Cálculo II

Bacharelado e Engenharias

Semana 04 - Aula 1
Plano tangente

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria
henrique.faria@unesp.br

Plano tangente

- Nas funções com uma única variável diferenciável, à medida que damos zoom em torno de um ponto no gráfico esse gráfico vai se tornando indistinguível de sua reta tangente.

Plano tangente

- Nas funções com uma única variável diferenciável, à medida que damos zoom em torno de um ponto no gráfico esse gráfico vai se tornando indistinguível de sua reta tangente.
- Neste caso, podemos aproximar a função por uma função linear.
- Desenvolveremos ideias semelhantes em três dimensões.

Plano tangente

- Na função diferenciável de duas variáveis a medida que damos zoom em torno de um ponto na superfície essa superfície se aproxima de um plano.
- Esse plano próximo a um ponto é chamado de plano tangente.

Plano tangente

- Na função diferenciável de duas variáveis a medida que damos zoom em torno de um ponto na superfície essa superfície se aproxima de um plano.
- Esse plano próximo a um ponto é chamado de plano tangente.
- Então, podemos aproximar a função, nas proximidades do ponto, por uma função linear de duas variáveis.

Plano tangente

- Supondo uma superfície S de equação $z = f(x, y)$.

Plano tangente

- Supondo uma superfície S de equação $z = f\,(x, y)$.
- Onde f tem derivadas parciais contínuas de primeira ordem.

Plano tangente

- Supondo uma superfície S de equação $z = f(x, y)$.
- Onde f tem derivadas parciais contínuas de primeira ordem.
- Seja $P(x_0, y_0, z_0)$ um ponto em S.

Plano tangente

- Supondo uma superfície *S* de equação $z = f(x, y)$.
- Onde *f* tem derivadas parciais contínuas de primeira ordem.
- Seja $P(x_0, y_0, z_0)$ um ponto em *S*.
- O plano tangente à superfície *S* no ponto *P* é definido como o plano que contém as retas da tangente T_1 e T_2 conforme a Figura 1.

Plano tangente

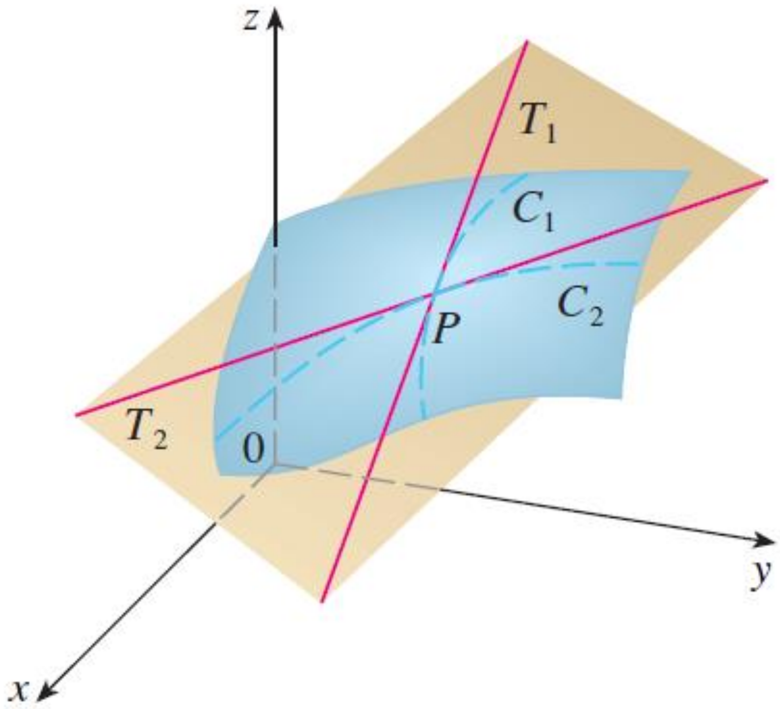


FIGURA 1
O plano tangente contém as retas tangentes T_1 e T_2.

