प्रतिबिंब है। इसलिए P_4 के निर्देशांक $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ है। अत: $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ और $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ है।

4. तीसरे चतुर्थांश में कुछ कोणों जैसे $\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$, अर्थात $\frac{-2\pi}{3}$ (माना) के साइन या कोसाइन के मान ज्ञात करने के लिए सुई को घड़ी की विपरीत दिशा में इस प्रकार घुमाइए कि वह x–अक्ष की धनात्मक दिशा से $\frac{4\pi}{3}$ का कोण बनाए।

5. जैसा कि आकृति 8.3 में दिखाया गया है, सुई की नई स्थिति OP_5 को देखिए। बिंदु P_5, x–अक्ष के सापेक्ष बिंदु P_4 का दर्पण प्रतिबिंब है (क्योंकि $\angle P_4OX' = P_5OX'$)। इसलिए P_5 के निर्देशांक $\left(-\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ हैं।

$$\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ और } \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}.$$

6. साइन और कोसाइन के चौथे चतुर्थांश मे किसी कोण जैसे $\frac{7\pi}{4}$ के मान ज्ञात करने के लिए सुई को वामावर्त (घड़ी की विपरीत दिशा में) इतना घुमाइए कि वह x–अक्ष की धनात्मक दिशा से कोण $\frac{7\pi}{4}$ बनाए जिसकी स्थिति OP_6 द्वारा निरुपित की गई है जैस कि आकृति 8.4 में दिखाया



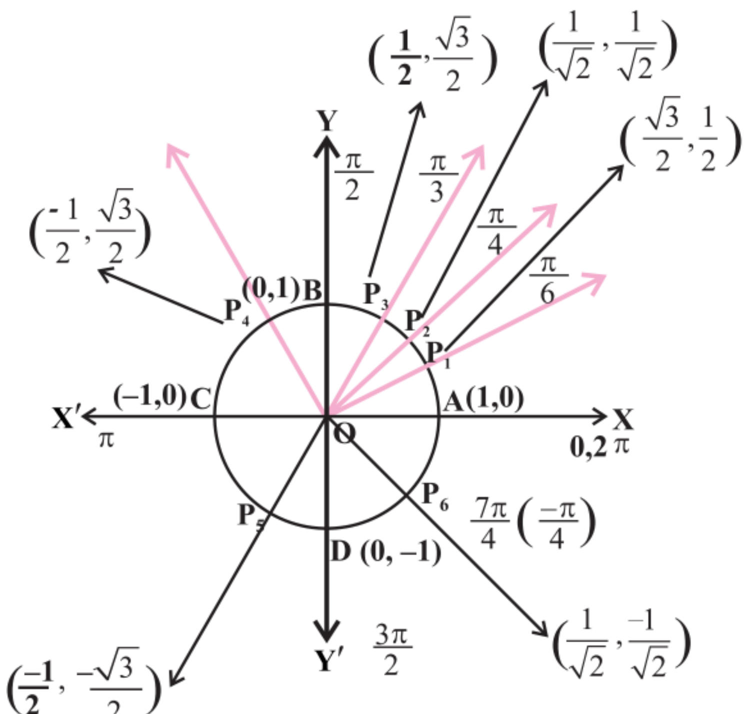
आकृति 8.3

गया है। वामावर्त दिशा में $\frac{7\pi}{4}$ का कोण = दक्षिणावर्त दिशा में $-\frac{\pi}{4}$ का कोण आकृति 8.4 से P_6, x–अक्ष के सापेक्ष P_2 का दर्पण प्रतिबिंब है। इसलिए P_4 के निर्देशांक $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ हैं।

इस प्रकार $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

तथा $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

8. साइन या कोसाइन के उन कोणों के मान जो एक परिक्रमण (2π) से अधिक हैं, जैसे $\frac{13\pi}{6}$



आकृति 8.4

है को ज्ञात करने के लिए सुई को वामावर्त दिशा में घुमाइए। क्योंकि $\frac{13\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6}$, इसलिए सुई OP_1 पर पहुँच जाएगी। इसलिए

$$\sin\left(\frac{13\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2} \text{ और } \cos\left(\frac{13\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

प्रेक्षण

1. सुई द्वारा एक परिक्रमण में बनाया गया कोण __________है।
2. $\cos\frac{\pi}{6} =$ __________ $= \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

   $\sin\frac{\pi}{6} =$ __________ $= \sin(2\pi +$ ______$)$.
3. sine फलन चतुर्थांश ________ और ________ में शून्येत्तर है।
4. cosine फलन चतुर्थांश _______ और ______ में शून्येत्तर है।

अनुप्रयोग

1. इस क्रियाकलाप को tan, cot, sec, और cosec फलनों के मान ज्ञात करने के लिए भी प्रयोग किया जा सकता है।
2. इस क्रियाकलाप से विद्यार्थी सीख सकते हैं कि

