Cálculo II

Bacharelado e Engenharias

Semana 06 - Aula 2
Máximo e mínimo absolutos

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Máximo e mínimo absolutos

- Para uma função f de uma variável, o **Teorema do Valor Extremo** diz que:
  - se f é contínua em um intervalo fechado [a, b],
  - então f tem um valor mínimo absoluto e um valor máximo absoluto neste intervalo.

Máximo e mínimo absolutos

- Para uma função *f* de uma variável, o **Teorema do Valor Extremo** diz que:
  - se *f* é contínua em um intervalo fechado [a, b],
  - então *f* tem um valor mínimo absoluto e um valor máximo absoluto neste intervalo.
- Achamos esses valores calculando *f* não somente nos pontos críticos, mas também nas extremidades a e b.

Máximo e mínimo absolutos

- Para uma função *f* de uma variável, o **Teorema do Valor Extremo** diz que:
  - se *f* é contínua em um intervalo fechado [a, b],
  - então *f* tem um valor mínimo absoluto e um valor máximo absoluto neste intervalo.
- Achamos esses valores calculando *f* não somente nos pontos críticos, mas também nas extremidades a e b.
- Comparando os valores de *f* nos extremos com os valores nos ponto críticos encontramos os pontos de mínimo e de máximo.

Máximo e mínimo absolutos

Teorema do Valor Extremo para as Funções de Duas Variáveis

Se f é contínua em um conjunto fechado e limitado D em $\mathbb{R}^2$, então f assume um valor máximo absoluto $f(x_1, y_1)$ e um valor mínimo absoluto $f(x_2, y_2)$ em alguns pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) de D.

Máximo e mínimo absolutos

Teorema do Valor Extremo para as Funções de Duas Variáveis

Se f é contínua em um conjunto fechado e limitado D em $\mathbb{R}^2$, então f assume um valor máximo absoluto $f(x_1, y_1)$ e um valor mínimo absoluto $f(x_2, y_2)$ em alguns pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) de D.

Se f tem um valor extremo em (x_1, y_1), então (x_1, y_1) ou é um ponto crítico de f, ou um ponto da fronteira de D.

Máximo e mínimo absolutos

Para determinar os valores máximo e mínimo absolutos de uma função contínua f em um conjunto fechado e limitado D:

Máximo e mínimo absolutos

Para determinar os valores máximo e mínimo absolutos de uma função contínua f em um conjunto fechado e limitado D:

1. Determine os valores de f nos pontos críticos de f em D.

Máximo e mínimo absolutos

Para determinar os valores máximo e mínimo absolutos de uma função contínua f em um conjunto fechado e limitado D:

1. Determine os valores de f nos pontos críticos de f em D.
2. Determine os valores extremos de f na fronteira de D.

Máximo e mínimo absolutos

Para determinar os valores máximo e mínimo absolutos de uma função contínua f em um conjunto fechado e limitado D:

1. Determine os valores de f nos pontos críticos de f em D.
2. Determine os valores extremos de f na fronteira de D.
3. O maior dos valores dos passos 1 e 2 é o valor máximo absoluto;

   O menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

Máximo e mínimo absolutos

Para determinar os valores máximo e mínimo absolutos de uma função contínua f em um conjunto fechado e limitado D:

1. Determine os valores de f nos pontos críticos de f em D.
2. Determine os valores extremos de f na fronteira de D.
3. O maior dos valores dos passos 1 e 2 é o valor máximo absoluto;
   O menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

- **Conjunto fechado** de R^2 contém todos os seus pontos da fronteira.
- **Conjunto limitado** em R^2 é aquele que está contido em alguma bola aberta (finito em extensão)

Máximo e mínimo absolutos

Exemplo 7

Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ no retângulo $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$.

Máximo e mínimo absolutos

Exemplo 7

Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ no retângulo $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$.

Solução:

f é um polinômio, é contínua no retângulo fechado e limitado D, portanto existem o máximo absoluto e o mínimo absoluto.

Máximo e mínimo absolutos

Exemplo 7

Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ no retângulo $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$.

Solução:

f é um polinômio, é contínua no retângulo fechado e limitado D, portanto existem o máximo absoluto e o mínimo absoluto.

No passo 1 inicialmente devemos calcular os pontos críticos.

$$f_x = 2x - 2y = 0 \qquad f_y = -2x + 2 = 0$$

Máximo e mínimo absolutos

Exemplo 7

Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ no retângulo $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$.

