Geometria Analítica

Engenharias

Semana 02 – Aula 1
Vetores
Tratamento algébrico

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Tratamento algébrico dos vetores

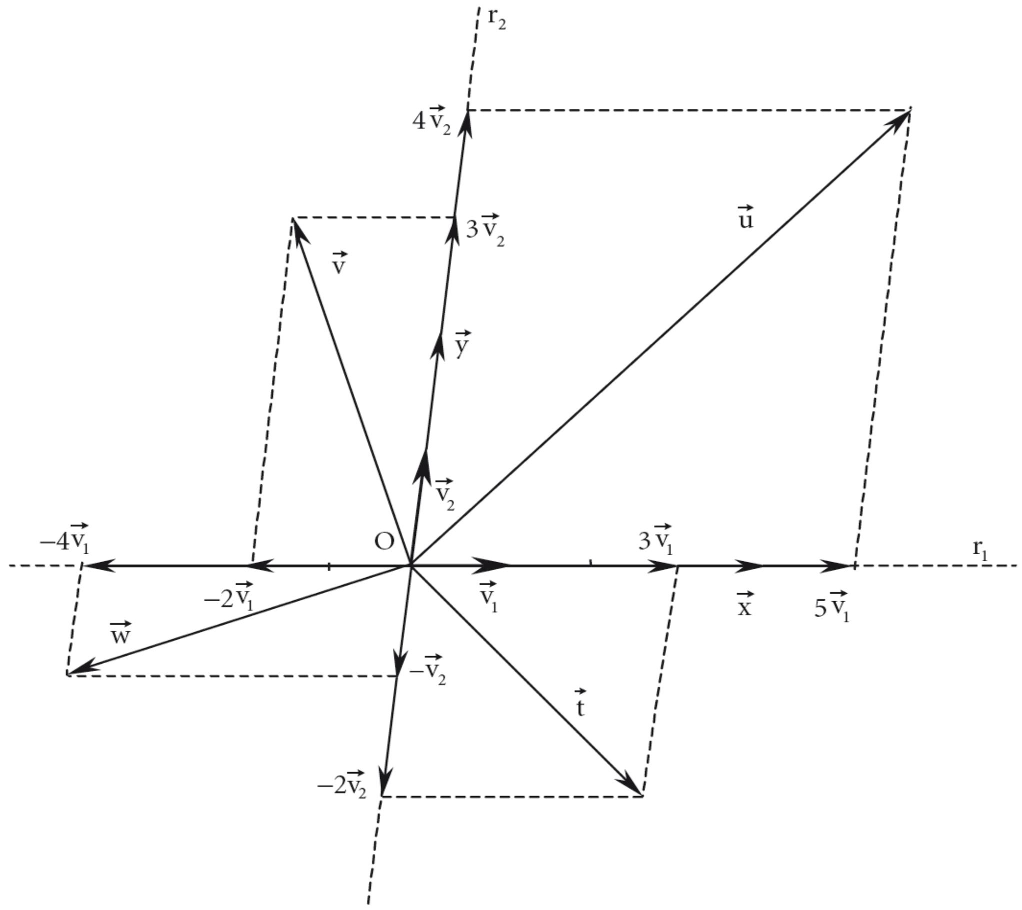


Figura 1.38

Combinação linear de dois vetores

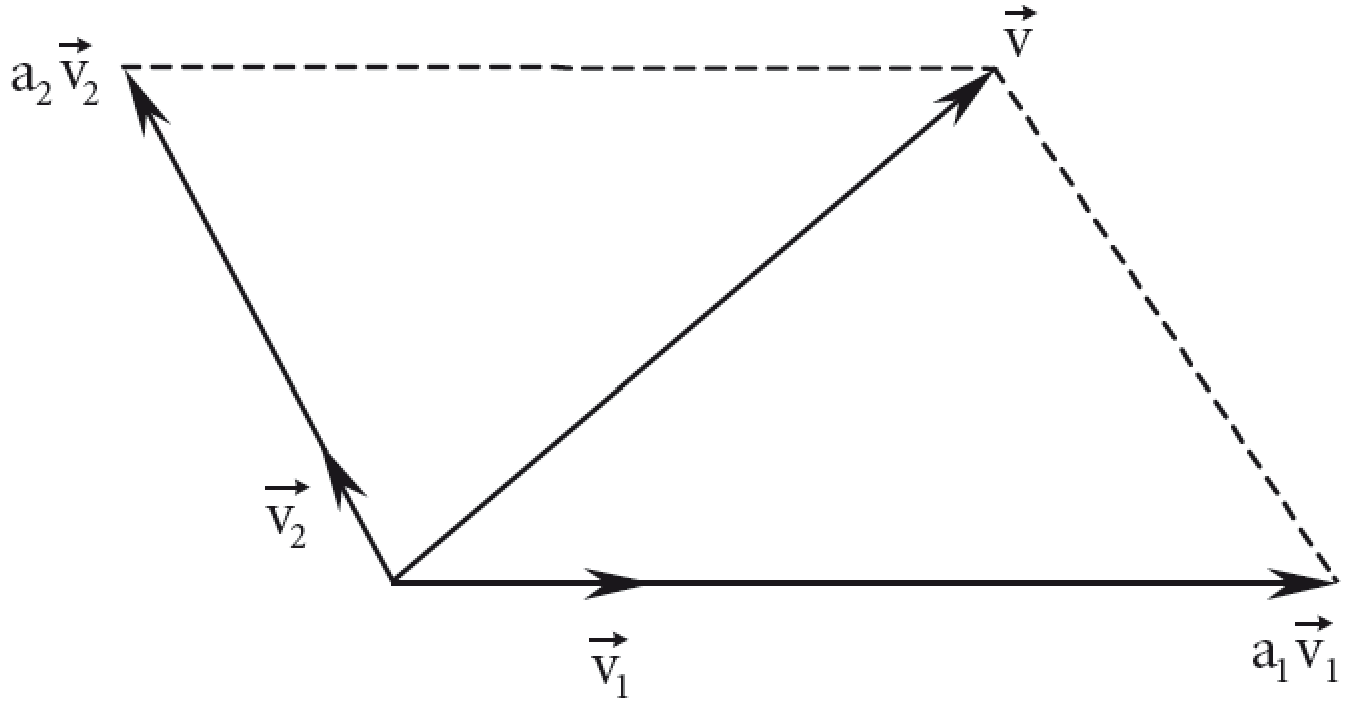


Figura 1.39

Base de vetores

- As bases mais utilizadas são as bases ortonormais.

$\boldsymbol{B} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{e_1}}, \overrightarrow{\boldsymbol{e_2}}\}$ é uma base ortonormal se:

Base de vetores

- As bases mais utilizadas são as bases ortonormais.

$\boldsymbol{B} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{e_1}}, \overrightarrow{\boldsymbol{e_2}}\}$ é uma base ortonormal se:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{e_1}} \perp \overrightarrow{\boldsymbol{e_2}}$$