   $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ और

   $\cos(-\theta) = \cos\theta$

क्रियाकलाप 9

उद्देश्य

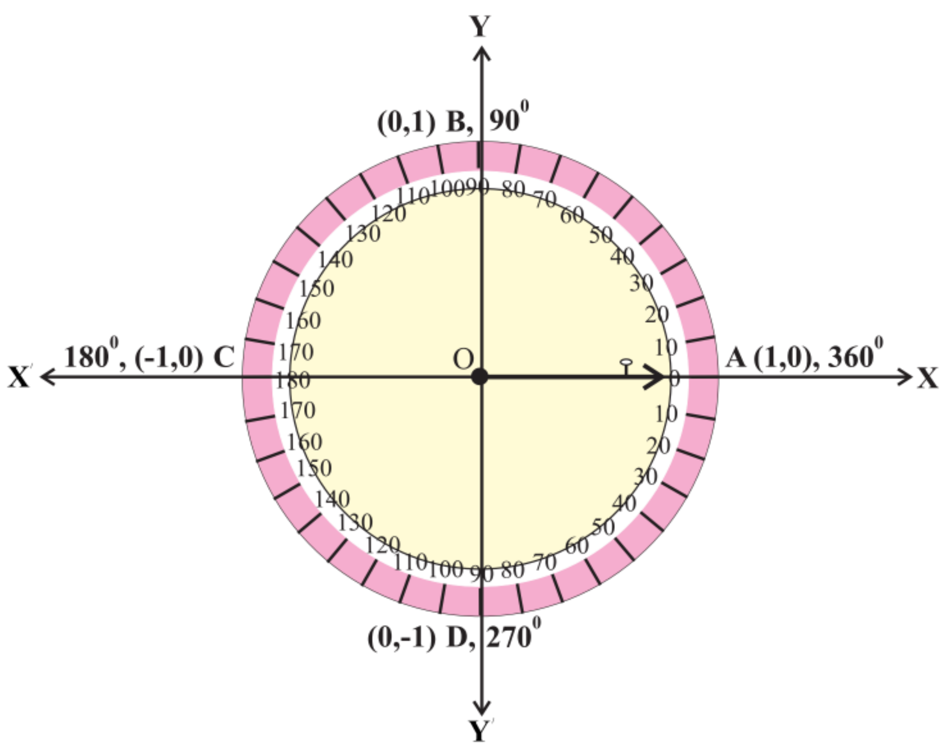
एक मॉडल तैयार करना जिससे sine और cosine फलनों के मान $\frac{\pi}{2}$ और π के गुणज वाले कोणों के रूप में निरुपित किया जा सके।

आवश्यक सामग्री

एक स्टैण्ड (stand) लीजिए जिसमें 0º-360º वाला प्रोट्रेक्टर तथा एक वृत्ताकार प्लास्टिक की प्लेट लगी हो तथा एक हैंडिल लगा हो जिससे प्रोंट्रेक्टर के केंद्र से घुमाया जा सके।

रचना की विधि

1. एक स्टैण्ड लीजिए जिसमें 0º-360º वाला प्रोट्रेक्टर सलग्न हो।
2. प्रोट्रेक्टर की त्रिज्या को 1 इकाई मानिए।



आकृति 9

26/04/18

3. दो रेखाएँ, पहली 0º-180º को मिलाने वाली तथा दूसरी 90º-270º को मिलाने वाली रेखाएँ खींचिए। स्पष्ट है कि दोनों रेखाएँ परस्पर लंबवत हैं।

4. 0°-180° को मिलाने वाली रेखा के 0° पर के बिंदु को (1,0) तथा 180° पर के बिंदु को (–1, 0) तथा 270° पर के बिंदु को (0, –1) से निरुपित कीजिए।

5. प्लास्टिक की वृत्ताकार प्लेट लीजिए और उस पर एक रेखा इंगित कीजिए जो इसकी त्रिज्या हो तथा त्रिज्या के बाहरी किनारे पर एक हैंडिल लगाइए।

6. प्लास्टिक की वृत्ताकार प्लेट को प्रौट्रेक्टर के केंद्र पर स्थिर कीजिए।

प्रदर्शन

1. वृत्ताकार प्लेट को वामावर्त दिशा में घुमाइए जिससे विभिन्न कोण जैसे $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ इत्यादि बन सकें।

2. इन कोंणों तथा इनके गुणजों के sine तथा cosine फलनों के मानों को लंबवत् रेखाओं से पढ़िए।

प्रेक्षण

1. जब वृत्ताकार प्लेट की त्रिज्या रेखा O से बिंदु A (1,0) की ओर इंगित करती है तब $\cos 0 =$ _______ और $\sin 0 =$ _______

2. जब वृत्ताकार प्लेट की त्रिज्या रेखा 90º पर है तथा बिंदु B (0,1) को इंगित करती है तब $\cos\frac{\pi}{2} =$ _______ और $\sin\frac{\pi}{2} =$ _______

3. जब वृत्ताकार प्लेट की त्रिज्या रेखा 180º पर है तथा बिंदु C (–1,0) को इंगित करती है तब $\cos \pi =$ _______ और $\sin \pi =$ _________

4. जब वृत्ताकार प्लेट की त्रिज्या रेखा 270º पर है तथा बिंदु _______ को इंगित करती है तब $\cos\frac{3\pi}{2} =$ _______ और $\sin\frac{3\pi}{2} =$ _______

26/04/18

5. जब वृत्ताकार प्लेट की त्रिज्या रेखा 360° पर है और पुनः बिंदु A (1,0) को इंगित करती है तब $\cos 2\pi$ = ________ और $\sin 2\pi$ = ________

अब निम्न सारणी की प्रविष्टियों को भरिए

त्रिकोंणमितीय फलन	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
$\sin\theta$	–	–	–	–	–	–	–	–	–
$\cos\theta$	–	–	–	–	–	–	–	–	–

