Métodos Quantitativos

André Amorim

Finanças Corporativas

contato@andreamorim.com.br

www.andreamorim.com.br

Anhanguera

3ª Aula – Função quadrática

MQA

Conceito de Função quadrática

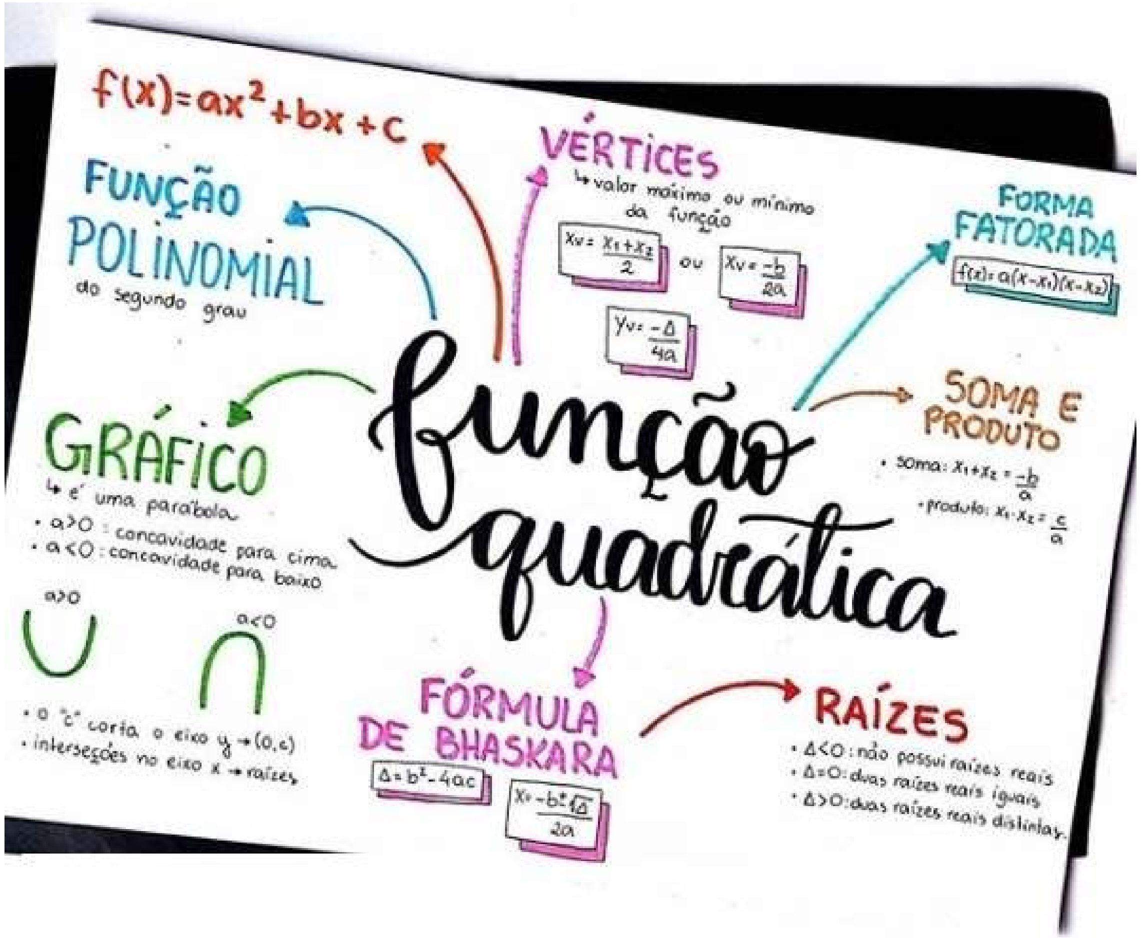
- Dada as funções a seguir, determine seus zeros, caso existam:

- a) $f(x) = x_2 - 8x + 12$
- Para esta função, os coeficientes são $a = 1$, $b = -8$ e $c = 12$.
- Logo o discriminante será $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 64 - 48 = 16$. Substituindo o valor $\Delta = 16$, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} =$$

- $-(-8)-4/2 = \quad 4/2 = 2$
- $(-(-8)+4)/2 = 12/2 = 6$

Portanto, os zeros de f são $x_1 = 2$ e $x_2 = 6$.



