Cálculo II

Bacharelado e Engenharias

Semana 02 - Aula 3
Limites e continuidade

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria
henrique.faria@unesp.br

Limites

$\boxed{1}$ **Definição** Seja f uma função de duas variáveis cujo domínio D contém pontos arbitrariamente próximos de (a, b). Dizemos que o **limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a (a, b)** é L e escrevemos

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número correspondente de $\delta > 0$ tal que

se $(x, y) \in D \quad$ e $\quad 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \quad$ então $\quad |f(x, y) - L| < \varepsilon$

Limites

$\boxed{1}$ **Definição** Seja f uma função de duas variáveis cujo domínio D contém pontos arbitrariamente próximos de (a, b). Dizemos que o **limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a (a, b)** é L e escrevemos

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número correspondente de $\delta > 0$ tal que

$$\text{se}(x, y) \in D \quad \text{e} \quad 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \quad \text{então} \quad |f(x, y) - L| < \varepsilon$$

- $|f(x, y) - L|$ corresponde à distância entre os números $f(x, y)$ e L.

Limites

1 **Definição** Seja f uma função de duas variáveis cujo domínio D contém pontos arbitrariamente próximos de (a, b). Dizemos que o **limite de** $f(x, y)$ **quando** (x, y) **tende a** (a, b) é L e escrevemos

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número correspondente de $\delta > 0$ tal que

se $(x, y) \in D$ e $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ então $|f(x, y) - L| < \varepsilon$

- $|f(x,y) - L|$ corresponde à distância entre os números $f(x,y)$ e L.
- $\sqrt{(x-a)^2 + (x-b)^2}$ é a distância entre o ponto (x, y) e o ponto (a, b).

