Geometria Analítica

Licenciatura em Química

Semana 04 – aula 1
Produto escalar

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

3.1 Definição de produto escalar

Sejam: $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e

$\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

3.1 Definição de produto escalar

Sejam: $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e

$\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

O produto escalar, denotado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, é a operação:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

3.1 Definição de produto escalar

Sejam: $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e

$\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

O produto escalar, denotado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, é a operação:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

O resultado do produto escalar é um número real.

Exemplo 1

a) Sendo : $\vec{u} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k}$ e $\vec{v} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ calcular o produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

b) Dados $\vec{u} = (4, \propto, -1)$ e $\vec{v} = (\propto, 2, 3)$ e os pontos $A = (4, -1, 2)$ e $B = (3, 2, -1)$ determinar $\propto$ tal que:

$$\vec{u} \cdot \left(\vec{v} + \overrightarrow{BA}\right) = 5$$

3.2 Módulo de um vetor

Se $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ou $\vec{v} = (x, y, z)$

Em que x, y, z são os componentes de $\vec{v}$ na base canônica $C = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$;

3.2 Módulo de um vetor

Se $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ou $\vec{v} = (x, y, z)$

Em que x, y, z são os componentes de $\vec{v}$ na base canônica $\mathrm{C} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$;

O módulo desse vetor ($|\vec{v}|$) é definido por:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Versor

O versor $\vec{\boldsymbol{u}}$ de um vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$ é um vetor unitário na mesma direção e sentido de $\vec{\boldsymbol{v}}$.

Versor

O versor $\vec{\boldsymbol{u}}$ de um vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$ é um vetor unitário na mesma direção e sentido de $\vec{\boldsymbol{v}}$.

Calculado por:

$$\textbf{Versor} \quad \rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{u}} = \frac{\vec{\boldsymbol{v}}}{|\vec{\boldsymbol{v}}|}$$

Exemplo 2

a) Dado o vetor $\vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{2}, \mathbf{1}, -\mathbf{2})$, mostrar que seu versor $\vec{\boldsymbol{u}}$ é um vetor unitário de mesmo sentido de $\vec{\boldsymbol{v}}$.

b) Determinar o número real $\propto$ para que o vetor $\vec{\boldsymbol{v}} = (\propto, -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})$ seja unitário.

3.3 Propriedade do produto escalar

Sejam os vetores $\vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_1})$, $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{z_2})$, $\vec{\boldsymbol{w}} = (\boldsymbol{x_3}, \boldsymbol{y_3}, \boldsymbol{z_3})$ e $m \in \mathbb{R}$

1. $\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} \geq 0$

   $\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} = 0$ se e somente se $\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{0}}$

3.3 Propriedade do produto escalar

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$,

$\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ e $m \in \mathbb{R}$

1. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$

   $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ se e somente se $\vec{u} = \vec{0}$

2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (comutativa)

3.3 Propriedade do produto escalar

Sejam os vetores $\vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_1})$, $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{z_2})$, $\vec{\boldsymbol{w}} = (\boldsymbol{x_3}, \boldsymbol{y_3}, \boldsymbol{z_3})$ e $m \in \mathbb{R}$

1. $\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} \geq 0$

   $\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} = 0$ se e somente se $\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{0}}$

2. $\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}$ (comutativa)

3. $\vec{\boldsymbol{u}} \cdot (\vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\boldsymbol{w}}) = \vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}}$ (distributiva)

3.3 Propriedade do produto escalar

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$,

$\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ e $m \in \mathbb{R}$

1. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$

   $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ se e somente se $\vec{u} = \vec{0}$

2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (comutativa)

3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (distributiva)

4. $(m\,\vec{u}) \cdot \vec{v} = m(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (m\,\vec{v})$ (distributiva)

3.3 Propriedade do produto escalar

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$,

$\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ e $m \in \mathbb{R}$

1. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$

   $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ se e somente se $\vec{u} = \vec{0}$

2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (comutativa)

3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (distributiva)

4. $(m\,\vec{u}) \cdot \vec{v} = m(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (m\,\vec{v})$ (distributiva)

5. $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

3.4 Ângulo entre dois vetores

O cosseno do ângulo entre dois vetores $\vec{\boldsymbol{u}}$ e $\vec{\boldsymbol{v}}$ é definido pela razão entre o produto escalar e os módulos destes vetores.

