Geometria Analítica

Licenciatura em Química

Semana 05 – aula 1
Produto vetorial

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

Revisão de determinantes

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Revisão de determinantes

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} =$$

Revisão de determinantes

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - (-4) \times 2 = 23$$

Revisão de determinantes

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - (-4) \times 2 = 23$$

Propriedade (a): permutação de linhas inverte o sinal

$$\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

Revisão de determinantes

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - (-4) \times 2 = 23$$

Propriedade (a): permutação de linhas inverte o sinal

$$\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-4) \times 2 - (3) \times 5 = -23$$

Propriedades dos determinantes

(b) Se as linhas forem proporcionais o determinante é 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} =$$

Propriedades dos determinantes

(b) Se as linhas forem proporcionais o determinante é 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \times 6 - 3 \times 2 = 0$$

Propriedades dos determinantes

(b) Se as linhas forem proporcionais o determinante é 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \times 6 - 3 \times 2 = 0$$

(c) Se uma das linhas for zero o determinante será 0.

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

Propriedades dos determinantes

(b) Se as linhas forem proporcionais o determinante é 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \times 6 - 3 \times 2 = 0$$

(c) Se uma das linhas for zero o determinante será 0.

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 5 \times 0 - 0 \times 7 = 0$$

Determinante de ordem três

Pelo teorema de Laplace

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathrm{a}$$

Determinante de ordem três

Pelo teorema de Laplace

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \boxed{x_1} & y_1 & \boxed{z_1} \\ \boxed{x_2} & y_2 & \boxed{z_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathrm{a} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} b$$

Determinante de ordem três

Pelo teorema de Laplace

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathrm{a} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} b + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} c$$

Determinante de ordem três

Pelo teorema de Laplace

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathrm{a} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} b + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} c$$

Determinante de ordem três

Pelo teorema de Laplace

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathrm{a} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} b + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} c$$

Pela repetição de duas colunas

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ x_1 & y_1 & z_1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & x_2 & y_2 \end{array}\right| =$$

Determinante de ordem três

Pelo teorema de Laplace

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathrm{a} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} b + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} c$$

Pela repetição de duas colunas

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ x_1 & y_1 & z_1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & x_2 & y_2 \end{array}\right| =$$

$-\quad-\quad-\qquad\qquad+\quad+\quad+$

Determinante de ordem três

Pelo teorema de Laplace

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathrm{a} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} b + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} c$$

Pela repetição de duas colunas

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & b \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{matrix}\right| = a(y_1 z_2) + b(x_2 z_1) + c(x_1 y_2)$$

$$-c(x_2 y_1) - a(y_2 z_1) - b(x_1 z_2)$$

$-$ $-$ $-$ $+$ $+$ $+$

Definição de produto Vetorial

Sejam $\vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_1})$, $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{z_2})$

- Expresso pela forma: $\vec{u}\hat{}\vec{v}$ ou $\vec{u} \times \vec{v}$;
- O resultado é um terceiro vetor, ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$;
- Para calculá-lo utiliza-se o determinante:

Definição de produto Vetorial

Sejam $\vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_1})$, $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{z_2})$

- Expresso pela forma: $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ou $\vec{u} \times \vec{v}$;
- O resultado é um terceiro vetor, ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$;
- Para calculá-lo utiliza-se o determinante:

$$\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = VETOR$$

Exemplo 1

Sejam $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{5}, \mathbf{4}, \mathbf{3}), \quad \vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$

$\vec{u} \times \vec{v} =$

Exercícios

Sejam $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{3}, -\mathbf{1}, -\mathbf{2})$, $\vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{2}, \mathbf{4}, -\mathbf{1})$ e $\vec{\boldsymbol{w}} = (-\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$.
Calcular:

(a) $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}$ (b) $(\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{w}}) + (\vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{u}})$