Limites

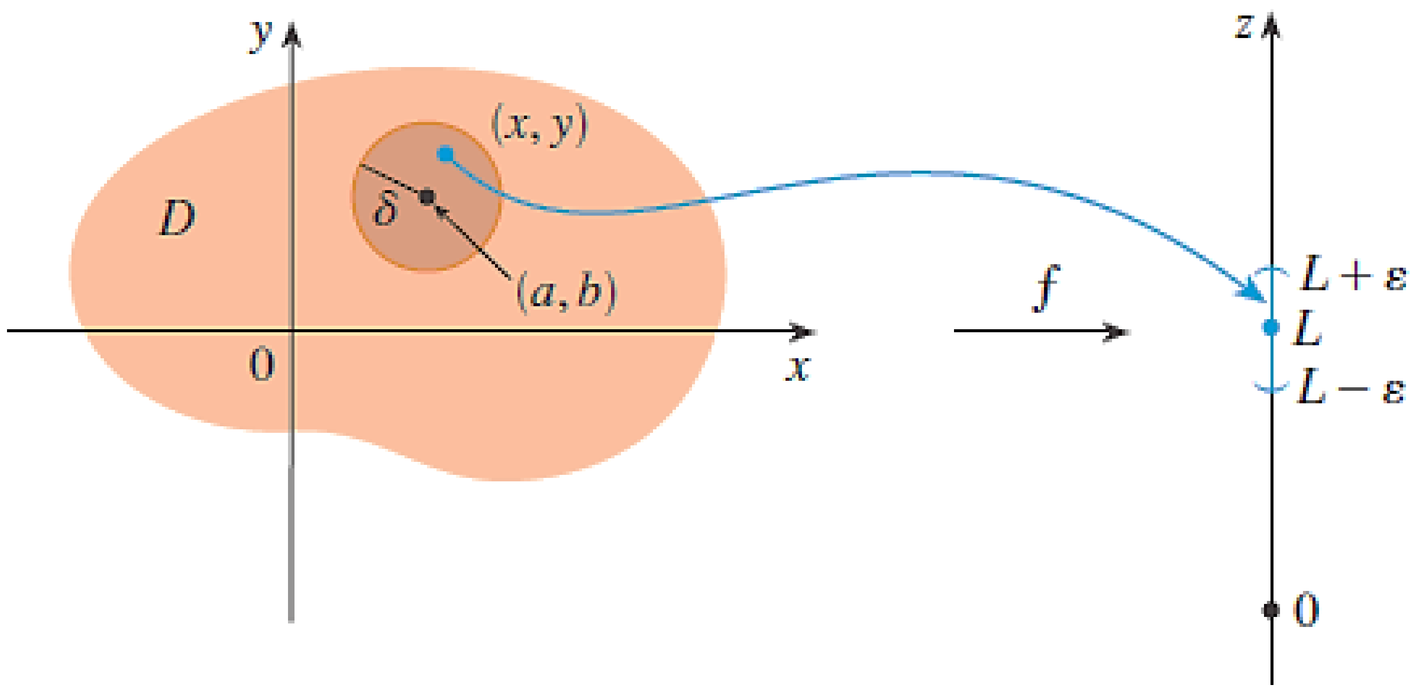


FIGURA 1

Limites

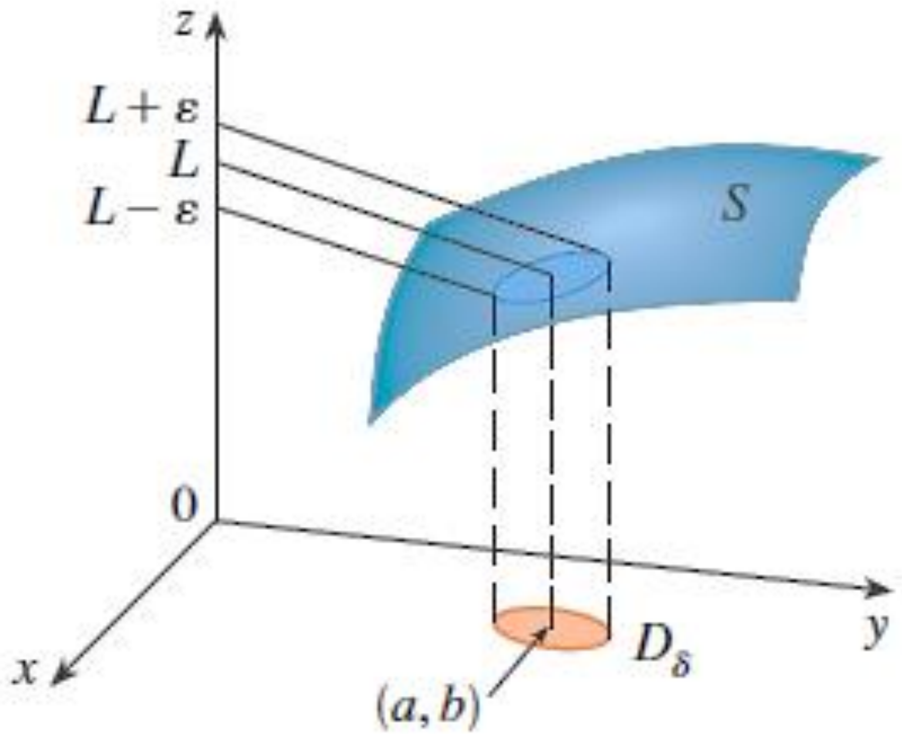


FIGURA 2

Limites

- Para as funções de duas variáveis existem infinitas maneiras de (x, y) se aproximar de (a, b).
- Existe uma quantidade infinita de direções e de qualquer maneira que se queira.

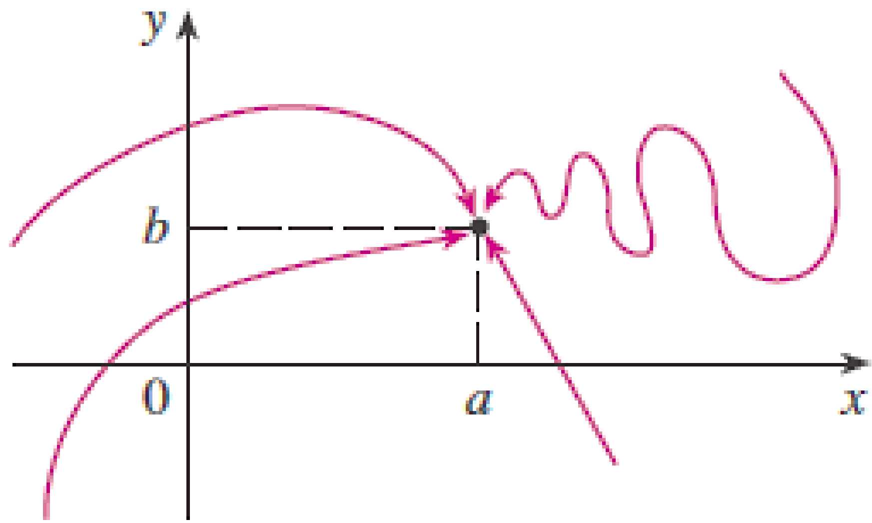


FIGURA 3

Limites

- Para as funções de duas variáveis existem infinitas maneiras de (x, y) se aproximar de (a, b).
- Existe uma quantidade infinita de direções e de qualquer maneira que se queira.
- Basta que (x, y) se mantenha no domínio de *f*.