3.4 Ângulo entre dois vetores

O cosseno do ângulo entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é definido pela razão entre o produto escalar e os módulos destes vetores.

$$cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

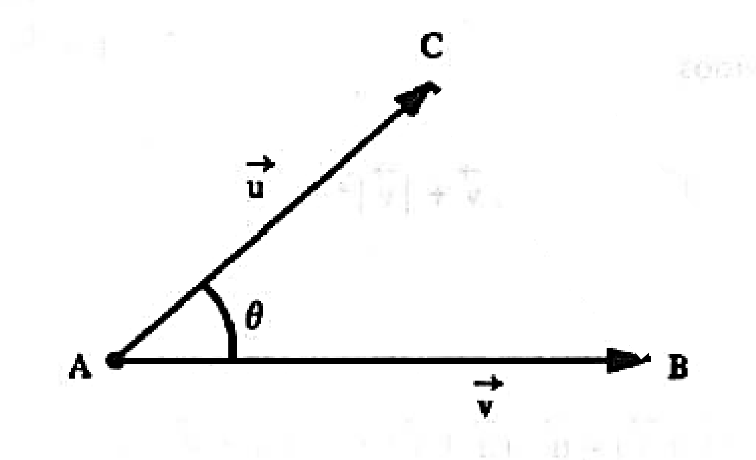
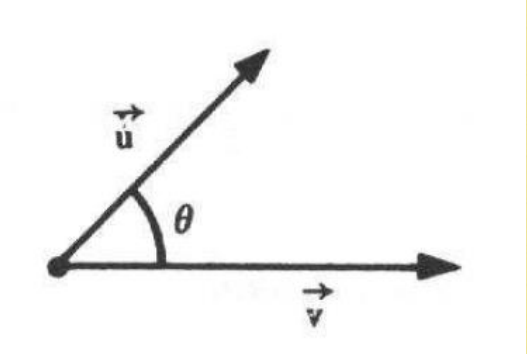


Figura 3.4

Há três situações para o ângulo

Se $\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} > 0, \quad \cos\theta > 0$

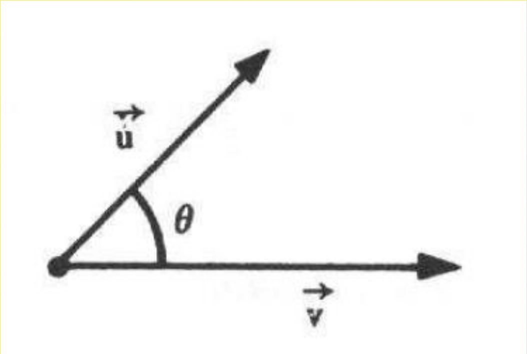
$$\mathbf{0} \leq \boldsymbol{\theta} < \mathbf{90°}$$



Há três situações para o ângulo

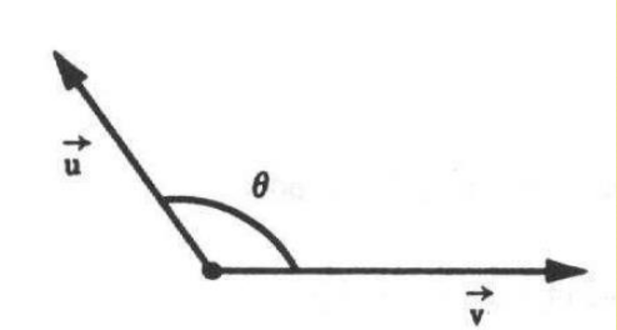
Se $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$, $\cos\theta > 0$

$$\mathbf{0 \leq \theta < 90°}$$



Se $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$, $\cos\theta < 0$

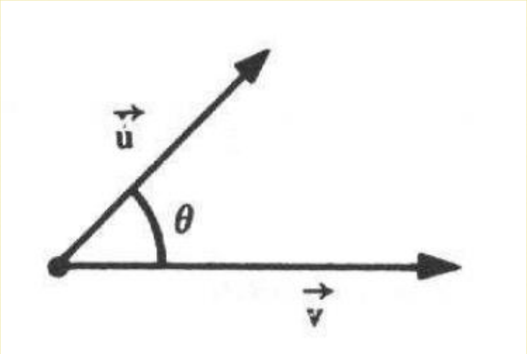
$$\mathbf{90° < \theta \leq 180°}$$



Há três situações para o ângulo

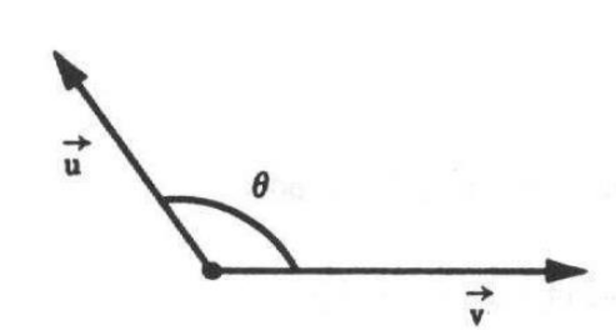
Se $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$, $\cos\theta > 0$