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{e_1}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{e_2}}| = \boldsymbol{1}$$

Base de vetores

- As bases mais utilizadas são as bases ortonormais.

$\boldsymbol{B} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{e_1}}, \overrightarrow{\boldsymbol{e_2}}\}$ é uma base ortonormal se:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{e_1}} \perp \overrightarrow{\boldsymbol{e_2}}$$

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{e_1}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{e_2}}| = \boldsymbol{1}$$

- Existem infinitas bases ortonormais no plano $\boldsymbol{xoy}$. Mas, uma delas é mais conveniente.

Base canônica

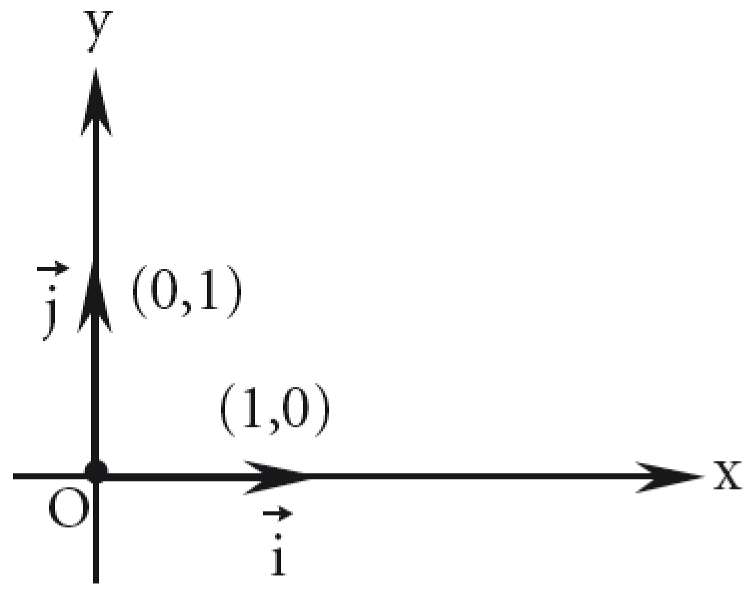


Figura 1.40

Os vetores da base canônica $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ são ortogonais entre si e coincidem com a direção e sentido dos eixos cartesianos.

