Cálculo II

Bacharelado e Engenharias

Semana 05 - Aula 1
Derivada direcional e Vetor gradiente

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria
henrique.faria@unesp.br

Derivada direcional

- Lembremo-nos de que, se $z = f(x, y)$ as derivadas parciais f_x e f_y são definidas como:

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Derivada direcional

- Lembremo-nos de que, se $z = f\,(x, y)$ as derivadas parciais f_x e f_y são definidas como:

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

- Estas representam as taxas de variação de z nas direções x e y.
- Ou seja, na direção dos vetores de unitários **i** e **j**.

Derivada direcional

- Suponha que queiramos determinar a taxa de variação de *z* em (x_0, y_0) na direção de um vetor unitário qualquer **u** = <a, b>.

Derivada direcional

- Suponha que queiramos determinar a taxa de variação de z em (x_0, y_0) na direção de um vetor unitário qualquer **u** = <a, b>.
- Devemos considerar a superfície S com equação $z = f(x, y)$ e tomar $z = f(x_0, y_0)$.

Derivada direcional

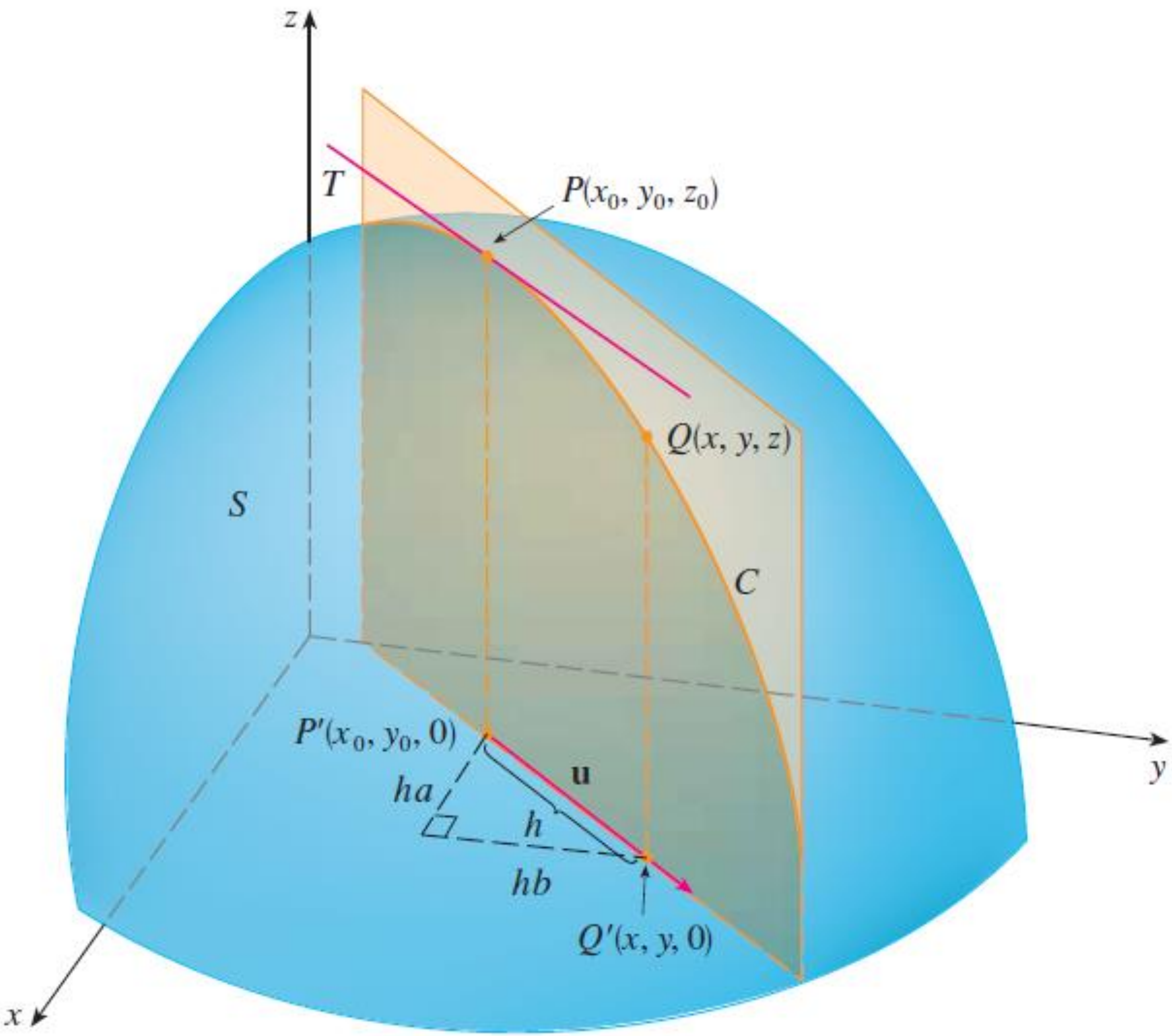
- Suponha que queiramos determinar a taxa de variação de z em (x_0, y_0) na direção de um vetor unitário qualquer **u** = <a, b>.
- Devemos considerar a superfície S com equação $z = f(x, y)$ e tomar $z = f(x_0, y_0)$.
- O plano vertical que passa por $P(x_0, y_0, z_0)$ na direção de **u** intercepta S em uma curva C.

