Geometria Analítica

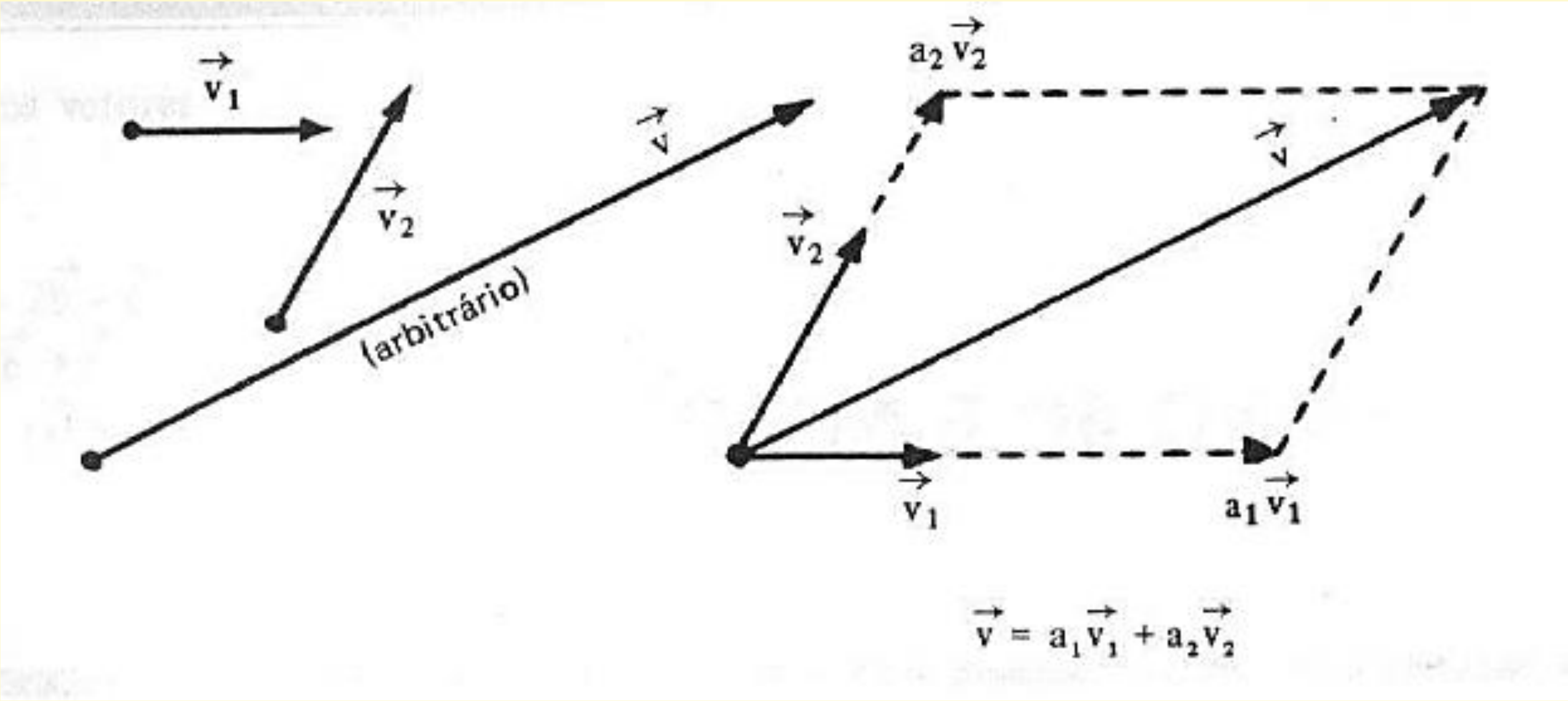
Licenciatura em Química

Semana 02 – aula 2
Decomposição de vetores no plano

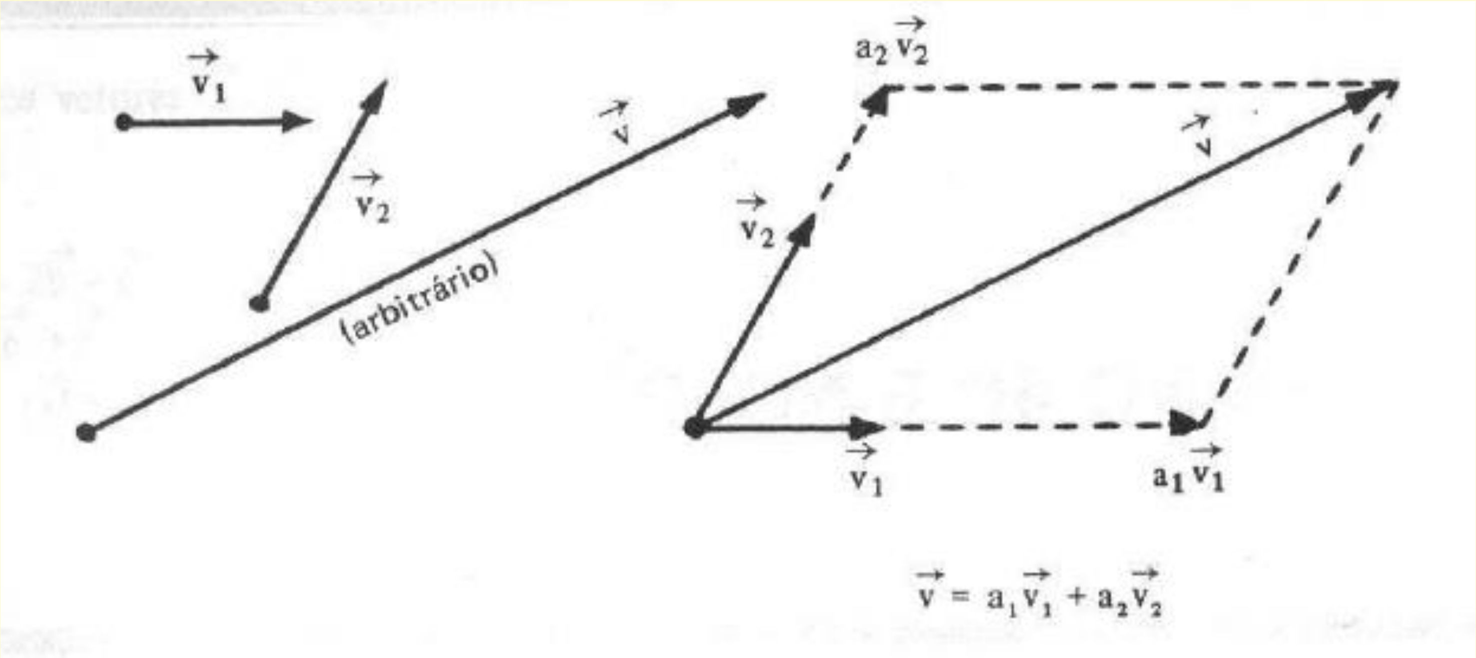
Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

Vetor no plano

Dados dois vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, não colineares, qualquer vetor $\vec{v}$ pode ser decomposto no plano segundo as direções de $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$.