Característica do produto vetorial

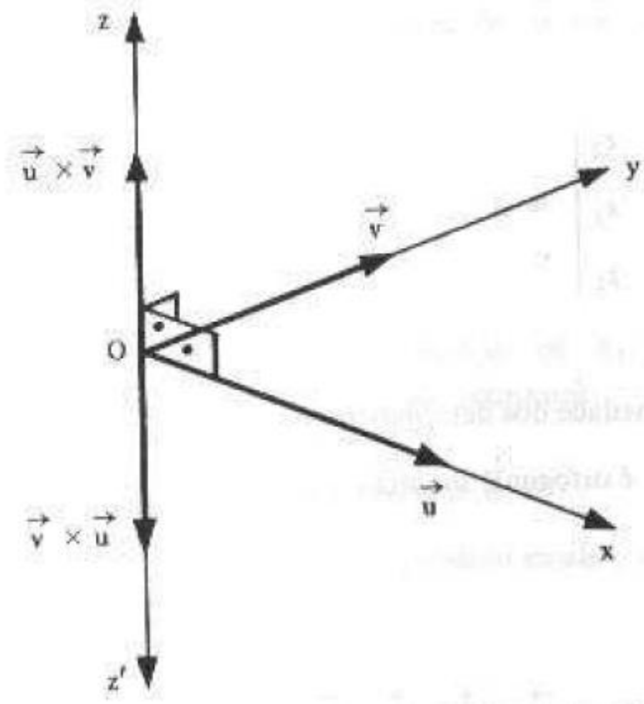


Figura 3.9-a

- O vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortotogonal a $\vec{u}\ e\ \vec{v}$.

Característica do produto vetorial

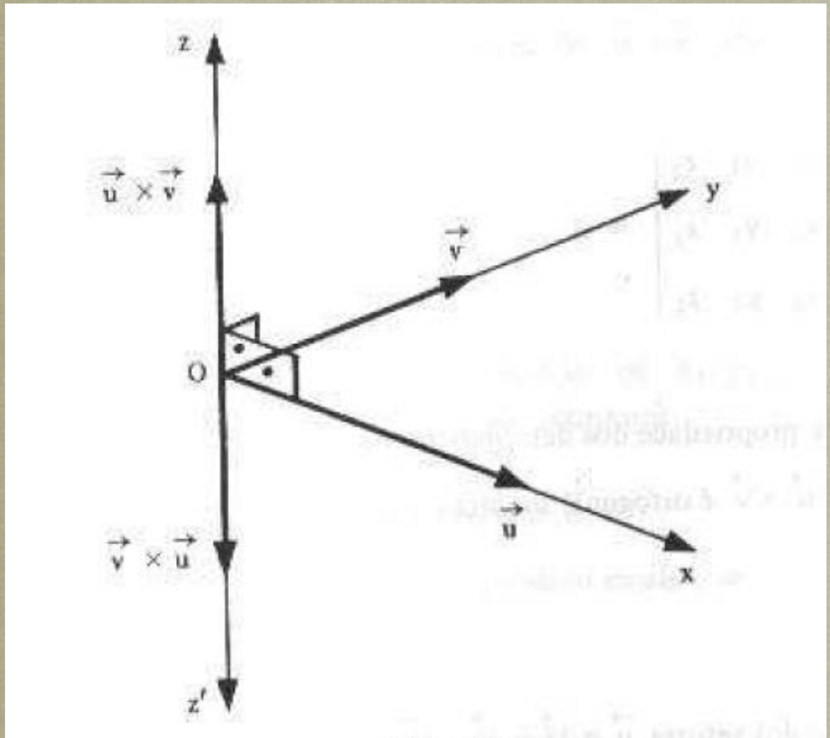


Figura 3.9-a

- O vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortotogonal a $\vec{u}\ e\ \vec{v}$.
- O comprimento de $\vec{u} \times \vec{v}$ é definido por:

Característica do produto vetorial

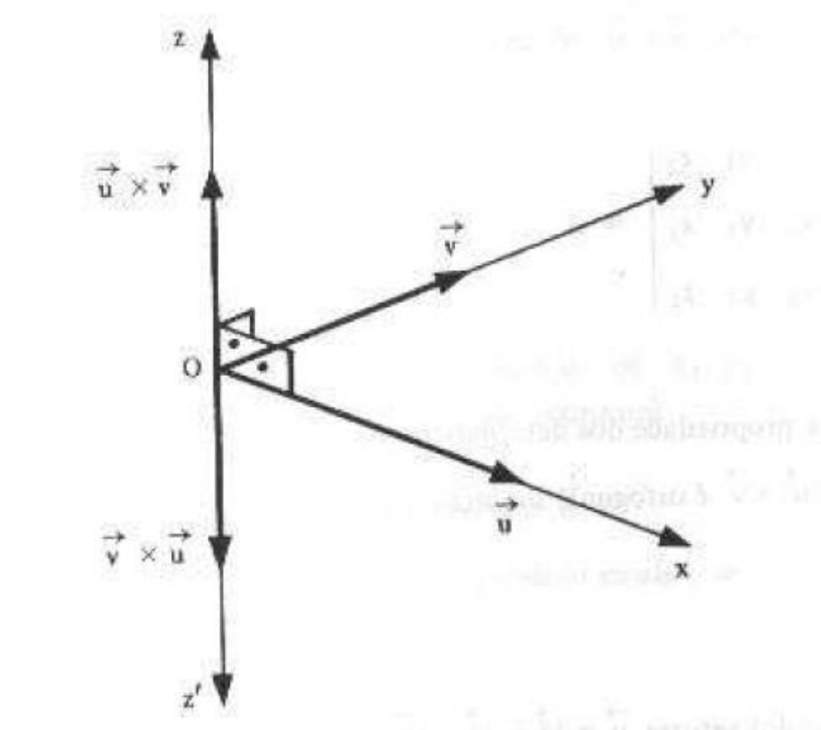


Figura 3.9-a

- O vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortotogonal a $\vec{u}\ e\ \vec{v}$.
- O comprimento de $\vec{u} \times \vec{v}$ é definido por:

$$\boxed{|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|\ |\vec{v}|\,\mathrm{sen}\theta}$$

Regra da mão direita

O sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ é definido pela regra da mão direita.

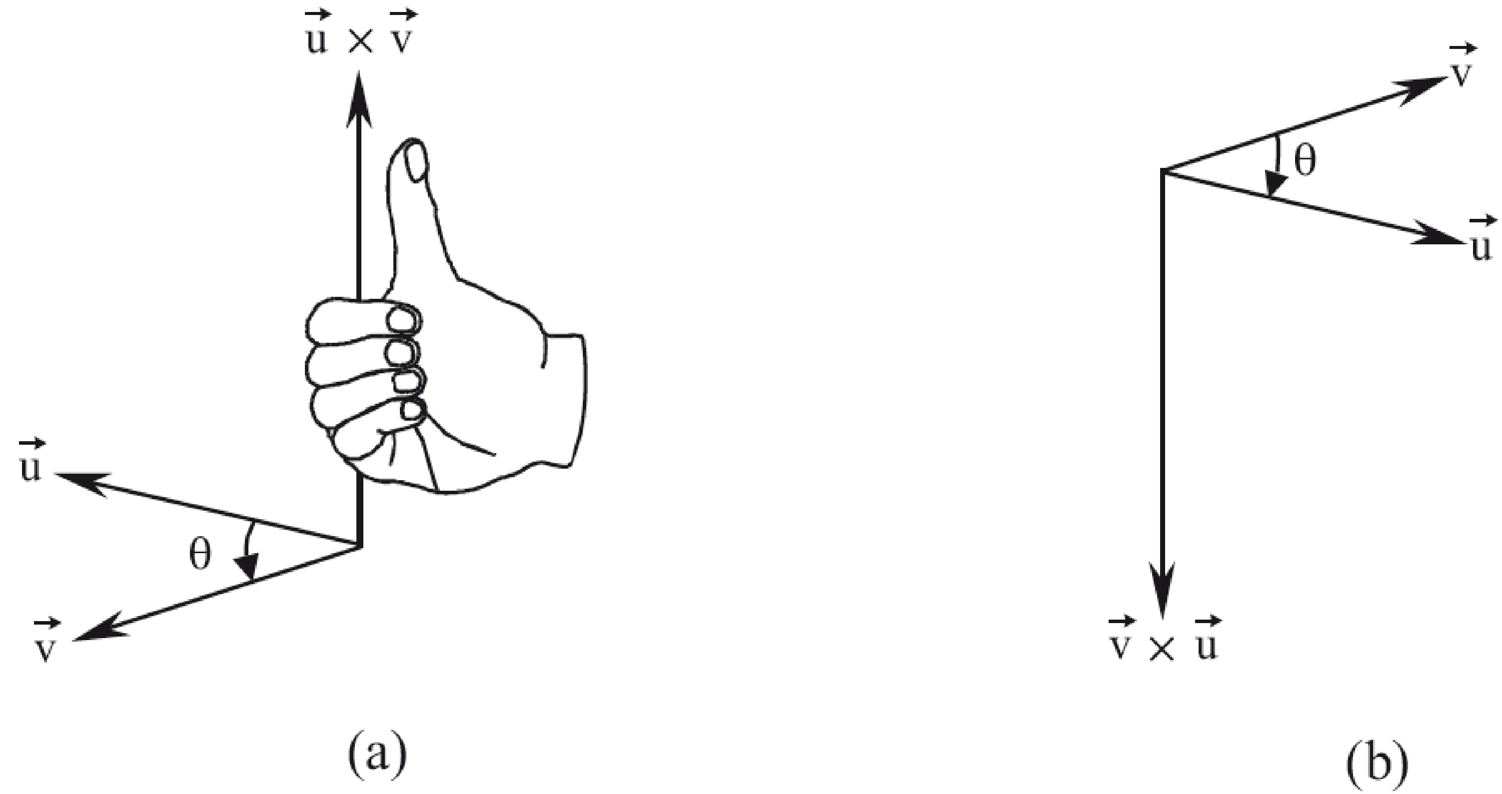
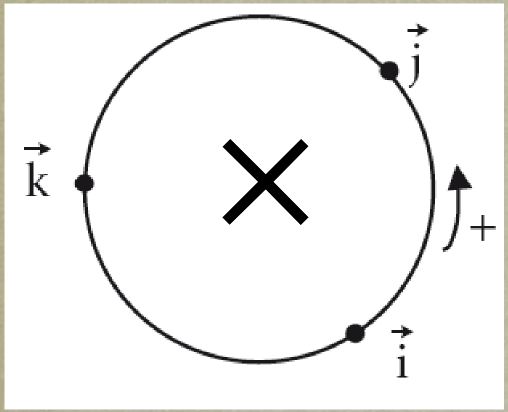