- A curva C_1 e C_2 são curvas obtidas da intersecção dos planos verticais $y = y_o$ e $x = x_o$

Plano tangente

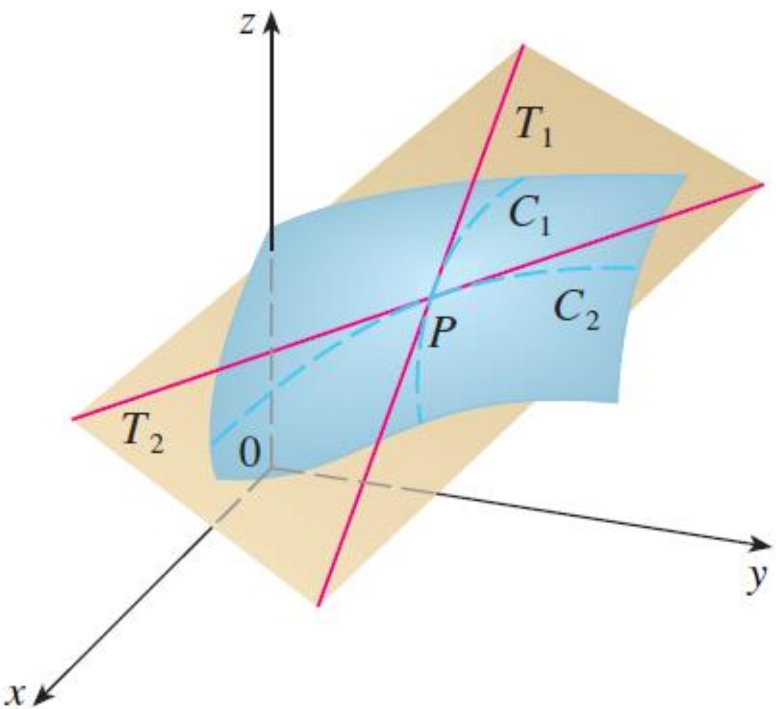


FIGURA 1

O plano tangente contém as retas tangentes T_1 e T_2.

- A curva C_1 e C_2 são curvas obtidas da intersecção dos planos verticais $y = y_o$ e $x = x_o$
- T_1 e T_2 são as retas tangentes às curvas C_1 e C_2 no ponto P.

Plano tangente

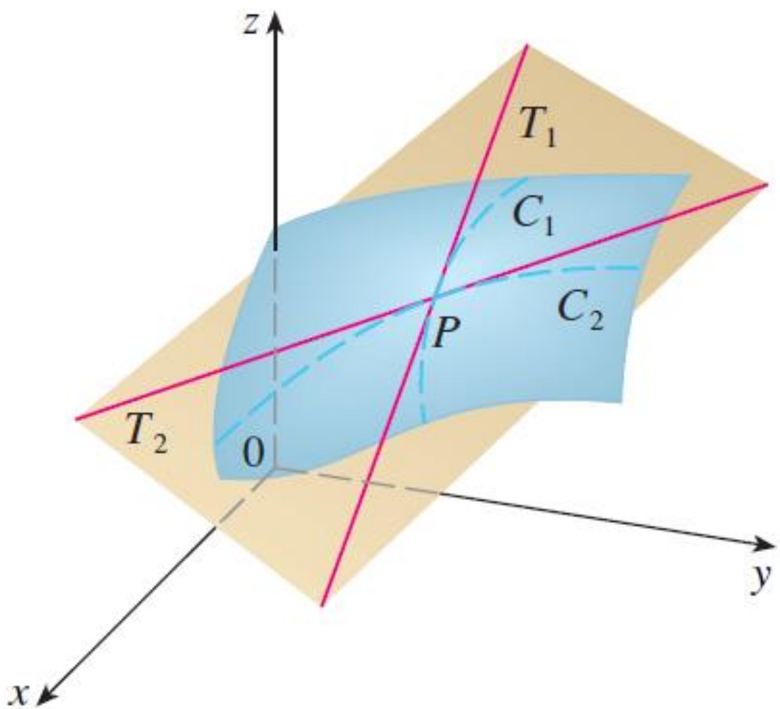


FIGURA 1

O plano tangente contém as retas tangentes T_1 e T_2.