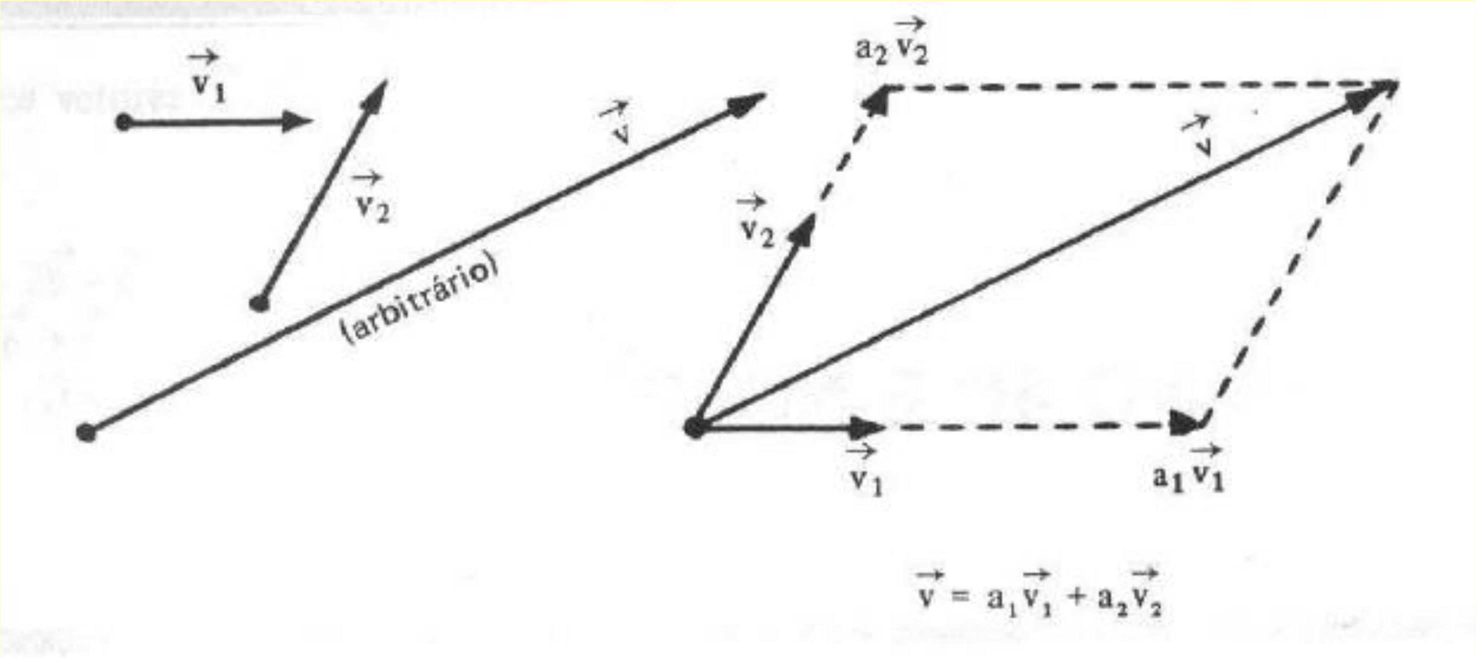


Vetor no plano



$$\vec{v} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2}$$

Vetor no plano



$$\vec{v} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2}$$

a_1, a_2: são componentes de $\vec{v}$;
$\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$: são chamado de vetores de base.

Base de vetores

- As bases mais utilizadas são as bases ortonormais.

$\boldsymbol{B} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{e_1}}, \overrightarrow{\boldsymbol{e_2}}\}$ é uma base ortonormal se:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{e_1}} \perp \overrightarrow{\boldsymbol{e_2}}$$

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{e_1}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{e_2}}| = \boldsymbol{1}$$

Base de vetores

- As bases mais utilizadas são as bases ortonormais.

$\boldsymbol{B} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{e_1}}, \overrightarrow{\boldsymbol{e_2}}\}$ é uma base ortonormal se:

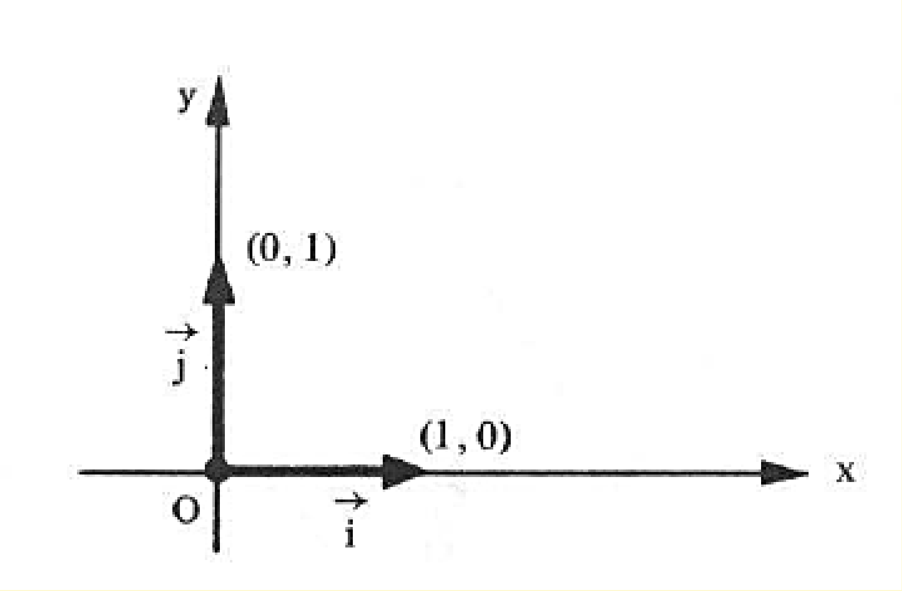
$$\overrightarrow{\boldsymbol{e_1}} \perp \overrightarrow{\boldsymbol{e_2}}$$