f(x)=ax²+bx+c
FUNÇÃO POLINOMIAL
do segundo grau
VÉRTICES
↳ valor máximo ou mínimo da função
Xv = (X1+X2)/2 ou Xv = -b/2a
Yv = -Δ/4a
FORMA FATORADA
f(x)= a(x-x1)(x-x2)
função quadrática
SOMA E PRODUTO
• soma: X1+X2 = -b/a
• produto: X1·X2 = c/a
GRÁFICO
↳ é uma parábola
• a>0 : concavidade para cima
• a<0 : concavidade para baixo
a>0
a<0
• o "c" corta o eixo y → (0,c)
• interseções no eixo x → raízes
FÓRMULA DE BHASKARA
Δ = b² - 4ac
X = (-b ± √Δ)/2a
RAÍZES
• Δ<0 : não possui raízes reais
• Δ=0 : duas raízes reais iguais
• Δ>0 : duas raízes reais distintas

Máximos e mínimos

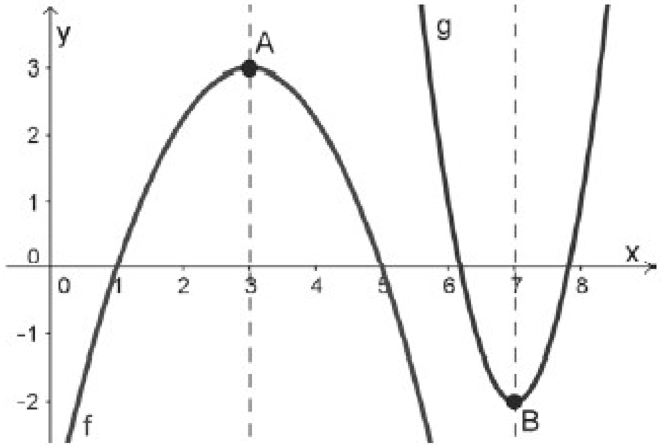
Você viu na seção anterior alguns elementos da parábola, entre eles o vértice, como ilustrado na Figura 1.28. O ponto A é o vértice do gráfico de f(x) $= -075x^2 + 4{,}5x - 3{,}75$ e o ponto B é o vértice do gráfico de g(x) = $3x^2 – 42x + 145$. Ambos os gráficos possuem eixo de simetria (linha tracejada) que passa pelo vértice.

Máximos e mínimos

A é o vértice do gráfico de $f(x) = -075x^2 + 4,5x -3,75$

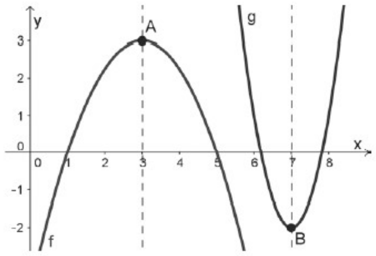
B é o vértice do gráfico de $g(x) = 3x^2 – 42x + 145$.

Figura 1.28 | Gráficos de f e g



Fonte: O autor (2015).

Figura 1.28 | Gráficos de f e g



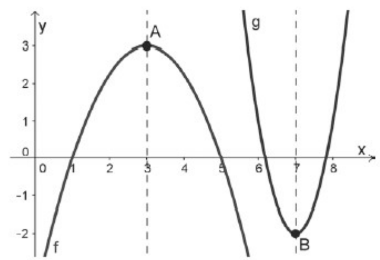
Fonte: O autor (2015).

Máximos e mínimos

O fato de uma parábola ter eixo de simetria significa que o lado direito da curva é o reflexo do lado esquerdo, ou seja, se desenhássemos uma parábola em um papel e o dobrássemos sobre o eixo de simetria, os lados da curva se sobreporiam.

Observe que o coeficiente do termo dominante de $f(x) = -075x^2 + 4,5x -3,75$ é negativo e que o coef. do termo dominante de $g(x) = 3x^2 – 42x + 145$ é positivo.

Figura 1.28 | Gráficos de f e g



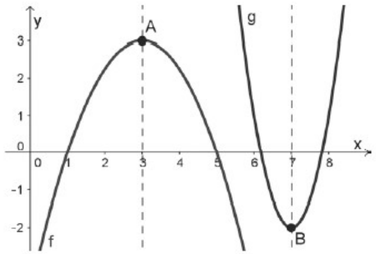
Fonte: O autor (2015).

