Cálculo diferencial e integral

Sequências e séries infinitas

Aula 03
Séries uma introdução

Henrique Antonio Mendonça Faria
henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Definição de série.
2. Série geométrica.
3. Série telescópica e série harmônica.
4. Teoremas de convergência

Definição de série

Definição de série

- O irracional π pode ser representado por um número decimal infinito:

$$\pi = 3{,}141592\ldots$$

Definição de série

- O irracional π pode ser representado por um número decimal infinito:

$$\pi = 3{,}141592\ldots$$

- Outra forma de expressá-lo é como soma infinita:

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} \cdots$$

Definição de série

- O irracional π pode ser representado por um número decimal infinito:

$$\pi = 3{,}141592\ldots$$

- Outra forma de expressá-lo é como soma infinita:

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4}\cdots$$

- Quanto mais termos forem acrescentados mais próxima do número real será a representação.

Definição de série

- Ao somar-se os termos de uma sequência infinita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ obtém-se:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \ \dots$$

Definição de série

- Ao somar-se os termos de uma sequência infinita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ obtém-se:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ \ldots$$

- A **soma dos termos** de uma sequência é denominada **Série** e denotada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{ou} \quad \sum a_n$$

Definição de série

- Ao somar-se os termos de uma sequência infinita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ obtém-se:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ \ldots$$

- A **soma dos termos** de uma sequência é denominada **Série** e denotada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{ou} \quad \sum a_n$$

Ex. 1: $a_n = n$

Definição de série

- Ao somar-se os termos de uma sequência infinita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ obtém-se:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ \ldots$$

- A **soma dos termos** de uma sequência é denominada **Série** e denotada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{ou} \quad \sum a_n$$

Ex. 1: $a_n = n \quad \rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots$

Definição de série

- Ao somar-se os termos de uma sequência infinita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ obtém-se:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ \ldots$$

- A **soma dos termos** de uma sequência é denominada **Série** e denotada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{ou} \quad \sum a_n$$

Ex. 1: $a_n = n \quad \rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots$

A soma se torna muito grande quando $n \rightarrow \infty$.

Definição de série

- Algumas séries se aproximam de um número finito quando $n \to \infty$:

Definição de série

- Algumas séries se aproximam de um número finito quando $n \to \infty$:

Ex. 2: $a_n = \dfrac{1}{2^n}$

Definição de série

- Algumas séries se aproximam de um número finito quando $n \to \infty$:

Ex. 2: $a_n = \dfrac{1}{2^n} \quad \rightarrow \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

Definição de série

- Algumas séries se aproximam de um número finito quando $n \to \infty$:

Ex. 2: $a_n = \dfrac{1}{2^n} \quad \rightarrow \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

- A soma dos termos é:

$$S_1 = a_1 = {}^{1}/_{2}$$

Definição de série

- Algumas séries se aproximam de um número finito quando $n \to \infty$:

Ex. 2: $a_n = \dfrac{1}{2^n} \quad \to \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

- A soma dos termos é:

$$S_1 = a_1 = {}^{1}/_{2}$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = {}^{1}/_{2} + {}^{1}/_{4} = {}^{3}/_{4}$$

$$\vdots$$

Definição de série

- Algumas séries se aproximam de um número finito quando $n \to \infty$:

Ex. 2: $a_n = \dfrac{1}{2^n} \quad \to \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

- A soma dos termos é:

$$S_1 = a_1 = {}^1\!/_2$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = {}^1\!/_2 + {}^1\!/_4 = {}^3\!/_4$$

$$\vdots$$

$$S_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = {}^{63}\!/_{64}$$

Definição de série

- Algumas séries se aproximam de um número finito quando $n \to \infty$:

Ex. 2: $a_n = \frac{1}{2^n} \quad \to \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

- A soma dos termos é:

$$S_1 = a_1 = {}^1/_2$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = {}^1/_2 + {}^1/_4 = {}^3/_4$$

$$\vdots$$

$$S_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = {}^{63}/_{64}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^n} = 1$$

Definição de série

Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, denote por s_n sua n-ésima soma parcial:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Definição de série

Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, denote por s_n sua n-ésima soma parcial:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Se a sequência $\{s_n\}$ for convergente e $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existir, então a série $\sum a_n$ é chamada **convergente**, e escrevemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \quad \text{ou} \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s$$

O número s é chamado a **soma** da série.

