Geometria Analítica
Engenharias

Semana 04 – Aula 1
Produto vetorial

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Revisão de determinantes

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} =$$

Propriedade (a): permutação de linhas inverte o sinal

$$\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

Revisão de determinantes

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - (-4) \times 2 = 23$$

Propriedade (a): permutação de linhas inverte o sinal

$$\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-4) \times 2 - (3) \times 5 = -23$$

Propriedades dos determinantes

(b) Se as linhas forem proporcionais o determinante é 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} =$$

(c) Se uma das linhas for zero o determinante será 0.

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

Propriedades dos determinantes

(b) Se as linhas forem proporcionais o determinante é 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \times 6 - 3 \times 2 = 0$$

(c) Se uma das linhas for zero o determinante será 0.

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

Propriedades dos determinantes

(b) Se as linhas forem proporcionais o determinante é 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \times 6 - 3 \times 2 = 0$$

(c) Se uma das linhas for zero o determinante será 0.

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 5 \times 0 - 0 \times 7 = 0$$

Determinante de ordem três

Pelo teorema de Laplace

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} =$$

Determinante de ordem três

Pelo teorema de Laplace

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & \boxed{\begin{matrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{matrix}} \\ x_2 & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathrm{a}$$

Determinante de ordem três

Pelo teorema de Laplace

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathrm{a} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} b$$

Determinante de ordem três

Pelo teorema de Laplace

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \boxed{\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{matrix}} & & \begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathrm{a} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} b + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} c$$

Determinante de ordem três

Pelo teorema de Laplace

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathrm{a} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} b + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} c$$

Pela repetição de duas colunas

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ x_1 & y_1 & z_1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & x_2 & y_2 \end{array}\right| =$$

Determinante de ordem três

Pelo teorema de Laplace

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathrm{a} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} b + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} c$$

Pela repetição de duas colunas

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ x_1 & y_1 & z_1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & x_2 & y_2 \end{array}\right| =$$

$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$

Determinante de ordem três

Pelo teorema de Laplace

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathrm{a} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} b + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} c$$

Pela repetição de duas colunas

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ x_1 & y_1 & z_1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = a(y_1 z_2) + b(x_2 z_1) + c(x_1 y_2) - c(x_2 y_1) - a(y_2 z_1) - b(x_1 z_2)$$

$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$

Definição de produto Vetorial

Sejam $\vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_1}), \quad \vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{z_2})$

- Expresso pela forma: $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ou $\vec{u} \times \vec{v}$;
- O resultado é um terceiro vetor, ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$;
- Para calculá-lo utiliza-se o determinante:

$$\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = VETOR$$

Exemplo 1

Sejam $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{5}, \mathbf{4}, \mathbf{3})$, $\vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$

$$\vec{u} \times \vec{v} =$$

Exercícios

Sejam $\vec{u} = (3, -1, -2)$, $\vec{v} = (2, 4, -1)$ e $\vec{w} = (-1, 0, 1)$

1) $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{u}}$

2) $(\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{w}}) + (\vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{u}})$

3) $(\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}) \times \vec{\mathbf{w}}$

4) $\vec{\mathbf{u}} \times (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}})$

5) $\vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}})$

Dispositivo prático para o cálculo

Sejam $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{5}, \mathbf{4}, \mathbf{3})$, $\vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$\vec{u} \times \vec{v} =$ (4 , -2 , -4)

As três componentes de $\vec{u} \times \vec{v}$ são dadas pelos três determinantes da coordenadas dos dois vetores.