- A curva C_1 e C_2 são curvas obtidas da intersecção dos planos verticais $y = y_o$ e $x = x_o$
- T_1 e T_2 são as retas tangentes às curvas C_1 e C_2 no ponto *P.*
- O plano tangente em *P* é a melhor aproximação para a superfície *S* em *P*.

Plano tangente

Definição 2

Suponha que f tenha derivadas parciais contínuas.

Uma equação do plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ é dada por

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Plano tangente

Exemplo 1 Determine o plano tangente ao paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ no ponto $(1, 1, 3)$.

Plano tangente

Exemplo 1 Determine o plano tangente ao paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ no ponto $(1, 1, 3)$.

Solução:

Seja $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Então

$$f_x(x, y) = 4x \qquad f_y(x, y) = 2y$$
$$f_x(1, 1) = 4 \qquad f_y(1, 1) = 2$$

Plano tangente

Exemplo 1 Determine o plano tangente ao paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ no ponto $(1, 1, 3)$.

Solução:

Seja $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Então

$$f_x(x, y) = 4x \qquad f_y(x, y) = 2y$$
$$f_x(1, 1) = 4 \qquad f_y(1, 1) = 2$$

Portanto, por $\boxed{2}$ temos a equação do plano tangente em $(1, 1, 3)$ como

$$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1)$$

Plano tangente

Exemplo 1 Determine o plano tangente ao paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ no ponto $(1, 1, 3)$.

Solução:

Seja $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Então

$$f_x(x, y) = 4x \qquad f_y(x, y) = 2y$$
$$f_x(1, 1) = 4 \qquad f_y(1, 1) = 2$$

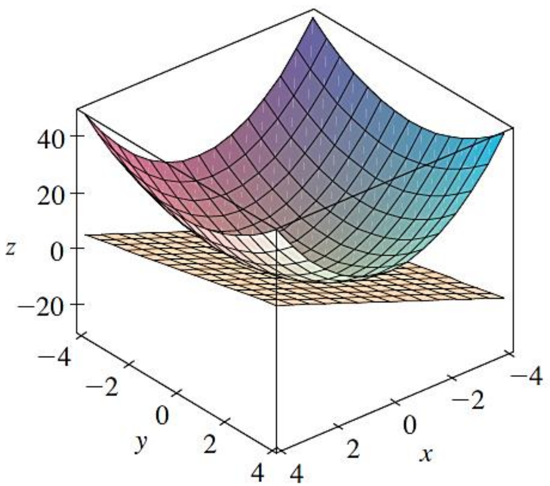
Portanto, por $\boxed{2}$ temos a equação do plano tangente em $(1, 1, 3)$ como

$$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1)$$

ou $\quad z = 4x + 2y - 3$

Plano tangente

Exemplo 1 - equação do plano: $z = 4x + 2y - 3$



(a)

FIGURA 2 O paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ parece coincidir com o plano tangente quando damos *zoom* em torno de.(1, 1, 3).