Vetor no plano

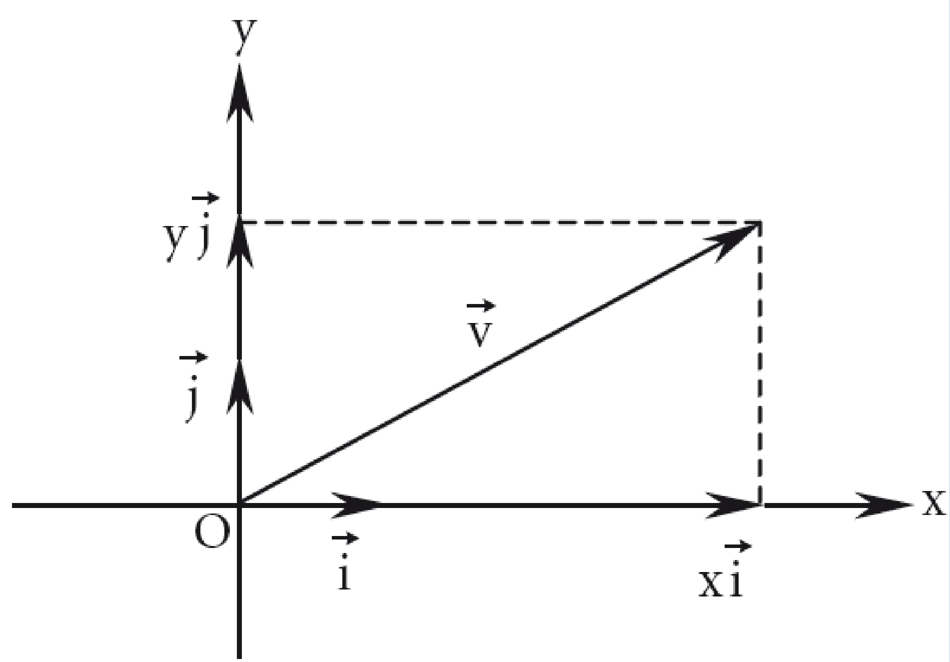


Figura 1.41

Vetor no plano

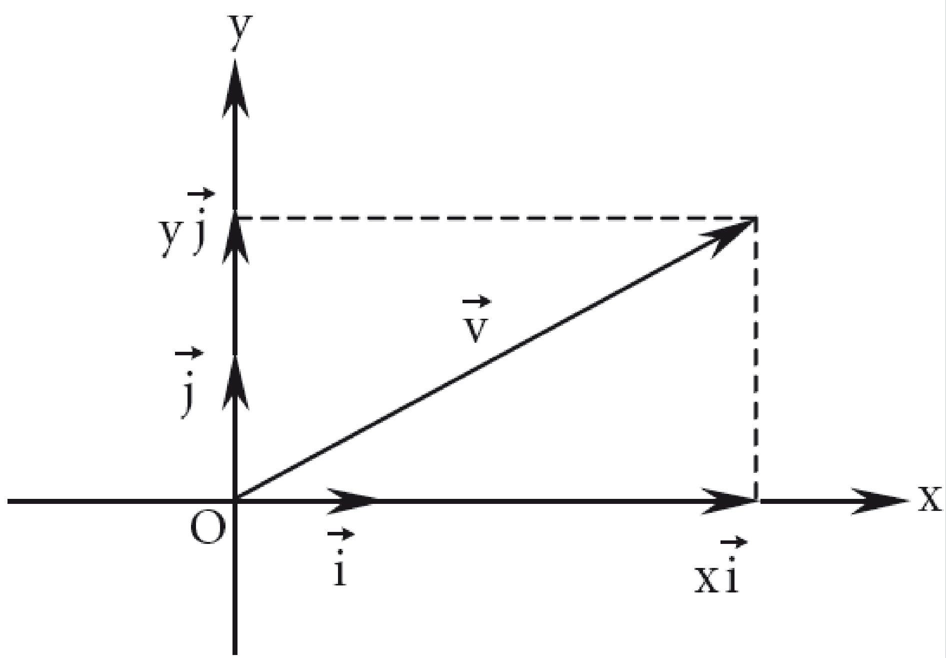


Figura 1.41

$$\vec{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

$x\vec{\imath}$: projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre o eixo x;

$y\vec{\imath}$: projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre o eixo y;

Vetor no plano

Fixada a base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ o vetor $\vec{v}$ no plano pode ser definido como um par ordenado (x, y).

Vetor no plano

Fixada a base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ o vetor $\vec{v}$ no plano pode ser definido como um par ordenado (x, y).

$$\vec{v} = (x, y)$$

Vetor no plano

Fixada a base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ o vetor $\vec{v}$ no plano pode ser definido como um par ordenado (x, y).

$$\vec{v} = (x, y)$$

x é a abscissa;
y é a ordenada;

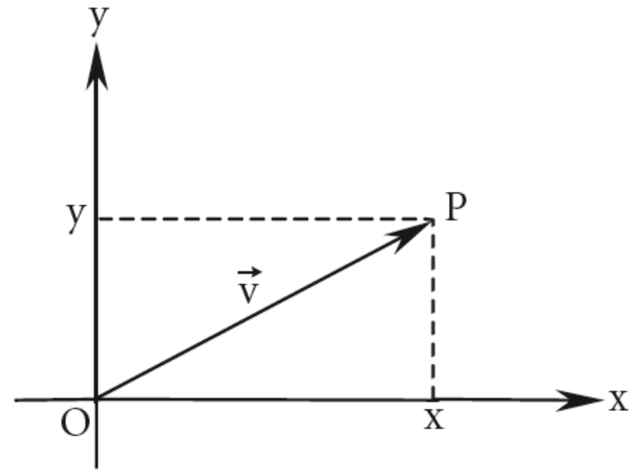


Figura 1.42

Exemplos

a) $3\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} = (3, -5)$

b) $3\vec{\jmath} = (0, 3)$

Exemplos

a) $3\vec{i} - 5\vec{j} = (3, -5)$

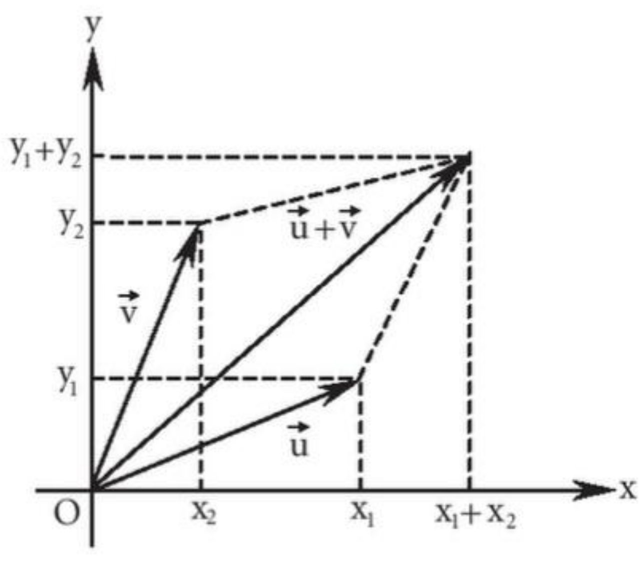
b) $3\vec{j} = (0, 3)$

c) $-4\vec{i} = (-4, 0)$

d) $\vec{0} = (0, 0)$

Operações com vetores forma analítica

Sejam $\vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1})$, $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2})$ e $\propto \in \mathbb{R}$