$$\mathbf{0 \leq \theta < 90°}$$



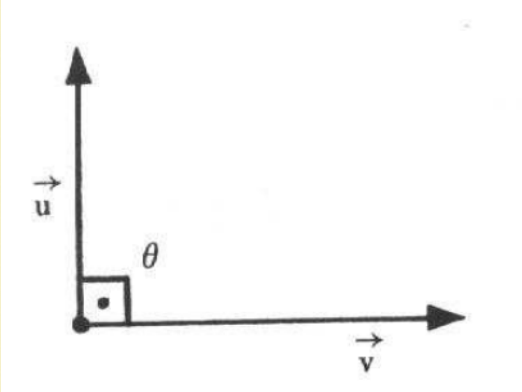
Se $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$, $\cos\theta < 0$

$$\mathbf{90° < \theta \leq 180°}$$



Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ $\cos\theta = 0$

$$\mathbf{\theta = 90°}$$



Ângulos notáveis

θ (graus)	θ (rad)	$\mathrm{sen}\theta$	$\cos\theta$	$\mathrm{tg}\theta = \dfrac{\mathrm{sen}\theta}{\cos\theta}$
30	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
45	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	1
60	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Exemplo 3

a) Calcular o ângulo entre os vetores $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{4})$ e $\vec{\boldsymbol{v}} = (-\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$.

b) Determine um vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$ ortogonal aos vetores $\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{0})$ e $\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$.

Respostas: a) $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{45°}$ b) $\vec{\boldsymbol{v}} = (1{,}1 - 1)$

Exercícios

a) Sabendo que $\vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{2}, \mathbf{1}, -\mathbf{1})$ forma um ângulo de 60° com o vetor $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, definido pelos pontos $A(\mathbf{3}, \mathbf{1}, -\mathbf{2})$ e $B(\mathbf{4}, \mathbf{0}, \boldsymbol{m})$, calcule $\boldsymbol{m}$.

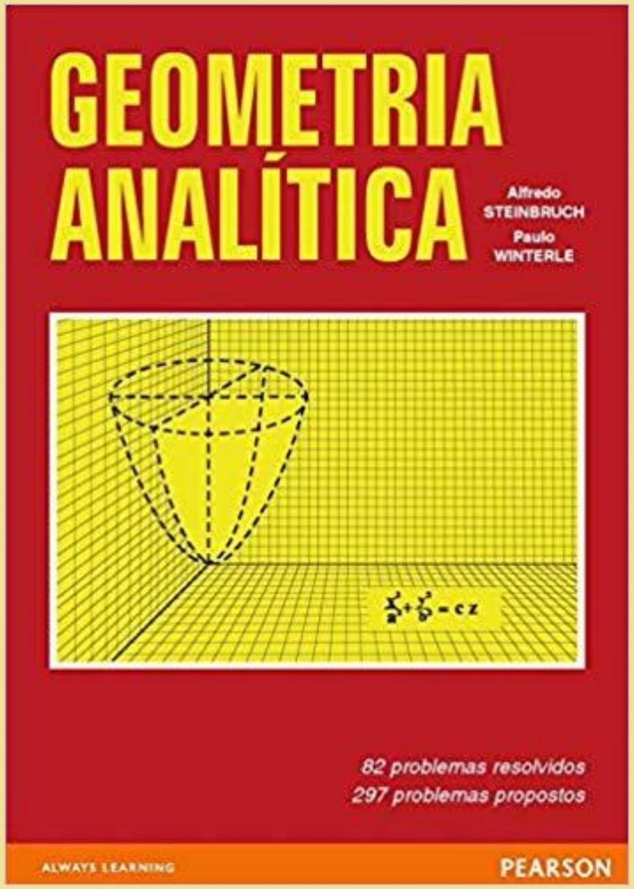
b) Calcule os produtos escalares entre os vetores da base canônica: $\vec{\boldsymbol{i}} \cdot \vec{\boldsymbol{j}}$, $\vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{k}}$ e $\vec{\boldsymbol{k}} \cdot \vec{\boldsymbol{i}}$.

Respostas: c) $\boldsymbol{m} = -\mathbf{4}$

Bibliografia - GA

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. Geometria Analítica. 2. Ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

Numeração dos exercícios com base na 2ª ed. ----->>



Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br

Currículo Lattes http://lattes.cnpq.br/1614784455223743