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{e_1}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{e_2}}| = \boldsymbol{1}$$

- Existem infinitas bases ortonormais no plano $\boldsymbol{xoy}$. Mas, uma delas é mais conveniente.

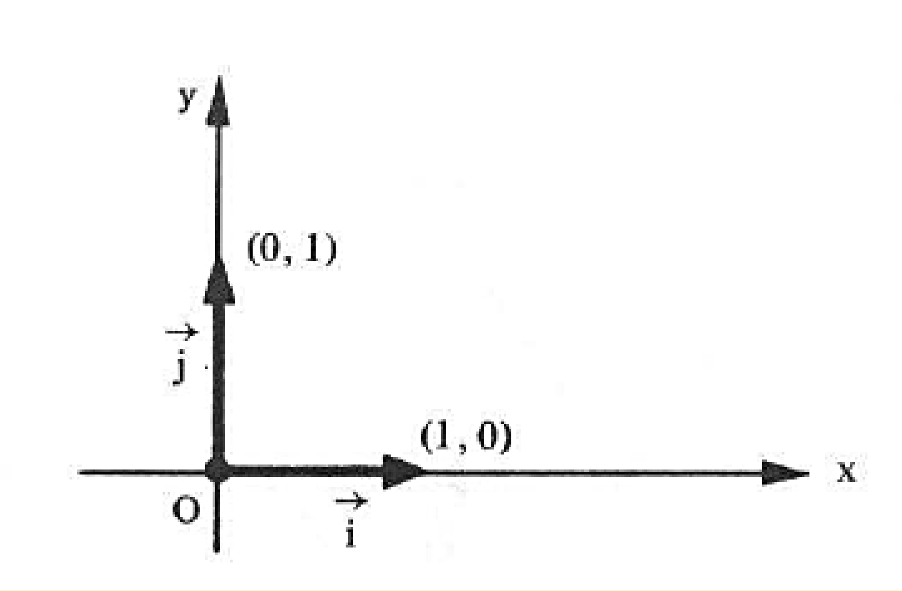
Base canônica

$\mathbf{C} = \{\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}\}$: vetores da base canônica;



Base canônica

$\mathbf{C} = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$: vetores da base canônica;