(a)

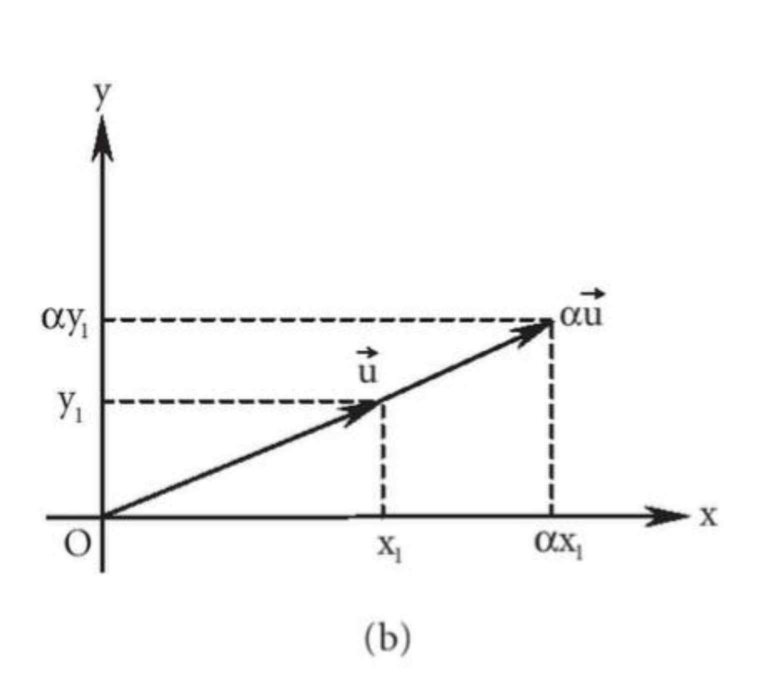
I) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

II) $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

$$= (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

Operações com vetores forma analítica

Sejam $\vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1})$, $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2})$ e $\propto \in \mathbb{R}$



I) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

II) $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

III) $\alpha\vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1)$

IV) $-\vec{u} = (-1)\vec{u}$

$= (-x_1, -y_1)$

Exemplos 1

Demontre as propriedades abaixo utilizando as definições dos vetores em componente e as operações algébricas.

Considerar: $\vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1})$, $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2})$, $\propto \boldsymbol{e}\ \beta \in \mathbb{R}$

a) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

b) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

c) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

d) $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{u}$

Exemplos 2

a) Dados os vetores: $\vec{u} = (2, -3)\ e\ \vec{v} = (-1,4)$ encontrar:

$$3\vec{u} + 2\vec{v} =$$

b) Dados os vetores: $\vec{u} = (3, -1)\ e\ \vec{v} = (-2,4)$ encontrar:

$$3\vec{x} + 2\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{x}$$

Vetor definido por dois pontos

Sejam os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$

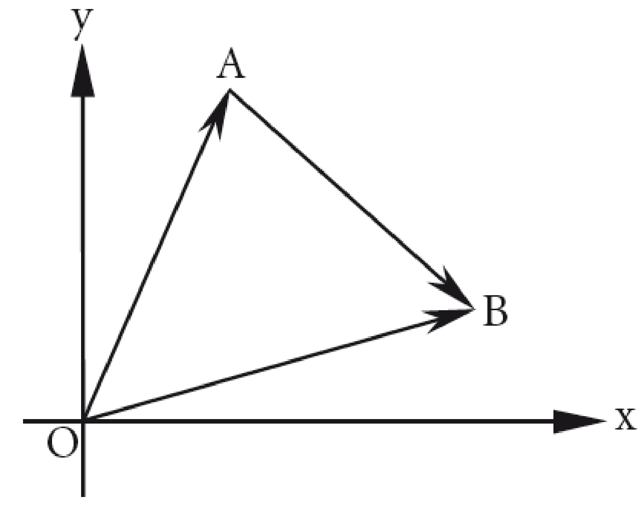


Figura 1.44

Vetor definido por dois pontos

Sejam os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$

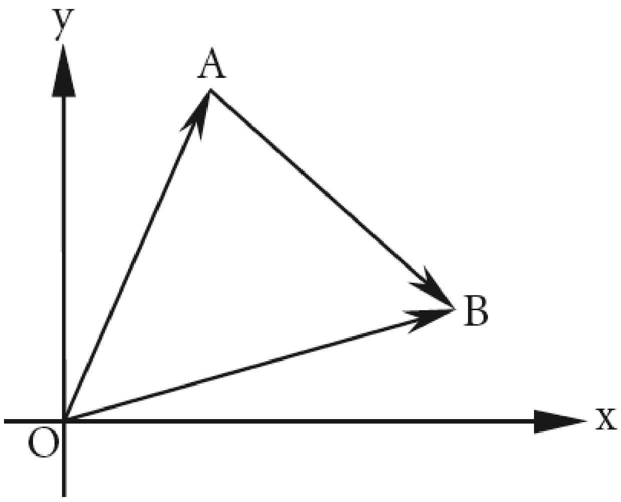


Figura 1.44

Construímos os vetores:

$\overrightarrow{\boldsymbol{OA}} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{\boldsymbol{OB}} = (x_2, y_2)$

Vetor definido por dois pontos

Sejam os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$

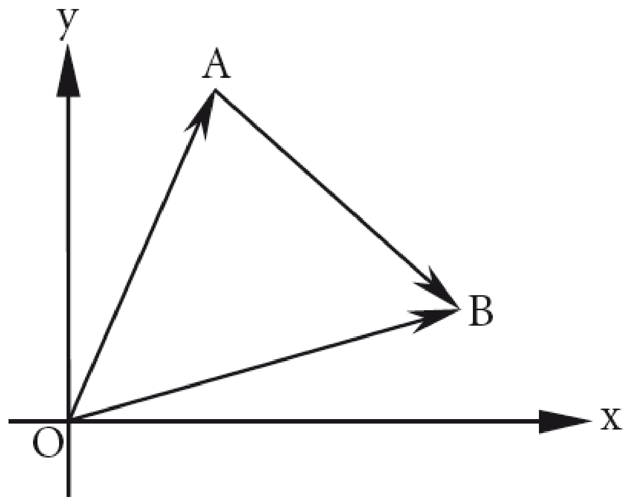


Figura 1.44

Construímos os vetores:

$\overrightarrow{\boldsymbol{OA}} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{\boldsymbol{OB}} = (x_2, y_2)$

Da soma de vetores:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OA}} + \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OB}}$$

Vetor definido por dois pontos

Sejam os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$

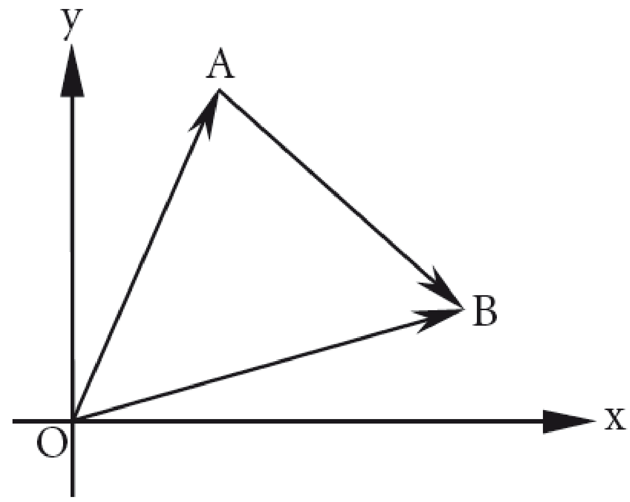


Figura 1.44

Construímos os vetores:

$\overrightarrow{\boldsymbol{OA}} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{\boldsymbol{OB}} = (x_2, y_2)$

Da soma de vetores:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OA}} + \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OB}}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OB}} - \overrightarrow{\boldsymbol{OA}} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1)$$

Vetor definido por dois pontos

Sejam os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$

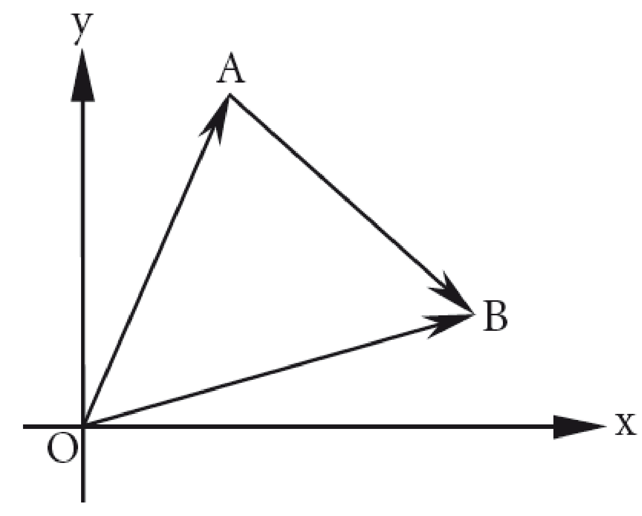


Figura 1.44

Construímos os vetores:

$\overrightarrow{\boldsymbol{OA}} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{\boldsymbol{OB}} = (x_2, y_2)$

Da soma de vetores:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OA}} + \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OB}}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OB}} - \overrightarrow{\boldsymbol{OA}} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1)$$

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)}$$

O vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ é o vetor posição ou representante natural de $\overrightarrow{AB}$

