Geometria Analítica

Engenharias

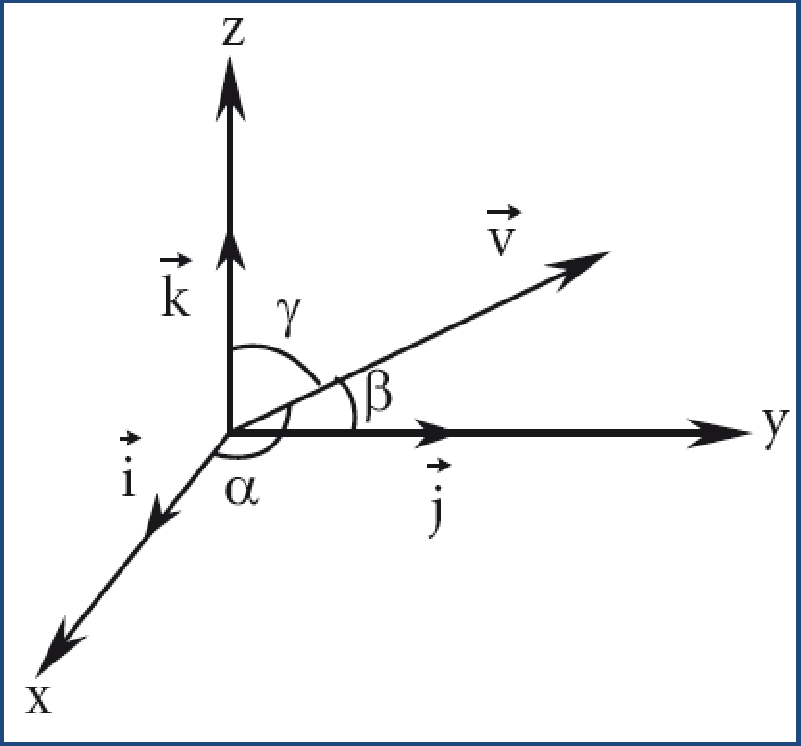
Semana 03 – Aula 2
Ângulos diretores e projeção de vetor

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

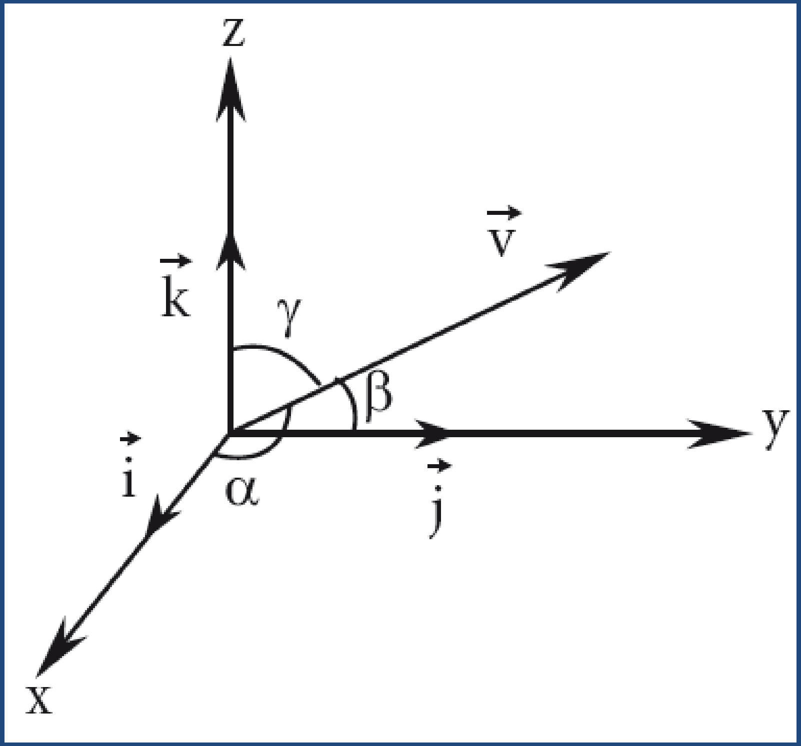
Ângulos diretores

Seja o vetor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ não nulo.