Derivada direcional

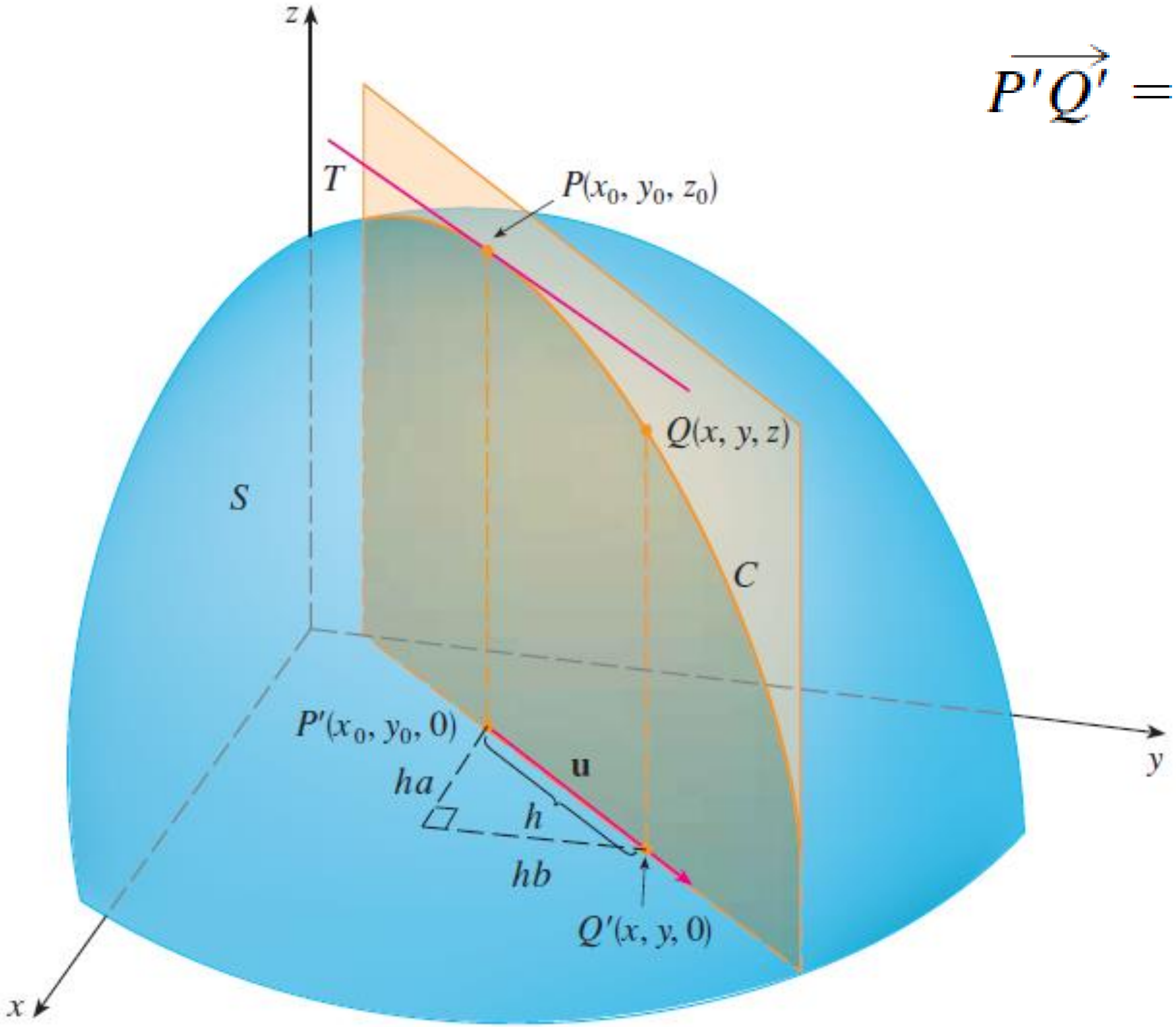
- Suponha que queiramos determinar a taxa de variação de z em (x_0, y_0) na direção de um vetor unitário qualquer **u** = <a, b>.
- Devemos considerar a superfície S com equação $z = f(x, y)$ e tomar $z = f(x_0, y_0)$.
- O plano vertical que passa por $P(x_0, y_0, z_0)$ na direção de **u** intercepta S em uma curva C.
- A inclinação da reta tangente T a C em P é a taxa de variação de z na direção de **u**.

