Geometria Analítica

Engenharias

Semana 05 – Aula 1
Equações da reta

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Equação Vetorial da Reta

Sejam $\boldsymbol{A(x_1, y_1, z_1)}$,
$\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ e $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$.

Só existe uma reta que passa por A e é paralela a $\vec{v}$

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$$

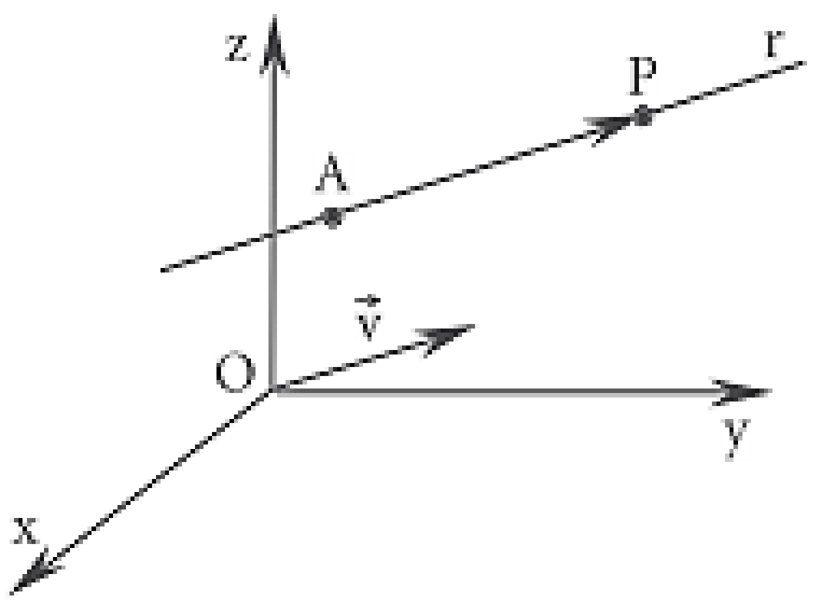


Figura 5.1

Equação Vetorial da Reta

Sejam $\boldsymbol{A(x_1, y_1, z_1)}$,
$\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ e $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$.

Só existe uma reta que passa por A e é paralela a $\vec{v}$

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$$

$$P - A = t\vec{v}$$

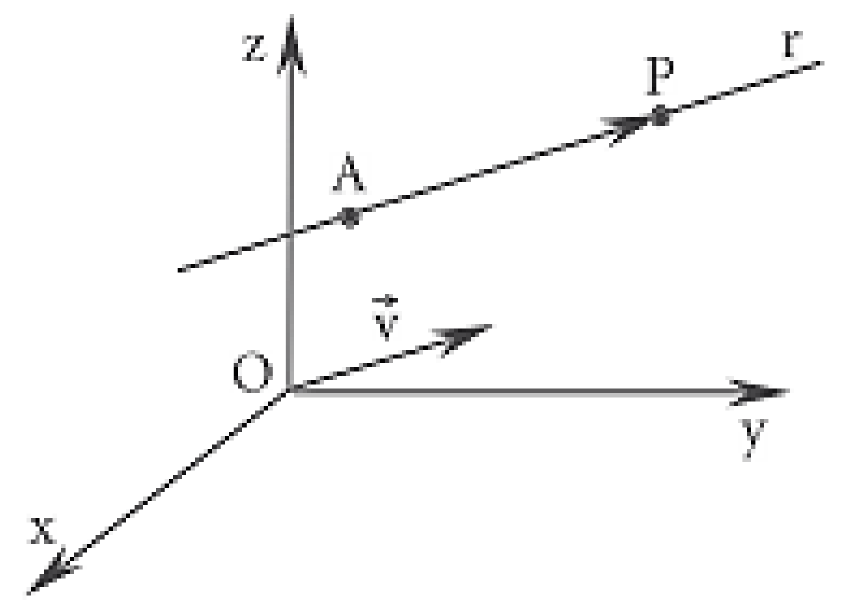


Figura 5.1

Equação Vetorial da Reta

Sejam $\boldsymbol{A(x_1, y_1, z_1)}$,
$\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ e $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$.