अनुप्रयोग

इस क्रियाकलाप का प्रयोग $\frac{\pi}{2}$ और π के गुणज कोणों के लिए अन्य त्रिकोंणमितीय फलनों के मान ज्ञात करने के लिए किया जा सकता है।

26/04/18

क्रियाकलाप 10

उद्देश्य

एक ही निर्देशांक अक्षों में $\sin x$, $\sin 2x$, $2\sin x$ और $\sin \frac{x}{2}$, के आरेख खींचना।

आवश्यक सामग्री

प्लाई बोर्ड, ग्राफ़ पेपर, गोंद, रूलर, रंगीन पेन, रबर (इरेज़र) इत्यादि।

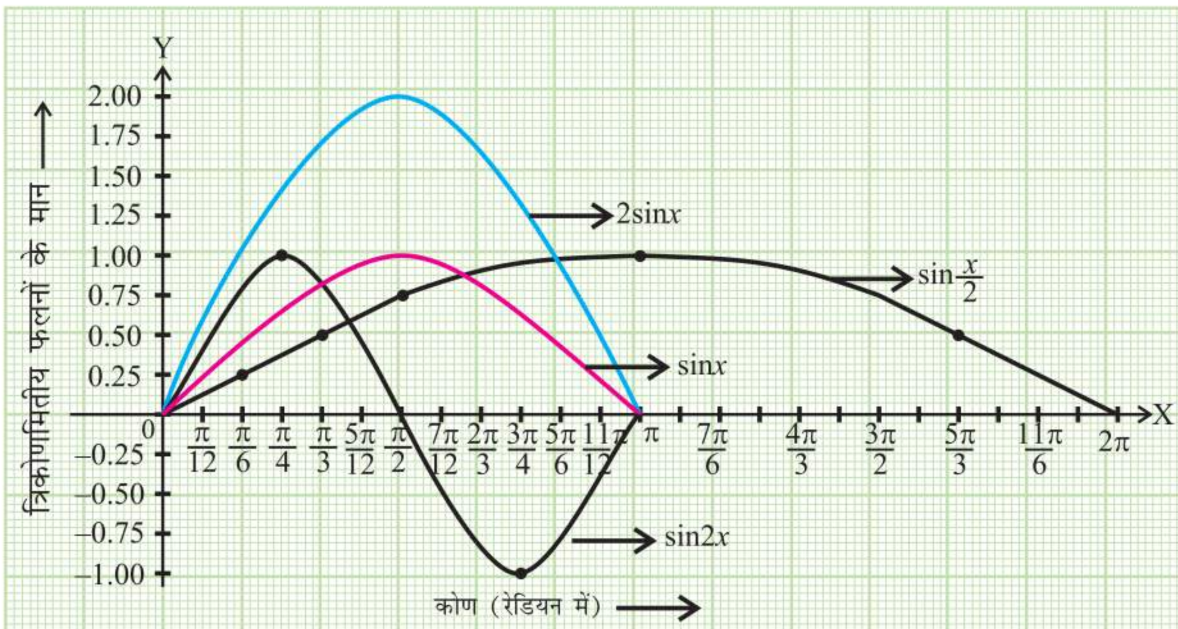
रचना की विधि

1. 30cm × 30cm आकार का एक प्लाईवुड लीजिए।
2. इस प्लाईवुड पर 25 cm × 25 cm आकार का एक मोटा ग्राफ़ पेपर चिपकाइए।
3. ग्राफ़ पेपर पर दो लंबवत् रेखाएँ खीचिए और उन्हें निर्देशांक अक्ष के रूप मे लीजिए।
4. आकृति 10.1 की भाँति दोनों अक्षों को अंशांकित कीजिए।
5. $\sin x$, $\sin 2x$, $2\sin x$ और $\sin \frac{x}{2}$ के मानों की क्रमित युग्मों की सारणी बनाइए जैसा नीचे दिखाया गया है।

त्रिकोंणमितीय फलन	0^o	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{9\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
$\sin x$	0	0.26	0.50	0.71	0.86	0.97	1.00	0.97	0.86	0.71	0.50	0.26	0
$\sin 2x$	0	0.50	0.86	1.00	0.86	0.50	0	–0.5	–0.86	–1.0	–0.86	–0.50	0
$2 \sin x$	0	0.52	1.00	1.42	1.72	1.94	2.00	1.94	1.72	1.42	1.00	0.52	0
$\sin \frac{x}{2}$	0	0.13	0.26	0.38	0.50	0.61	0.71	0.79	0.86	0.92	0.97	0.99	1.00

प्रदर्शन

1. क्रमित युग्मों $(x, \sin x)$, $(x, 2\sin x)$, $\left(x, \sin\frac{x}{2}\right)$ तथा $(x, 2\sin x)$ को एक ही निर्देशाँक अक्षों में आरेखित कीजिए। तत्पश्चात इन आरेखित क्रमित युग्मों को मुक्त हस्त वक्र (free hand curves) की सहायता से अलग-अलग रंगों से मिलाइए जैसा कि आकृति 10 में दिखाया गया है।