Figura 3.3 Winterle, 2a ed.

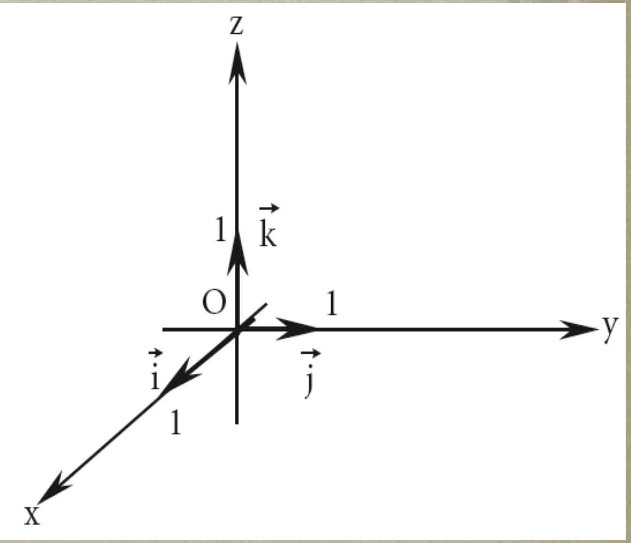
Regra para os vetores da base



$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$



Interpretação geométrica

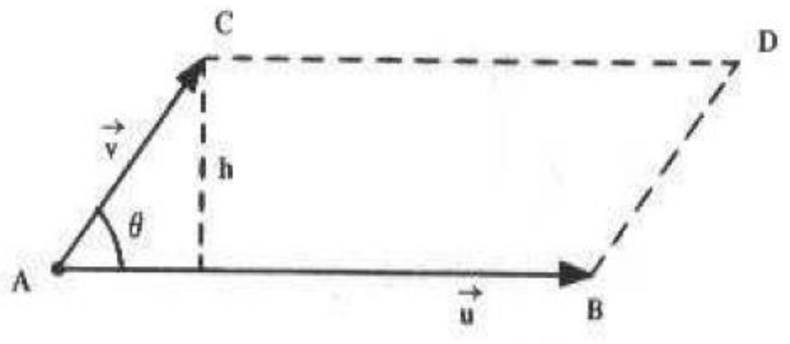


Figura 3.10-a

Área do paralelogramo

$$A = Base \times altura$$

$$A = |\vec{u}||\vec{v}|sen\theta$$

Interpretação geométrica

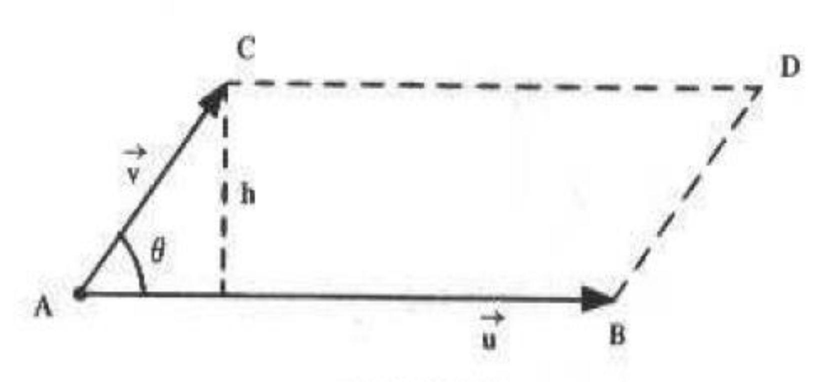


Figura 3.10-a

Área do paralelogramo

$$A = Base \times altura$$

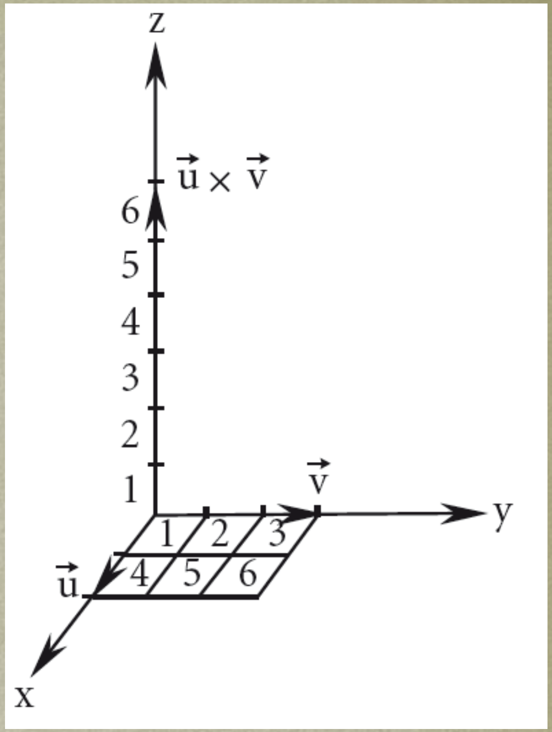
$$A = |\vec{u}||\vec{v}|sen\theta$$

$$\boxed{|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|sen\theta = A}$$

Exemplo 2

Determine o $|\vec{u} \times \vec{v}|$, sendo:

$\vec{u} = (2,0,0), \quad \vec{v} = (0,3,0).$



Propriedades do produto vetorial

Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores e $\propto$ um escalar.

I) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$

$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$

Propriedades do produto vetorial

Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores e $\propto$ um escalar.

I) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$

$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$

II) $\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$

Propriedades do produto vetorial

Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores e $\propto$ um escalar.

I) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$

$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$

II) $\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$

III) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

Propriedades do produto vetorial

Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores e $\propto$ um escalar.

I) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$

$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$

II) $\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$

III) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

Nota: $\xcancel{(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})}$

Não Associativo

Exemplo 3

Dados os vetores $\vec{u} = (2,1,0)$, $\vec{v} = (a, 0,2)$, calcular: o valor de ***a*** para que a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ seja igual a $2\sqrt{6}$.

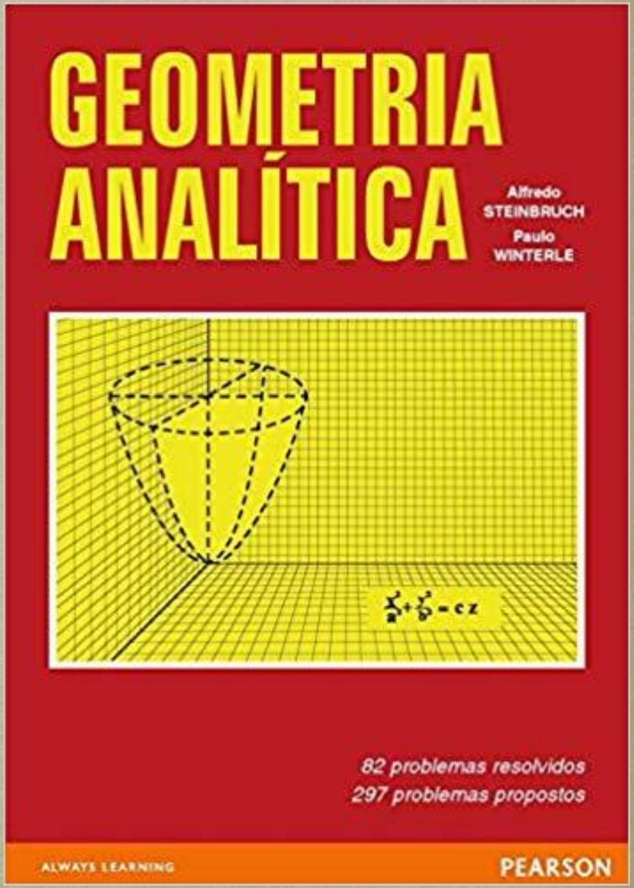
Resolver os problemas propostos:

p. 92: 42 a, b, c, e, h;
43, 44, **48***, 50, 51, 52

Entregar o exercício marcados com asterisco.

Bibliografia - GA

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. Geometria Analítica. 2. Ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.



Numeração dos exercícios com base na 2ª ed. ----->>

Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br

Currículo Lattes http://lattes.cnpq.br/1614784455223743