Só existe uma reta que passa por A e é paralela a $\vec{v}$

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$$

$$P - A = t\vec{v}$$

$$P = A + t\vec{v}$$

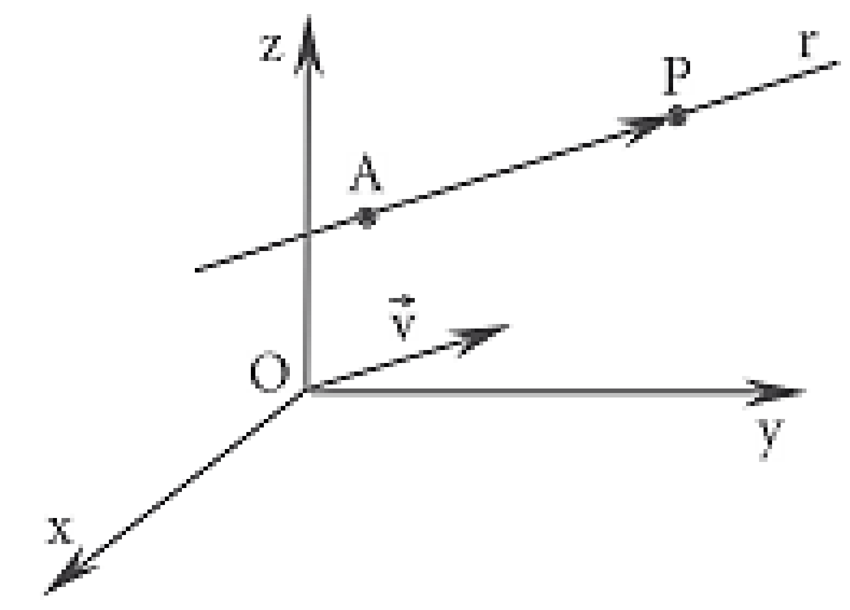


Figura 5.1

Equação Vetorial da Reta

Sejam $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_1})$,
$\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ e $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$.

Só existe uma reta que passa por A e é paralela a $\vec{v}$

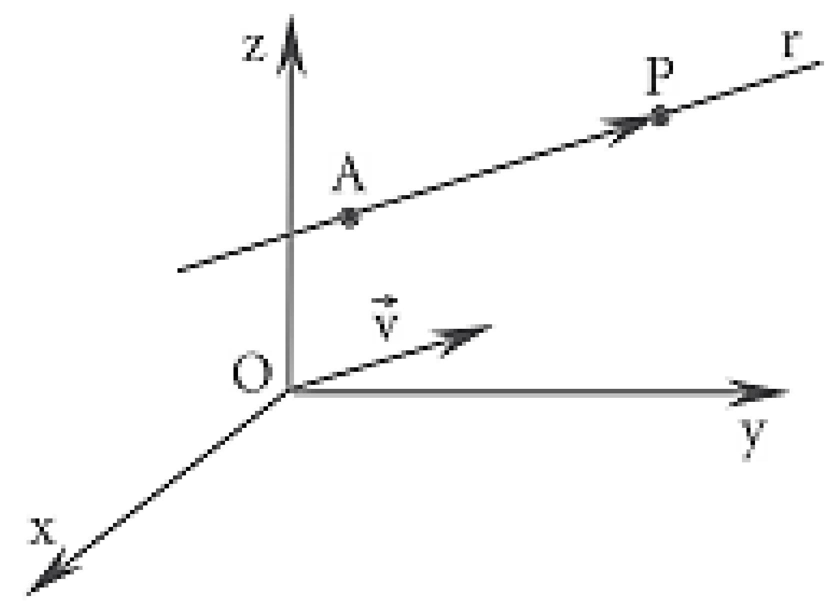


Figura 5.1

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$$

$$P - A = t\vec{v}$$

$$P = A + t\vec{v}$$

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$$

Equação Vetorial da Reta

Sejam $\boldsymbol{A(x_1, y_1, z_1)}$,
$\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ e $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$.