Derivada direcional

$\overrightarrow{P'Q'}$ é paralelo a $\mathbf{u}$ e, portanto



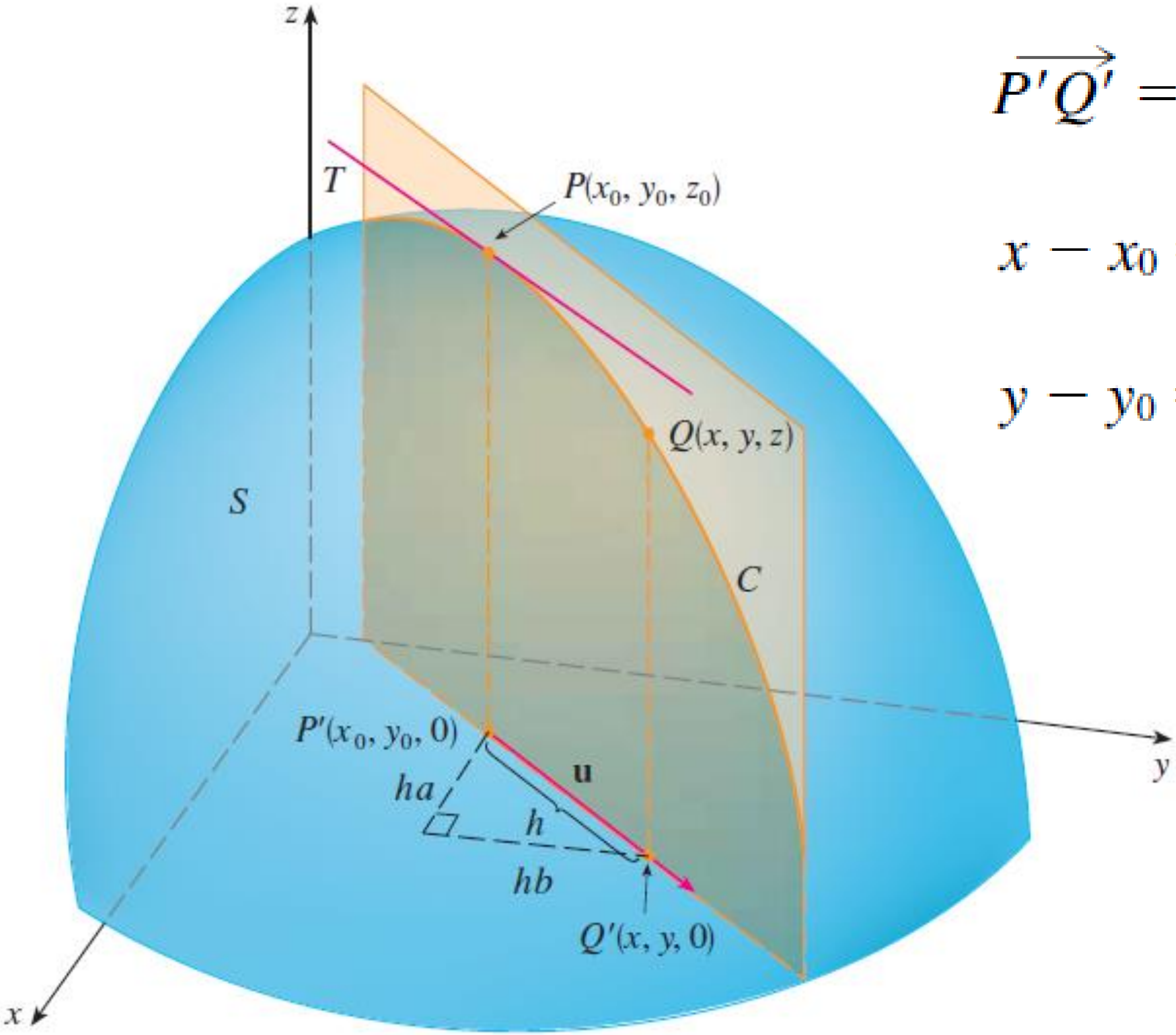
Derivada direcional



$\overrightarrow{P'Q'}$ é paralelo a $\mathbf{u}$ e, portanto