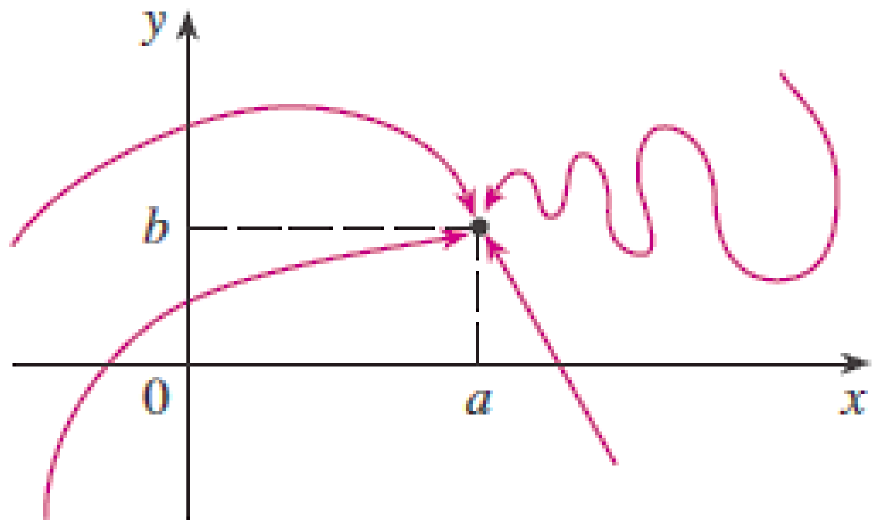


FIGURA 3

Limites - definição

- Se $f\,(x, y) \rightarrow L1$ quando $(x, y) \rightarrow (a, b)$ ao longo do caminho C1 e

Limites - definição

- Se $f(x, y) \to L1$ quando $(x, y) \to (a, b)$ ao longo do caminho C1 e
- $f(x, y) \to L2$ quando $(x, y) \to (a, b)$ ao longo do caminho C2.

Limites - definição

- Se $f\,(x, y) \to L1$ quando $(x, y) \to (a, b)$ ao longo do caminho C1 e
- $f\,(x, y) \to L2$ quando $(x, y) \to (a, b)$ ao longo do caminho C2.
- como $L1 \neq L2$, então:

lim $f\,(x, y)$ com $(x, y) \to (a, b)$ não existe.

Funções de várias variáveis

Exemplo 1 Mostre que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ não existe.

Funções de várias variáveis

Exemplo 1 Mostre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ não existe.

ao longo do eixo x. Então $y = 0$ dá $f(x, 0) = x^2/x^2 = 1$ para todo $x \neq 0$,

portanto

$$f(x, y) \to 1 \quad \text{quando} \quad (x, y) \to (0, 0) \text{ ao longo do eixo } x$$

Funções de várias variáveis

Exemplo 1 Mostre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ não existe.

ao longo do eixo x. Então $y = 0$ dá $f(x, 0) = x^2/x^2 = 1$ para todo $x \neq 0$, portanto

$$f(x, y) \to 1 \quad \text{quando} \quad (x, y) \to (0, 0) \text{ ao longo do eixo } x$$

ao longo do eixo y, colocando $x = 0$. Então $f(0, y) = \frac{-y^2}{y^2} = -1$ para todo $y \neq 0$, portanto

$$f(x, y) \to -1 \text{ quando } (x, y) \to (0, 0) \text{ ao longo do eixo } y$$

Funções de várias variáveis

Exemplo 1 Mostre que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ não existe.

ao longo do eixo x. Então $y = 0$ dá $f(x, 0) = x^2/x^2 = 1$ para todo $x \neq 0$,

portanto

$$f(x, y) \to 1 \quad \text{quando} \quad (x, y) \to (0, 0) \text{ ao longo do eixo } x$$

ao longo do eixo y, colocando $x = 0$. Então $f(0, y) = \dfrac{-y^2}{y^2} = -1$

para todo $y \neq 0$, portanto

$$f(x, y) \to -1 \text{ quando } (x, y) \to (0, 0) \text{ ao longo do eixo } y$$

Como f tem dois limites diferentes ao longo de duas retas diferentes, o limite não existe.

Funções de várias variáveis

Exemplo 2 Se $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$, será que $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$ existe?

Funções de várias variáveis

Exemplo 2 Se $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$, será que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ existe?