Só existe uma reta que passa por A e é paralela a $\vec{v}$

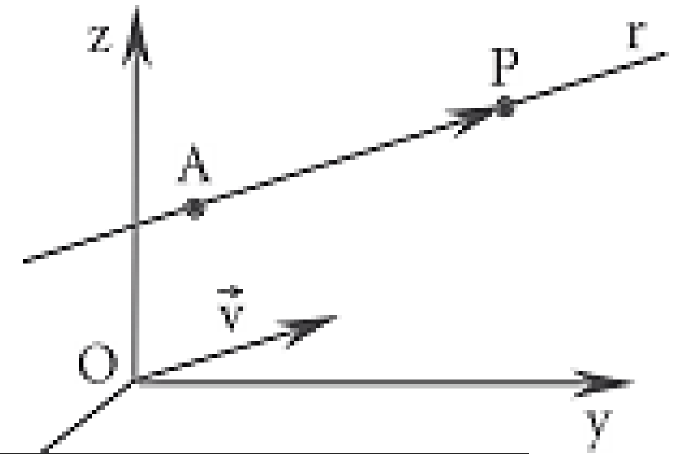


Figura 5.1

Equações vetoriais da reta

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$$

$$P - A = t\vec{v}$$

$$P = A + t\vec{v}$$

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$$

Exemplo 1

A reta r passa por $\boldsymbol{A(1,-1,4)}$ e tem direção de $\vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{2})$. Obter a equação vetorial dessa reta.

Exemplo 1

A reta r passa por $\boldsymbol{A(1,-1,4)}$ e tem direção de $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{2},\boldsymbol{3},\boldsymbol{2})$. Obter a equação vetorial dessa reta.

$\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} = \boldsymbol{t}\vec{\boldsymbol{v}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{t}\vec{\boldsymbol{v}}$

Exemplo 1

A reta r passa por $\boldsymbol{A(1,-1,4)}$ e tem direção de $\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{(2,3,2)}$. Obter a equação vetorial dessa reta.

$\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} = \boldsymbol{t}\vec{\boldsymbol{v}}$ $\quad$ $\boldsymbol{P = A + t\vec{v}}$

$$\boldsymbol{(x,y,z) = (1,-1,4) + t(2,3,2)}$$

Exemplo 1

A reta r passa por $\boldsymbol{A(1,-1,4)}$ e tem direção de $\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{(2,3,2)}$. Obter a equação vetorial dessa reta.

$\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} = \boldsymbol{t}\vec{\boldsymbol{v}}$ $\quad$ $\boldsymbol{P = A + t}\vec{\boldsymbol{v}}$

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{4}) + \boldsymbol{t}(\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{2})$$

Para se obter pontos de *r* basta atribuir valores para *t*.

Para $\boldsymbol{t} = \mathbf{1}$

Exemplo 1

A reta r passa por $\boldsymbol{A(1,-1,4)}$ e tem direção de $\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{(2,3,2)}$. Obter a equação vetorial dessa reta.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} = \boldsymbol{t}\vec{\boldsymbol{v}} \qquad \boldsymbol{P = A + t}\vec{\boldsymbol{v}}$$

$$\boldsymbol{(x,y,z) = (1,-1,4) + t(2,3,2)}$$

Para se obter pontos de *r* basta atribuir valores para *t*.

Para $\boldsymbol{t = 1}$ $\quad (x,y,z) = (3,2,6)$

Exemplo 1

A reta r passa por $\boldsymbol{A(1,-1,4)}$ e tem direção de $\boldsymbol{\vec{v} = (2,3,2)}$. Obter a equação vetorial dessa reta.

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AP} = t\vec{v}} \qquad \boldsymbol{P = A + t\vec{v}}$$

$$\boldsymbol{(x,y,z) = (1,-1,4) + t(2,3,2)}$$

Para se obter pontos de *r* basta atribuir valores para *t*.

Para $\boldsymbol{t = 1}$ $\quad (x,y,z) = (3,2,6) \qquad \mathrm{P1}(3,2,6)$

Observações

a) Para cada número real t corresponde um $P \in r$, sendo a recíproca também verdadeira.

Observações

a) Para cada número real t corresponde um $P \in r$, sendo a recíproca também verdadeira.

Exemplo 2

A reta $\boldsymbol{r}$ é definida pela equação vetorial:

$$\boldsymbol{r}\colon (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{4}) + \boldsymbol{t}(\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{2}).$$

Determinar $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$ sendo $P(\mathbf{5}, \mathbf{5}, \mathbf{8})$.