आकृति 10

प्रेक्षण

1. $\sin x$ तथा $2 \sin x$ के आरेख समान आकार के है परंतु $\sin x$ के आलेख की अधिकतम ऊँचाई ________ के ग्राफ़ की ऊँचाई से __________ है।
2. $\sin 2x$ के आरेख की अधिकतम ऊँचाई __________ है। यह $x =$ _________ पर है।
3. $2 \sin x$ के आरेख की अधिकतम ऊँचाई __________ है। यह $x =$ _________ पर है।
4. $\sin \frac{x}{2}$ के आरेख की अधिकतम ऊँचाई ______ है। यह $x =$ _________ है।

26/04/18

5. $x =$ _______पर $\sin x = 0$ है, $x =$ ________ पर $\sin 2x = 0$ है और $x =$ _______पर $\sin \frac{x}{2} = 0$ है।

6. अंतराल $[0, \pi]$ में $\sin x$, $2 \sin x$ और $\sin \frac{x}{2}$ के आरेख x-अक्ष के________ हैं और $\sin 2x$ के आरेख का कुछ भाग x-अक्ष के ________ है।

7. $\sin x$ और $\sin 2x$ के आरेख अंतराल $(0, \pi)$ में $x =$ ________ पर प्रतिच्छेद करते हैं।

8. $\sin x$ तथा $\sin \frac{x}{2}$ के आरेख अंतराल $(0, \pi)$ मे $x =$ _________ पर प्रतिच्छेद करते हैं

अनुप्रयोग

यह क्रियाकलाप कोणों के गुणज और अपवर्तक हेतु त्रिकोणमितिय फलनों के आरेखों की तुलना में सहायक होगा।

क्रियाकलाप 14

उद्देश्य

यह ज्ञात करना कि दिए गए पाँच कार्डों में से तीन कार्डों का चयन कितने प्रकार से किया जा सकता है।

आवश्यक सामग्री

कार्डबोर्ड, सफ़ेद कागज़ की शीट, स्केच पेन, कटर

रचना की विधि

1. एक गत्ते की शीट लीजिए और उस पर सफ़ेद कागज़ चिपकाइए।
2. कार्डबोर्ड से उपयुक्त साइज़ के 5 एक जैसे कार्ड काटिए।
3. इन कार्डों पर C_1, C_2, C_3, C_4 और C_5 अंकित कीजिए।

प्रदर्शन

1. दिए गए पाँच कार्ड में से एक कार्ड का चयन कीजिए।
2. मान लीजिए कि पहला चयनित कार्ड C_1 है। तब शेष चार कार्डों में से अन्य दो कार्ड C_2C_3, C_2C_4, C_2C_5, C_3C_4, C_3C_5 और C_4C_5 हो सकते है। इस प्रकार, संभव चयन $C_1C_2C_3$, $C_1C_2C_4$, $C_1C_2C_5$, $C_1C_3C_4$, $C_1C_3C_5$, $C_1C_4C_5$ हैं। इनको एक कागज़ पर अंकित कीजिए।
3. मान लीजिए कि पहला चयनित कार्ड C_2 है। तब शेष चार कार्डों में से अन्य दो कार्ड C_1C_3, C_1C_4, C_1C_5, C_3C_4, C_3C_5, C_4C_5 हो सकते हैं। इस प्रकार संभव चयन $C_2C_1C_3$, $C_2C_1C_4$, $C_2C_1C_5$, $C_2C_3C_4$, $C_2C_3C_5$, $C_2C_4C_5$ हैं। इनको उसी कागज़ पर अकिंत कीजिए।
4. मान लीजिए कि पहला चयनित कार्ड C_3 है। तब शेष चार कार्डों में से अन्य दो कार्ड C_1C_2, C_1C_4, C_1C_5, C_2C_4, C_2C_5, C_4C_5 हो सकते है। इस प्रकार संभव चयन $C_3C_1C_2$, $C_3C_1C_4$, $C_3C_1C_5$, $C_3C_2C_4$, $C_3C_2C_5$, $C_3C_4C_5$ हैं। इनको उसी कागज़ पर अंकित कीजिए।
5. मान लीजिए कि पहला चयनित कार्ड C_4 है। तब शेष चार कार्डो मे से अन्य दो कार्ड C_1C_2, C_1C_3, C_2C_3, C_1C_5, C_2C_5, C_3C_5 हो सकते हैं। इस प्रकार, संभव चयन $C_4C_1C_2$, $C_4C_1C_3$, $C_4C_2C_3$, $C_4C_1C_5$, $C_4C_2C_5$, $C_4C_3C_5$ हैं। इनको उसी कागज़ पर अंकित कीजिए।

6. मान लीजिए कि पहला C_5 हैं। तब शेष चार कार्डों में से अन्य दो कार्ड C_1C_2, C_1C_3, C_1C_4, C_2C_3, C_2C_4, C_3C_4 हो सकते है। इस प्रकार संभव चयन $C_5C_1C_2$,$C_5C_1C_3$, $C_5C_1C_4$, $C_5C_2C_3$, $C_5C_2C_4$, $C_5C_3C_4$ हैं। इनको उसी कागज़ पर अंकित कीजिए।

7. अब उस कागज़ पर ध्यान दीजिए जिसपर संभावित चयनों को सूचीबद्ध किया था। यहाँ कुल 30 संभावित चयन है और प्रत्येक चयन की तीन बार पुनरावृत्ति हुई है। इसलिए भिन्न चयनों की संख्या $= 30 \div 3 = 10$ है जो कि $5C_3$ के बराबर है।