Se $y = 0$, então $f(x, 0) = 0/x^2 = 0$. Portanto,

$f(x, y) \to 0 \qquad (x, y) \to (0, 0)$ ao longo do eixo x

Funções de várias variáveis

Exemplo 2 Se $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$, será que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ existe?

Se $y = 0$, então $f(x, 0) = 0/x^2 = 0$. Portanto,

$$f(x, y) \to 0 \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ ao longo do eixo } x$$

Se $x = 0$, então $f(0, y) = 0/y^2 = 0$, portanto

$$f(x, y) \to 0 \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ ao longo do eixo } y$$

Funções de várias variáveis

Exemplo 2 Se $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$, será que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ existe?

Se $y = 0$, então $f(x, 0) = 0/x^2 = 0$. Portanto,

$$f(x, y) \to 0 \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ ao longo do eixo } x$$

Se $x = 0$, então $f(0, y) = 0/y^2 = 0$, portanto

$$f(x, y) \to 0 \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ ao longo do eixo } y$$

Vamos agora nos aproximar de (0, 0) ao longo de outra reta; por exemplo, $y = x$. Para todo $x \neq 0$,

$$f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

Portanto $f(x, y) \to \frac{1}{2}$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ ao longo de $y = x$

Funções de várias variáveis

Exemplo 2 Se $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$, será que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ existe?

Se $y = 0$, então $f(x, 0) = 0/x^2 = 0$. Portanto,

$$f(x, y) \to 0 \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ ao longo do eixo } x$$

Se $x = 0$, então $f(0, y) = 0/y^2 = 0$, portanto

$$f(x, y) \to 0 \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ ao longo do eixo } y$$

Vamos agora nos aproximar de (0, 0) ao longo de outra reta; por exemplo, $y = x$. Para todo $x \neq 0$,

$$f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

Portanto $f(x, y) \to \frac{1}{2}$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ ao longo de $y = x$

Como obtivemos valores diferentes o limite dado não existe.

Limites - Proposição

- Se $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0$ e $g(x,y)$ é uma função limitada em uma bola aberta de centro (a,b) então:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)g(x,y) = 0$$

Funções de várias variáveis

Exemplo Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

Funções de várias variáveis

Exemplo 4 Calcule $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (y)\frac{x^2}{x^2+y^2}$

Funções de várias variáveis

Exemplo 4 Calcule $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (y)\frac{x^2}{x^2+y^2}$

Observa-se que: $\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1 \; e \; sempre \; > 0$

Portanto, é uma função limitada.

Funções de várias variáveis

Exemplo 4 Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (y)\frac{x^2}{x^2+y^2}$

Observa-se que: $\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1\ e\ sempre\ > 0$

Portanto, é uma função limitada. Então, podemos escrever:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y\frac{x^2}{x^2+y^2}$$

Funções de várias variáveis

Exemplo 4 Calcule $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (y)\frac{x^2}{x^2+y^2}$

Observa-se que: $\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1 \; e \; sempre \; > 0$

Portanto, é uma função limitada. Então, podemos escrever:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y\frac{x^2}{x^2+y^2}$$

Como: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$ então: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$

Continuidade

Continuidade

4 **Definição** Uma função f de duas variáveis é dita **contínua em** (a, b) se

$$\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Dizemos que f é **contínua em** D se f for contínua em todo ponto (a, b) de D.

Continuidade

4 **Definição** Uma função f de duas variáveis é dita **contínua em** (a, b) se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Dizemos que f é **contínua em** D se f for contínua em todo ponto (a, b) de D.

- Os polinômios são funções contínuas em $\mathbb{R}^2$.
- Funções racionais também são contínuas para todos os pontos que não anulem o denominador.

Continuidade

Exemplo 5 Calcule $\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y)$.

Continuidade

Exemplo 5 Calcule $\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y)$.

Como $f(x, y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$ é um polinômio, ela é contínua em qualquer lugar, portanto podemos calcular seu limite pela substituição direta:

Continuidade

Exemplo 5 Calcule $\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y)$.

Como $f(x, y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$ é um polinômio, ela é contínua em qualquer lugar, portanto podemos calcular seu limite pela substituição direta:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y) =$$

$$= 1^2 \cdot 2^3 - 1^3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2$$

$$= 11$$

Continuidade

Exemplo 6 Onde a função $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ é contínua?

Continuidade

Exemplo 6 Onde a função $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ é contínua?