Solução:

f é um polinômio, é contínua no retângulo fechado e limitado D, portanto existem o máximo absoluto e o mínimo absoluto.

No passo 1 inicialmente devemos calcular os pontos críticos.

$$f_x = 2x - 2y = 0 \qquad f_y = -2x + 2 = 0$$

o único ponto crítico existente é $(1, 1)$, e $f(1, 1) = 1$.

Máximo e mínimo absolutos

Exemplo 7

No passo 2 olhamos para os valores de f na fronteira de D,

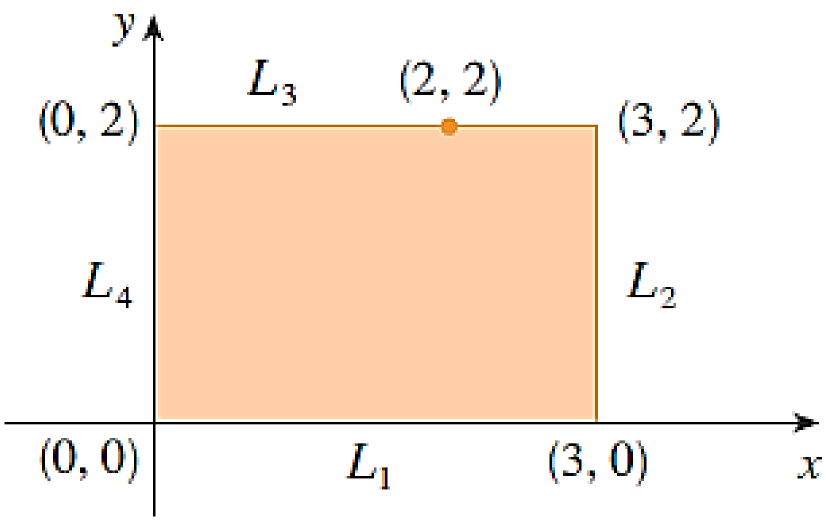


FIGURA 12

Máximo e mínimo absolutos

Exemplo 7

No passo 2 olhamos para os valores de f na fronteira de D,

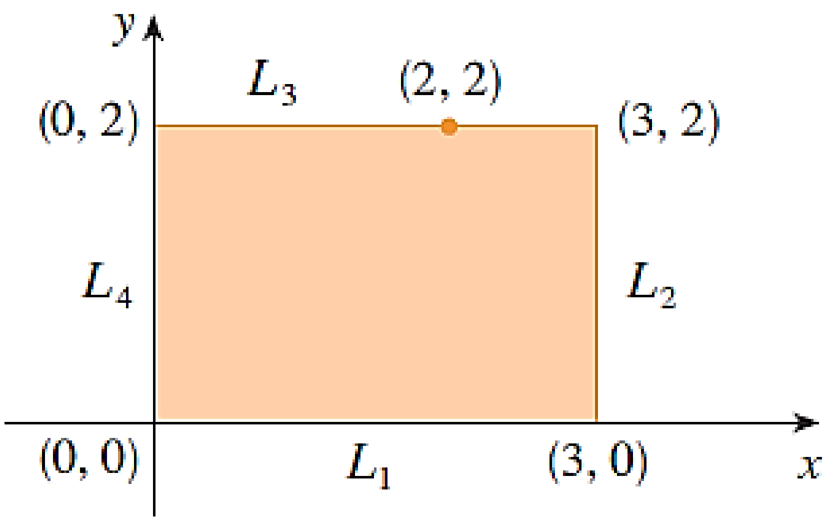


FIGURA 12

Em L_1, temos $y = 0$ e

$$f(x, 0) = x^2 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 3$$

que tem valor mínimo $f(0, 0) = 0$ e máximo $f(3, 0) = 9$.