प्रेक्षण

1. $C_1C_2C_3$, $C_2C_1C_3$ और $C_3C_1C_2$ ________ चयन को निरुपित करते हैं।
2. $C_1C_2C_4$, ______________, ______________ एक ही चयन को निरुपित करते है।
3. $C_2C_1C_5$, $C_1C_2C_5$, $C_1C_2C_3$ में से _________ और _________ एक ही चयन को निरुपित करते हैं।
4. $C_2C_1C_5$, $C_1C_2C_3$ ________ चयनों को निरुपित करते हैं।
5. $C_3C_1C_5$, $C_1C_4C_3$, $C_5C_3C_4$, $C_4C_2C_5$, $C_2C_4C_3$, $C_1C_3C_5$ में से

   $C_3C_1C_5$, _________ एक ही चयन को निरूपित करते हैं।

   $C_3C_1C_5$, $C_1C_4C_3$, _______, ______, अलग-अलग चयनों को निरुपित करते हैं।

अनुप्रयोग

इस प्रकार के क्रियाकलाप का उपयोग दी गई n वस्तुओं में से r वस्तुओं को चुनने की सम्भावित संख्या के व्यापक सूत्र अर्थात, ${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ को समझने में किया जा सकता है।

क्रियाकलाप 15

उद्देश्य

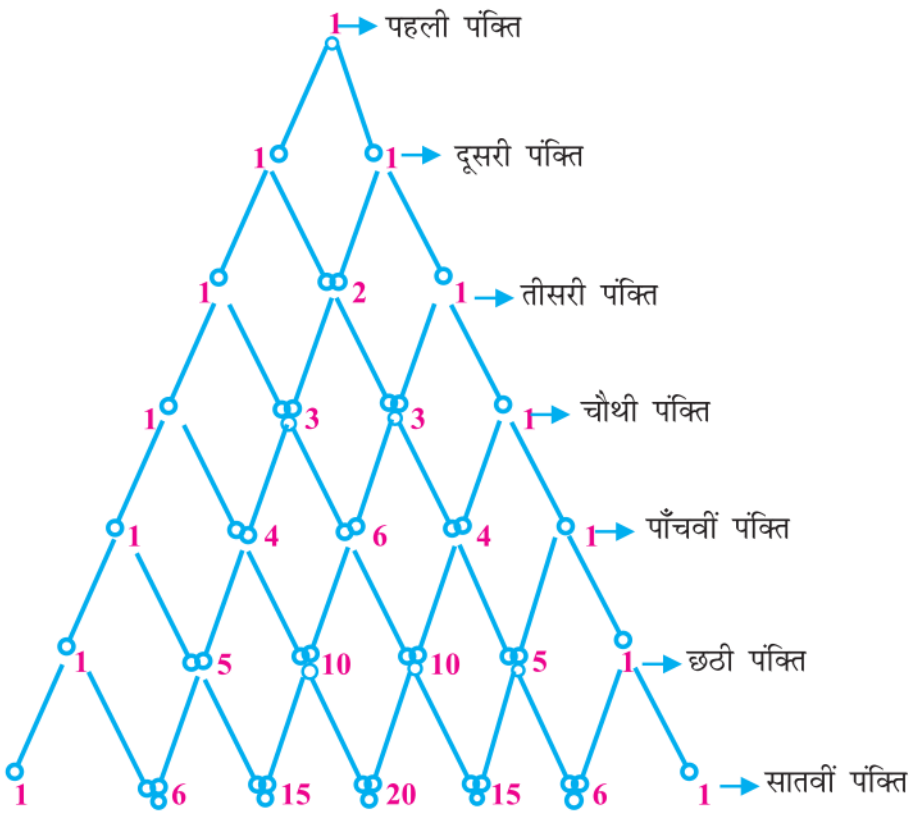
पॉस्कल त्रिभुज की रचना करना और एक द्विपद की दी गई धनात्मक पूर्णांक घात के लिए द्विपद प्रसार लिखना।

आवश्यक सामग्री

ड्राइंग बोर्ड, सफ़ेद कागज़, माचिस की तीलियाँ, गोंद

रचना की विधि

1. एक ड्राइंग बोर्ड लीजिए और उस पर सफ़ेद कागज़ चिपकाइए।
2. कुछ माचिस की तीलियाँ लीजिए और उन्हें ऐसे व्यवस्थित कीजिए। जैसा कि आकृति 15 में दिखाया गया है।



आकृति 15

3. संख्याओं को निम्न प्रकार लिखिए–

1 (पहली पंक्ति)
1 1 (दूसरी पंक्ति)
1 2 1 (तीसरी पंक्ति)
1 3 3 1 (चौथी पंक्ति), 1 4 6 4 1 (पाँचवीं पंक्ति) और इसी प्रकार आगे भी
(देखिए आकृति 15)

4. $(a+b)^n$ का द्विपद प्रसार लिखने के लिए, $(n+1)^{th}$ वीं पंक्ति में दी गई संख्याओं का प्रयोग करें।

