Geometria Analítica

Licenciatura em Química

Semana 04 – aula 2
Projeção de um vetor e Produto escalar no R2

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

3.6 Projeção de um vetor

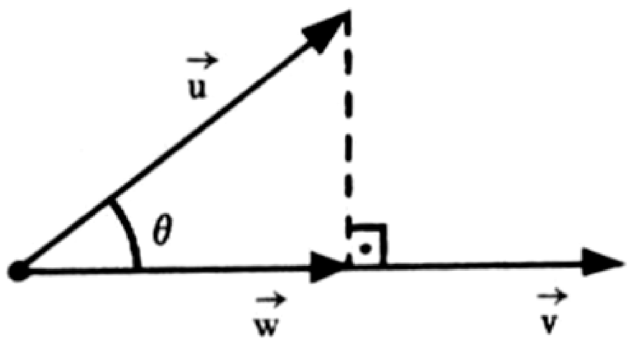
Sejam: $\vec{\boldsymbol{u}}$ e $\vec{\boldsymbol{v}}$ dois vetores não nulos e $\boldsymbol{\theta}$ o ângulo formado entre eles.

A projeção ($\vec{\boldsymbol{w}}$) de $\vec{\boldsymbol{u}}$ sobre $\vec{\boldsymbol{v}}$ permite duas situações:

3.6 Projeção de um vetor

Sejam: $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não nulos e $\boldsymbol{\theta}$ o ângulo formado entre eles.

A projeção ($\vec{w}$) de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ permite duas situações:



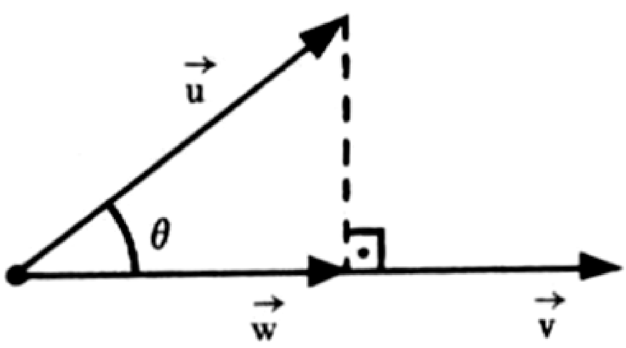
$\boldsymbol{\theta} < 90°$

ângulo agudo

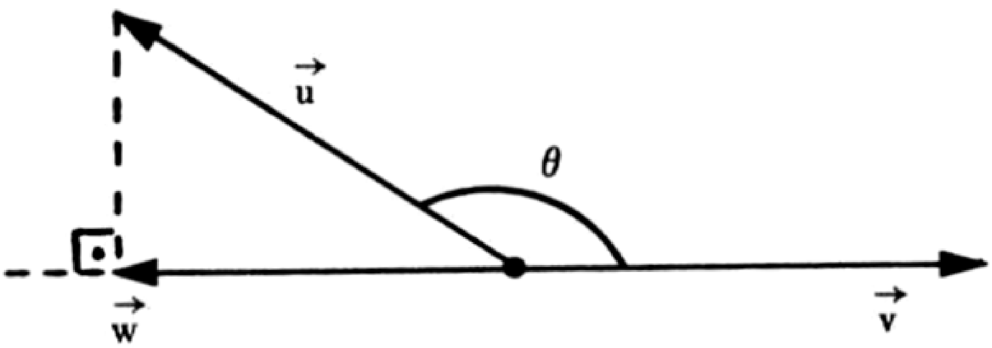
3.6 Projeção de um vetor

Sejam: $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não nulos e $\boldsymbol{\theta}$ o ângulo formado entre eles.

A projeção ($\vec{w}$) de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ permite duas situações:



$\boldsymbol{\theta < 90°}$
ângulo agudo



$\boldsymbol{90° < \theta < 180°}$
ângulo obtuso

3.6 Projeção de um vetor

A projeção ($\vec{w}$) de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ é denotada por:

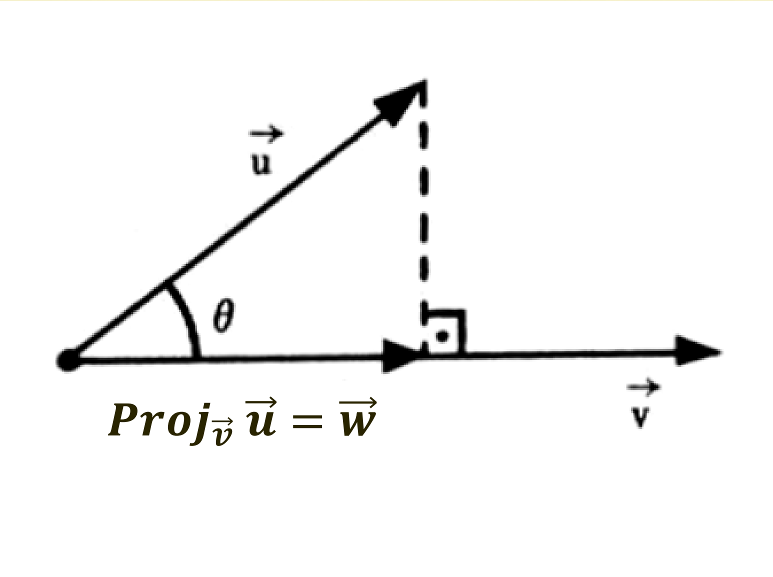
$$Proj_{\vec{v}}\,\vec{u} = \vec{w}$$

3.6 Projeção de um vetor

A projeção ($\vec{w}$) de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ é denotada por:

$$Proj_{\vec{v}}\,\vec{u} = \vec{w}$$

E calculada por:



$$Proj_{\vec{v}}\,\vec{u} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\right)\vec{v}$$

Exemplo 1

Determinar o vetor projeção de $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4})$ sobre $\vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{0})$.

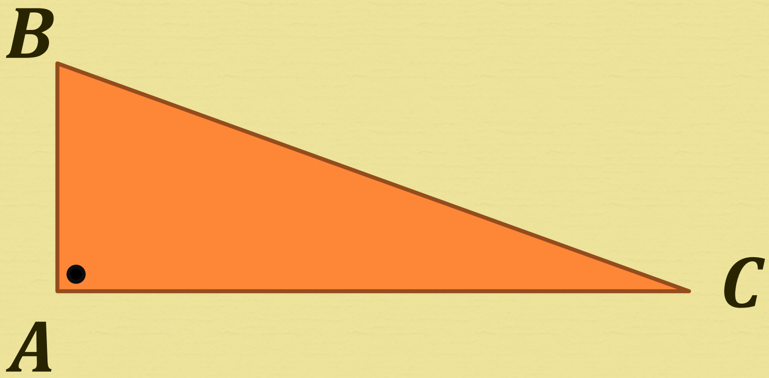
$$\boldsymbol{Proj}_{\vec{v}}\,\vec{\boldsymbol{u}} = \left(\frac{\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}}{\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}}\right)\vec{\boldsymbol{v}}$$

Exercício

Sejam os pontos $\boldsymbol{A}(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\mathbf{1})$, $\boldsymbol{B}(-\mathbf{1}, \mathbf{0}, -\mathbf{1})$ e $\boldsymbol{C}(\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{2})$, vértices de um triângulo.

a) Mostrar que o triângulo $\boldsymbol{ABC}$ é retângulo em $\boldsymbol{A}$.

b) Calcular a medida da projeção do cateto $\boldsymbol{AB}$ sobre a hipotenusa $\boldsymbol{BC}$.



3.7 Produto escalar no plano (R^2)

Todas as propriedades e operações definidas para o espaço (R^3) são válidas para o R^2 (plano).

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$, $\propto \in \mathbb{R}$

3.7 Produto escalar no plano (R^2)

Todas as propriedades e operações definidas para o espaço (R^3) são válidas para o R^2 (plano).

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$, $\propto \in \mathbb{R}$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2$ (produto escalar);

3.7 Produto escalar no plano (R^2)

Todas as propriedades e operações definidas para o espaço (R^3) são válidas para o R^2 (plano).

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$, $\propto \in \mathbb{R}$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2$ (produto escalar);
- $|\vec{u}| = \sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2}$ (módulo do vetor);

3.7 Produto escalar no plano (R^2)

Todas as propriedades e operações definidas para o espaço (R^3) são válidas para o R^2 (plano).