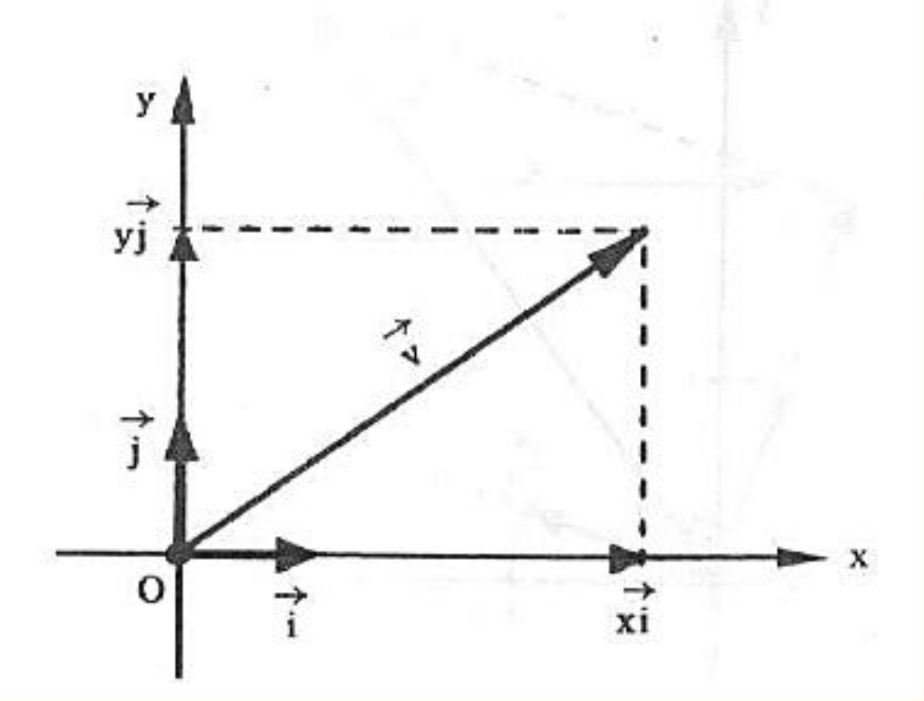


Os vetores da base canônica $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ são ortogonais entre si e coincidem com a direção e sentido dos eixos cartesianos.

Base canônica

$\mathbf{C} = \{\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}\}$: vetores da base canônica;

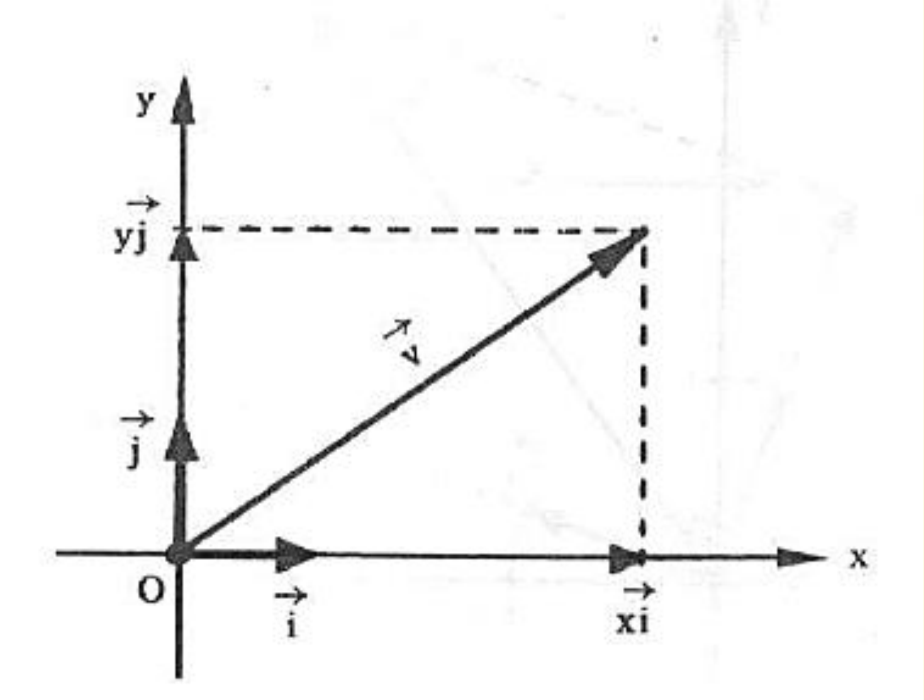
$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$: componentes de $\vec{\boldsymbol{v}}$.



Base canônica

$\mathbf{C} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$: vetores da base canônica;

x, y: componentes de $\vec{v}$.



$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$x\vec{i}$: projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre o eixo x;

$y\vec{i}$: projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre o eixo y;

Expressão analítica de um vetor

Fixada a base $\{\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}\}$ o vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$ no plano pode ser definido como um par ordenado $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Expressão analítica de um vetor

Fixada a base $\{\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}\}$ o vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$ no plano pode ser definido como um par ordenado $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}$$

$\boldsymbol{x}$ é a abscissa;
$\boldsymbol{y}$ é a ordenada;

Exemplos: representar os vetores

a) $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}$ ou $\vec{v} = (-1, 1)$

b) $3\vec{j} =$

c) $-10\vec{i} =$

Em particular, os vetores da base canônica:

$\vec{i} = (1, 0)$ $\quad\quad$ $\vec{j} = (0, 1)$

Igualdade e soma de vetores

Sejam $\vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}),\ \vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2})$

I. Igualdade:

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{v}} \quad se\ e\ somente\ se \quad \boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{x_2}; \quad \boldsymbol{y_1} = \boldsymbol{y_2}$$

Igualdade e soma de vetores

Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$

I. Igualdade:

$$\vec{u} = \vec{v} \quad se\ e\ somente\ se \quad x_1 = x_2; \quad y_1 = y_2$$

II. Soma:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$$

Exercício

Dados $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{4}, \mathbf{1})$, $\vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{2}, \mathbf{6})$ calcular.

a) $\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}} =$ $\qquad$ $\boldsymbol{b})$ $\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{v}} =$

Propriedades da soma

Sejam $\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}$ vetores quaisquer no plano.

I) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (comutativa)

II) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (associativa)

Propriedades da soma

Sejam $\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}$ vetores quaisquer no plano.

I) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (comutativa)

II) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (associativa)

III) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ (elemento neutro)

IV) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ (inverso)

Multiplicação de vetor por escalar

Dado um vetor $\vec{\boldsymbol{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ no espaço e um número real $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, chama-se produto do número real $\boldsymbol{a}$ pelo vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$, o vetor $\boldsymbol{a}\vec{\boldsymbol{v}}$ no espaço tal que:

Multiplicação de vetor por escalar

Dado um vetor $\vec{\boldsymbol{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ no espaço e um número real $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, chama-se produto do número real $\boldsymbol{a}$ pelo vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$, o vetor $\boldsymbol{a}\vec{\boldsymbol{v}}$ no espaço tal que:

a) $|\boldsymbol{a}\vec{\boldsymbol{v}}| = |\boldsymbol{a}|\,|\vec{\boldsymbol{v}}|$

b) $\boldsymbol{a}\vec{\boldsymbol{v}}$ é paralelo a $\vec{\boldsymbol{v}}$

Multiplicação de vetor por escalar

Dado um vetor $\vec{\boldsymbol{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ no espaço e um número real $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, chama-se produto do número real $\boldsymbol{a}$ pelo vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$, o vetor $\boldsymbol{a}\vec{\boldsymbol{v}}$ no espaço tal que:

a) $|\boldsymbol{a}\vec{\boldsymbol{v}}| = |\boldsymbol{a}|\,|\vec{\boldsymbol{v}}|$

b) $\boldsymbol{a}\vec{\boldsymbol{v}}$ é paralelo a $\vec{\boldsymbol{v}}$

c) Se $\boldsymbol{a} > 0$, $\boldsymbol{a}\vec{\boldsymbol{v}}$ tem mesmo sentido de $\vec{\boldsymbol{v}}$

Se $\boldsymbol{a} < 0$, $\boldsymbol{a}\vec{\boldsymbol{v}}$ tem sentido contrário de $\vec{\boldsymbol{v}}$

Se $\boldsymbol{a} = 0$ ou $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\mathbf{0}}$, então: de $\boldsymbol{a}\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\mathbf{0}}$

Propriedades da multiplicação por escalar

Sejam $\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}$ vetores quaisquer no espaço e $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ números reais, então valem as propriedades:

I) $(ab)\vec{v} = a(b\vec{v})$ (Associativa)

II) $(a+b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$ (distributiva do escalar)

Propriedades da multiplicação por escalar

Sejam $\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}$ vetores quaisquer no espaço e $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ números reais, então valem as propriedades:

I) $(ab)\vec{v} = a(b\vec{v})$ (Associativa)

II) $(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$ (distributiva do vetor)

III) $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$ (distributiva do escalar)

IV) $1\vec{v} = \vec{v}$ (identidade)