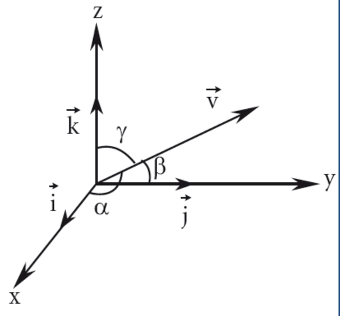
Ângulos diretores

Seja o vetor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ não nulo.



Os ângulos diretores de $\vec{v}$ são os ângulos α, β e γ formados entre esse vetor e os vetores da base canônica $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$.

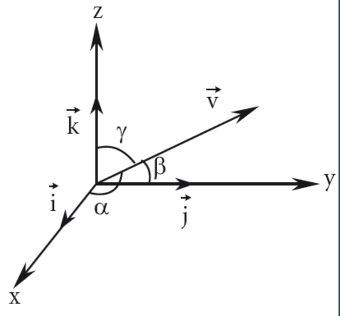
Ângulos diretores



Da definição de ângulo entre vetores tem-se:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{i}}{|\vec{v}||\vec{i}|}$$

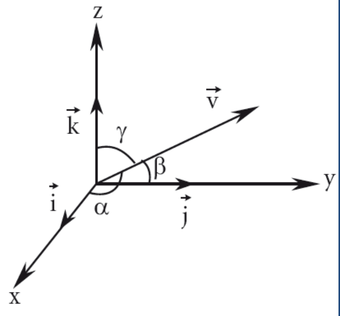
Ângulos diretores



Da definição de ângulo entre vetores tem-se:

$$\boldsymbol{cos\alpha} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{i}}{|\vec{v}||\vec{i}|} = \frac{(x,y,z)\cdot(1,0,0)}{|\vec{v}|1}$$

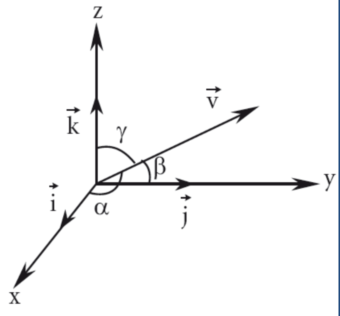
Ângulos diretores



Da definição de ângulo entre vetores tem-se:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{i}}{|\vec{v}||\vec{i}|} = \frac{(x, y, z) \cdot (1, 0, 0)}{|\vec{v}|1} = \frac{x}{|\vec{v}|}$$

Ângulos diretores



Da definição de ângulo entre vetores tem-se:

$$cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{i}}{|\vec{v}||\vec{i}|} = \frac{(x,y,z)\cdot(1,0,0)}{|\vec{v}|1} = \frac{x}{|\vec{v}|}$$

$$cos\beta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{|\vec{v}||\vec{j}|} = \frac{(x,y,z)\cdot(0,1,0)}{|\vec{v}|1} = \frac{y}{|\vec{v}|}$$

$$cos\gamma = \frac{\vec{v}\cdot\vec{k}}{|\vec{v}||\vec{k}|} = \frac{(x,y,z)\cdot(0,0,1)}{|\vec{v}|1} = \frac{z}{|\vec{v}|}$$

Ângulos diretores

Nota-se que o versor de $\vec{v}$ é expresso por:

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(x, y, z)}{|\vec{v}|} = \left(\frac{x}{|\vec{v}|}, \frac{y}{|\vec{v}|}, \frac{z}{|\vec{v}|}\right)$$

Ângulos diretores

Nota-se que o versor de $\vec{v}$ é expresso por:

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(x, y, z)}{|\vec{v}|} = \left(\frac{x}{|\vec{v}|}, \frac{y}{|\vec{v}|}, \frac{z}{|\vec{v}|}\right)$$

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)$$

Ângulos diretores

Nota-se que o versor de $\vec{v}$ é expresso por:

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(x, y, z)}{|\vec{v}|} = \left(\frac{x}{|\vec{v}|}, \frac{y}{|\vec{v}|}, \frac{z}{|\vec{v}|}\right)$$