Máximo e mínimo absolutos

Exemplo 7

No passo 2 olhamos para os valores de f na fronteira de D,

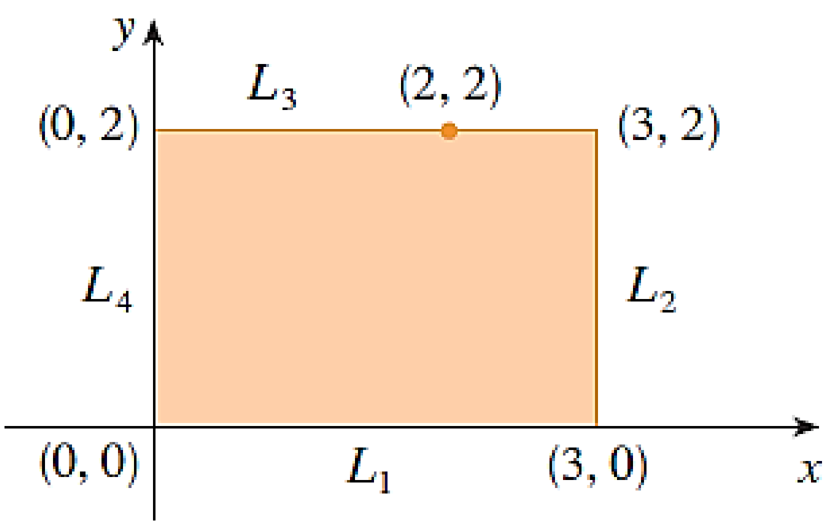


FIGURA 12

Em L_1, temos $y = 0$ e

$$f(x, 0) = x^2 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 3$$

que tem valor mínimo $f(0, 0) = 0$ e máximo $f(3, 0) = 9$.

Em L_2, temos $x = 3$ e

$$f(3, y) = 9 - 4y \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2$$

seu máximo é $f(3, 0) = 9$ e seu mínimo é $f(3, 2) = 1$.

Máximo e mínimo absolutos

Exemplo 7

Em L_3, temos $y = 2$ e

$$f(x, 2) = x^2 - 4x + 4 \quad 0 \leqslant x \leqslant 3$$

$$f(x, 2) = (x - 2)^2$$

o mínimo é $f(2, 2) = 0$,
e seu máximo é $f(0, 2) = 4$.

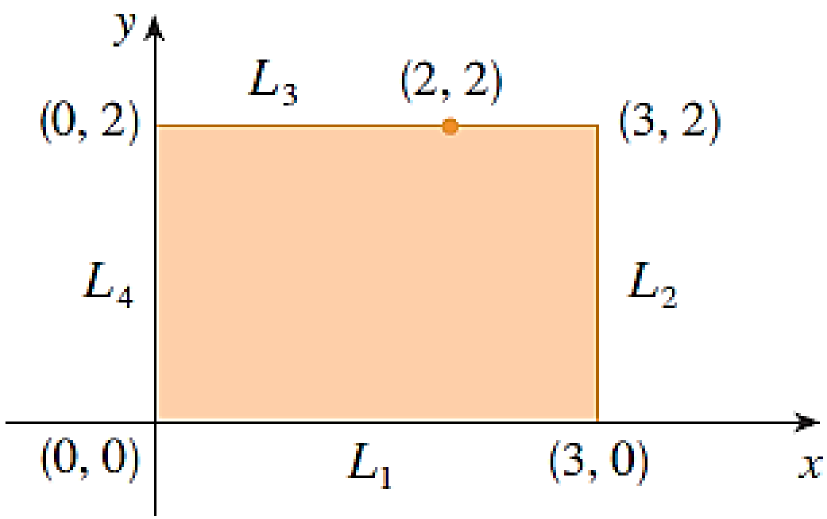


FIGURA 12

Máximo e mínimo absolutos

Exemplo 7

Em L_3, temos $y = 2$ e

$$f(x, 2) = x^2 - 4x + 4 \quad 0 \leqslant x \leqslant 3$$

$$f(x, 2) = (x - 2)^2$$

o mínimo é $f(2, 2) = 0$,
e seu máximo é $f(0, 2) = 4$.

Em L_4, temos $x = 0$ e

$$f(0, y) = 2y \quad 0 \leqslant y \leqslant 2$$

valor máximo $f(0, 2) = 4$

e valor mínimo $f(0, 0) = 0$.