Máximos e mínimos

Como já abordado na seção anterior, isso influencia na concavidade da parábola: o gráfico de f tem concavidade para baixo e o gráfico de g tem concavidade para cima.

Em decorrência disso, há algo interessante em relação ao vértice: no caso do gráfico de f, o vértice A é o ponto mais alto da parábola e, no caso do gráfico de g, o vértice B é o ponto mais baixo da parábola

Figura 1.28 | Gráficos de f e g



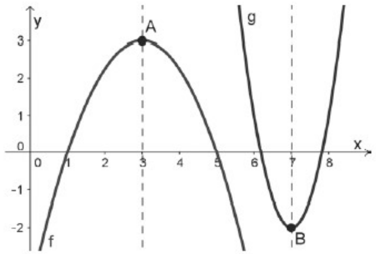
Fonte: O autor (2015).

Máximos e mínimos

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática. Se:

- $a > 0$, o gráfico tem concavidade voltada para cima, e o vértice é seu ponto mais baixo;
- $a < 0$, o gráfico tem concavidade voltada para baixo, e o vértice é seu ponto mais alto.

Figura 1.28 | Gráficos de f e g



Fonte: O autor (2015).

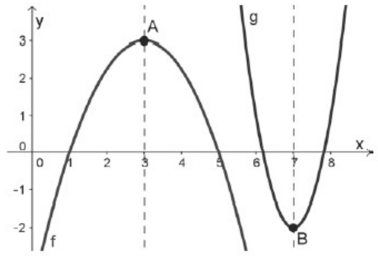
Máximos e mínimos

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática. Se:

- $a > 0$, o gráfico tem concavidade voltada para cima, e o vértice é seu ponto mais baixo;
- $a < 0$, o gráfico tem concavidade voltada para baixo, e o vértice é seu ponto mais alto.

Essa percepção gráfica em relação à função quadrática auxilia no entendimento de um conceito estudado para qualquer função.

Figura 1.28 | Gráficos de f e g



Fonte: O autor (2015).

Máximos e mínimos

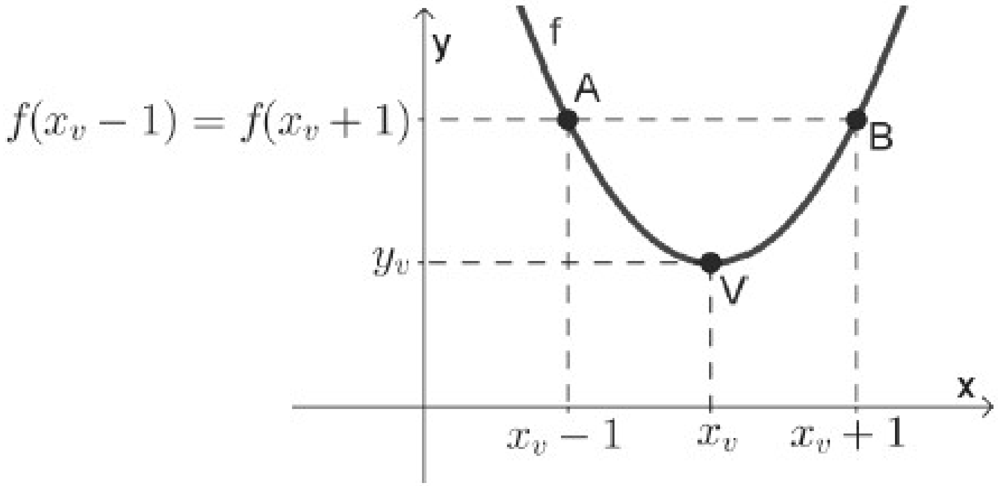
Uma função f(x) possui um máximo em x_v pertencente a um intervalo I, se $f(x_v) \geq f(x)$ para todo $x \in I$. Nesse caso, $f(x_v)$ será o maior valor alcançado (valor máximo) pela função nesse intervalo.

