Cálculo diferencial e integral

Sequências e séries infinitas

Aula 05
Séries alternadas e convergência absoluta

Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Séries alternadas.
2. Convergência absoluta.
3. Teste da razão.
4. Teste da raiz.
5. Estratégia para testes de séries.

Séries alternadas

Séries alternadas

- Até o momento, avaliamos séries cujos termos eram estritamente positivos.
- A partir desta seção veremos séries nas quais os termos podem ser positivos e negativos.

Séries alternadas

- Até o momento, avaliamos séries cujos termos eram estritamente positivos.
- A partir desta seção veremos séries nas quais os termos podem ser positivos e negativos.
- Uma série alternada é aquela cujos termos são, alternadamente, positivos e negativos. Por exemplo,

Séries alternadas

- Até o momento, avaliamos séries cujos termos eram estritamente positivos.
- A partir desta seção veremos séries nas quais os termos podem ser positivos e negativos.
- Uma série alternada é aquela cujos termos são, alternadamente, positivos e negativos. Por exemplo,

$$-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}-\frac{5}{6}+\frac{6}{7}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$$

Séries alternadas

- Até o momento, avaliamos séries cujos termos eram estritamente positivos.
- A partir desta seção veremos séries nas quais os termos podem ser positivos e negativos.
- Uma série alternada é aquela cujos termos são, alternadamente, positivos e negativos. Por exemplo,

$$-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}-\frac{5}{6}+\frac{6}{7}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$$

- O n-ésimo termo desta série é da forma $a_n=(-1)^n b_n$, com $b_n>0$.

Teste da série alternada

Se a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots \qquad b_n > 0$$

Teste da série alternada

Se a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots \qquad b_n > 0$$

satisfaz (i) $b_{n+1} \leqslant b_n$ para todo n

Teste da série alternada

Se a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots \qquad b_n > 0$$

satisfaz (i) $b_{n+1} \leqslant b_n$ para todo n

(ii) $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$

então a série é convergente.

Exemplo 1 A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge?

Exemplo 1 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Exemplo 1 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

(i) $b_{n+1} < b_n$

Exemplo 1 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

(i) $b_{n+1} < b_n$ uma vez que $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$

Exemplo 1 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

(i) $b_{n+1} < b_n$ uma vez que $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$

(ii) $\lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

Exemplo 1 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

(i) $b_{n+1} < b_n$ uma vez que $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$

(ii) $\lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

✓ As duas condições do teorema são satisfeitas.

Exemplo 1 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

(i) $b_{n+1} < b_n$ uma vez que $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$

(ii) $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

- ✓ As duas condições do teorema são satisfeitas.
- ✓ Então esta série, chamada harmônica alternada, é convergente.

Exemplo 2 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$ converge?

Exemplo 2 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$ converge?

- ✓ Cálculo do limite do termo b_n.

$$\lim_{n \to \infty} b_n$$

Exemplo 2 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$ converge?

✓ Cálculo do limite do termo b_n.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4n-1}$$

Exemplo 2 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$ converge?

- ✓ Cálculo do limite do termo b_n.

$$\lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} \frac{3n}{4n - 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{3}{4 - \dfrac{1}{n}} = \frac{3}{4}$$

Exemplo 2 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$ converge?

- ✓ Cálculo do limite do termo b_n.

$$\lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} \frac{3n}{4n - 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{3}{4 - \frac{1}{n}} = \frac{3}{4}$$

- ✓ Como o limite é diferente de zero, a condição de convergência (ii) das séries alternadas não é satisfeita.

Exemplo 2 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$ converge?

✓ Cálculo do limite do termo b_n.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4-\frac{1}{n}} = \frac{3}{4}$$

✓ Como o limite é diferente de zero, a condição de convergência (ii) das séries alternadas não é satisfeita.

✓ Portanto esta série diverge!

Exercícios

Exercícios: As séries convergem? Justifique a resposta.

Respostas Justificativa

1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$$

2) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} sen(1/n)$$

3) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^3+2}$$

4) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{sen(1/n)}{1/n}$$

Exercícios: As séries convergem? Justifique a resposta.

	Respostas	Justificativa
1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$	$Converge$	$\begin{cases} b_{n+1} \leq b_n \\ \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \end{cases}$
2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} sen(1/n)$	$Converge$	$\begin{cases} b_{n+1} \leq b_n \\ \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \end{cases}$
3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^3+2}$	$Converge$	$\begin{cases} b_{n+1} \leq b_n \\ \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \end{cases}$
4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{sen(1/n)}{1/n}$	$Diverge$	$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} b_n = 1 \neq 0 \end{cases}$

Convergência absoluta

Convergência absoluta

1 - Uma série $\sum b_n$ é dita absolutamente convergente se a série a valores absolutos $\sum |b_n|$ também é convergente.