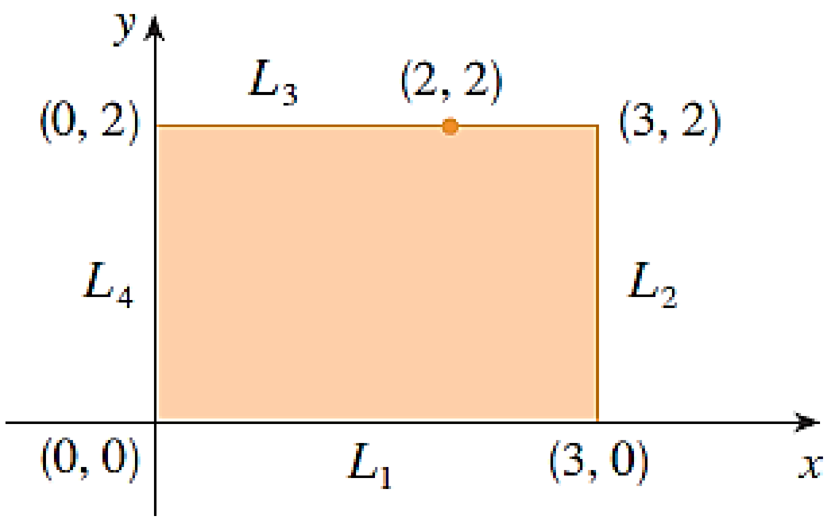


FIGURA 12

Máximo e mínimo absolutos

Exemplo 7

Em L_3, temos $y = 2$ e

$$f(x, 2) = x^2 - 4x + 4 \quad 0 \leqslant x \leqslant 3$$

$$f(x, 2) = (x - 2)^2$$

o mínimo é $f(2, 2) = 0$,
e seu máximo é $f(0, 2) = 4$.

Em L_4, temos $x = 0$ e

$$f(0, y) = 2y \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2$$

valor máximo $f(0, 2) = 4$

e valor mínimo $f(0, 0) = 0$.

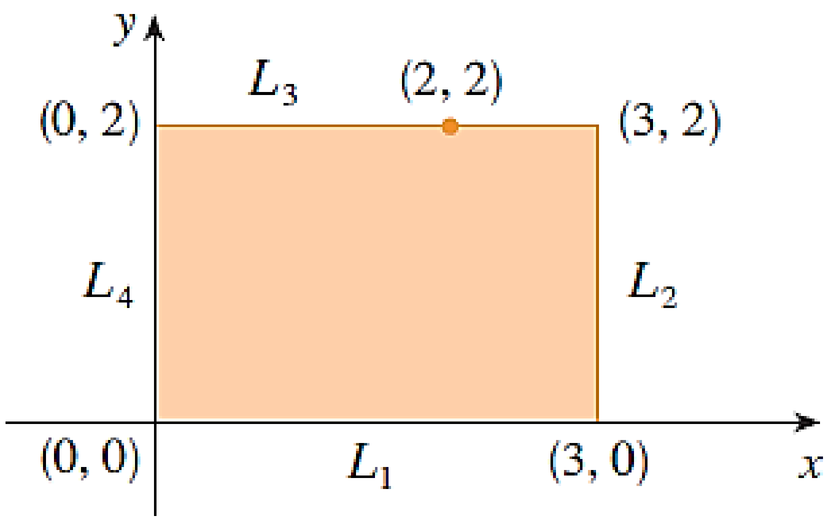


FIGURA 12

Portanto, na fronteira, o valor mínimo de f é 0 e o máximo, 9.

Máximo e mínimo absolutos

Exemplo 7

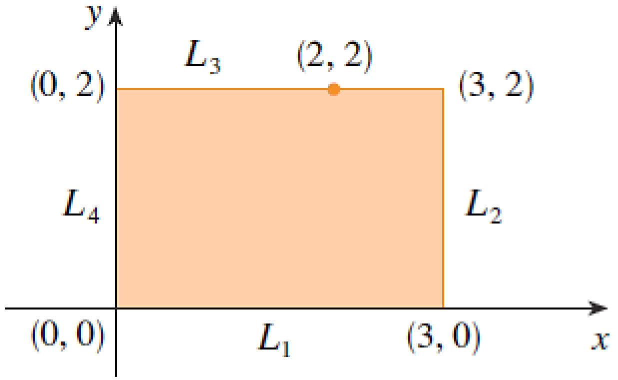


FIGURA 12

No passo 3 comparamos esses valores com o valor $f(1, 1) = 1$ no ponto crítico e concluímos que o valor máximo absoluto de f