प्रदर्शन

1. उर्पयुक्त आकृति एक त्रिभुज जैसी दिखती है और इसे पास्कल त्रिभुज के वर्ग में रखा जाता है।
2. दूसरी पंक्ति की संख्याएँ $(a+b)^1$ के द्विपद प्रसार के पदों के गुणांक है। तीसरी पंक्ति की संख्याएँ $(a+b)^2$ के द्विपद प्रसार के पदों के गुणांक हैं, चौथी पंक्ति की संख्याएँ $(a+b)^3$ के द्विपद प्रसार के पदों के गुंणाक हैं। पाँचवीं पंक्ति की संख्याएँ $(a+b)^4$ के द्विपद प्रसार के पदों के गुणांक हैं और इसी प्रकार आगे भी।

प्रेक्षण

1. पाँचवीं पंक्ति की संख्याएँ __________ हैं जो ________के द्विपद प्रसार के गुणांक हैं।
2. सातवीं पंक्ति की संख्याएँ __________ हैं जो ________के द्विपद प्रसार के पदों के गुणांक हैं।
3. $(a + b)^3 = \_\_\_ a^3 + \_\_\_ a^2b + \_\_\_ ab^2 + \_\_\_ b^3$
4. $(a + b)^6 = \_\_\_ a^6 + \_\_\_ a^5b + \_\_\_ a^4b^2 + \_\_\_ a^3b^3 + \_\_\_ a^2b^4 + \_\_\_ ab^5 + \_\_\_ b^6$
5. $(a + b)^5 = \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_.$
6. $(a + b)^8 = \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_$
7. $(a + b)^{10} = \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_$

अनुप्रयोग

इस क्रियाकलाप का उपयोग $(a+b)^n$ के द्विपद प्रसार के लिए किया जा सकता है। जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है।

क्रियाकलाप 21

उद्देश्य

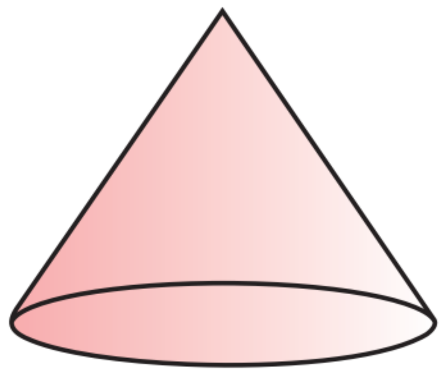
विभिन्न प्रकार के शांकव-परिच्छेद बनाना।

आवश्यक सामग्री

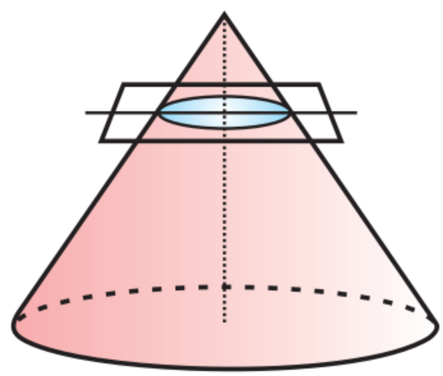
पारदर्शी शीट, कैंची, मोटा गत्ता, चिपकाने का पदार्थ, सफ़ेद कागज़

रचना की विधि

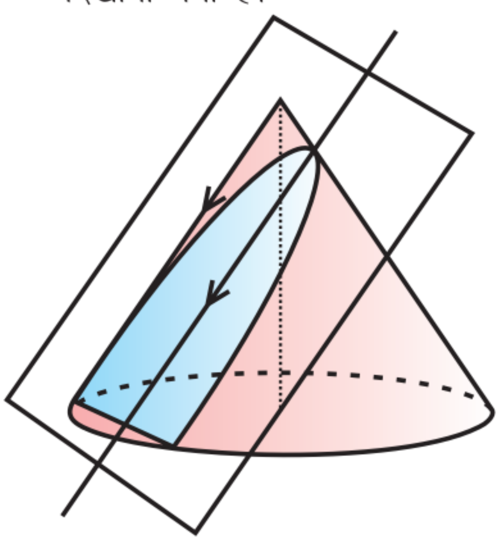
1. एक मोटा गत्ता लीजिए और उस पर सफ़ेद कागज़ चिपकाइए।
2. एक पारदर्शी शीट को वृत्त के सेक्टर के आकार में काट कर इस तरह मोड़िए कि एक लंब वृत्तीय शंकु बनें जैसा आकृति 21.1 में दिखाया गया है।
3. पारदर्शी शीट से इसी आकार के पाँच और शंकु बनाइए। इन शंकुओं को मोटे गत्ते पर रखिए।
4. इन शंकुओं को एक पारदर्शी समतल शीट से विभिन्न स्थितियों में काटिए जैसा आकृतियों 21.2 से 21.5 में दिखाया गया है।