$$\overrightarrow{P'Q'} = h\mathbf{u} = \langle ha, hb \rangle$$ Logo,

Derivada direcional



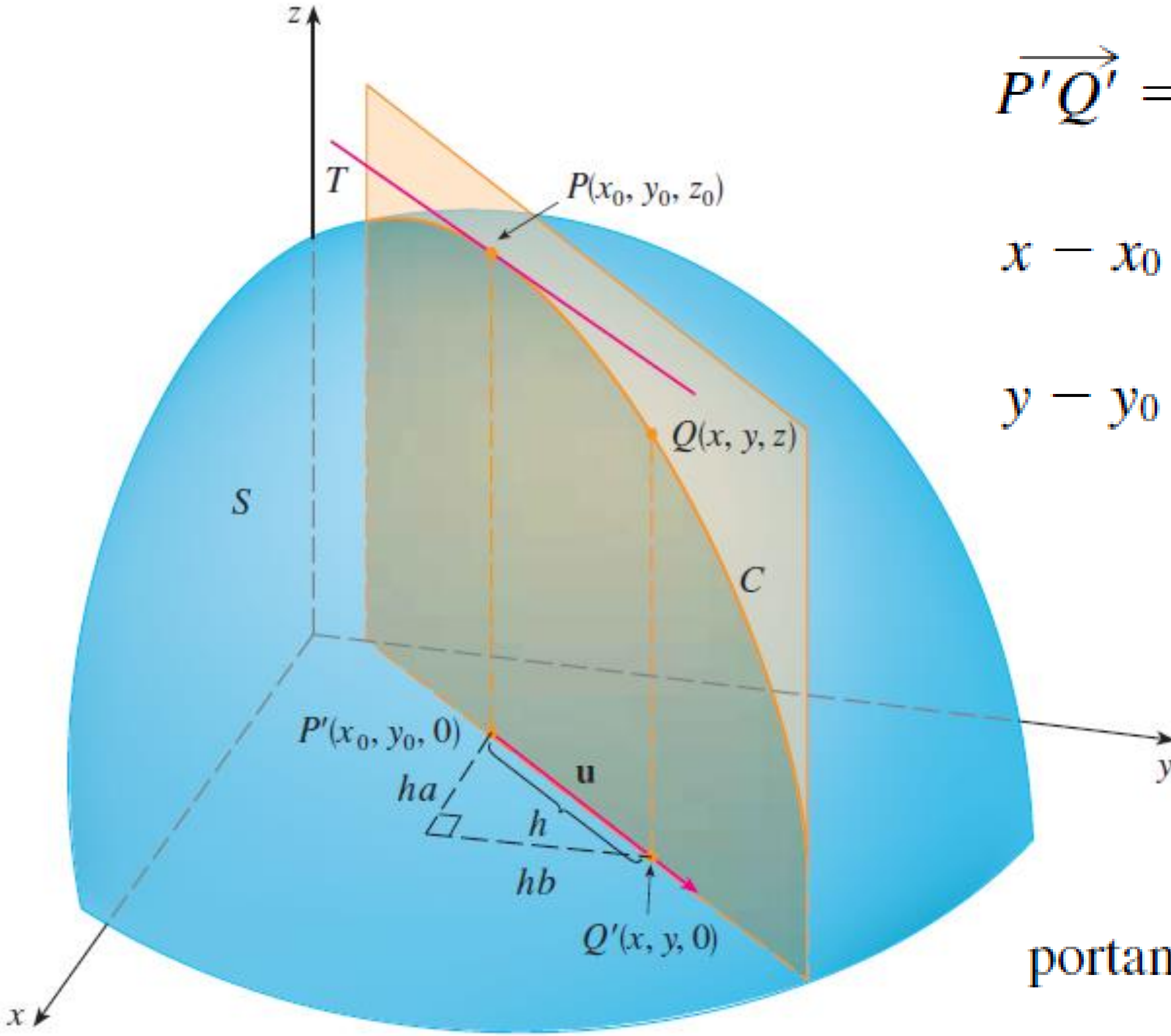
$\overrightarrow{P'Q'}$ é paralelo a **u** e, portanto