Definição de série

Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, denote por s_n sua n-ésima soma parcial:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Se a sequência $\{s_n\}$ for convergente e $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existir, então a série $\sum a_n$ é chamada **convergente**, e escrevemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \quad \text{ou} \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s$$

O número s é chamado a **soma** da série.

Se a sequência $\{s_n\}$ é divergente, então a série é chamada **divergente**.

Série geométrica

Série geométrica

- Cada termo é obtido do anterior, multiplicando-se pela razão r.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \quad para \quad a \neq 0$$

Série geométrica

- Cada termo é obtido do anterior, multiplicando-se pela razão r.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \quad para \quad a \neq 0$$

Converge: $se\ |r| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < r < 1$

Série geométrica

- Cada termo é obtido do anterior, multiplicando-se pela razão r.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \quad para \quad a \neq 0$$

Converge: $se\ |r| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < r < 1$

Diverge: $se\ |r| \geq 1 \quad \Rightarrow \quad (-\infty, -1] \;\; e \;\; [1, +\infty)$

Série geométrica

- Cada termo é obtido do anterior, multiplicando-se pela razão r.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \quad para \quad a \neq 0$$

Converge: $se\ |r| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < r < 1$

Diverge: $se\ |r| \geq 1 \quad \Rightarrow \quad (-\infty, -1] \ \ e\ \ [1, +\infty)$

- A soma dos termos tem uma expressão fechada.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \qquad para\ |r| < 1$$

Série geométrica

- Dedução para $r \neq 1$:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}$$

Série geométrica

- Dedução para $r \neq 1$:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} \qquad (\times\, r)$$

$$rS_n = ra + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

Série geométrica

- Dedução para $r \neq 1$:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} \qquad (\times\, r)$$

$$rS_n = ra + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

- Subtraindo a primeira equação da segunda:

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

Série geométrica

- Dedução para $r \neq 1$:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} \qquad (\times\, r)$$

$$rS_n = ra + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

- Subtraindo a primeira equação da segunda:

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$

Série geométrica

- Dedução para $r \neq 1$:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} \qquad (\times r)$$

$$rS_n = ra + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

- Subtraindo a primeira equação da segunda:

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$S_n(1-r) = a(1-r^n)$$

$$\boxed{S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}} \qquad r \neq 1$$

Série geométrica

- Dedução para $|r| < 1 \;\; (-1 < r < 1)$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

Série geométrica

- Dedução para $|r| < 1 \ (-1 < r < 1)$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{(1-r)} - \lim_{n\to\infty} \frac{ar^n}{(1-r)}$$

Série geométrica

- Dedução para $|r| < 1 \ (-1 < r < 1)$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{(1-r)} - \lim_{n\to\infty} \frac{ar^n}{(1-r)}$$

$$= \frac{a}{(1-r)} - \frac{a}{(1-r)} \lim_{n\to\infty} r^n$$

Série geométrica

- Dedução para $|r| < 1 \ (-1 < r < 1)$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{(1-r)} - \lim_{n\to\infty} \frac{ar^n}{(1-r)}$$

$$= \frac{a}{(1-r)} - \frac{a}{(1-r)} \overbrace{\lim_{n\to\infty} r^n}^{=\,0}$$

Série geométrica

- Dedução para $|r| < 1$ $(-1 < r < 1)$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{(1-r)} - \lim_{n\to\infty} \frac{ar^n}{(1-r)}$$

$$= \frac{a}{(1-r)} - \frac{a}{(1-r)} \underbrace{\lim_{n\to\infty} r^n}_{=0}$$

$$S_n = \frac{a}{(1-r)}$$

Série geométrica

- Dedução para $|r| < 1$ $(-1 < r < 1)$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{(1-r)} - \lim_{n\to\infty} \frac{ar^n}{(1-r)}$$

$$= \frac{a}{(1-r)} - \frac{a}{(1-r)} \overbrace{\lim_{n\to\infty} r^n}^{=\,0}$$

$$S_n = \frac{a}{(1-r)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \qquad para \ |r| < 1$$

Exemplo 1 Encontre a soma da série geométrica.

$$5-\frac{10}{3}+\frac{20}{9}-\frac{40}{27}+\cdots$$

Exemplo 1 Encontre a soma da série geométrica.

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots$$

Solução: O termo geral da série geométrica se assemelha ao termo geral da PG.

Exemplo 1 Encontre a soma da série geométrica.