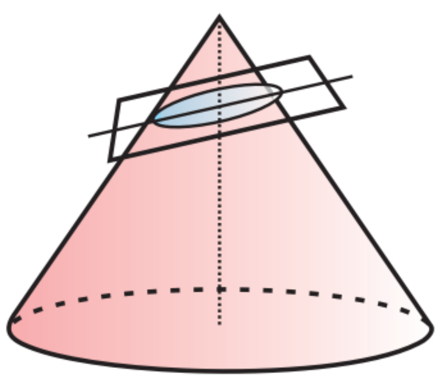
आकृति 21.1



आकृति 21.2

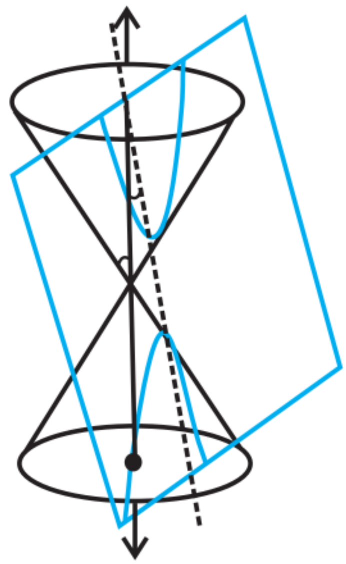


आकृति 21.4



आकृति 21.3

26/04/18



आकृति 21.5

प्रदर्शन

1. आकृति 21.2 में पारदर्शी समतल शंकु को इस प्रकार काटती है कि शीट शंकु के आधार के समांतर है। इस प्रकार प्राप्त सेक्शन एक वृत्त है।
2. आकृति 21.3 में समतल शीट शंकु के अक्ष से थोड़ी झुकी हुई है। इस प्रकार प्राप्त सेक्शन एक दीर्घ वृत्त है।
3. आकृति 21.4 में समतल शीट शंकु के जनक (तिरछी–ऊँचाई)के समांतर है। इस तरह से प्राप्त सेक्शन को परवलय कहते हैं।
4. आकृति 21.5 में समतल शीट के अक्ष के समांतर है। इस प्रकार प्राप्त सेक्शन एक अतिपरवलय है।

प्रेक्षण

1. आकृति 21.2 में समतल शीट पारदर्शी शंकु के आधार के _______ है। इस प्रकार प्राप्त सेक्शन ______है।
2. आकृति 21.3 में समतल शीट शंकु के _______ से थोड़ी–सी झुकी हुई है। इस प्रकार प्राप्त शांकव परिच्छेद __________है।

26/04/18

3. आकृति 21.4 में समतल शीट __________के समांतर है। इस प्रकार प्राप्त शांकव परिच्छेद _______ है।

4. आकृति 21.5 में समतल शीट शंकु के अक्ष के _________ है। इस प्रकार प्राप्त शांकव परिच्छेद अतिपरवलय है।

अनुप्रयोग

यह क्रियाकलाप विभिन्न प्रकार के शांकव परिच्छेदों कों समझने में सहायक है। इन शांकव परिच्छेदों का वास्तविक जीवन और आधुनिक विज्ञान में बहुत उपयोग है। उदाहरणार्थ शांकवों में रुचिकर ज्यामितीय गुणधर्म होते है जिनका उपयोग प्रकाश की किरणों और ध्वनि की तरंगों के परावर्तन में होता है। जैसे–

1. वृत्त, केंद्र से जाने वाली प्रकाश किरणों को वापस केंद्र की ओर परावर्तित कर देता है।

2. परवलय में फोकस से निकली प्रकाश की किरणें परवलय के अक्ष के समांतर परावर्तित हो जाती हैं।

3. दीर्घ वृत्त, एक नाभि से निकली प्रकाश की किरणों को दूसरी नाभि पर परावर्तित कर देता है।

4. अतिपरवलय एक नाभि से निकली प्रकाश की किरणों को इस प्रकार परावर्तित करता है कि वे दूसरी नाभि से आती प्रतीत होती है।

क्रियाकलाप 28

उद्देश्य

विश्लेषण द्वारा $\lim_{x\to c} f(x) = \dfrac{x^2-c^2}{x-c}$ ज्ञात करना।

आवश्यक सामग्री

पेंसिल, सफ़ेद कागज़, कैलकुलेटर (Calculator)

रचना की विधि

1. $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$ द्वारा दिए हुए फलन f पर विचार कीजिए।
2. इस स्थिति में $c = 3$, $x = 3$ पर फलन परिभाषित नहीं है।

प्रदर्शन

1. x के कुछ मान $c = 3$ से कम और कुछ मान $c = 3$ से अधिक लीजिए।
2. दोनों ही स्थितियों में x के मान $c = 3$ से काफी निकट होने चाहिए।
3. x के सभी $c = 3$ के निकट मानों के लिए f के संगत मान परिकलित कीजिए।

प्रदर्शन : सारणी 1

1. x के ऐसे मान जो 3 के निकट हैं, के लिए $f(x)$ के मान निम्न सारणीयों में दिए हैं।

प्रेक्षण

सारणी 1

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	2.99999	2.999999
$f(x)$	5.9	5.99	5.999	5.9999	5.99999	5.999999

सारणी 2

x	3.1	3.01	3.001	3.0001	3.00001	3.000001
$f(x)$	6.1	6.01	6.001	6.0001	6.00001	6.000001

2. सारणी 1 से यह विदित होता है कि जैसे जैसे बाईं ओर से $x \to 3$, $f(x)$, के मान ______ के सन्निकट आते जाते हैं।

3. सारणी 2 से यह विदित होता है कि जैसे दाईं ओर से $x \to 3$, $f(x)$ के मान ______ सन्निकट आते जाते हैं। सारणी (2) और (3) से $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} =$ ______.