$$\overrightarrow{P'Q'} = h\mathbf{u} = \langle ha, hb \rangle$$ Logo,

$$x - x_0 = ha \Rightarrow x = x_0 + ha$$

$$y - y_0 = hb \Rightarrow y = y_0 + hb$$

Derivada direcional



$\overrightarrow{P'Q'}$ é paralelo a **u** e, portanto

$$\overrightarrow{P'Q'} = h\mathbf{u} = \langle ha, hb \rangle$$ Logo,

$$x - x_0 = ha \Rightarrow x = x_0 + ha$$

$$y - y_0 = hb \Rightarrow y = y_0 + hb$$

portanto para alguma escalar h.

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Derivada direcional

Definição 2

A **derivada direcionada** de f em (x_0, y_0) na direção do vetor unitário $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ é, se esse limite existir

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Derivada direcional

Definição 2

A **derivada direcionada** de f em (x_0, y_0) na direção do vetor unitário $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ é, se esse limite existir

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

se $\mathbf{u} = \mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$, então $D_{\mathbf{i}} f = f_x$

e se $\mathbf{u} = \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$, então $D_{\mathbf{j}} f = f_y$.

Derivada direcional

Definição 2

A **derivada direcionada** de f em (x_0, y_0) na direção do vetor unitário $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ é, se esse limite existir

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

se $\mathbf{u} = \mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$, então $D_{\mathbf{i}} f = f_x$

e se $\mathbf{u} = \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$, então $D_{\mathbf{j}} f = f_y$.

Em outras palavras, as derivadas parciais de f relacionadas a x e y são apenas casos especiais da derivada direcional.

Derivada direcional

Teorema 3

Se f é uma função diferenciável de x e y, então f tem derivada direcional na direção de qualquer vetor $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ e

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

Derivada direcional

Teorema 3

Se f é uma função diferenciável de x e y, então f tem derivada direcional na direção de qualquer vetor $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ e

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

Se o vetor unitário $\mathbf{u}$ faz um ângulo θ com o eixo x positivo podemos escrever $\mathbf{u} = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta \rangle$ e a fórmula do Teorema 3 fica

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta$$

Derivada direcional

Exemplo 1

Encontre a derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ se $f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ e $\mathbf{u}$ é o vetor unitário dado pelo ângulo $\theta = \pi/6$. Qual será $D_{\mathbf{u}} f(1, 2)$?

Derivada direcional

Exemplo 1

Encontre a derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ se $f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ e $\mathbf{u}$ é o vetor unitário dado pelo ângulo $\theta = \pi/6$. Qual será $D_{\mathbf{u}} f(1, 2)$?

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y) \cos \frac{\pi}{6} + f_y(x, y) \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$$

Derivada direcional

Exemplo 1

Encontre a derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ se $f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ e $\mathbf{u}$ é o vetor unitário dado pelo ângulo $\theta = \pi/6$. Qual será $D_{\mathbf{u}} f(1, 2)$?

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y) \cos \frac{\pi}{6} + f_y(x, y) \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$$

$$= (3x^2 - 3y) \frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y) \tfrac{1}{2}$$

Derivada direcional

Exemplo 1

Encontre a derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ se $f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ e $\mathbf{u}$ é o vetor unitário dado pelo ângulo $\theta = \pi/6$. Qual será $D_{\mathbf{u}} f(1, 2)$?

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y) \cos \frac{\pi}{6} + f_y(x, y) \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$$

$$= (3x^2 - 3y) \frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y) \tfrac{1}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[3\sqrt{3}\, x^2 - 3x + \left(8 - 3\sqrt{3}\,\right)y\right]$$

Derivada direcional

Exemplo 1

Encontre a derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ se $f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ e $\mathbf{u}$ é o vetor unitário dado pelo ângulo $\theta = \pi/6$. Qual será $D_{\mathbf{u}} f(1, 2)$?