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)$$

Como um versor é sempre unitário:

$$\boxed{cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1}$$

Exemplo 6 - Calcular o ângulo diretores

$$\vec{v} = (1, -1, 0)$$

Exercício

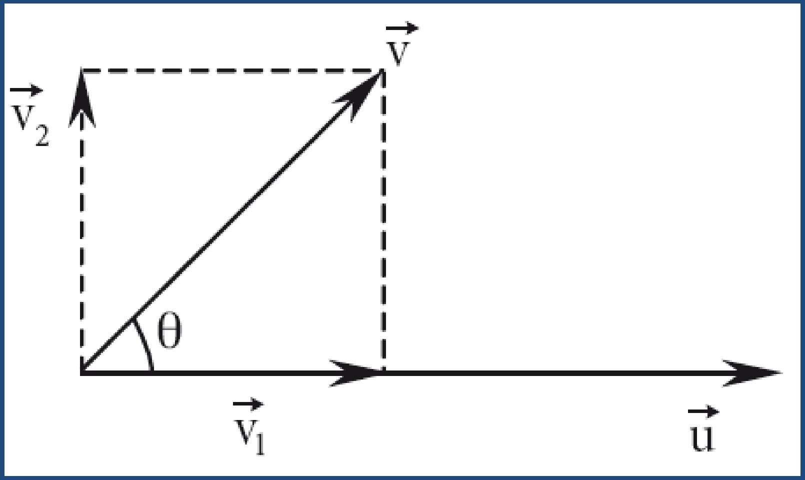
Os ângulos diretores de um vetor são $\boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{45°}\ \boldsymbol{e}\ \mathbf{60°}$. Determine o valor de $\boldsymbol{\alpha}$.

Projeção de um vetor sobre outro

Sejam: $\vec{v}$ e $\vec{u}$ dois vetores não nulos e $\boldsymbol{\theta}$ o ângulo entre eles. A projeção ($\overrightarrow{v_1}$) de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ permite duas situações:

Projeção de um vetor sobre outro

Sejam: $\vec{v}$ e $\vec{u}$ dois vetores não nulos e $\boldsymbol{\theta}$ o ângulo entre eles. A projeção ($\overrightarrow{v_1}$) de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ permite duas situações:

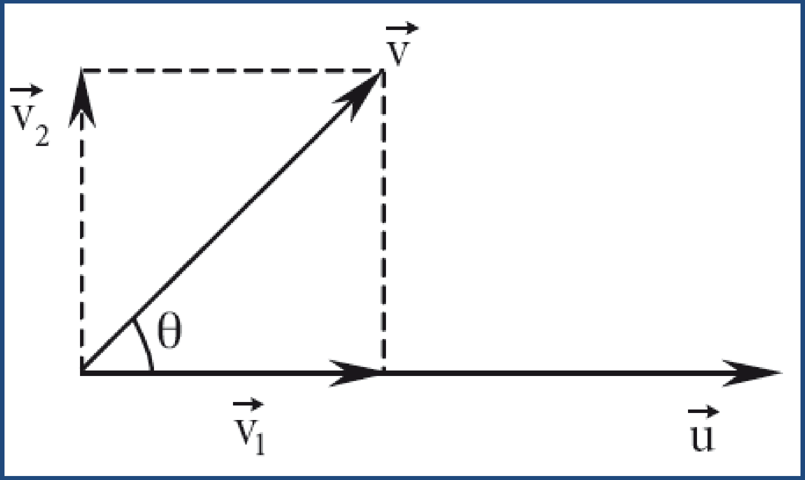


$$\boldsymbol{\theta < 90°}$$

ângulo agudo

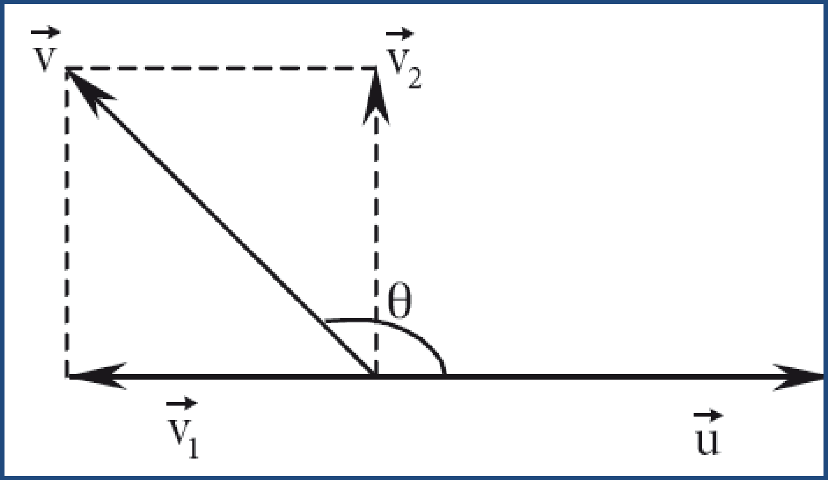
Projeção de um vetor sobre outro

Sejam: $\vec{v}$ e $\vec{u}$ dois vetores não nulos e $\boldsymbol{\theta}$ o ângulo entre eles. A projeção ($\overrightarrow{v_1}$) de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ permite duas situações:



$\boldsymbol{\theta < 90°}$

ângulo agudo



$\mathbf{90° < \boldsymbol{\theta} < 180°}$

ângulo obtuso

Projeção de um vetor sobre outro

A projeção ($\overrightarrow{v_1}$) de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ é denotada por:

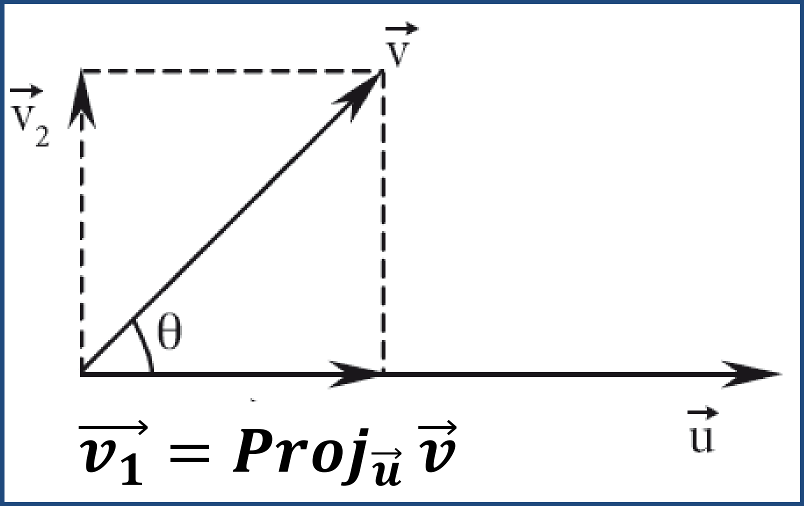
$$\overrightarrow{v_1} = Proj_{\vec{u}}\,\vec{v}$$

Projeção de um vetor sobre outro

A projeção ($\overrightarrow{v_1}$) de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ é denotada por:

$$\overrightarrow{v_1} = Proj_{\vec{u}}\,\vec{v}$$

E calculada por:



$$Proj_{\vec{u}}\,\vec{v} = \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\vec{u}$$

Exemplo 7

Determinar o vetor projeção de $\vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4})$ sobre $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{0})$.

Exercício

Sejam os pontos $\boldsymbol{A}(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\mathbf{1})$, $\boldsymbol{B}(-\mathbf{1}, \mathbf{0}, -\mathbf{1})$ e $\boldsymbol{C}(\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{2})$, vértices de um triângulo.

a) Mostrar que o triângulo $\boldsymbol{ABC}$ é retângulo em $\boldsymbol{A}$.

Produto escalar no plano (R^2)

Todas as propriedades e operações definidas para o espaço (R^3) são válidas para o R^2 (plano).