Convergência absoluta

1 - Uma série $\sum b_n$ é dita **absolutamente convergente** se a série a valores absolutos $\sum |b_n|$ também é convergente.

Exemplo 3 A série é absolutamente convergente?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

Convergência absoluta

1 - Uma série $\sum b_n$ é dita absolutamente convergente se a série a valores absolutos $\sum |b_n|$ também é convergente.

Exemplo 3 A série é absolutamente convergente?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

Convergência absoluta

1 - Uma série $\sum b_n$ é dita absolutamente convergente se a série a valores absolutos $\sum |b_n|$ também é convergente.

Exemplo 3 A série é absolutamente convergente?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

Convergência absoluta

1 - Uma série $\sum b_n$ é dita absolutamente convergente se a série a valores absolutos $\sum |b_n|$ também é convergente.

Exemplo 3 A série é absolutamente convergente?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

✓ A série de valores absolutos é uma série p convergente ($p > 1$).

Convergência absoluta

1 - Uma série $\sum b_n$ é dita absolutamente convergente se a série a valores absolutos $\sum |b_n|$ também é convergente.

Exemplo 3 A série é absolutamente convergente?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

- ✓ A série de valores absolutos é uma série p convergente ($p > 1$).
- ✓ Portanto, essa série é absolutamente convergente.

Convergência absoluta

2 - Uma série $\sum a_n$ é chamada condicionalmente convergente se ela for convergente, mas não absolutamente convergente.

Convergência absoluta

2 - Uma série $\sum a_n$ é chamada condicionalmente convergente se ela for convergente, mas não absolutamente convergente.

Exemplo 4 Série harmônica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Convergência absoluta

2 - Uma série $\sum a_n$ é chamada condicionalmente convergente se ela for convergente, mas não absolutamente convergente.

Exemplo 4 Série harmônica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$ *Convergente*

Convergência absoluta

2 - Uma série $\sum a_n$ é chamada condicionalmente convergente se ela for convergente, mas não absolutamente convergente.

Exemplo 4 Série harmônica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$ *Convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Convergência absoluta

2 - Uma série $\sum a_n$ é chamada condicionalmente convergente se ela for convergente, mas não absolutamente convergente.

Exemplo 4 Série harmônica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

Série harmônica divergente

Convergência absoluta

2 - Uma série $\sum a_n$ é chamada condicionalmente convergente se ela for convergente, mas não absolutamente convergente.

Exemplo 4 Série harmônica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

Série harmônica divergente

✓ Então, a série dada é condicionalmente convergente.

Teorema 3

Se uma série $\sum a_n$ for absolutamente convergente, então ela é convergente.

Teste da razão

Teste da razão

- O teste da razão é muito útil para determinar se uma série é absolutamente convergente.
- Este teste nem sempre é conclusivo.

Teste da razão

- O teste da razão é muito útil para determinar se uma série é absolutamente convergente.
- Este teste nem sempre é conclusivo.
- Ele é conclusivo quando o n-ésimo termo da série contém um exponencial ou fatorial.

Teste da razão

- O teste da razão é muito útil para determinar se uma série é absolutamente convergente.
- Este teste nem sempre é conclusivo.
- Ele é conclusivo quando o n-ésimo termo da série contém um exponencial ou fatorial.
- Por ser um teste mais simples, frequentemente é usado como primeira alternativa.
- Caso não seja conclusivo, aplicam-se outros testes.

Teste da razão

$$\text{(i)} \quad \text{Se } \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

Teste da razão

(i) Se $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

Teste da razão

(i) Se $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

(ii) Se $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ ou $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Teste da razão

(i) Se $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

(ii) Se $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ ou $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(iii) Se $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, o Teste da Razão é inconclusivo.

Exemplo 5 Testar a convergência da série: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{3^n}$

Exemplo 5 Testar a convergência da série: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{3^n}$

- ✓ Usamos o Teste da Razão com $a_n = (-1)^n n^3/3^n$:

Exemplo 5 Testar a convergência da série: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{3^n}$

- ✓ Usamos o Teste da Razão com $a_n = (-1)^n n^3/3^n$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\dfrac{(-1)^n n^3}{3^n}}\right|$$

Exemplo 5 Testar a convergência da série: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{3^n}$

✓ Usamos o Teste da Razão com $a_n = (-1)^n n^3/3^n$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\dfrac{(-1)^n n^3}{3^n}}\right| = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3}$$

Exemplo 5 Testar a convergência da série: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^3}{3^n}$

✓ Usamos o Teste da Razão com $a_n = (-1)^n n^3/3^n$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\dfrac{(-1)^n n^3}{3^n}}\right| = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3}$$

quando $n \to \infty$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \to \frac{1}{3} < 1$$

Exemplo 5 Testar a convergência da série: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{3^n}$

- ✓ Usamos o Teste da Razão com $a_n = (-1)^n n^3/3^n$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\dfrac{(-1)^n n^3}{3^n}}\right| = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3}$$

quando $n \to \infty$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \to \frac{1}{3} < 1$$

- ✓ Pelo teste da razão, a série é absolutamente convergente.