Característica do produto vetorial

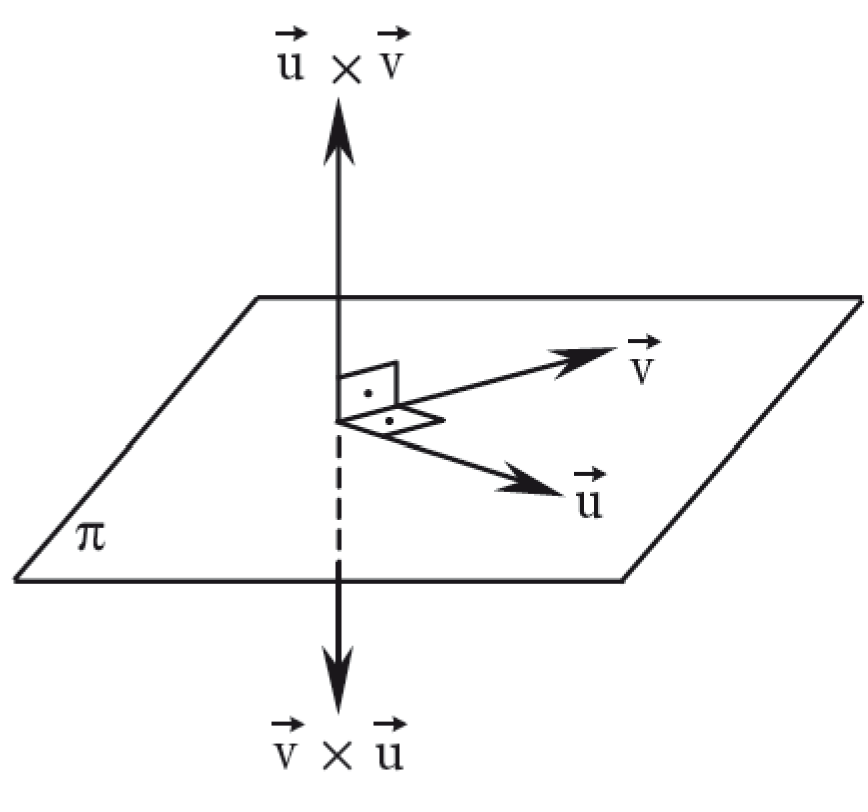


Figura 3.2

- O vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortotogonal a $\vec{u}\ e\ \vec{v}$.
- O comprimento de $\vec{u} \times \vec{v}$ é definido por $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,sen\theta$

Regra da mão direita

O sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ é definido pela regra da mão direita.