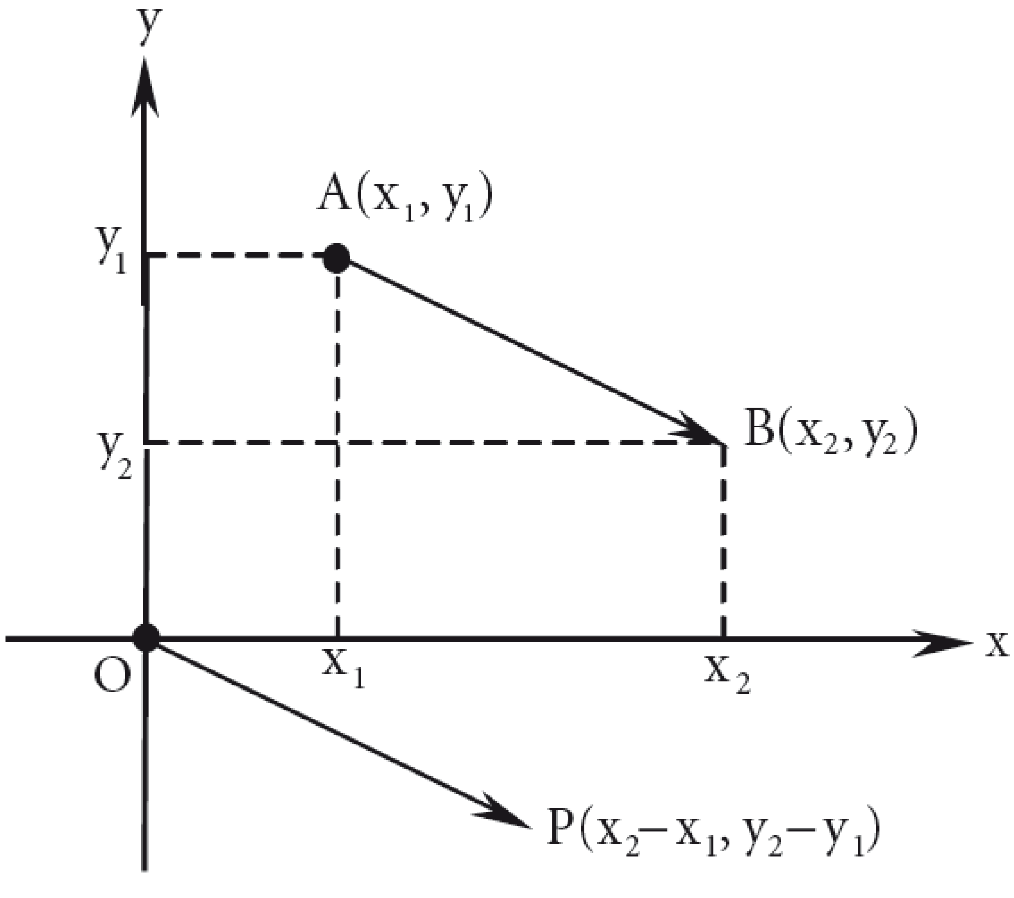


Figura 1.45

Segmentos que representam o mesmo vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$

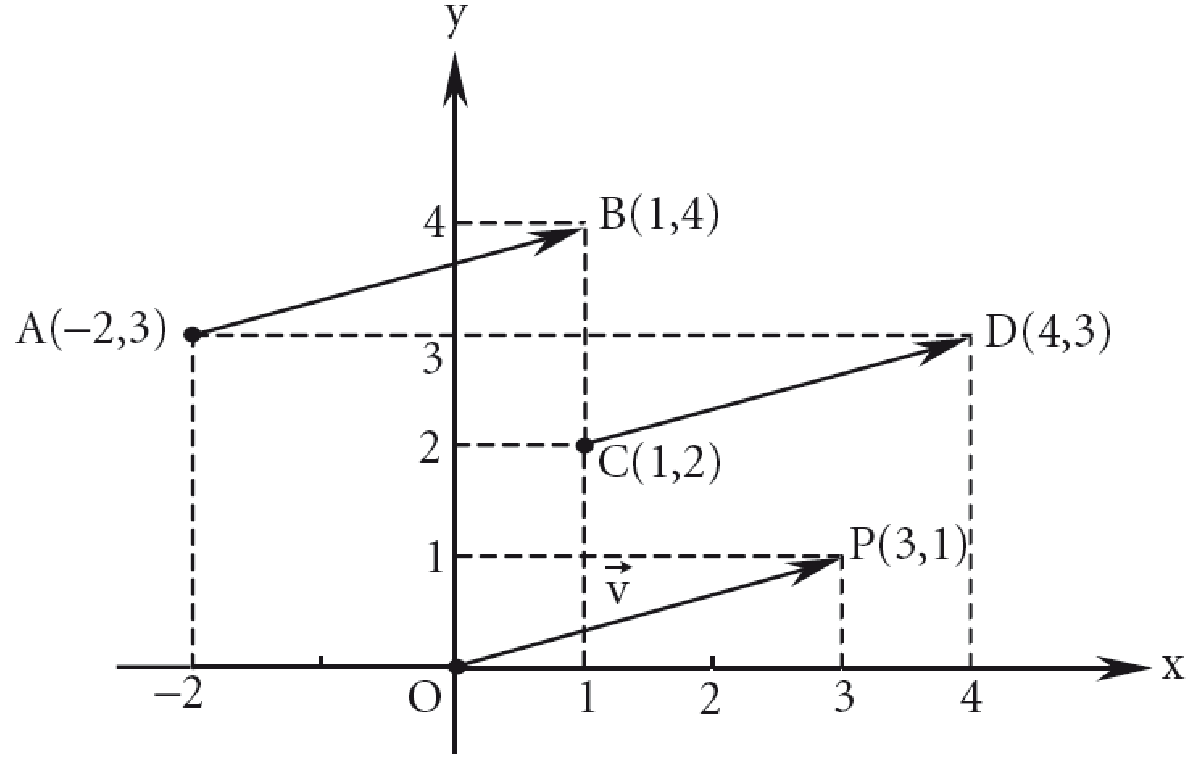


Figura 1.46

Exemplo 3

Dados os pontos $A(-1,2)$, $B(3,-1)$ e $C(-2,4)$ determine o ponto D de modo que

$$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Ponto Médio (M)