em D é $f(3,0) = 9$,

e o valor mínimo absoluto é

$f(0, 0) = f(2, 2) = 0.$

Máximo e mínimo absolutos

Exemplo 7

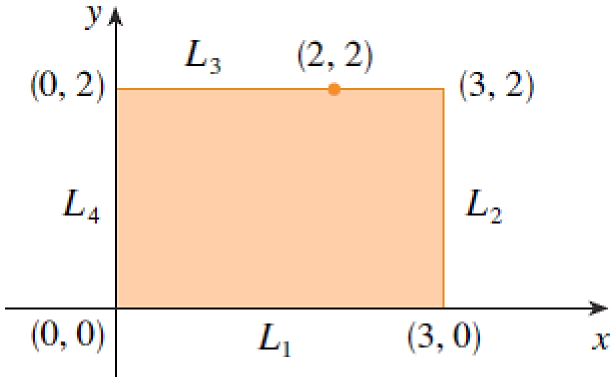


FIGURA 12

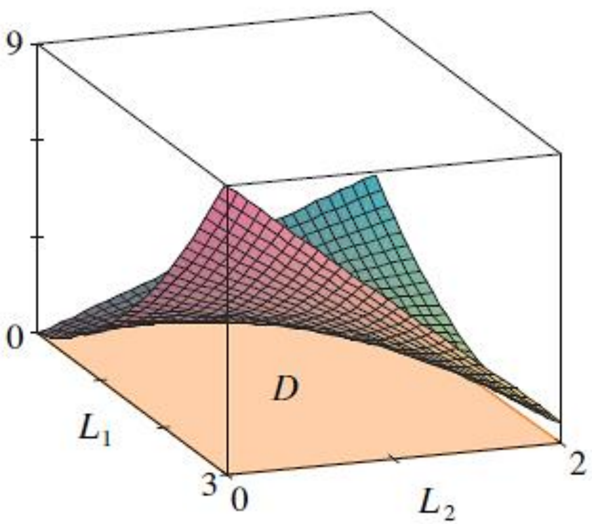


FIGURA 13 $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$

No passo 3 comparamos esses valores com o valor $f(1, 1) = 1$ no ponto crítico e concluímos que o valor máximo absoluto de f em D é $f(3,0) = 9$,

e o valor mínimo absoluto é $f(0, 0) = f(2, 2) = 0$.

Alguns exemplos de otimização

Problemas de otimização

Exemplo 5

Determine a menor distância entre o ponto $(1, 0, -2)$ e o plano $x + 2y + z = 4$.

Problemas de otimização

Exemplo 5

Determine a menor distância entre o ponto $(1, 0, -2)$ e o plano $x + 2y + z = 4$.

Solução:

A distância entre (x, y, z) e o ponto $(1, 0, -2)$ é

$$d = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2}$$

Problemas de otimização

Exemplo 5

Determine a menor distância entre o ponto $(1, 0, -2)$ e o plano $x + 2y + z = 4$.

Solução:

A distância entre (x, y, z) e o ponto $(1, 0, -2)$ é

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2}$$

Mas, se (x, y, z) pertence ao plano $z = 4 - x - 2y$

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2}$$

Problemas de otimização

Exemplo 5

Determine a menor distância entre o ponto $(1, 0, -2)$ e o plano $x + 2y + z = 4$.

Solução:

A distância entre (x, y, z) e o ponto $(1, 0, -2)$ é

$$d = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2}$$

Mas, se (x, y, z) pertence ao plano $z = 4 - x - 2y$

$$d = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2}$$

Podemos minimizar d

$$d^2 = f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2$$

Problemas de otimização

Exemplo 5

$$d^2 = f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2$$

Problemas de otimização

Exemplo 5

$$d^2 = f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2$$

Resolvendo as equações

$$f_x = 2(x - 1) - 2(6 - x - 2y) = 4x + 4y - 14 = 0$$

Problemas de otimização

Exemplo 5

$$d^2 = f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2$$

Resolvendo as equações

$$f_x = 2(x - 1) - 2(6 - x - 2y) = 4x + 4y - 14 = 0$$

$$f_y = 2y - 4(6 - x - 2y) = 4x + 10y - 24 = 0$$

Problemas de otimização

Exemplo 5

$$d^2 = f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2$$

Resolvendo as equações

$$f_x = 2(x - 1) - 2(6 - x - 2y) = 4x + 4y - 14 = 0$$

$$f_y = 2y - 4(6 - x - 2y) = 4x + 10y - 24 = 0$$

$$f_{xx} = 4, \; f_{xy} = 4 \text{ e } f_{yy} = 10,$$

Problemas de otimização

Exemplo 5

$$d^2 = f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2$$

Resolvendo as equações

$$f_x = 2(x - 1) - 2(6 - x - 2y) = 4x + 4y - 14 = 0$$

$$f_y = 2y - 4(6 - x - 2y) = 4x + 10y - 24 = 0$$

$$f_{xx} = 4, \; f_{xy} = 4 \text{ e } f_{yy} = 10,$$

$$D(x, y) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = 24 > 0 \text{ e } f_{xx} > 0$$