Resolução do exemplo 2

$\boldsymbol{r}$: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{4}) + \boldsymbol{t}(\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{2}) \quad \boldsymbol{t} = ? \quad P(\mathbf{5}, \mathbf{5}, \mathbf{8})$

Resolução do exemplo 2

$\boldsymbol{r}$: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{4}) + \boldsymbol{t}(\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{2}) \quad \boldsymbol{t} = ? \quad P(\mathbf{5}, \mathbf{5}, \mathbf{8})$

$$(\mathbf{5}, \mathbf{5}, \mathbf{8}) = (\mathbf{1} + \mathbf{2}\boldsymbol{t}, -\mathbf{1} + \mathbf{3}\boldsymbol{t}, \mathbf{4} + \mathbf{2}\boldsymbol{t})$$

Resolução do exemplo 2

$\boldsymbol{r}$: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{4}) + \boldsymbol{t}(\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{2})$ $\quad \boldsymbol{t} =?$ $\quad P(\mathbf{5}, \mathbf{5}, \mathbf{8})$

$(\mathbf{5}, \mathbf{5}, \mathbf{8}) = (\mathbf{1} + \mathbf{2}\boldsymbol{t}, -\mathbf{1} + \mathbf{3}\boldsymbol{t}, \mathbf{4} + \mathbf{2}\boldsymbol{t})$

$\mathbf{5} = 1 + 2\mathrm{t} \qquad \mathrm{t} = 2$

$\mathbf{5} = -1 + 3\mathrm{t} \qquad \mathrm{t} = 2$

$\mathbf{8} = 4 + 2\mathrm{t} \qquad \mathrm{t} = 2$

Resolução do exemplo 2

$\boldsymbol{r}$: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{4}) + \boldsymbol{t}(\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{2}) \quad \boldsymbol{t} = ? \quad P(\mathbf{5}, \mathbf{5}, \mathbf{8})$

$(\mathbf{5}, \mathbf{5}, \mathbf{8}) = (\mathbf{1} + \mathbf{2}\boldsymbol{t}, -\mathbf{1} + \mathbf{3}\boldsymbol{t}, \mathbf{4} + \mathbf{2}\boldsymbol{t})$

$\mathbf{5} = 1 + 2\mathrm{t} \qquad \mathrm{t} = 2$

$\mathbf{5} = -1 + 3\mathrm{t} \qquad \mathrm{t} = 2$

$\mathbf{8} = 4 + 2\mathrm{t} \qquad \mathrm{t} = 2$

Portanto: $\boldsymbol{t} = \mathbf{2}$

Observações

b) Existem infinitas equações vetoriais de $\boldsymbol{r}$ obtidas ao se tomar outro ponto A ou outro vetor diretor múltiplo de $\vec{\boldsymbol{v}}$.

Observações

b) Existem infinitas equações vetoriais de $\boldsymbol{r}$ obtidas ao se tomar outro ponto A ou outro vetor diretor múltiplo de $\vec{\boldsymbol{v}}$.

Exemplo 3

Se $\boldsymbol{A}(\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{4})$ e $2\vec{\boldsymbol{v}}=(\mathbf{4},\mathbf{6},\mathbf{4})$

Observações

b) Existem infinitas equações vetoriais de $\boldsymbol{r}$ obtidas ao se tomar outro ponto A ou outro vetor diretor múltiplo de $\vec{\boldsymbol{v}}$.

Exemplo 3

Se $\boldsymbol{A(1,-1,4)}$ e $2\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{4,6,4})$

Solução $\boldsymbol{r}$: $(\boldsymbol{x,y,z}) = (\boldsymbol{1,-1,4}) + \boldsymbol{t}(\boldsymbol{4,6,4})$.

Equações paramétricas da Reta

Sejam $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_1}), \vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ e $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$.

Equações paramétricas da Reta

Sejam $\boldsymbol{A(x_1, y_1, z_1)}, \vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ e $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$.

Da equação vetorial da reta tem-se:

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$$

Equações paramétricas da Reta

Sejam $\boldsymbol{A(x_1, y_1, z_1)}, \vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ e $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$.