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$, $\propto \in \mathbb{R}$

Produto escalar no plano (R^2)

Todas as propriedades e operações definidas para o espaço (R^3) são válidas para o R^2 (plano).

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$, $\propto \in \mathbb{R}$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2$ (produto escalar);
- $|\vec{u}| = \sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2}$ (módulo do vetor);

Produto escalar no plano (R^2)

Todas as propriedades e operações definidas para o espaço (R^3) são válidas para o R^2 (plano).

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$, $\propto \in \mathbb{R}$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2$ (produto escalar);
- $|\vec{u}| = \sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2}$ (módulo do vetor);
- Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ o ângulo θ entre os vetores é:

$$cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Produto escalar no plano (R^2)

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$, $\propto \in \mathbb{R}$

- $\vec{u} \perp \vec{v}$ se e somente se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;
- $Proj_{\vec{v}}\, \vec{u} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}\right) \vec{v}$ (projeção de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$);

Produto escalar no plano (R^2)

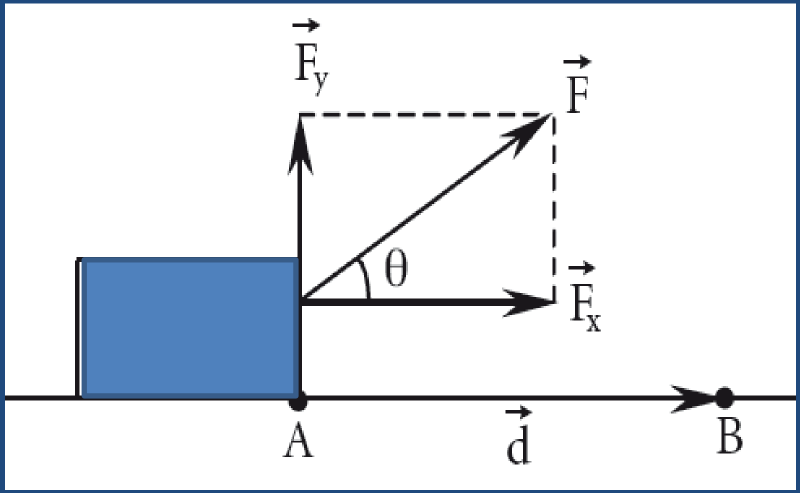
Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$, $\propto \in \mathbb{R}$

- $\vec{u} \perp \vec{v}$ se e somente se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;
- $Proj_{\vec{v}}\, \vec{u} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}\right) \vec{v}$ (projeção de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$);
- Valem todas as propriedades do produto escalar (comutativa, distributivas e outras);
- $cos^2\alpha + cos^2\beta = 1$

Aplicação do produto escalar na Física

- O trabalho W realizado por uma força constante $\vec{F}$

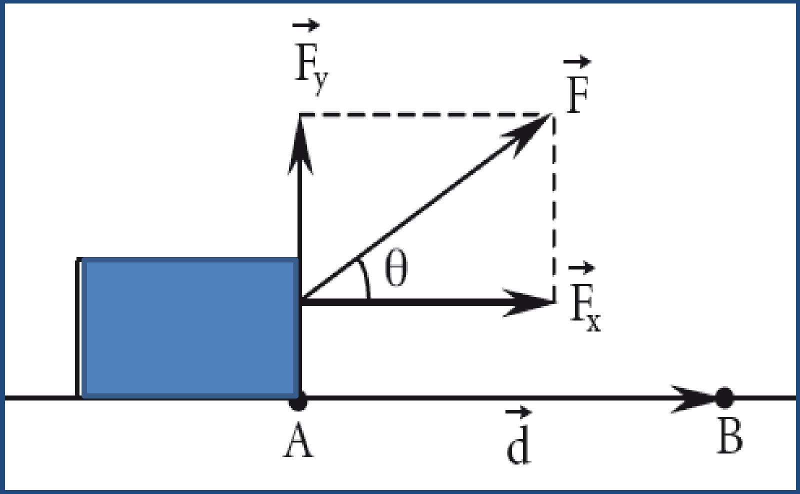
Ao longo de um deslocamento $\vec{d}$ é definido como o produto escalar.