Problemas de otimização

Exemplo 5

$$d^2 = f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2$$

Resolvendo as equações

$$f_x = 2(x - 1) - 2(6 - x - 2y) = 4x + 4y - 14 = 0$$

$$f_y = 2y - 4(6 - x - 2y) = 4x + 10y - 24 = 0$$

$$f_{xx} = 4, \; f_{xy} = 4 \text{ e } f_{yy} = 10,$$

$$D(x, y) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = 24 > 0 \text{ e } f_{xx} > 0$$

o único ponto crítico é $\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right)$, portanto pelo Teste da Segunda Derivada, f tem um mínimo local em $\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right)$.

Problemas de otimização

Exemplo 5

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (6-x-2y)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\tfrac{5}{6}\right)^2 + \left(\tfrac{5}{3}\right)^2 + \left(\tfrac{5}{6}\right)^2} = \tfrac{5}{6}\sqrt{6}$$

Problemas de otimização

Exemplo 5

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\tfrac{5}{6}\right)^2 + \left(\tfrac{5}{3}\right)^2 + \left(\tfrac{5}{6}\right)^2} = \tfrac{5}{6}\sqrt{6}$$

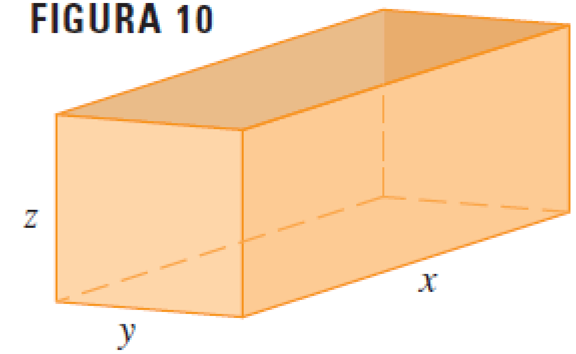
A menor distância de $(1, 0, -2)$ ao plano $x + 2y + z = 4$ é $\frac{5}{6}\sqrt{6}$.

Problemas de otimização

Exemplo 6

Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com 12 m^2 de papelão. Determine o volume máximo dessa caixa.

FIGURA 10

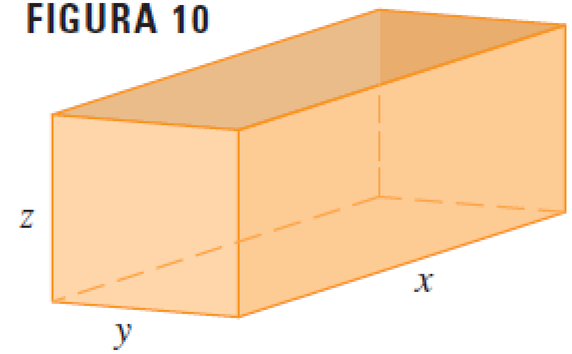


Problemas de otimização

Exemplo 6

Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com 12 m^2 de papelão. Determine o volume máximo dessa caixa.

FIGURA 10



Solução:

Então, o volume da caixa é $V = xyz$

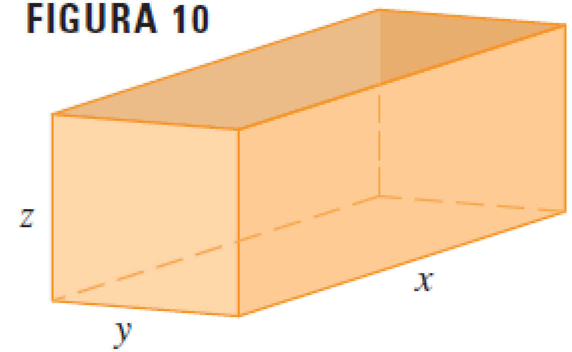
Podemos expressar V como função só de x e y usando a área dos quatro lados e do fundo da caixa

Problemas de otimização

Exemplo 6

Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com 12 m² de papelão. Determine o volume máximo dessa caixa.