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$, $\propto \in \mathbb{R}$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2$ (produto escalar);
- $|\vec{u}| = \sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2}$ (módulo do vetor);
- Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ o ângulo θ entre os vetores é:

$$cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

3.7 Produto escalar no plano (R^2)

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$, $\propto \in \mathbb{R}$

- $\vec{u} \perp \vec{v}$ se e somente se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;

3.7 Produto escalar no plano (R^2)

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$, $\propto \in \mathbb{R}$

- $\vec{u} \perp \vec{v}$ se e somente se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;
- $Proj_{\vec{v}}\, \vec{u} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}\right) \vec{v}$ (projeção de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$);

3.7 Produto escalar no plano (R^2)

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$, $\propto \in \mathbb{R}$

- $\vec{u} \perp \vec{v}$ se e somente se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;
- $Proj_{\vec{v}}\, \vec{u} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\right)\vec{v}$ (projeção de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$);
- Valem todas as propriedades do produto escalar (comutativa, distributivas e outras).

Exemplo 2

Calcular a soma dos módulos dos vetores no plano $|\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}}|$, sabendo que $|\vec{\boldsymbol{u}}| = \mathbf{4}$, $|\vec{\boldsymbol{v}}| = \mathbf{3}$ e o ângulo entre $\vec{\boldsymbol{u}}$ $\boldsymbol{e}$ $\vec{\boldsymbol{v}}$ é $\mathbf{60°}$. Considerar $\vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ e $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Resposta: $\sqrt{\mathbf{37}}$

Exercício

Sabendo que $|\vec{\boldsymbol{u}}| = \mathbf{2}$, $|\vec{\boldsymbol{v}}| = \mathbf{3}$ e o ângulo entre

$\vec{\boldsymbol{u}}$ $\boldsymbol{e}$ $\vec{\boldsymbol{v}}$ é $\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}$ $[\boldsymbol{rad}]$.

Determine: $|(\mathbf{2}\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{v}}) \cdot (\vec{\boldsymbol{u}} - \mathbf{2}\vec{\boldsymbol{v}})|$

Resposta: $26 + 15\sqrt{2}$

Resolver os problemas propostos:

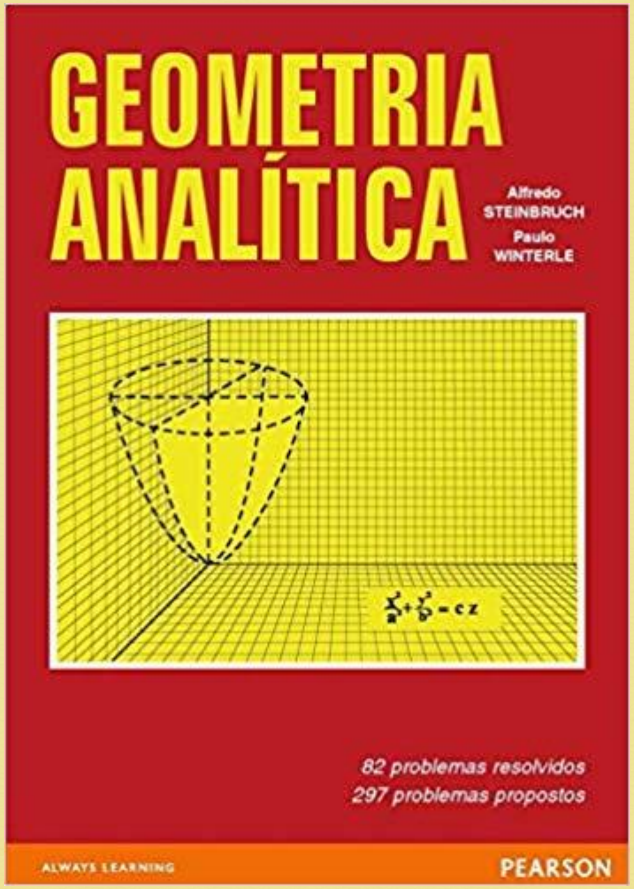
p. 90: 2, 3, 5, 6, 12*, 14, 15, 17, 23, 27, 29*, 33 e 34.

p. 92: 35, 36, 40, 41

Entregar os exercícios marcados com asterisco

Bibliografia - GA

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. Geometria Analítica. 2. Ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.



Numeração dos exercícios com base na 2ª ed. ----->>

Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br

Currículo Lattes http://lattes.cnpq.br/1614784455223743