Se $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, o ponto médio será:

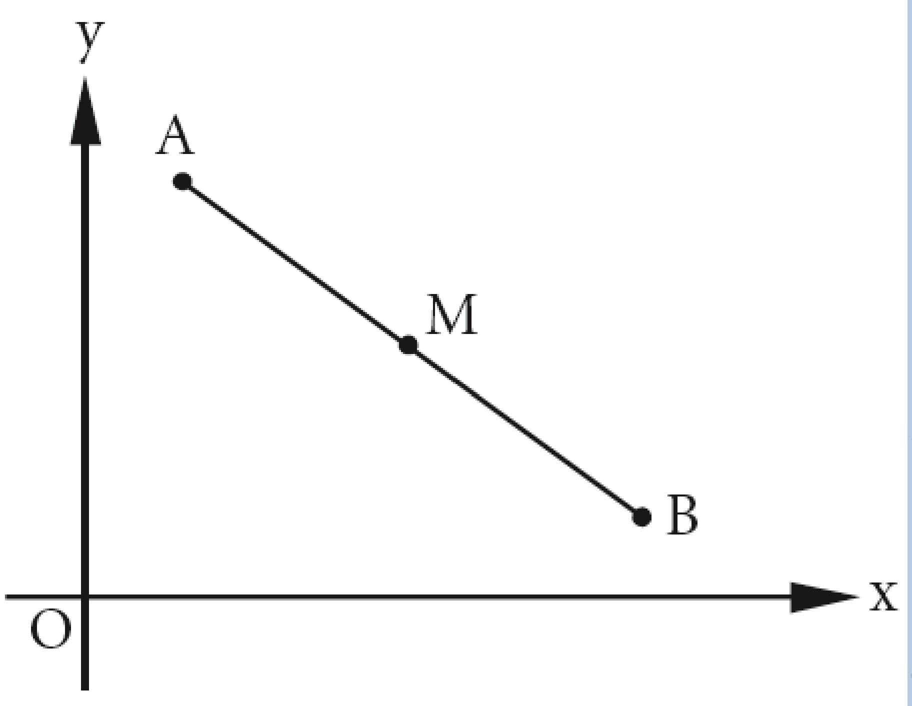


Figura 1.50

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Paralelismo entre dois vetores

Se $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são paralelos,
Existe um número real $\propto$ tal que:

Paralelismo entre dois vetores

Se $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são paralelos,
Existe um número real $\propto$ tal que:

$$\vec{u} = \alpha\vec{v}$$

Paralelismo entre dois vetores

Se $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são paralelos,
Existe um número real $\propto$ tal que:

$$\vec{u} = \alpha\vec{v}$$

$$(x_1, y_1) = \alpha(x_2, y_2)$$

$$(x_1, y_1) = (\alpha x_2, \alpha y_2)$$

Paralelismo entre dois vetores

Se $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são paralelos,
Existe um número real $\propto$ tal que:

$$\vec{u} = \alpha\vec{v}$$

$$(x_1, y_1) = \alpha(x_2, y_2)$$

$$(x_1, y_1) = (\alpha x_2, \alpha y_2)$$

$$x_1 = \alpha x_2 \text{ e } y_1 = \alpha y_2 \quad \Rightarrow$$

Paralelismo entre dois vetores

Se $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são paralelos,
Existe um número real $\propto$ tal que:

$$\vec{u} = \alpha\vec{v}$$

$$(x_1, y_1) = \alpha(x_2, y_2)$$

$$(x_1, y_1) = (\alpha x_2, \alpha y_2)$$

$$x_1 = \alpha x_2 \text{ e } y_1 = \alpha y_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \alpha}$$