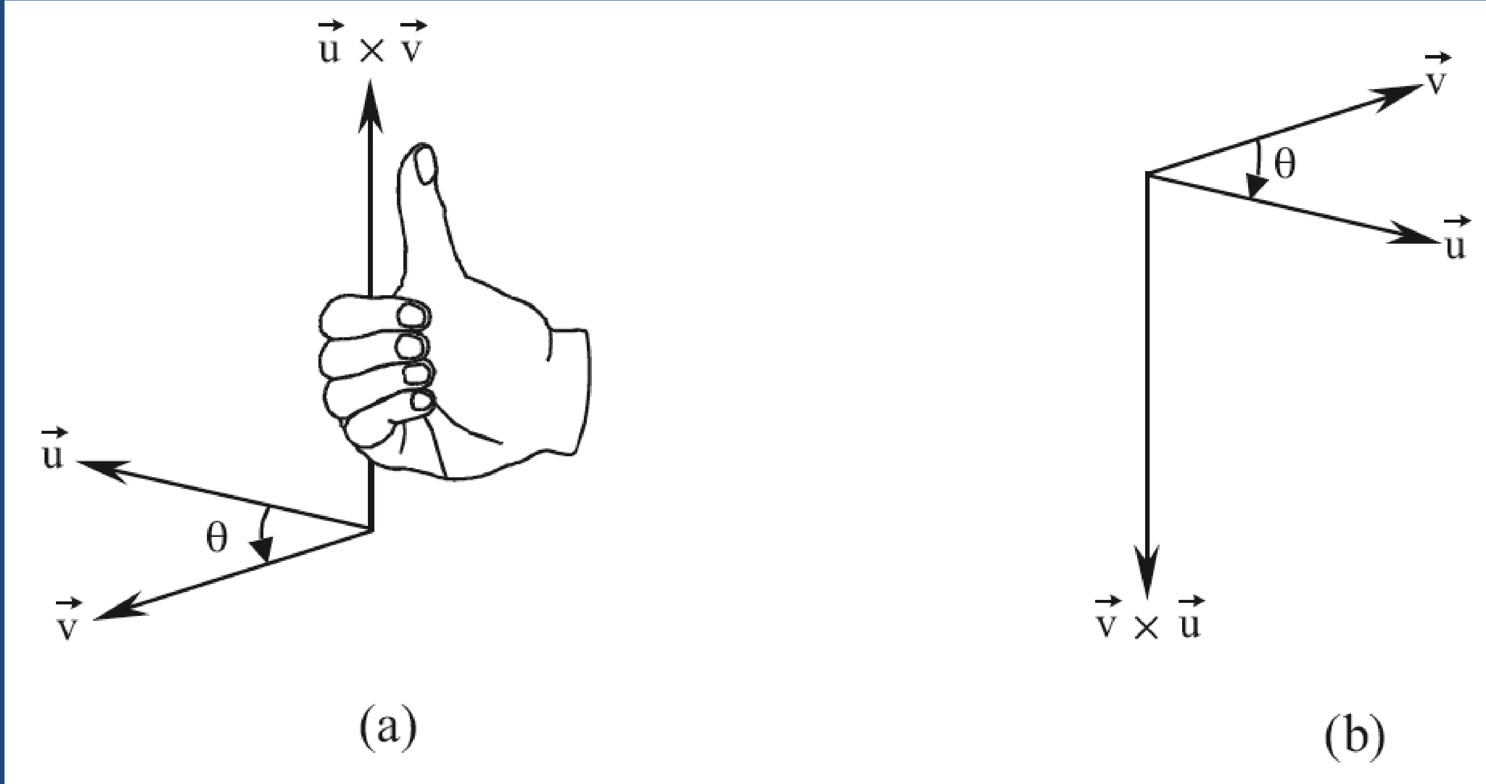


Figura 3.3

Regra para os vetores da base

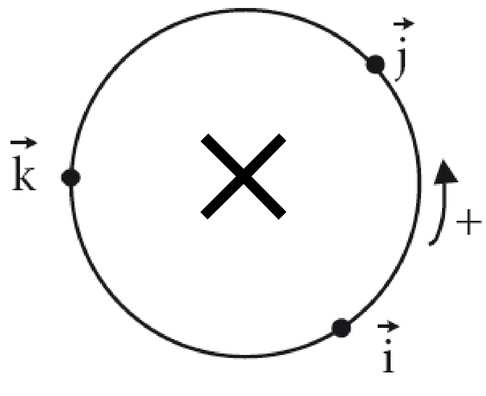


Figura 3.4

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

Regra para os vetores da base

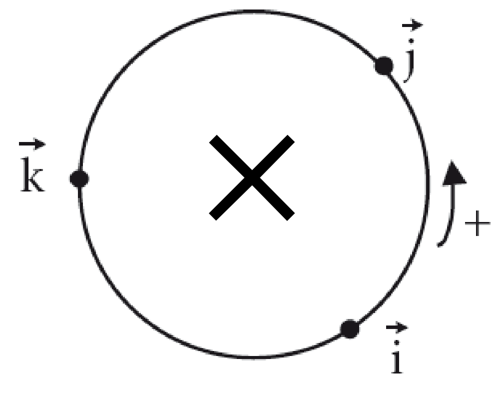
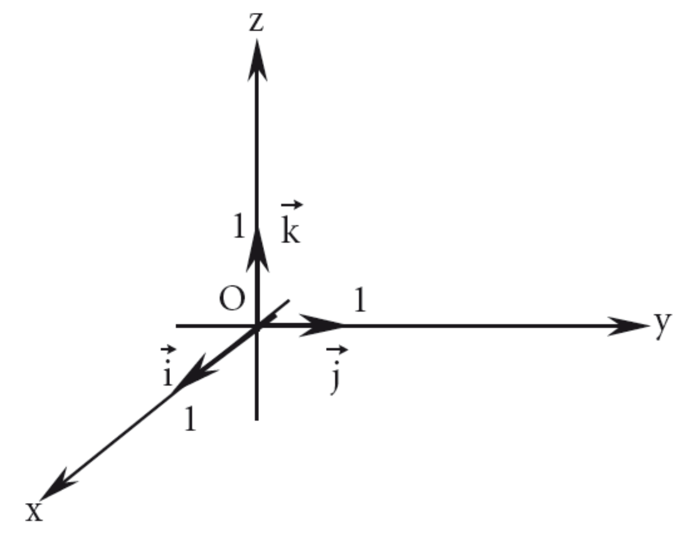


Figura 3.4

$$\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}$$

$$\vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath}$$

$$\vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}$$



Exemplo 2

Determine o vetor $\vec{\boldsymbol{x}}$ ortogonal ao eixo y de maneira que $\vec{u} = \vec{x} \times \vec{v}$, sendo: $\vec{u} = (1,1,-1)$, $\vec{v} = (2,-1,1)$.

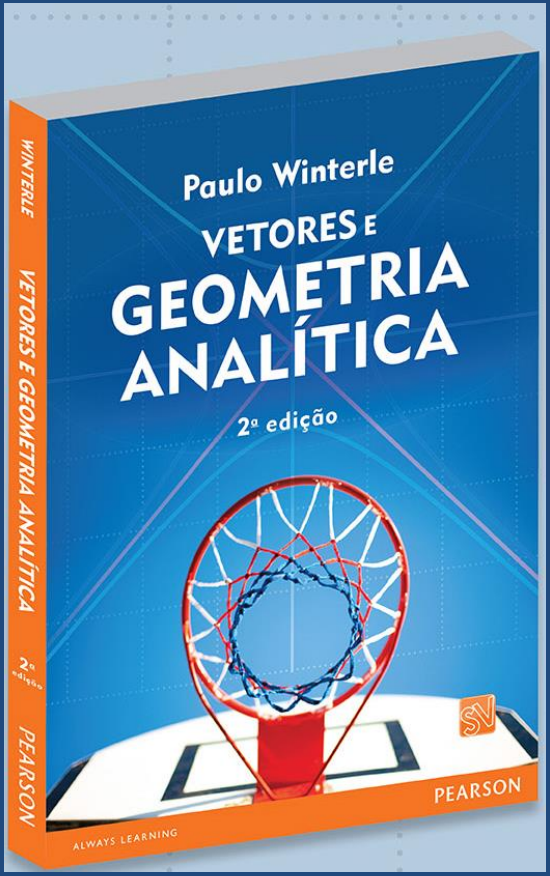
Para depois da aula

- Reler o capítulo 3 do livro texto.
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Realizar a lista de exercícios.

Próxima aula

- Interpretação geométrica do produto vetorial e produto misto.

Referência



WINTERLE, P. Vetores e Geometria Analítica. 2ª ed. São Paulo: Pearson, 2014.

Numeração dos exercícios com base na 2ª ed.

Contato

profhenrique.com

henrique.faria@unesp.br