De modo semelhante, uma função f(x) possui um mínimo em x_v pertencente a um intervalo I, se $f(x_v) \leq f(x)$ para todo $x \in I$. Nesse caso, $f(x_v)$ será o menor valor alcançado (valor mínimo) pela função nesse intervalo.

Máximos e mínimos

No exemplo da Figura 1.28, A é um ponto de máximo e B é um ponto de mínimo. Para uma função quadrática, as coordenadas do vértice são (x_v, y_v), em que x_v é o "x do vértice" e y_v, o " y do vértice".

Figura 1.29 | Simetria da parábola



Fonte: O autor (2015).

$$a(x_v - 1)^2 + b(x_v - 1) + c = a(x_v + 1)^2 + b(x_v + 1) + c$$

$$\cancel{ax_v^2} - 2ax_v + \cancel{a} + \cancel{bx_v} - b + \cancel{c} = \cancel{ax_v^2} + 2ax_v + \cancel{a} + \cancel{bx_v} + b + \cancel{c}$$

$$-2ax_v - b = 2ax_v + b$$

$$-b - b = 2ax_v + 2ax_v$$

$$-2b = 4ax_v$$

..

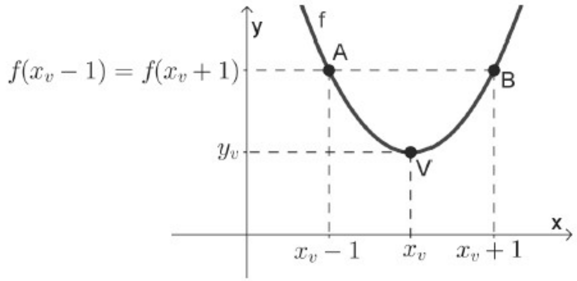
O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro, mais duas vezes o primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo." Produtos notáveis

Máximos e mínimos

Como a parábola é simétrica em relação ao seu vértice, segue que $f(x_v-1) = f(x_v+1)$, como mostra a Figura 1.29. Com base nessa igualdade, temos:

$$x_v = -\frac{2b}{4a} = -\frac{b}{2a}.$$

Figura 1.29 | Simetria da parábola



Fonte: O autor (2015).

Da última igualdade, segue que

Com essa propriedade e as observações anteriores, podemos enunciar o seguinte:

Máximos e mínimos

Como a parábola é simétrica em relação ao seu vértice, segue que $f(x_v-1) = f(x_v+1)$, como mostra a Figura 1.29. Com base nessa igualdade, temos:

$$a(x_v-1)^2+b(x_v-1)+c=a(x_v+1)^2+b(x_v+1)+c$$

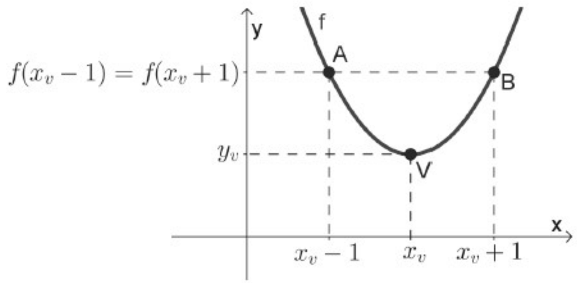
$$\cancel{ax_v^2}-2ax_v+\cancel{a}+\cancel{bx_v}-b+\cancel{c}=\cancel{ax_v^2}+2ax_v+\cancel{a}+\cancel{bx_v}+b+\cancel{c}$$

$$-2ax_v-b=2ax_v+b$$

$$-b-b=2ax_v+2ax_v$$

$$-2b=4ax_v$$

Figura 1.29 | Simetria da parábola



Fonte: O autor (2015).

Dada uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, o vértice de seu gráfico tem coordenadas (- b/ 2a, f (- b/ 2a)).

Exercício

Dada a função quadrática $f(x) = 2x^2 - 4x + 8$, determine as coordenadas do vértice de seu gráfico e se este é um ponto de máximo ou de mínimo. o vértice de seu gráfico tem coordenadas $x_v = - b/ 2a$ e $y_v = -\Delta/ 4a$

Resolução:

Para esta função temos a = 2, b = -4 e c = 8. Logo:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2 \cdot 2} = 1;$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8}{4 \cdot 2} = -\frac{16 - 64}{8} = \frac{16-64}{8} = -\frac{(-48)}{8} = 6 .$$

Exercício

Dada a função quadrática $f(x) = 2x^2 - 4x + 8$, determine as coordenadas do vértice de seu gráfico e se este é um ponto de máximo ou de mínimo. o vértice de seu gráfico tem coordenadas $x_v = - b/ 2a$ e $y_v = -\Delta/ 4ª$

Como $a = 2 > 0$ o gráfico de f possui concavidade voltada para cima, o que implica que seu vértice é um ponto de mínimo.