A função f é descontínua em $(0, 0)$, pois ela não está definida nesse ponto. Como f é uma função racional, ela é contínua em seu domínio,

$$D = \{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}.$$

Continuidade

Exemplo 8

Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Continuidade

Exemplo 8

Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

f é contínua para $(x, y) \neq (0, 0)$. Do Exemplo 4, temos que

Continuidade

Exemplo 8

Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

f é contínua para $(x, y) \neq (0, 0)$. Do Exemplo 4, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$$

Continuidade

Exemplo 8

Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

f é contínua para $(x, y) \neq (0, 0)$, Do Exemplo 4, temos que

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} =$$

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$$

Portanto f é contínua em $(0, 0)$ e,

consequentemente, contínua em $\mathbb{R}^2$.

Continuidade

Exemplo 8

Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

f é contínua para $(x, y) \neq (0, 0)$. Do Exemplo 4, temos que

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} =$$

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$$

Portanto f é contínua em $(0, 0)$ e,

consequentemente, contínua em $\mathbb{R}^2$.

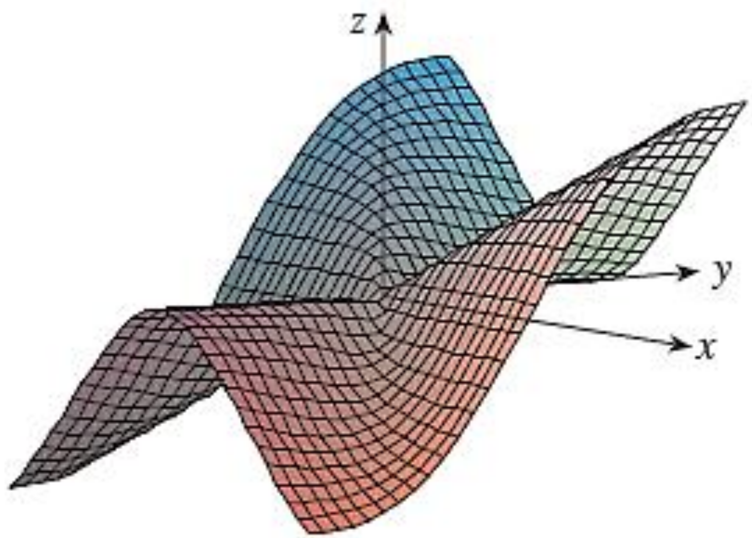


FIGURA 8

Funções de três ou mais variáveis

Continuidade

- Ao usarmos a notação vetorial podemos escrever as definições de limite para funções de duas ou mais variáveis de forma compacta.

Continuidade

- Ao usarmos a notação vetorial podemos escrever as definições de limite para funções de duas ou mais variáveis de forma compacta.

$\boxed{5}$ Se f é definida em um subconjunto D de $\mathbb{R}^n$, então $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ significa que para todo número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } \mathbf{x} \in D \text{ e } 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta, \text{ então } |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$$

Continuidade

- Ao usarmos a notação vetorial podemos escrever as definições de limite para funções de duas ou mais variáveis de forma compacta.

$\boxed{5}$ Se f é definida em um subconjunto D de $\mathbb{R}^n$, então $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ significa que para todo número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } \mathbf{x} \in D \text{ e } 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta, \text{ então } |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$$

- Se **x** = x e **a** = a temos o limite de uma variável.
- Se n = 2, temos **x** = <x, y> e **a** = <a, b>.
- Se n = 3, temos **x** = <x, y, z> e **a** = <a, b, c>.

Para depois desta aula:

- Estudar o capítulo 14 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

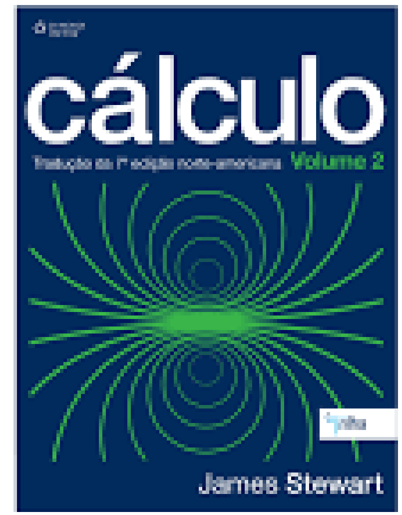
Próxima aula:

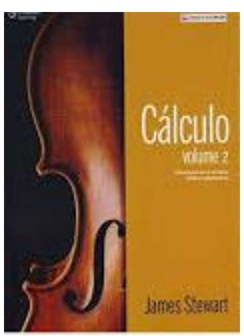
- Derivadas parciais.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed. ▶





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.

Contatos

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br