Aplicação do produto escalar na Física

- O trabalho W realizado por uma força constante $\vec{F}$

Ao longo de um deslocamento $\vec{d}$ é definido como o produto escalar.

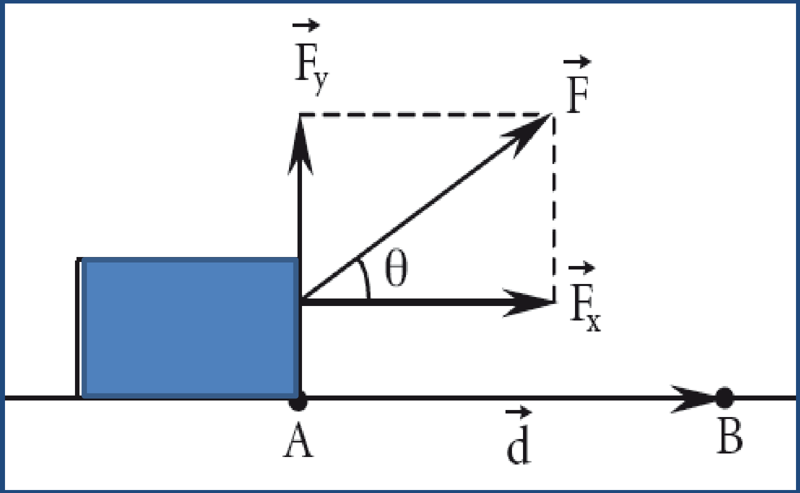


$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

Aplicação do produto escalar na Física

- O trabalho W realizado por uma força constante $\vec{F}$

Ao longo de um deslocamento $\vec{d}$ é definido como o produto escalar.



$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

Como: $|\vec{F}_x| = |\vec{F}| cos\theta$

$$W = |\vec{F}||\vec{d}| cos\theta$$

Exemplo 8

Calcular o trabalhor realizado pela força $\vec{F} = 8\vec{i} + 6\vec{j}$ para deslocar um corpo de A até B, sabendo que $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 20\ m$.

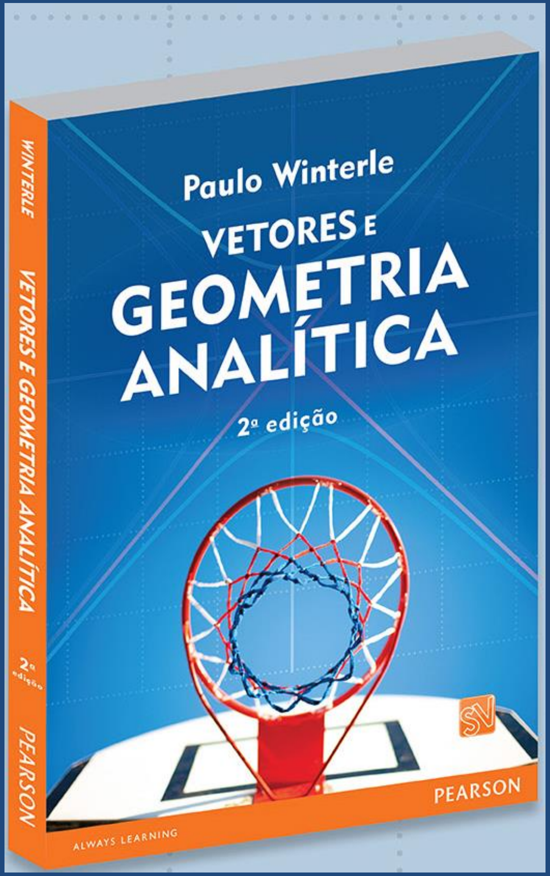
Para depois da aula

- Reler o capítulo 2 do livro texto.
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Realizar a lista de exercícios.

Próxima aula

- Produto vetorial.

Referência



WINTERLE, P. Vetores e Geometria Analítica. 2ª ed. São Paulo: Pearson, 2014.

Numeração dos exercícios com base na 2ª ed.

Contato

profhenrique.com

henrique.faria@unesp.br