FIGURA 10



Solução:

Então, o volume da caixa é $V = xyz$

Podemos expressar V como função só de x e y usando a área dos quatro lados e do fundo da caixa

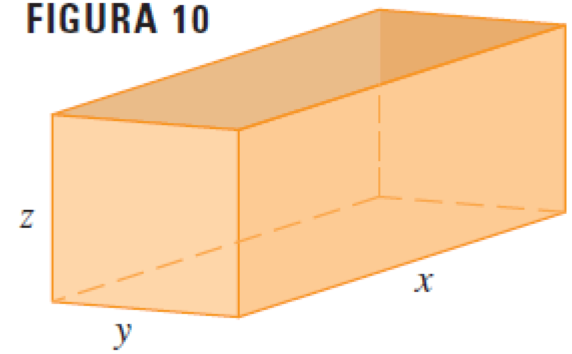
$$2xz + 2yz + xy = 12$$ Isolando z

Problemas de otimização

Exemplo 6

Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com 12 m^2 de papelão. Determine o volume máximo dessa caixa.

FIGURA 10



Solução:

Então, o volume da caixa é $V = xyz$

Podemos expressar V como função só de x e y usando a área dos quatro lados e do fundo da caixa

$2xz + 2yz + xy = 12$ Isolando z

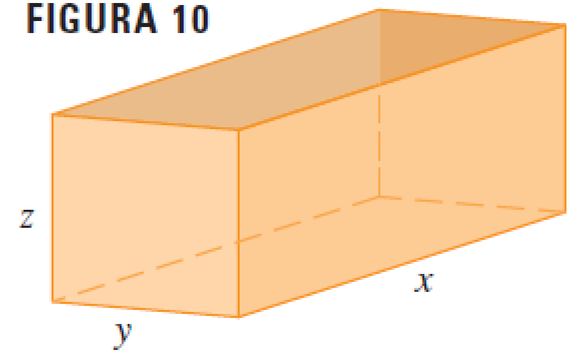
$z = (12 - xy)/[2(x + y)]$ e V fica

Problemas de otimização

Exemplo 6

Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com 12 m^2 de papelão. Determine o volume máximo dessa caixa.

FIGURA 10



Solução:

Então, o volume da caixa é $V = xyz$

Podemos expressar V como função só de x e y usando a área dos quatro lados e do fundo da caixa

$$2xz + 2yz + xy = 12$$ Isolando z

$$z = (12 - xy)/[2(x + y)]$$ e V fica

$$V = xy\frac{12 - xy}{2(x + y)} = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x + y)}$$

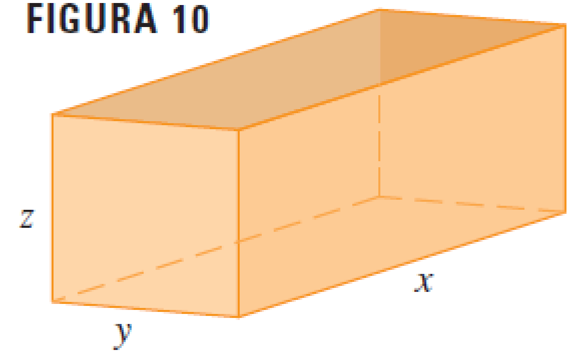
Problemas de otimização

Exemplo 6

Calculamos as derivadas parciais:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x + y)^2}$$

FIGURA 10



Problemas de otimização

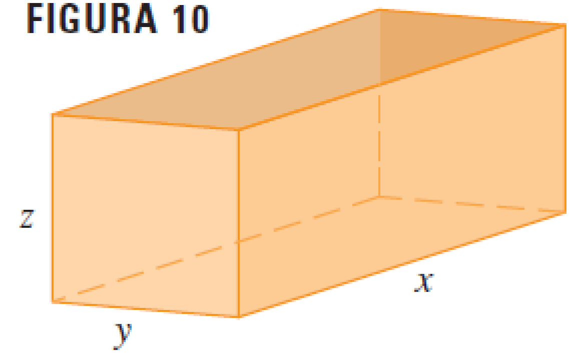
Exemplo 6

Calculamos as derivadas parciais:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x + y)^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x + y)^2}$$