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots$$

Solução: O termo geral da série geométrica se assemelha ao termo geral da PG.

$$a_1 = a = 5; \quad q = r = \frac{a_3}{a_2}$$

Exemplo 1 Encontre a soma da série geométrica.

$$5-\frac{10}{3}+\frac{20}{9}-\frac{40}{27}+\cdots$$

Solução: O termo geral da série geométrica se assemelha ao termo geral da PG.

$$a_1=a=5; \quad q=r=\frac{a_3}{a_2}=\frac{20/9}{-10/3}$$

Exemplo 1 Encontre a soma da série geométrica.

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots$$

Solução: O termo geral da série geométrica se assemelha ao termo geral da PG.

$$a_1 = a = 5; \quad q = r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{20/9}{-10/3} = -\frac{20}{9}.\frac{3}{10}$$

Exemplo 1 Encontre a soma da série geométrica.

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots$$

Solução: O termo geral da série geométrica se assemelha ao termo geral da PG.

$$a_1 = a = 5; \quad q = r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{20/9}{-10/3} = -\frac{20}{9} \cdot \frac{3}{10} = -\frac{2}{3}$$

Exemplo 1 Encontre a soma da série geométrica.

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots$$

Solução: O termo geral da série geométrica se assemelha ao termo geral da PG.

$$a_1 = a = 5; \qquad q = r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{20/9}{-10/3} = -\frac{20}{9} . \frac{3}{10} = -\frac{2}{3}$$

- ✓ Como $|r| = \frac{2}{3} < 1$ a série converge! Então:

$$S_n = \frac{a}{(1-r)}$$

Exemplo 1 Encontre a soma da série geométrica.

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots$$

Solução: O termo geral da série geométrica se assemelha ao termo geral da PG.

$$a_1 = a = 5; \qquad q = r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{20/9}{-10/3} = -\frac{20}{9} . \frac{3}{10} = -\frac{2}{3}$$

- ✓ Como $|r| = \frac{2}{3} < 1$ a série converge! Então:

$$S_n = \frac{a}{(1-r)} = \frac{5}{1 - \left(\frac{-2}{3}\right)}$$

Exemplo 1 Encontre a soma da série geométrica.

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots$$

Solução: O termo geral da série geométrica se assemelha ao termo geral da PG.

$$a_1 = a = 5; \qquad q = r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{20/9}{-10/3} = -\frac{20}{9} \cdot \frac{3}{10} = -\frac{2}{3}$$

- ✓ Como $|r| = \frac{2}{3} < 1$ a série converge! Então:

$$S_n = \frac{a}{(1-r)} = \frac{5}{1 - \left(\frac{-2}{3}\right)} = \frac{5}{\frac{3+2}{3}}$$

Exemplo 1 Encontre a soma da série geométrica.

$$5-\frac{10}{3}+\frac{20}{9}-\frac{40}{27}+\cdots$$

Solução: O termo geral da série geométrica se assemelha ao termo geral da PG.

$$a_1=a=5; \qquad q=r=\frac{a_3}{a_2}=\frac{20/9}{-10/3}=-\frac{20}{9}.\frac{3}{10}=-\frac{2}{3}$$

- ✓ Como $|r|=\frac{2}{3}<1$ a série converge! Então:

$$S_n=\frac{a}{(1-r)}=\frac{5}{1-\left(\frac{-2}{3}\right)}=\frac{5}{\frac{3+2}{3}}=5.\frac{3}{5}$$

Exemplo 1 Encontre a soma da série geométrica.

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots$$

Solução: O termo geral da série geométrica se assemelha ao termo geral da PG.

$$a_1 = a = 5; \quad q = r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{20/9}{-10/3} = -\frac{20}{9} . \frac{3}{10} = -\frac{2}{3}$$

✓ Como $|r| = \frac{2}{3} < 1$ a série converge! Então:

$$\boldsymbol{S_n} = \frac{a}{(1-r)} = \frac{5}{1-\left(\frac{-2}{3}\right)} = \frac{5}{\frac{3+2}{3}} = 5.\frac{3}{5} = \mathbf{3}$$

Exemplo 2 Fração geratriz de uma dízima periódica.

Escrever o número $0{,}7\overline{7} = 0{,}777\ldots$ como razão de inteiros.

Exemplo 2 Fração geratriz de uma dízima periódica.

Escrever o número $0,7\overline{7} = 0,777\ldots$ como razão de inteiros.

$$0,7777 = 0,7 + 0,07 + 0,007 + \cdots$$

Exemplo 2 Fração geratriz de uma dízima periódica.