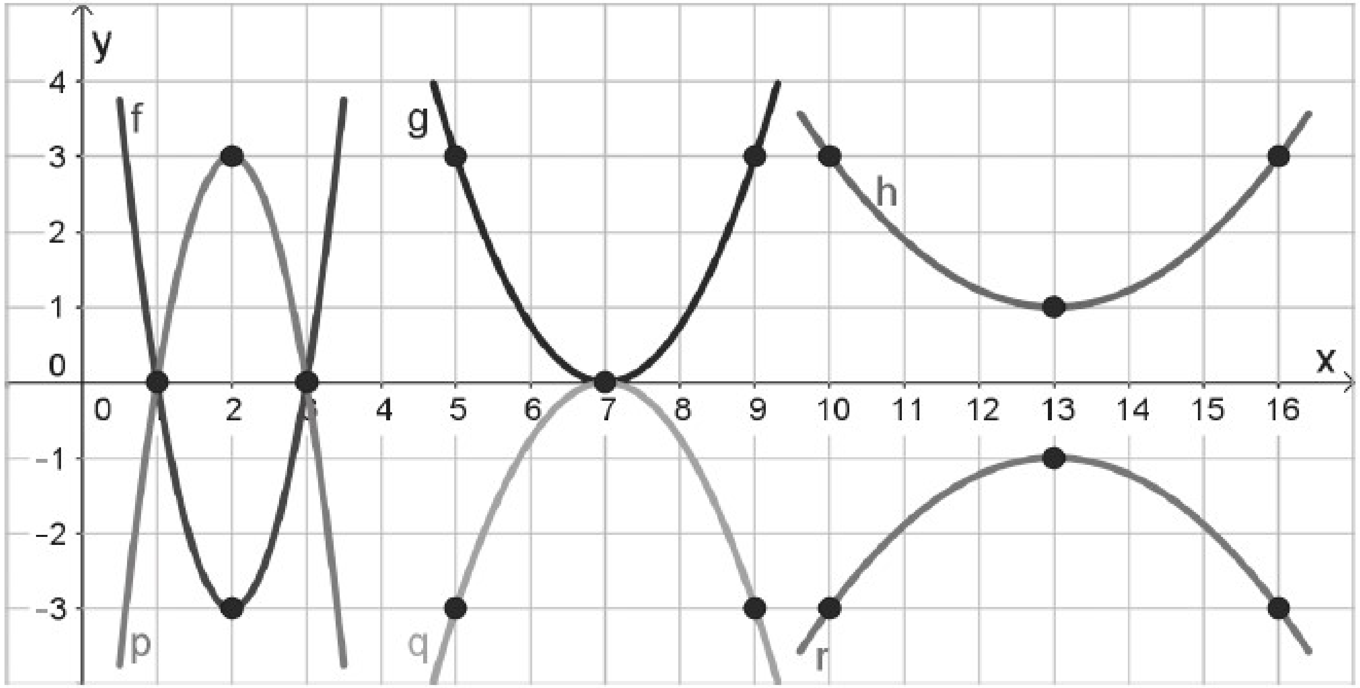
Nesse caso, $f(1) = 6$ é o menor valor (mínimo) assumido pela função.

Sinal da função quadrática

Observe na Figura 1.30 as funções f, g, h, p, q, r. A partir do exposto na seção anterior e analisando os gráficos, segue que as funções f e p possuem dois zeros reais cada ($\Delta > 0$), as funções g e q possuem um único zero cada ($\Delta = 0$) e as funções h e r não possuem zeros reais ($\Delta < 0$). A partir de uma análise gráfica, podemos ainda afirmar que:

Sinal da função quadrática

Figura 1.30 | Funções quadráticas



Fonte: O autor (2015).