Plano tangente

Exemplo 1 - equação do plano: $z = 4x + 2y - 3$

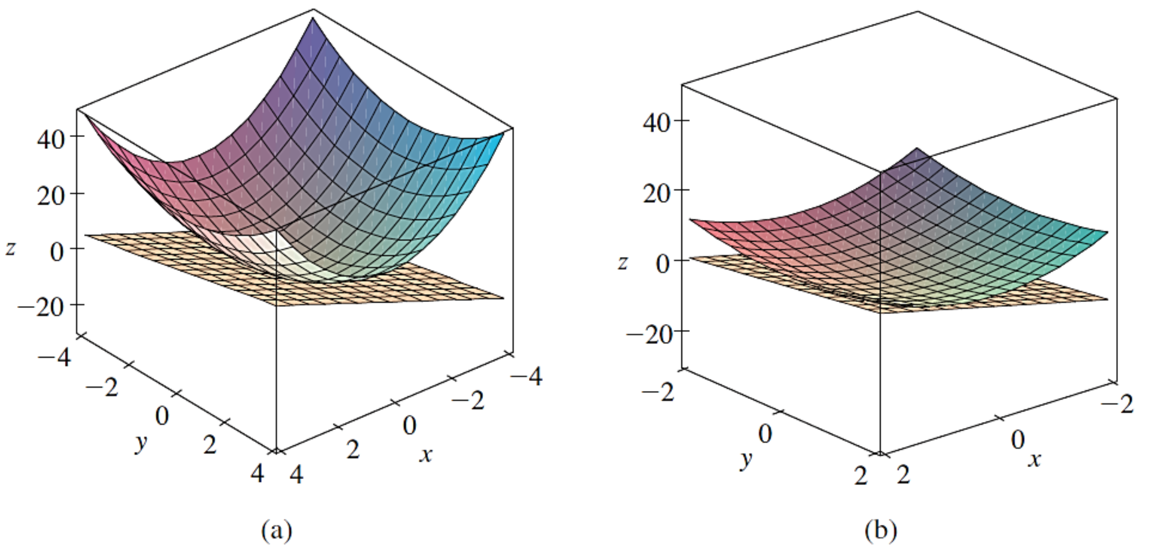


FIGURA 2 O paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ parece coincidir com o plano tangente quando damos *zoom* em torno de (1, 1, 3).

Plano tangente

Exemplo 1 - equação do plano: $z = 4x + 2y - 3$

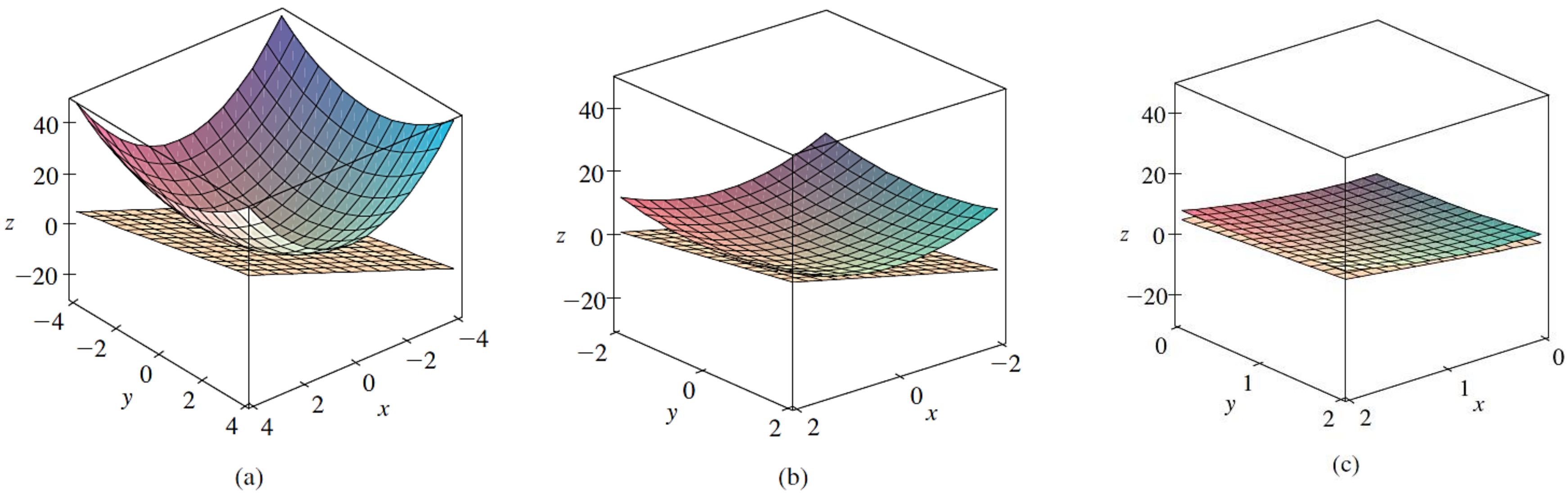


FIGURA 2 O paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ parece coincidir com o plano tangente quando damos *zoom* em torno de.(1, 1, 3).