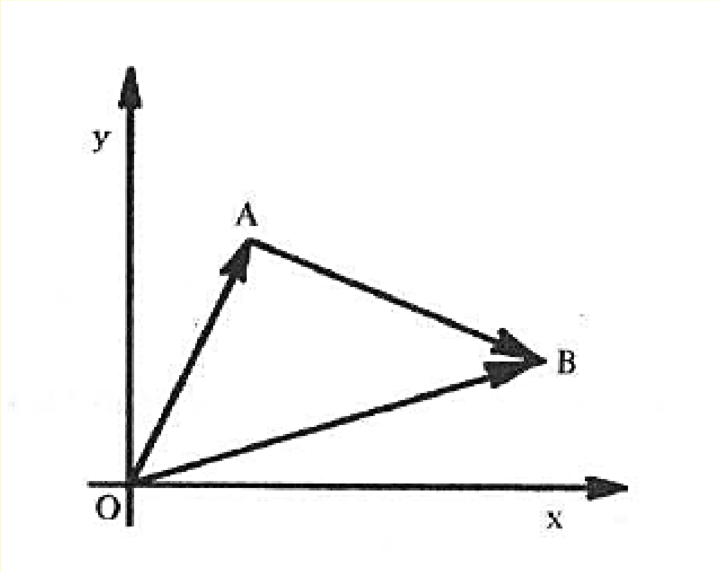
Exemplo

Determinar o vetor $\vec{\boldsymbol{w}}$ na igualdade, sabendo que $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{3}, -\mathbf{1})$ e $\vec{\boldsymbol{v}} = (-\mathbf{2}, \mathbf{4})$.

$$3\vec{w} + 2\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w}$$

Vetor definido por dois pontos

Sejam os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$

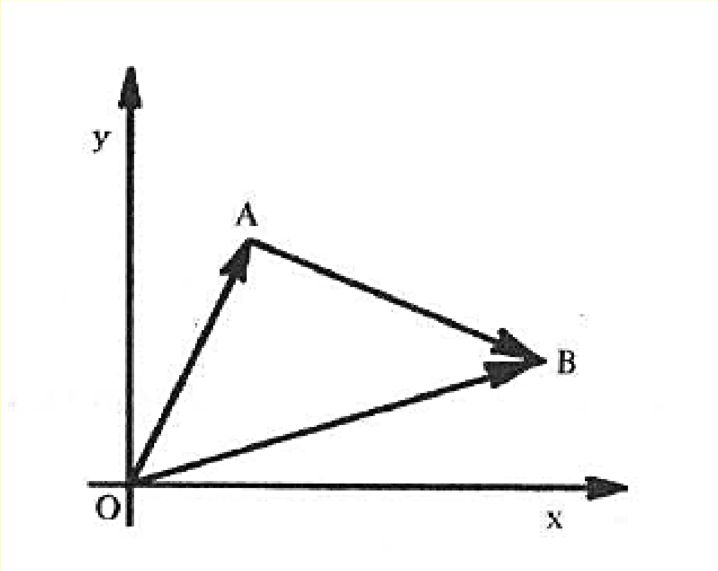


Construímos os vetores:

$\overrightarrow{\boldsymbol{OA}} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{\boldsymbol{OB}} = (x_2, y_2)$

Vetor definido por dois pontos

Sejam os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$



Construímos os vetores:

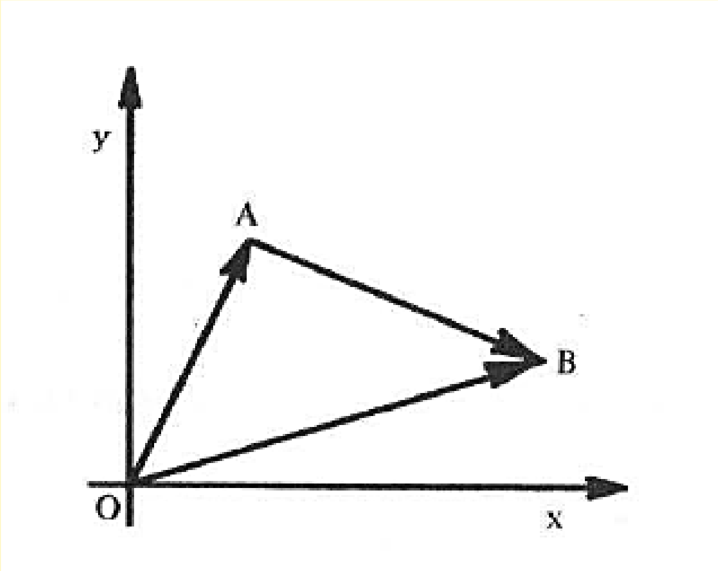
$\overrightarrow{\boldsymbol{OA}} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{\boldsymbol{OB}} = (x_2, y_2)$

Da soma de vetores:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OA}} + \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OB}}$$

Vetor definido por dois pontos

Sejam os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$



Construímos os vetores:

$\overrightarrow{\boldsymbol{OA}} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{\boldsymbol{OB}} = (x_2, y_2)$