Sinal da função quadrática

$h(x) > 0$ (é positiva) no intervalo $(-\infty, +\infty)$ = R, pois seu gráfico está totalmente acima do eixo x;

$r(x) < 0$ (é negativa) no intervalo $(-\infty, +\infty)$ = R, pois seu gráfico está totalmente abaixo do eixo x;

$g(x) > 0$ nos intervalos $(-\infty, x_1)$ e $(x_1, +\infty)$, em que $g(x_1) = 0$ (na Figura 1.30, $x_1 = 7$);

$q(x) < 0$ nos intervalos, $(-\infty, x_1)$ e $(x_1, +\infty)$ em que $q(x_1) = 0$ (na Figura 1.30, $x_1 = 7$);

$f(x) > 0$ em $(-\infty, x_1)$ e $(x_2, +\infty)$, $f(x) < 0$ em (x_1, x_2) e $f(x_1) = f(x_2) = 0$ (na Figura 1.30, x1= 1 e x2= 3);

$p(x) > 0$ em (x_1, x_2) , $p(x) < 0$ em $(-\infty, x_1)$ e $(x_2, +\infty)$ $p(x1) = p(x_2) = 0$ (na Figura 1.30, x1= 1 e x2= 3).

Exercício

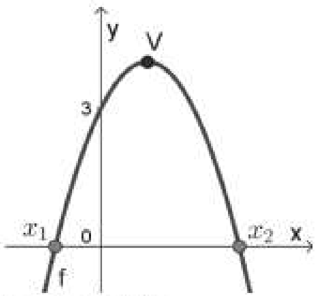
Dada a função $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, faça o estudo dos sinais e determine se f possui um valor máximo ou um mínimo e especifique esse valor.

Como para esta função $a = -1 < 0$, a concavidade de seu gráfico é voltada para baixo. Em consequência, o vértice é o ponto mais alto do gráfico, tornando-o um ponto de máximo. Além disso, como $b = 2$ e $c = 3$, temos:

Exercício

Dada a função $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, faça o estudo dos sinais e determine se f possui um valor máximo ou um mínimo e especifique esse valor.

Figura 1.31 | Esboço



Fonte: O autor (2015).

$\Delta = b^2 - 4ac = 22 -4 . (-1) . 3 = 4 - (-12) = 16$

$\rightarrow \Delta = 16 > 0.$

Como o discriminante é positivo, a função possui dois zeros reais, além de seu gráfico interceptar o eixo da ordenadas no ponto de coordenadas (0,3), pois c = 3. Com essas informações, podemos inferir que o gráfico da função é semelhante ao esboço da Figura 1.31. Calculando os zeros de f, temos:

Exercício

Dada a função f(x) = $-x^2 + 2x + 3$, faça o estudo dos sinais e determine se f possui um valor máximo ou um mínimo e especifique esse valor.

$\Delta = b^2 - 4ac = 22 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 4 - (-12) = 16$

$\rightarrow \Delta = 16 > 0$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{16}}{2\cdot(-1)} = \frac{-2+4}{-2} = \frac{2}{-2} = -1;$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{16}}{2\cdot(-1)} = \frac{-2-4}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3.$$

Exercício

Dada a função $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, faça o estudo dos sinais e determine se f possui um valor máximo ou um mínimo e especifique esse valor.

Logo, $f(x) > 0$ em $(-1, 3)$, $f(x) < 0$ em e $(-\infty, -1)$ e $(3, +\infty)$,

$f(-1) = f(3) = 0$. Para determinar o máximo de f, precisamos primeiramente do valor de x_v:

Exercício

Logo, $f(x) > 0$ em $(-1, 3)$, $f(x) < 0$ em e $(-\infty, -1)$ e $(3, +\infty)$,

$f(-1) = f(3) = 0$. Para determinar o máximo de f, precisamos primeiramente do valor de x_v:

a= -1

b= 2

c= 3

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2\cdot(-1)} = -\frac{2}{(-2)} = 1 .$$

$y_v = -\Delta / 4a$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$$Y = \frac{2^2 - 4.(-1).3}{4.(-1)} \rightarrow -\frac{4+12}{-4} \rightarrow -\frac{16}{-4} \rightarrow 4$$

FIM