Plano tangente

Exemplo 1 - equação do plano: $z = 4x + 2y - 3$

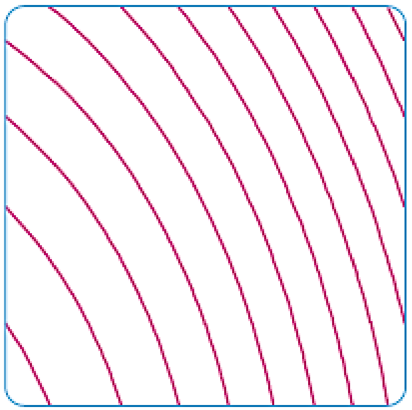


FIGURA 3 Dando *zoom* em torno do ponto (1, 1) no mapa de contorno de $f(x, y) = 2x^2 + y^2$

Plano tangente

Exemplo 1 - equação do plano: $z = 4x + 2y - 3$

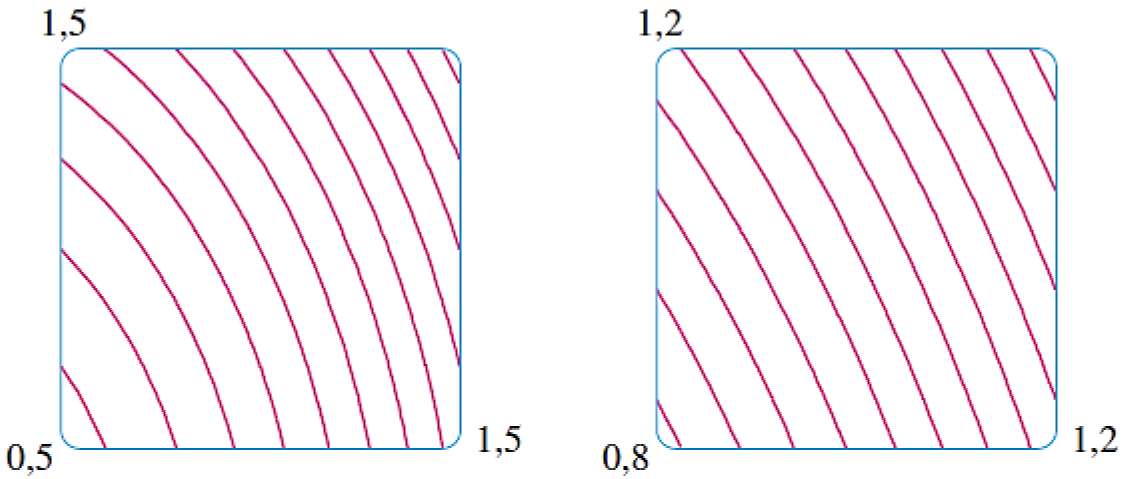


FIGURA 3 Dando *zoom* em torno do ponto (1, 1) no mapa de contorno de $f(x, y) = 2x^2 + y^2$