FIGURA 10



Problemas de otimização

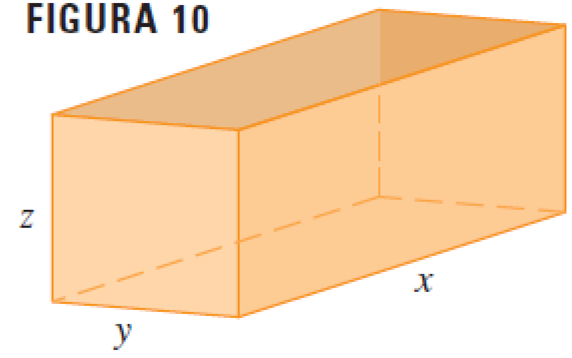
Exemplo 6

Calculamos as derivadas parciais:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x + y)^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x + y)^2}$$

FIGURA 10



Se V é um máximo, então $\partial V/\partial x = \partial V/\partial y = 0$,

$$12 - 2xy - x^2 = 0 \qquad 12 - 2xy - y^2 = 0$$

Problemas de otimização

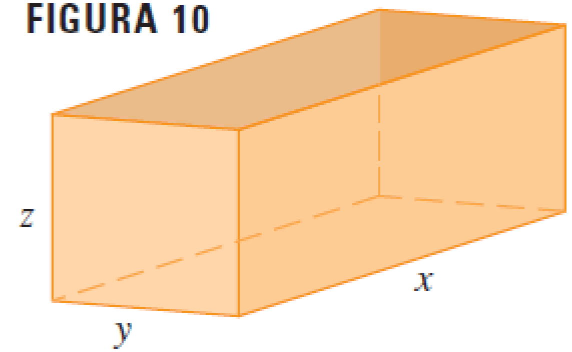
Exemplo 6

Calculamos as derivadas parciais:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x + y)^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x + y)^2}$$

FIGURA 10



Se V é um máximo, então $\partial V/\partial x = \partial V/\partial y = 0$,

$$12 - 2xy - x^2 = 0 \qquad 12 - 2xy - y^2 = 0$$

Isso implica que $x^2 = y^2$ e, portanto, $x = y$.

Problemas de otimização

Exemplo 6

Se colocarmos $x = y$ em qualquer uma das equações

$$12 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 2, y = 2$$

Problemas de otimização

Exemplo 6

Se colocarmos $x = y$ em qualquer uma das equações

$$12 - 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2,\ y = 2$$

$$z = (12 - 2 \cdot 2)/[2(2 + 2)] = 1$$

Problemas de otimização

Exemplo 6

Se colocarmos $x = y$ em qualquer uma das equações

$$12 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 2, y = 2$$

$$z = (12 - 2 \cdot 2)/[2(2 + 2)] = 1$$

um máximo absoluto, que deve ocorrer em um ponto crítico de V, portanto, quando $x = 2$, $y = 2$, $z = 1$.

Problemas de otimização

Exemplo 6

Se colocarmos $x = y$ em qualquer uma das equações

$$12 - 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2, y = 2$$

$$z = (12 - 2 \cdot 2)/[2(2 + 2)] = 1$$

um máximo absoluto, que deve ocorrer em um ponto crítico de V, portanto, quando $x = 2, y = 2, z = 1$.

Assim, o volume máximo da caixa é

$$V = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \text{ m}^3$$

Para depois desta aula:

- Estudar seção 14.7 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

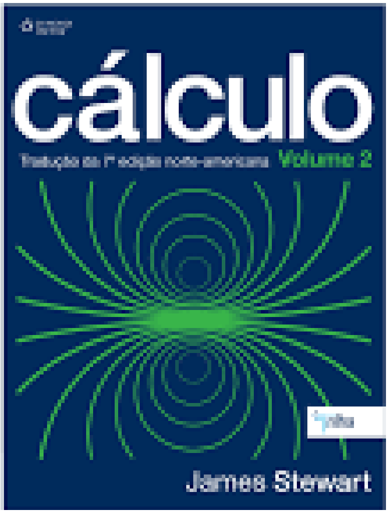
Próxima aula:

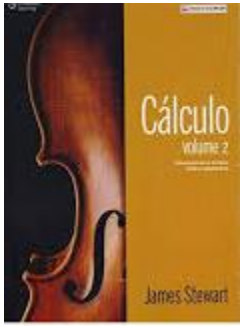
- Fórmula de Taylor.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed.





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.

Contatos

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br