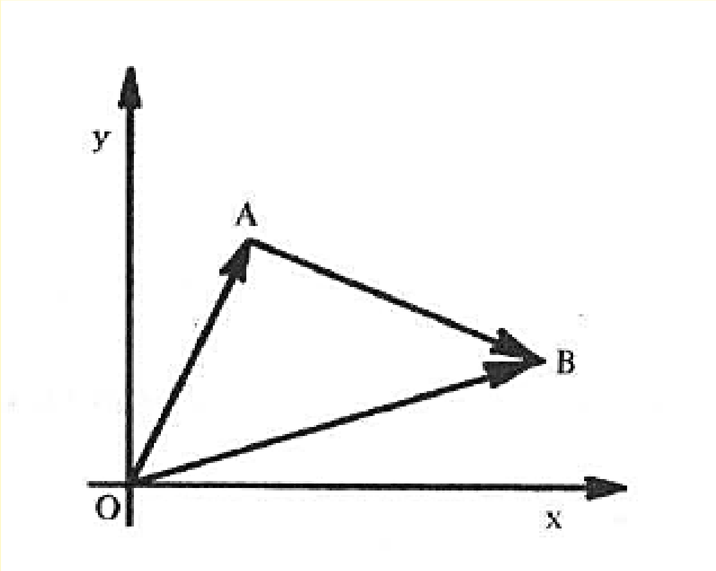
Da soma de vetores:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OA}} + \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OB}}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OB}} - \overrightarrow{\boldsymbol{OA}} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1)$$

Vetor definido por dois pontos

Sejam os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$



Construímos os vetores:

$\overrightarrow{\boldsymbol{OA}} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{\boldsymbol{OB}} = (x_2, y_2)$

Da soma de vetores:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OA}} + \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OB}}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OB}} - \overrightarrow{\boldsymbol{OA}} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1)$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Exercício

Resposta: $\boldsymbol{D(0,\frac{5}{2})}$

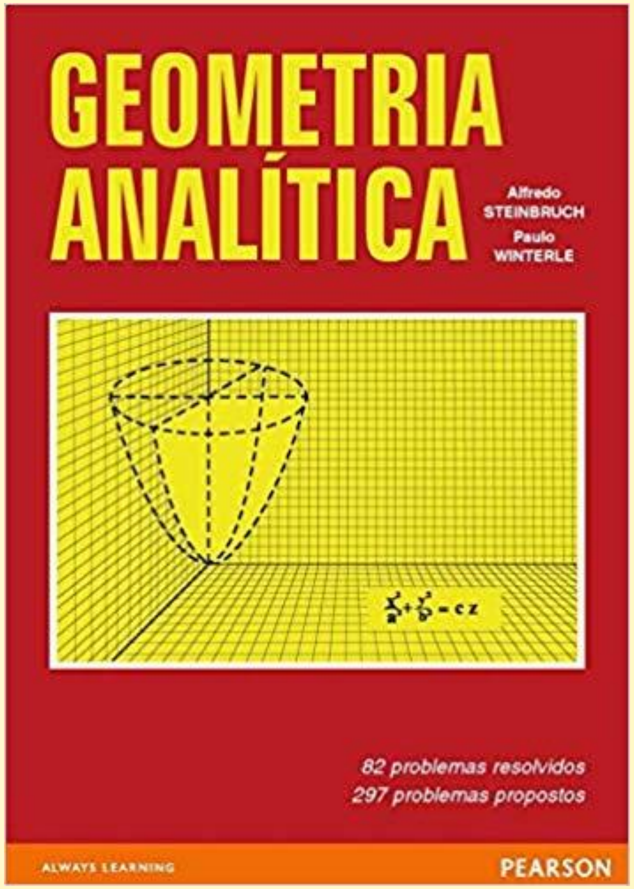
Dados os pontos $A(-1,2)$, $B(3,-1)$ e $C(-2,4)$ determinar $D(x,y)$ de modo que:

$$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Resolver os problemas da p. 37: 1, 2, 3, 4, 5 e 6

Bibliografia - GA

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. Geometria Analítica. 2. Ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.



Numeração dos exercícios com base na 2ª ed. ----->>

Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br

Currículo Lattes http://lattes.cnpq.br/1614784455223743