Plano tangente

Exemplo 1 - equação do plano: $z = 4x + 2y - 3$

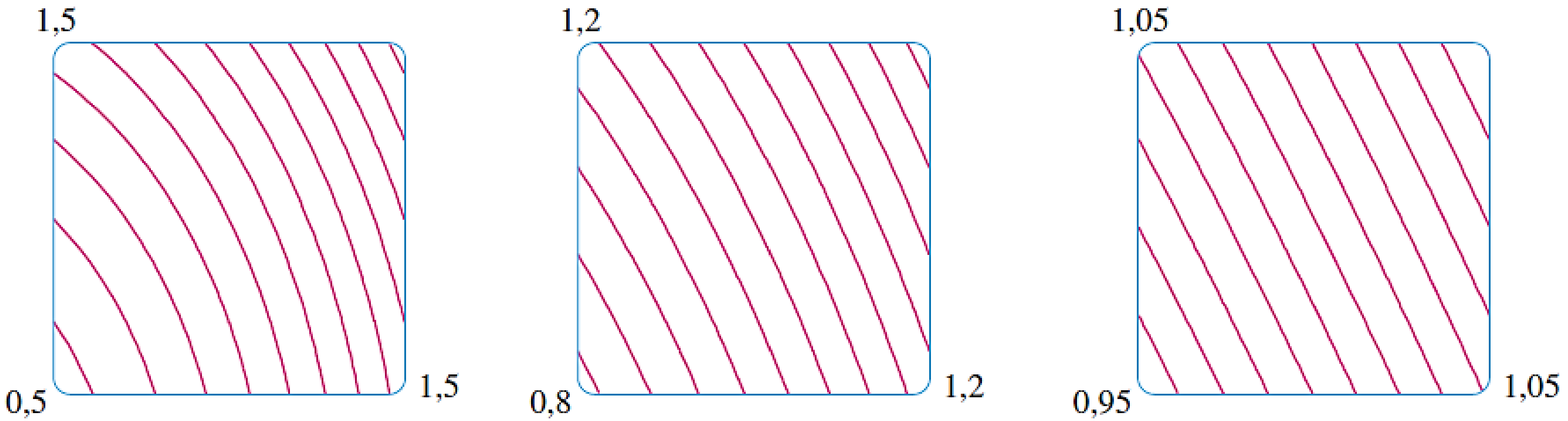


FIGURA 3 Dando *zoom* em torno do ponto (1, 1) no mapa de contorno de $f(x, y) = 2x^2 + y^2$

Aproximações lineares

Aproximações lineares

- No exemplo 1 estudamos a função $f(x, y) = 2x^2 + y^2$.
- Vimos que uma equação do plano tangente ao gráfico ponto (1, 1, 3) é $z = 4x + 2y - 3$.

Aproximações lineares

- No exemplo 1 estudamos a função $f(x, y) = 2x^2 + y^2$.
- Vimos que uma equação do plano tangente ao gráfico ponto (1, 1, 3) é $z = 4x + 2y - 3$.
- Assim, esta função linear de duas variáveis é uma boa aproximação de $f(x, y)$ quando (x, y) está próximo de (1, 1).

Aproximações lineares

- No exemplo 1 estudamos a função $f(x, y) = 2x^2 + y^2$.
- Vimos que uma equação do plano tangente ao gráfico ponto (1, 1, 3) é $z = 4x + 2y - 3$.
- Assim, esta função linear de duas variáveis é uma boa aproximação de $f(x, y)$ quando (x, y) está próximo de (1, 1).
- Chamamos esta função de $L(x, y)$ e denominamos de aproximação linear ou aproximação pelo plano tangente:

$$f(x, y) \approx L(x, y) = 4x + 2y - 3$$

Aproximações lineares

No exemplo 1:

Por exemplo, no ponto (1,1, 0,95), a aproximação linear fornece

$$f(1{,}1,\ 0{,}95) \approx 4(1{,}1) + 2(0{,}95) - 3 = 3{,}3$$

Aproximações lineares

No exemplo 1:

Por exemplo, no ponto (1,1, 0,95), a aproximação linear fornece

$$f(1{,}1,\ 0{,}95) \approx 4(1{,}1) + 2(0{,}95) - 3 = 3{,}3$$

Próximo do valor verdadeiro de

$$f(1{,}1,\ 0{,}95) = 2(1{,}1)^2 + (0{,}95)^2 = 3{,}3225.$$

Aproximações lineares

No exemplo 1:

Por exemplo, no ponto (1,1, 0,95), a aproximação linear fornece

$$f(1{,}1,\ 0{,}95) \approx 4(1{,}1) + 2(0{,}95) - 3 = 3{,}3$$

Próximo do valor verdadeiro de

$$f(1{,}1,\ 0{,}95) = 2(1{,}1)^2 + (0{,}95)^2 = 3{,}3225.$$

Se tomarmos um ponto longe de (1, 1), como (2, 3),

$L(2, 3) = 11$, ao passo que $f(2, 3) = 17$.

Aproximações lineares

Em geral, uma equação do plano tangente ao gráfico de f de duas variáveis que tem derivadas parciais contínuas em um ponto $(a, b, f(a, b))$ é

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Aproximações lineares

Em geral, uma equação do plano tangente ao gráfico de f de duas variáveis que tem derivadas parciais contínuas em um ponto $(a, b, f(a, b))$ é

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

A função linear cujo gráfico é esse plano tangente,

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Aproximações lineares

Em geral, uma equação do plano tangente ao gráfico de f de duas variáveis que tem derivadas parciais contínuas em um ponto $(a, b, f(a, b))$ é

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

A função linear cujo gráfico é esse plano tangente,

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

A **aproximação linear** de f em (a, b) é

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Aproximações lineares

- O que acontece se f_x e f_y não são contínuas?

Aproximações lineares

- O que acontece se f_x e f_y não são contínuas?
- Para evitar esse comportamento definimos a ideia de função diferenciável de duas variáveis.

Aproximações lineares

- O que acontece se f_x e f_y não são contínuas?
- Para evitar esse comportamento definimos a ideia de função diferenciável de duas variáveis.
- Para uma função de uma variável $y = f(x)$ se x varia de a para a + Δx o incremento de y será:

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

Aproximações lineares

- O que acontece se f_x e f_y não são contínuas?
- Para evitar esse comportamento definimos a ideia de função diferenciável de duas variáveis.
- Para uma função de uma variável $y = f(x)$ se x varia de a para a + Δx o incremento de y será:

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

- Se f é diferenciável em a, então:

$$\Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon \Delta x \quad \text{onde } \varepsilon \to 0 \text{ quando } \Delta x \to 0$$

Aproximações lineares

- Para uma função de duas variáveis $z = f(x, y)$ o incremento correspondente a z é:

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

Aproximações lineares

- Para uma função de duas variáveis $z = f(x, y)$ o incremento correspondente a z é:

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

- O incremento Δz representa a variação de valor de f quando (x, y) varia de (a, b) para $(a + \Delta x, b + \Delta y)$.

Aproximações lineares

- Para uma função de duas variáveis $z = f(x, y)$ o incremento correspondente a z é:

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

- O incremento Δz representa a variação de valor de f quando (x, y) varia de (a, b) para $(a + \Delta x, b + \Delta y)$.

- Utilizando-se destes conceitos podemos definir a diferenciabilidade de uma função de duas variáveis.

Aproximações lineares

Definição Se $z = f(x, y)$, então f é **diferenciável** em (a, b) se Δz puder ser expresso na forma

$$\Delta z = f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

onde ε_1 e $\varepsilon_2 \to 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Aproximações lineares

Definição Se $z = f(x, y)$, então f é **diferenciável** em (a, b) se Δz puder ser expresso na forma

$$\Delta z = f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

onde ε_1 e $\varepsilon_2 \to 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

- Uma função diferenciável é aquela para a qual o plano tangente aproxima bem o gráfico de f perto do ponto de tangência.

Aproximações lineares

Teorema Se as derivadas parciais f_x e f_y existirem perto do ponto (a, b) e forem contínuas em (a, b), então f é diferenciável em (a, b).