Exemplo 6 Testar a convergência da série: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

Exemplo 6 Testar a convergência da série: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

✓ $\frac{a_{n+1}}{a_n} =$

Exemplo 6 Testar a convergência da série: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

✓ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}$

Exemplo 6 Testar a convergência da série: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

✓ $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

Exemplo 6 Testar a convergência da série: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

✓ $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{quando } n \to \infty$$

Exemplo 6 Testar a convergência da série: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

✓ $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{quando } n \to \infty$$

$$= e > 1$$

Exemplo 6 Testar a convergência da série: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

✓ $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{quando } n \to \infty$$

$$= e > 1$$

✓ Portanto, a série é divergente.

Teste da raiz

Teste da raiz

$$\text{(i)}\quad \text{Se } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

Teste da raiz

(i) Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

Teste da raiz

(i) Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

(ii) Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ ou $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Teste da raiz

(i) Se $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

(ii) Se $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ ou $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(iii) Se $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, o Teste da Raiz não é conclusivo.

Exemplo 7 Testar a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^{n}$.

Exemplo 7 Testar a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^{n}$.

✓ $$a_n = \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^{n}$$

Exemplo 7 Testar a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$.

✓ $$a_n = \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2n+3}{3n+2}$$

Exemplo 7 Testar a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$.

✓ $$a_n = \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2+\frac{3}{n}}{3+\frac{2}{n}}$$

Exemplo 7 Testar a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$.

✓ $$a_n = \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2+\frac{3}{n}}{3+\frac{2}{n}}$$

$$= \frac{2}{3} < 1 \quad \underset{n \to \infty}{\text{quando}}$$

Exemplo 7 Testar a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^{n}$.

✓ $$a_n = \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2+\dfrac{3}{n}}{3+\dfrac{2}{n}}$$

$$= \frac{2}{3} < 1 \quad \underset{n \to \infty}{\text{quando}}$$

✓ Pelo teste da raiz, a série é absolutamente convergente e, portanto, convergente.

Exercícios

Exercícios: Classifique as séries em absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.

Respostas Teste / Justificativa

1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^3 + 2}$$

2) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{sen(1/n)}{1/n}$$

3) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}$$

Exercícios: Classifique as séries em absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.

	Respostas	Teste / Justificativa
1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^3+2}$	*Absolutamente Convergente*	$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Comparação} \\ \textit{no limite} \\ \lim_{n\to\infty} a_n / b_n = 1 > 0 \end{array} \right.$
2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{sen(1/n)}{1/n}$	*Divergente*	$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Limite do} \\ \textit{termo geral} \\ \lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0 \end{array} \right.$
3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}$	*Condicionalmente Convergente*	$\left\{ \begin{array}{c} \lvert a_n \rvert = 1/n^{1/3} \\ \textit{série p diverge} \\ S.\textit{alternada} \\ \textit{converge} \end{array} \right.$

Estratégia para testes de séries

Estratégia para testes de séries

- Não há regras certeiras e rápidas para determinar qual teste funciona.
- A estratégia de testes de séries é similar ao processo de integração, por tentativas.

Estratégia para testes de séries

- Não há regras certeiras e rápidas para determinar qual teste funciona.
- A estratégia de testes de séries é similar ao processo de integração, por tentativas.
- Algumas orientações podem auxiliar na escolha do teste adequado.

Estratégia para testes de séries

- Não há regras certeiras e rápidas para determinar qual teste funciona.
- A estratégia de testes de séries é similar ao processo de integração, por tentativas.
- Algumas orientações podem auxiliar na escolha do teste adequado.
- A primeira ação é tentar classificar a série segundo a forma do termo geral.

Estratégia para testes de séries

- Não há regras certeiras e rápidas para determinar qual teste funciona.
- A estratégia de testes de séries é similar ao processo de integração, por tentativas.
- Algumas orientações podem auxiliar na escolha do teste adequado.
- A primeira ação é tentar classificar a série segundo a forma do termo geral.
- A lista de opções seguintes pode auxiliar na escolha do teste de convergência mais adequado.