Escrever o número $0{,}7\overline{7} = 0{,}777\ldots$ como razão de inteiros.

$$0{,}7777 = 0{,}7 + 0{,}07 + 0{,}007 + \cdots$$

$$0{,}7777 = \frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \cdots + \frac{7}{10^n}$$

Exemplo 2 Fração geratriz de uma dízima periódica.

Escrever o número $0,7\overline{7} = 0,777\ldots$ como razão de inteiros.

$$0,7777 = 0,7 + 0,07 + 0,007 + \cdots$$

$$0,7777 = \frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \cdots + \frac{7}{10^n}$$

- ✓ É uma série geométrica com $a = 7/10$ e razão:

$$r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{7/10^3}{7/10^2} = \frac{1}{10}$$

Exemplo 2 Fração geratriz de uma dízima periódica.

Escrever o número $0{,}7\overline{7} = 0{,}777\ldots$ como razão de inteiros.

$$0{,}7777 = 0{,}7 + 0{,}07 + 0{,}007 + \cdots$$

$$0{,}7777 = \frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \cdots + \frac{7}{10^n}$$

- ✓ É uma série geométrica com $a = 7/10$ e razão:

$$r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{7/10^3}{7/10^2} = \frac{1}{10}$$

$$S_n = 0{,}777\ldots = \frac{a}{(1-r)}$$

Exemplo 2 Fração geratriz de uma dízima periódica.

Escrever o número $0{,}7\overline{7} = 0{,}777\ldots$ como razão de inteiros.

$$0{,}7777 = 0{,}7 + 0{,}07 + 0{,}007 + \cdots$$

$$0{,}7777 = \frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \cdots + \frac{7}{10^n}$$

✓ É uma série geométrica com $a = 7/10$ e razão:

$$r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{7/10^3}{7/10^2} = \frac{1}{10}$$

$$S_n = 0{,}777\ldots = \frac{a}{(1-r)} = \frac{7/10}{1-(1/10)} = \frac{7/10}{9/10}$$

Exemplo 2 Fração geratriz de uma dízima periódica.

Escrever o número $0{,}7\overline{7} = 0{,}777\ldots$ como razão de inteiros.

$$0{,}7777 = 0{,}7 + 0{,}07 + 0{,}007 + \cdots$$

$$0{,}7777 = \frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \cdots + \frac{7}{10^n}$$

✓ É uma série geométrica com $a = 7/10$ e razão:

$$r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{7/10^3}{7/10^2} = \frac{1}{10}$$

$$\boldsymbol{S_n = 0,777\ldots} = \frac{a}{(1-r)} = \frac{7/10}{1-(1/10)} = \frac{7/10}{9/10} = \boldsymbol{\frac{7}{9}}$$

Série telescópica e série harmônica

Série telescópica (Convergente)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Série telescópica (Convergente)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

- O termo geral pode ser escrito em frações parciais.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$$

Série telescópica (Convergente)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

- O termo geral pode ser escrito em frações parciais.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right)$$

Série telescópica (Convergente)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

- O termo geral pode ser escrito em frações parciais.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$$

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Série telescópica (Convergente)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

- O termo geral pode ser escrito em frações parciais.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$$

$$S_n = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Série telescópica (Convergente)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

- O termo geral pode ser escrito em frações parciais.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$$

$$S_n = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Série telescópica (Convergente)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

- O termo geral pode ser escrito em frações parciais.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$$

$$S_n = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Série telescópica (Convergente)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

- O termo geral pode ser escrito em frações parciais.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right)$$

$$S_n = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Série telescópica (Convergente)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

- O termo geral pode ser escrito em frações parciais.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$$

$$S_n = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1}$$

Série telescópica (Convergente)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

- O termo geral pode ser escrito em frações parciais.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$$

$$S_n = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \cancelto{= 0}{\frac{1}{n+1}}$$

Série telescópica (Convergente)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

- O termo geral pode ser escrito em frações parciais.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$$

$$S_n = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \cancelto{=0}{\frac{1}{n+1}} = \mathbf{1}$$

Série harmônica (Divergente)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

Série harmônica (Divergente)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

- Embora não seja evidente que divirja, a somas parciais demonstram que sim.

$$S_1 = 1,$$

Série harmônica (Divergente)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

- Embora não seja evidente que divirja, a somas parciais demonstram que sim.