Aproximações lineares

Teorema Se as derivadas parciais f_x e f_y existirem perto do ponto (a, b) e forem contínuas em (a, b), então f é diferenciável em (a, b).

Este teorema fornece a condição suficiente para a diferenciabilidade.

Aproximações lineares

Exemplo 2 Mostre que $f(x, y) = xe^{xy}$ é diferenciável em $(1, 0)$ e encontre sua linearização ali. Em seguida, use a linearização para aproximar $f(1,1, -0,1)$.

Aproximações lineares

Exemplo 2 Mostre que $f(x, y) = xe^{xy}$ é diferenciável em $(1, 0)$ e encontre sua linearização ali. Em seguida, use a linearização para aproximar $f(1{,}1, -0{,}1)$.

Solução:

As derivadas parciais são

$$f_x(x, y) = e^{xy} + xye^{xy} \qquad f_y(x, y) = x^2e^{xy}$$

$$f_x(1, 0) = 1 \qquad f_y(1, 0) = 1$$

Aproximações lineares

Exemplo 2 Mostre que $f(x, y) = xe^{xy}$ é diferenciável em $(1, 0)$ e encontre sua linearização ali. Em seguida, use a linearização para aproximar $f(1,1, -0,1)$.

Solução:

As derivadas parciais são

$$f_x(x, y) = e^{xy} + xye^{xy} \qquad f_y(x, y) = x^2e^{xy}$$

$$f_x(1, 0) = 1 \qquad f_y(1, 0) = 1$$

Tanto f_x quanto f_y são funções contínuas; portanto, f é diferenciável pelo Teorema.

Aproximações lineares

Exemplo 2

A linearização é dada por

$$\begin{aligned} L(x, y) &= f(1, 0) + f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)(y - 0) \\ &= 1 + 1(x - 1) + 1 \cdot y = x + y \end{aligned}$$

Aproximações lineares

Exemplo 2

A linearização é dada por

$$L(x, y) = f(1, 0) + f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)(y - 0)$$
$$= 1 + 1(x - 1) + 1 \cdot y = x + y$$

A aproximação linear correspondente é

$xe^{xy} \approx x + y$ Assim,

$$f(1{,}1, -0{,}1) \approx 1{,}1 - 0{,}1 = 1$$

Aproximações lineares

Exemplo 2

A linearização é dada por

$$L(x, y) = f(1, 0) + f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)(y - 0)$$
$$= 1 + 1(x - 1) + 1 \cdot y = x + y$$

A aproximação linear correspondente é

$xe^{xy} \approx x + y$ Assim,

$$f(1{,}1,\ -0{,}1) \approx 1{,}1 - 0{,}1 = 1$$

o valor real de $f(1{,}1,\ -0{,}1) = 1{,}1\ e^{-0{,}11} \approx 0{,}98542.$

Para depois desta aula:

- Estudar seção 14.4 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

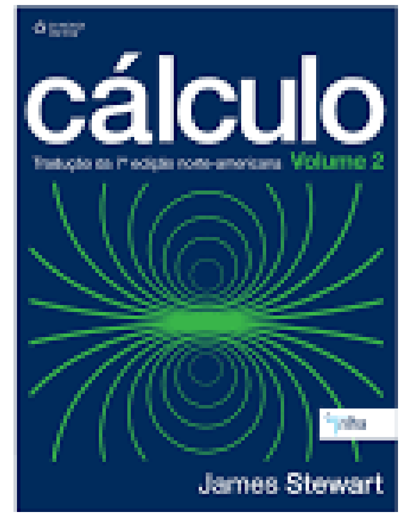
Próxima aula:

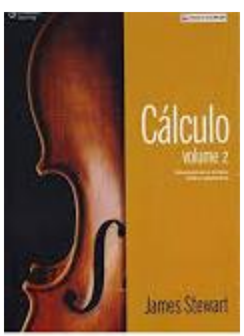
- Diferenciais e funções de três ou mais variáveis.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed.





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.

Contatos

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br