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y) \cos \frac{\pi}{6} + f_y(x, y) \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$$

$$= (3x^2 - 3y) \frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y) \tfrac{1}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[3\sqrt{3}\,x^2 - 3x + (8 - 3\sqrt{3}\,)y\right]$$

$$D_{\mathbf{u}} f(1, 2) = \tfrac{1}{2}\left[3\sqrt{3}\,(1)^2 - 3(1) + (8 - 3\sqrt{3}\,)(2)\right]$$

$$D_{\mathbf{u}} f(1, 2) = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}$$

Derivada direcional

Exemplo 1

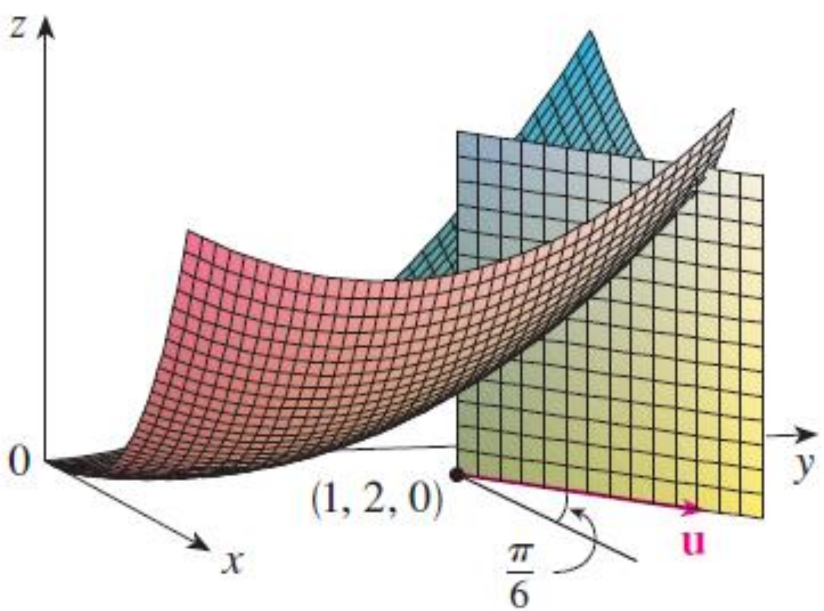


FIGURA 5

A derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(1, 2)$ representa a taxa de variação de z na direção de $\mathbf{u}$.

Derivada direcional

Exemplo 1

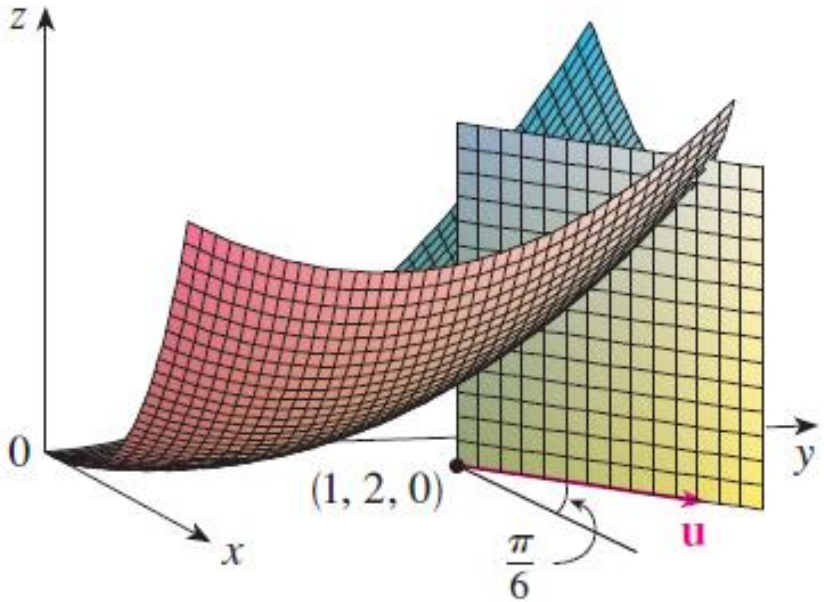


FIGURA 5

A derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(1, 2)$ representa a taxa de variação de z na direção de $\mathbf{u}$.

Isso é a inclinação da reta da tangente para a curva de intersecção da superfície $z = x^3 - 3xy + 4y^2$ e o plano vertical por $(1, 2, 0)$ na direção de $\mathbf{u}$.

Vetor Gradiente

Vetor gradiente

- A derivada direcional de f diferenciável pode ser escrita como o produto escalar de dois vetores:

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

Vetor gradiente

- A derivada direcional de f diferenciável pode ser escrita como o produto escalar de dois vetores:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= f_x(x, y)a + f_y(x, y)b \\ &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle \cdot \langle a, b \rangle \end{aligned}$$

Vetor gradiente

- A derivada direcional de f diferenciável pode ser escrita como o produto escalar de dois vetores:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= f_x(x, y)a + f_y(x, y)b \\ &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle \cdot \langle a, b \rangle \\ &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

Vetor gradiente

- A derivada direcional de f diferenciável pode ser escrita como o produto escalar de dois vetores:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= f_x(x, y)a + f_y(x, y)b \\ &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle \cdot \langle a, b \rangle \\ &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

- O primeiro vetor no produto escalar ocorre em muitas outras situações.
- Assim, daremos a ele um nome especial: o **gradiente** de f.