Da equação vetorial da reta tem-se:

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$$

A soma do lado direito fornece:

$$(x, y, z) = (x_1 + at, y_1 + bt, z_1 + ct)$$

Equações paramétricas da Reta

Sejam $\boldsymbol{A(x_1, y_1, z_1)}, \vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ e $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$.

Da equação vetorial da reta tem-se:

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$$

A soma do lado direito fornece:

$$(x, y, z) = (x_1 + at, y_1 + bt, z_1 + ct)$$

Da igualdade de vetores:

$$r: \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}$$

Equações paramétricas da reta

Equações paramétricas da Reta

Sejam $\boldsymbol{A(x_1, y_1, z_1)}, \vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ e $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$.

Da equação vetorial da reta tem-se:

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$$

A soma do lado direito fornece:

$$(x, y, z) = (x_1 + at, y_1 + bt, z_1 + ct)$$

Da igualdade de vetores:

$$r: \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}$$

Equações paramétricas da reta

Exemplo 4

a) Dados $\boldsymbol{A(2,3,-4)}$ e $\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{(1,-2,3)}$. Obter as equações paramétricas da reta $\boldsymbol{r}$ que passa por $\boldsymbol{A}$ e é paralela a $\vec{\boldsymbol{v}}$.

b) Encontrar um ponto $\boldsymbol{B}$ e um ponto $\boldsymbol{C}$ de $\boldsymbol{r}$ com parâmetros $t = 1$ e $t = 4$, respectivamente.

c) Determinar um ponto de $\boldsymbol{r}$ cuja abscissa é $\boldsymbol{4}$.

Exercícios

1. Determinar um equação vetorial da reta $\boldsymbol{r}$ definida pelos pontos $\boldsymbol{A(2,-3,4)}$ e $\boldsymbol{B(1,-1,2)}$. Verificar se $\boldsymbol{D(-1,3,4)}$ pertence a $\boldsymbol{r}$.

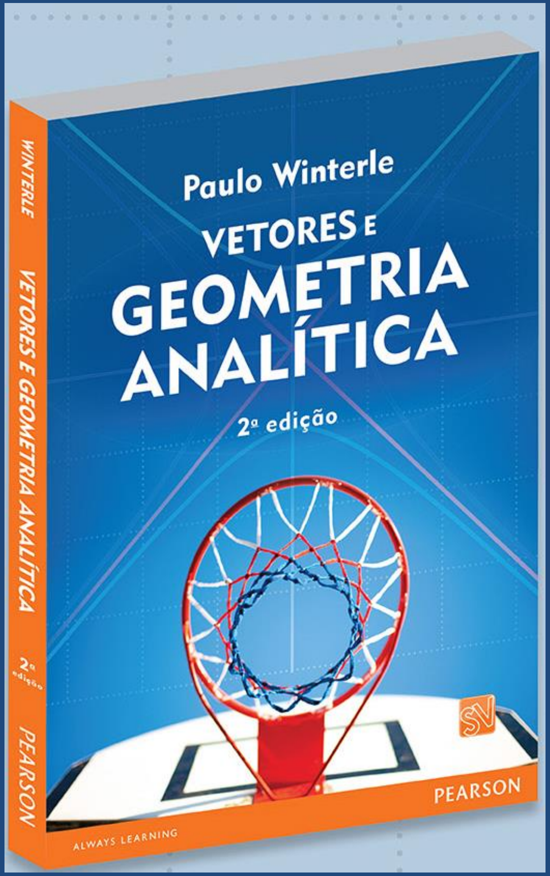
2. Dada a reta $\boldsymbol{r}$: $\boldsymbol{(x,y,z)=(-1,2,3)+t(2,-3,0)}$:

   a) Escrever as equações paramétricas de $\boldsymbol{r}$;

   b) Encontrar um ponto $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{r}$ tal que $\boldsymbol{t=1/2}$;

   c) Para que valores de $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$ o ponto $k(2,n,m) \in r$

Referência



WINTERLE, P. Vetores e Geometria Analítica. 2ª ed. São Paulo: Pearson, 2014.

Numeração dos exercícios com base na 2ª ed.

Contato

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br