$$S_1 = 1, \qquad S_2 = 1 + \frac{1}{2},$$

Série harmônica (Divergente)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

- Embora não seja evidente que divirja, a somas parciais demonstram que sim.

$$S_1 = 1, \qquad S_2 = 1 + \frac{1}{2}, \qquad S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \ldots$$

Série harmônica (Divergente)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

- Embora não seja evidente que divirja, a somas parciais demonstram que sim.

$$S_1 = 1, \qquad S_2 = 1 + \frac{1}{2}, \qquad S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \ldots$$

$$S_1 < S_2 < S_3 < \cdots < S_n$$

Série harmônica (Divergente)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

- Embora não seja evidente que divirja, a somas parciais demonstram que sim.

$$S_1 = 1, \qquad S_2 = 1 + \frac{1}{2}, \qquad S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \ldots$$

$$S_1 < S_2 < S_3 < \cdots < S_n$$

- Não há um número superior para as somas parciais. Portanto, pelo Teorema da sequência monótona, a sequência das somas diverge, assim como a série.

Teoremas de convergência

Alguns Teoremas

Teorema 6 (Ref. Stewart 7 ed.)

$$\text{Se a série } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ for convergente, então } \lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Alguns Teoremas

Teorema 6 (Ref. Stewart 7 ed.)

$$\text{Se a série } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ for convergente, então } \lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

A recíproca do Teorema 6 não é verdadeira.
Se o limite é nulo, não podemos concluir que a série é convergente.

Alguns Teoremas

Teorema 6 (Ref. Stewart 7 ed.)

$$\text{Se a série } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ for convergente, então } \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

A recíproca do Teorema 6 não é verdadeira.
Se o limite é nulo, não podemos concluir que a série é convergente.

Teorema 7 (Teste da divergência)

$$\text{Se } \lim_{n\to\infty} a_n \text{ não existir ou se } \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0,$$

$$\text{então a série } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ é divergente.}$$

Exemplo 3 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{16n^2+5n}$ converge?

Exemplo 3 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{16n^2+5n}$ converge?

$$a_n = \frac{2n^2 - 1}{16n^2 + 5n} \qquad (termo\ geral)$$

Exemplo 3 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{16n^2+5n}$ converge?

$$a_n = \frac{2n^2 - 1}{16n^2 + 5n} \qquad (termo\ geral)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 1}{16n^2 + 5n} \qquad (\div\, n^2)$$

Exemplo 3 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{16n^2+5n}$ converge?

$$a_n = \frac{2n^2 - 1}{16n^2 + 5n} \qquad (termo\ geral)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 1}{16n^2 + 5n} \qquad (\div\, n^2)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - 1/n^2}{16 + 5/n} = \frac{1}{8} \neq 0$$

Exemplo 3 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{16n^2+5n}$ converge?

$$a_n = \frac{2n^2 - 1}{16n^2 + 5n} \qquad (termo\ geral)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 1}{16n^2 + 5n} \qquad (\div\, n^2)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - 1/n^2}{16 + 5/n} = \frac{1}{8} \neq 0$$

Como o limite do termo geral $\neq 0$, a série diverge!

Alguns Teoremas

Teorema 8

Se $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ forem séries convergentes, então também o serão as séries

Alguns Teoremas

Teorema 8

Se $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ forem séries convergentes, então também o serão as séries

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{onde } c \text{ é uma constante}$$

Alguns Teoremas

Teorema 8

Se $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ forem séries convergentes, então também o serão as séries

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{onde } c \text{ é uma constante}$$

$$\text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Alguns Teoremas

Teorema 8

Se $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ forem séries convergentes, então também o serão as séries

$$\text{(i)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{onde } c \text{ é uma constante}$$

$$\text{(ii)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$\text{(iii)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Exemplo 4 Calcular a soma da série.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n}$$

Exemplo 4 Calcular a soma da série.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Série Telescópica

Exemplo 4 Calcular a soma da série.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Série Telescópica

Série Geométrica $\begin{cases} a = 1/2 \\ r = 1/2 \end{cases}$

Exemplo 4 Calcular a soma da série.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Série Telescópica *Série Geométrica* $\begin{cases} a = 1/2 \\ r = 1/2 \end{cases}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n}$$

Exemplo 4 Calcular a soma da série.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Série Telescópica *Série Geométrica* $\begin{cases} a = 1/2 \\ r = 1/2 \end{cases}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} = 3 \times 1 + \frac{1/2}{1 - 1/2}$$