Módulo de um vetor

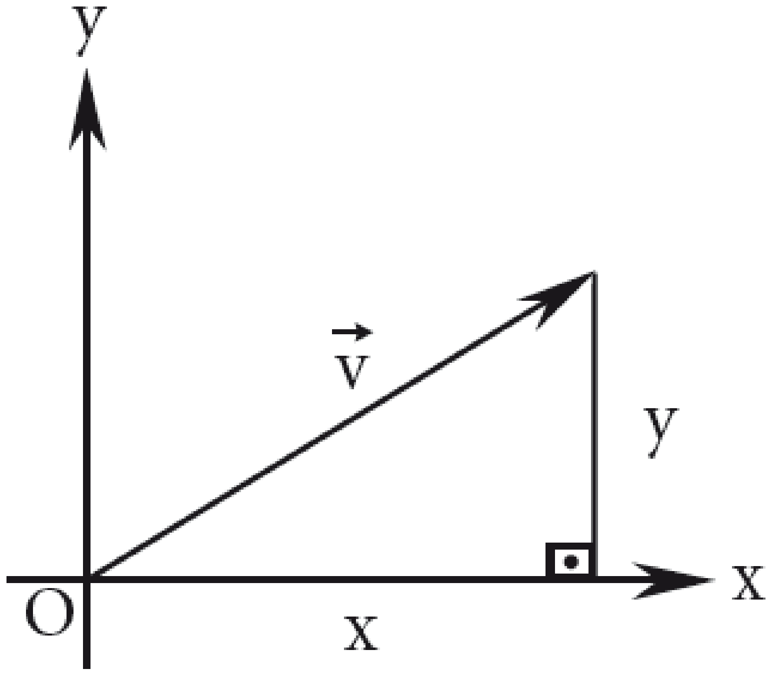


Figura 1.51

$$\vec{v} = (x, y)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2})$$

Distância entre dois pontos

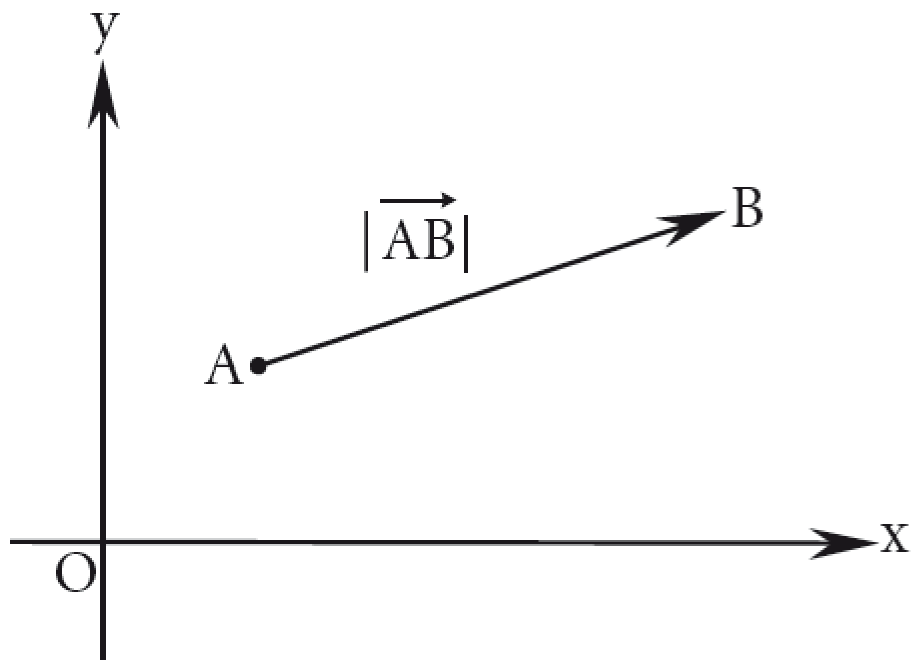


Figura 1.52

$$d(A,B) = |\overrightarrow{AB}|$$

Vetor Unitário

Para cada vetor $\vec{v} \neq 0$ é possível associar dois vetores unitários paralelos a $\vec{v}$.

$$(\text{Versor de } \vec{v}) = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$(\text{oposto do Versor de } \vec{v}) = -\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

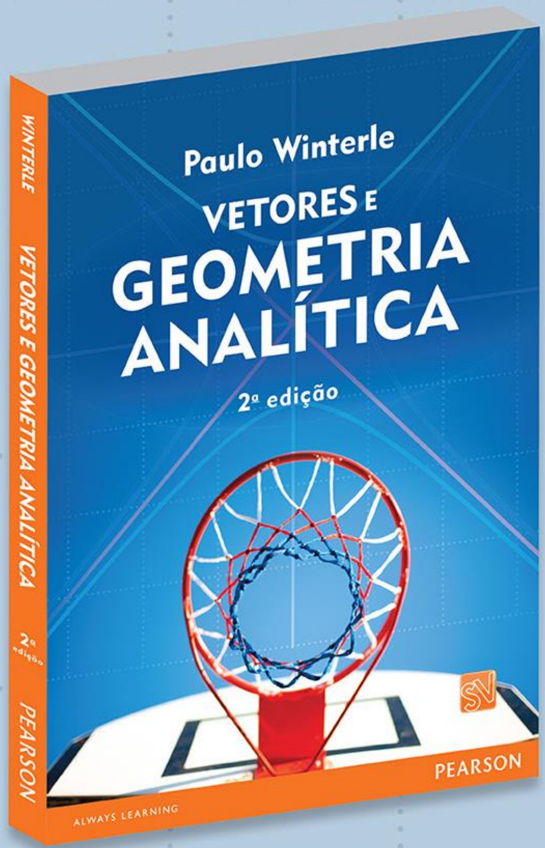
Tarefas para depois da aula:

- Reler o capítulo 1 do livro texto.
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Realizar a lista de exercícios observando as propriedades e exercitando a imaginação.

Próxima aula:

- Vetores no espaço.

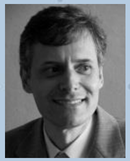
Bibliografia Geometria Analítica



WINTERLE, P. Vetores e Geometria Analítica. 2ª ed. São Paulo: Pearson, 2014.

Numeração dos exercícios com base na 2ª ed.

Contatos



profhenrique.com

henrique.faria@unesp.br