Vetor gradiente

Definição 8

Se f é uma função de duas variáveis x e y, então o **gradiente** de f é a função vetorial ∇f definida por

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j}$$

Vetor gradiente

Definição 8

Se f é uma função de duas variáveis x e y, então o **gradiente** de f é a função vetorial ∇f definida por

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j}$$

Com a notação de vetor gradiente, podemos reescrever a Equação para a derivada direcional como

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}$$

Vetor gradiente

Exemplo 2

Determine a derivada direcional da função $f(x, y) = x^2y^3 - 4y$ no ponto $(2, -1)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.

Vetor gradiente

Exemplo 2

Determine a derivada direcional da função $f(x, y) = x^2y^3 - 4y$ no ponto $(2, -1)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.

vetor gradiente em $(2, -1)$:

$$\nabla f(x, y) = 2xy^3\,\mathbf{i} + (3x^2y^2 - 4)\mathbf{j}$$

Vetor gradiente

Exemplo 2

Determine a derivada direcional da função $f(x, y) = x^2y^3 - 4y$ no ponto $(2, -1)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.

vetor gradiente em $(2, -1)$:

$$\nabla f(x, y) = 2xy^3\,\mathbf{i} + (3x^2y^2 - 4)\mathbf{j}$$

$$\nabla f(2, -1) = -4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$$

Vetor gradiente

Exemplo 2

Determine a derivada direcional da função $f(x, y) = x^2y^3 - 4y$ no ponto $(2, -1)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.

vetor gradiente em $(2, -1)$:

$$\nabla f(x, y) = 2xy^3\,\mathbf{i} + (3x^2y^2 - 4)\mathbf{j}$$

$$\nabla f(2, -1) = -4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$$

$\mathbf{v}$ não é um vetor unitário, mas, como $|\mathbf{v}| = \sqrt{29}$, o vetor unitário na direção de $\mathbf{v}$ é

Vetor gradiente

Exemplo 2

Determine a derivada direcional da função $f(x, y) = x^2y^3 - 4y$ no ponto $(2, -1)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.

vetor gradiente em $(2, -1)$:

$$\nabla f(x, y) = 2xy^3\,\mathbf{i} + (3x^2y^2 - 4)\mathbf{j}$$

$$\nabla f(2, -1) = -4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$$

$\mathbf{v}$ não é um vetor unitário, mas, como $|\mathbf{v}| = \sqrt{29}$, o vetor unitário na direção de $\mathbf{v}$ é

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{2}{\sqrt{29}}\,\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\,\mathbf{j}$$

Vetor gradiente

Exemplo 2

Portanto, pela Equação para a derivada direcional

$$D_{\mathbf{u}} f(2, -1) = \nabla f(2, -1) \cdot \mathbf{u}$$

Vetor gradiente

Exemplo 2

Portanto, pela Equação para a derivada direcional

$$
\begin{aligned}
D_{\mathbf{u}} f(2, -1) &= \nabla f(2, -1) \cdot \mathbf{u} \\
&= (-4\,\mathbf{i} + 8\,\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{29}}\,\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\,\mathbf{j} \right)
\end{aligned}
$$

Vetor gradiente

Exemplo 2

Portanto, pela Equação para a derivada direcional

$$D_{\mathbf{u}} f(2, -1) = \nabla f(2, -1) \cdot \mathbf{u}$$

$$= (-4\,\mathbf{i} + 8\,\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{29}}\,\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\,\mathbf{j} \right)$$

$$D_{\mathbf{u}} f(2, -1) = \frac{-4 \cdot 2 + 8 \cdot 5}{\sqrt{29}} = \frac{32}{\sqrt{29}}$$

Funções de três variáveis

Funções de três variáveis

Definição 10

A **derivada direcionada** de f em (x_0, y_0, z_0) na direção do vetor unitário $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$ é se esse limite existir

$$D_{\mathrm{u}} f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

Funções de três variáveis

Definição 10

A **derivada direcionada** de f em (x_0, y_0, z_0) na direção do vetor unitário $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$ é se esse limite existir

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

Se usarmos a notação vetorial,

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{h}$$

onde $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$ se $n = 2$ e $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ se $n = 3$.