Exemplo 4 Calcular a soma da série.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Série Telescópica

Série Geométrica $\begin{cases} a = 1/2 \\ r = 1/2 \end{cases}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} = 3 \times 1 + \frac{1/2}{1 - 1/2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}} = 3 + 1$$

Exemplo 4 Calcular a soma da série.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Série Telescópica

Série Geométrica $\begin{cases} a = 1/2 \\ r = 1/2 \end{cases}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} = 3 \times 1 + \frac{1/2}{1 - 1/2}$$

$$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n}} = 3 + 1 = \mathbf{4}$$

Exercícios

Exercícios 1: As séries convergem? Justifique a resposta.

Respostas | Justificativa

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 + 5n}{7n^2 + 5n}$$

d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \frac{2}{n}$$

e) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \times 5}{7^n}$$

Exercícios 1: As séries convergem? Justifique a resposta.

	Respostas	Justificativa
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$	$Converge$	$S.Geométrica\, r = 1/2$
b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$		
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 + 5n}{7n^2 + 5n}$		
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \frac{2}{n}$		
e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \times 5}{7^n}$		

Exercícios 1: As séries convergem? Justifique a resposta.

	Respostas	Justificativa
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$	$Converge$	$S.Geométrica\ r = 1/2$
b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$	$Converge$	$S.Telescópica\ S_n = 2$
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 + 5n}{7n^2 + 5n}$		
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \frac{2}{n}$		
e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \times 5}{7^n}$		

Exercícios 1: As séries convergem? Justifique a resposta.

	Respostas	Justificativa
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$	$Converge$	$S.Geométrica\ r = 1/2$
b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$	$Converge$	$S.Telescópica\ S_n = 2$
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 + 5n}{7n^2 + 5n}$	$Diverge$	$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \frac{2}{n}$		
e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \times 5}{7^n}$		

Exercícios 1: As séries convergem? Justifique a resposta.

	Respostas	Justificativa
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$	$Converge$	$S.\,Geométrica\; r = 1/2$
b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$	$Converge$	$S.\,Telescópica\; S_n = 2$
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+5n}{7n^2+5n}$	$Diverge$	$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \frac{2}{n}$	$Diverge$	$\begin{cases} S.\,Geométrica + \\ S.\,Harmônica \end{cases}$
e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \times 5}{7^n}$		

Exercícios 1: As séries convergem? Justifique a resposta.

	Respostas	Justificativa
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$	$Converge$	$S.Geométrica\ r = 1/2$
b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$	$Converge$	$S.Telescópica\ S_n = 2$
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 + 5n}{7n^2 + 5n}$	$Diverge$	$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \frac{2}{n}$	$Diverge$	$\begin{cases} S.Geométrica + \\ S.Harmônica \end{cases}$
e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \times 5}{7^n}$	$Converge$	$S.Geométrica\ r = 3/7$

Exercícios 2: Calcule a fração geratriz da dízima.

a) $0{,}33\overline{3}$

b) $0{,}32\overline{32}$

Exercícios 2: Calcule a fração geratriz da dízima.

a) $0{,}33\overline{3}$ Resp.: $1/3$

b) $0{,}32\overline{32}$ Resp.: $32/99$

Para depois desta aula:

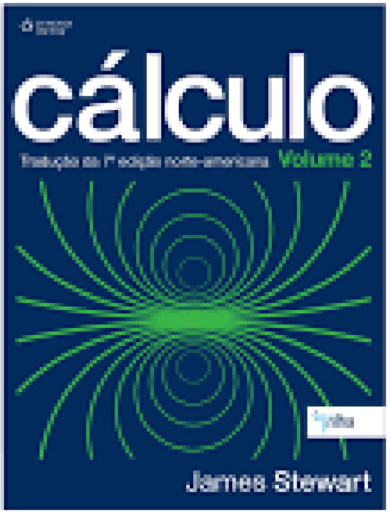
- Estudar seção 11.2 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar: exercícios Seção 11.2 do Stewart.

Próxima aula:

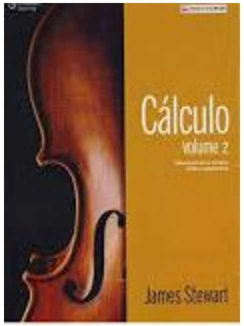
- Teste da integral e teste da comparação.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.



Numeração dos exercícios com base na 7ª ed. ▶



STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.