Estratégia para testes de séries

1. Série da forma $\sum 1/n^p$ é uma série p que só converge para $p > 1$.

Estratégia para testes de séries

1. Série da forma $\sum 1/n^p$ é uma série p que só converge para $p > 1$.
2. Série da forma $\sum ar^n$ é geométrica e só converge se $|\mathrm{r}| < 1$.

Estratégia para testes de séries

1. Série da forma $\sum 1/n^p$ é uma série p que só converge para $p > 1$.
2. Série da forma $\sum ar^n$ é geométrica e só converge se $|\mathrm{r}| < 1$.
3. Séries similares com a série p e a série geométrica podem ser comparadas com essas.

Estratégia para testes de séries

1. Série da forma $\sum 1/n^p$ é uma série p que só converge para $p > 1$.
2. Série da forma $\sum ar^n$ é geométrica e só converge se $|\mathrm{r}| < 1$.
3. Séries similares com a série p e a série geométrica podem ser comparadas com essas.
4. Se o $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ usar o teste da divergência.

Estratégia para testes de séries

1. Série da forma $\sum 1/n^p$ é uma série p que só converge para $p > 1$.
2. Série da forma $\sum ar^n$ é geométrica e só converge se $|\mathrm{r}| < 1$.
3. Séries similares com a série p e a série geométrica podem ser comparadas com essas.
4. Se o $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ usar o teste da divergência.
5. Na série da forma $\sum(-1)^n a_n$, usar o teste da alternada.

Estratégia para testes de séries

1. Série da forma $\sum 1/n^p$ é uma série p que só converge para $p > 1$.
2. Série da forma $\sum ar^n$ é geométrica e só converge se $|\mathrm{r}| < 1$.
3. Séries similares com a série p e a série geométrica podem ser comparadas com essas.
4. Se o $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ usar o teste da divergência.
5. Na série da forma $\sum(-1)^n a_n$, usar o teste da alternada.
6. Em séries com fatorial ou n-ésima potência utilizar o teste da razão.

Estratégia para testes de séries

1. Série da forma $\sum 1/n^p$ é uma série p que só converge para $p > 1$.
2. Série da forma $\sum ar^n$ é geométrica e só converge se $|\mathrm{r}| < 1$.
3. Séries similares com a série p e a série geométrica podem ser comparadas com essas.
4. Se o $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ usar o teste da divergência.
5. Na série da forma $\sum(-1)^n a_n$, usar o teste da alternada.
6. Em séries com fatorial ou n-ésima potência utilizar o teste da razão.
7. Para séries da forma $\sum(b_n)^n$ usar o teste da raiz.

Estratégia para testes de séries

1. Série da forma $\sum 1/n^p$ é uma série p que só converge para $p > 1$.
2. Série da forma $\sum ar^n$ é geométrica e só converge se $|\mathrm{r}| < 1$.
3. Séries similares com a série p e a série geométrica podem ser comparadas com essas.
4. Se o $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ usar o teste da divergência.
5. Na série da forma $\sum(-1)^n a_n$, usar o teste da alternada.
6. Em séries com fatorial ou n-ésima potência utilizar o teste da razão.
7. Para séries da forma $\sum(b_n)^n$ usar o teste da raiz.
8. Se $a_n = f(n)$ e a integral de $f(x)$ for facilmente calculada usar o teste da integral, caso seja possível.

Para depois desta aula:

- Estudar seções 11.5, 11.6 e 11.7 do livro texto.
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar: exercícios Seção 11.5, 11.6 e 11.7.

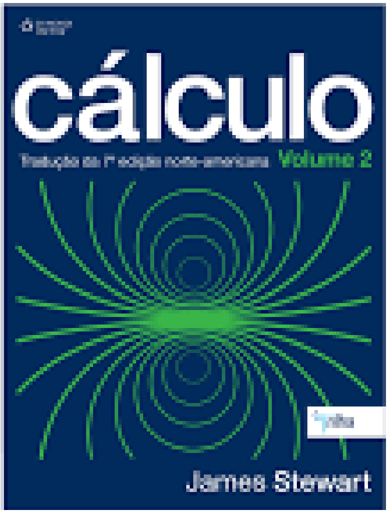
Próxima aula:

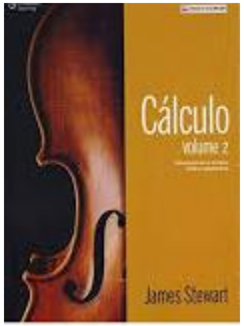
- Séries de potência.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed.





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.