Funções de três variáveis

Definição 13 e 14

Para uma função f de três variáveis, o **vetor gradiente**, é

$$\nabla f(x, y, z) = \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z) \rangle$$

ou

$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

Funções de três variáveis

Definição 13 e 14

Para uma função f de três variáveis, o **vetor gradiente**, é

$$\nabla f(x, y, z) = \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z) \rangle$$

ou

$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

Então, a derivada direcional pode ser reescrita como

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}$$

Funções de três variáveis

Exemplo 3

Se $f(x, y, z) = x \operatorname{sen} yz$,

(a) determine o gradiente de f e

(b) determine a derivada direcional de f em $(1, 3, 0)$ na direção de $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Funções de três variáveis

Exemplo 3

Se $f(x, y, z) = x \operatorname{sen} yz$,

(a) determine o gradiente de f e

(b) determine a derivada direcional de f em $(1, 3, 0)$ na direção de $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Solução

(a) O gradiente de f é

$$\nabla f(x, y, z) = \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z) \rangle$$

Funções de três variáveis

Exemplo 3

Se $f(x, y, z) = x \operatorname{sen} yz$,

(a) determine o gradiente de f e

(b) determine a derivada direcional de f em $(1, 3, 0)$ na direção de $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Solução

(a) O gradiente de f é

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)\rangle \\ &= \langle \operatorname{sen} yz, xz \cos yz, xy \cos yz\rangle\end{aligned}$$

Funções de três variáveis

Exemplo 3

(b) No ponto $(1, 3, 0)$ temos

$$\nabla f(1, 3, 0) = \langle 0, 0, 3 \rangle.$$

Funções de três variáveis

Exemplo 3

(b) No ponto (1, 3, 0) temos

$$\nabla f\,(1,\ 3,\ 0) = \langle 0,\ 0,\ 3\rangle.$$

O vetor unitário na direção de $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ é

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\,\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathbf{k}$$

Funções de três variáveis

Exemplo 3

(b) No ponto $(1, 3, 0)$ temos

$$\nabla f\,(1, 3, 0) = \langle 0, 0, 3 \rangle.$$

O vetor unitário na direção de $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ é

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\,\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathbf{k}$$

Portanto, $D_{\mathbf{u}} f(1, 3, 0) = \nabla f(1, 3, 0) \cdot \mathbf{u}$

Funções de três variáveis

Exemplo 3

(b) No ponto (1, 3, 0) temos

$$\nabla f\,(1,\ 3,\ 0) = \langle 0,\ 0,\ 3\rangle.$$

O vetor unitário na direção de $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ é

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\,\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathbf{k}$$

Portanto, $D_{\mathbf{u}} f(1, 3, 0) = \nabla f(1, 3, 0) \cdot \mathbf{u}$

$$= 3\mathbf{k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\,\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathbf{k}\right)$$

Funções de três variáveis

Exemplo 3

(b) No ponto (1, 3, 0) temos

$$\nabla f\,(1,\ 3,\ 0) = \langle 0,\ 0,\ 3 \rangle.$$

O vetor unitário na direção de $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ é

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\,\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathbf{k}$$

Portanto, $D_{\mathbf{u}}f(1, 3, 0) = \nabla f(1, 3, 0) \cdot \mathbf{u}$

$$= 3\,\mathbf{k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\,\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathbf{k} \right)$$

$$D_{\mathbf{u}}f(1, 3, 0) = 3\left(-\frac{1}{\sqrt{6}} \right) = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Para depois desta aula:

- Estudar seção 14.6 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

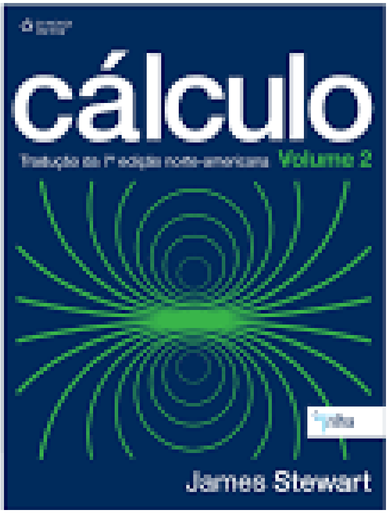
Próxima aula:

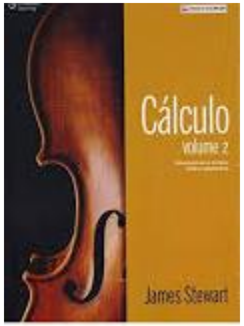
- Maximização da derivada direcional.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios
com base na 7ª ed.





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.

Contatos

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br