अनुप्रयोग

इस प्रकार के क्रियाकलाप का उपयोग संकल्पना सीमा (limit) जैसे $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ जब $f(x)$, $x = c$ पर परिभाषित नहीं है, के प्रदर्शन करने में किया जा सकता है।

क्रियाकलाप 32

उद्देश्य

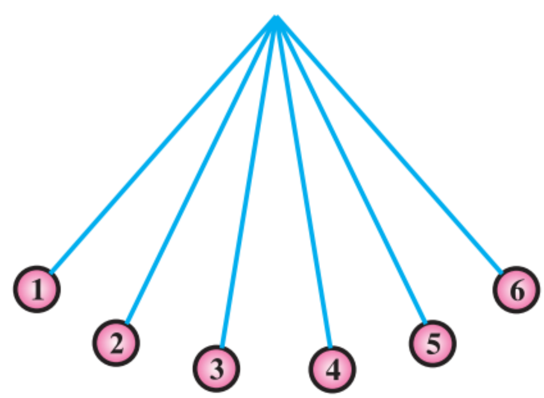
प्रतिदर्श–समष्टि (sample space) लिखना जब कोई पासा एक, दो या अधिक बार रोल किया गया हो।

आवश्यक सामग्री

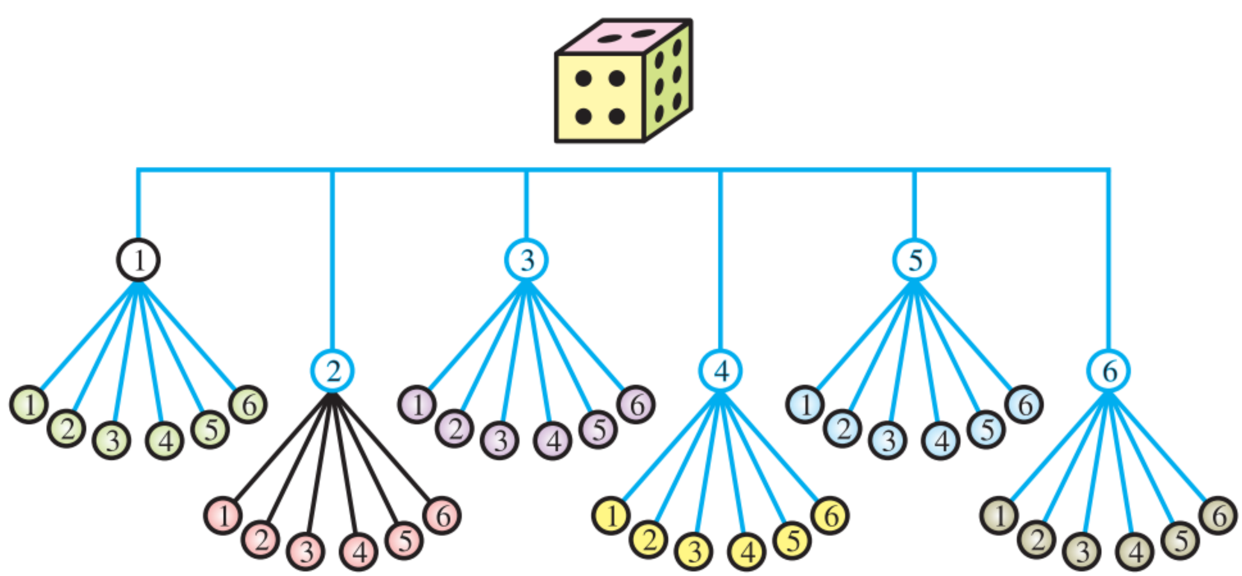
एक पासा (die), कागज़ पेंसिल या पेन, प्लास्टिक की डिस्क जिनमें 1, 2, 3, 4, 5 और 6 अंकित हो।

रचना की विधि

1. एक पासे को एक बार फेंकिए। इसके ऊपर आई संख्या 1, 2, 3, 4, 5 या 6 होगी।
2. एक वृक्षारेख बनाइए जिसमें छः शाखाएँ 1,2, 3, 4, 5 और 6 संख्याओ वाली हैं (देखिए आकृति 32.1)
3. इन परिणामों का प्रतिदर्श–समष्टि लिखिए।
4. एक पासे को दो बार फेंकिए। इसमें 36 प्रकार के परिणामों मे से कोई एक आ सकता है। जैसा आकृति 32.2 में दिखाया गया है। इन परिणामों का प्रतिदर्श–समष्टि लिखिए।



आकृति 32.1



आकृति 32.2

26/04/18

5. इस प्रयोग की पुनरावृत्ति पासे को 3 बार फेंक कर कीजिए और परिणामों के प्रतिदर्श–समष्टि को वृक्षारेख के रूप में लिखिए।

प्रदर्शन

1. यदि पासे को एक बार फेंका गया हो, तब प्रतिदर्श–समिष्ट $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ है। S मे अवयवों की संख्या $= 6 = 6$ है।

2. यदि पासे को दो बार फेंका गया हो, तब प्रतिदर्श समष्टि है:

$$S = \begin{Bmatrix} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6) \\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6) \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{Bmatrix}$$

S में अवयवों की संख्या $= 36 = 6^2$ है और आगे भी इसी प्रकार।

प्रेक्षण

पासें को फेंकने पर प्रतिदर्श–समष्टि में अवयवों की संख्या जब पासों को एक बार फेंका जाता है, = __________, तीन बार फेंका जाता है, = ________, चार बार फेंका जाता है, = ___________.

अनुप्रयोग

उपर्युक्त प्रयोग का प्रतिदर्श समष्टि, प्रतिदर्श समष्टि से संबद्ध विभिन्न घटनाओं की प्रायिकताओं के निर्धारित करने में उपयोगी है।