Cálculo II

Bacharelado e Engenharias

Semana 08 - Aula 2
Integrais iteradas

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Integrais Iteradas

- Geralmente é difícil calcular as integrais de funções duplas diretamente da definição de integral.
- Contudo, o Teorema Fundamental do Cálculo fornece um método mais fácil para calculá-las.

Integrais Iteradas

- Geralmente é difícil calcular as integrais de funções duplas diretamente da definição de integral.
- Contudo, o Teorema Fundamental do Cálculo fornece um método mais fácil para calculá-las.
- Veremos como expressar uma integral dupla como uma integral iterada.
- Através do Teorema de Fubini o valor da integral dupla pode ser obtido calculando-se duas integrais unidimensionais.

Integrais Iteradas

Seja f uma função de duas variáveis que é integrável no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$.

Integrais Iteradas

Seja f uma função de duas variáveis que é integrável no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$.

notação $\int_c^d f(x, y)\, dy$

x é mantido fixo e

$f(x, y)$ é integrada em relação a y

Integrais Iteradas

Seja f uma função de duas variáveis que é integrável no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$.

notação $\int_c^d f(x, y)\, dy$

x é mantido fixo e $f(x, y)$ é integrada em relação a y

Como $\int_c^d f(x, y)\, dy$ é um número que depende do valor de x, ele define uma função de x:

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$$

Integrais Iteradas

Agora integramos a função A com relação à variável x

$$\int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy \right] dx$$

Integrais Iteradas

Agora integramos a função A com relação à variável x

$$\int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy \right] dx$$

A integral do lado direito é chamada **integral iterada**.

significa que primeiro integramos com relação a y de c a d e depois em relação a x de a até b.

Integrais Iteradas

Agora integramos a função A com relação à variável x

$$\int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy \right] dx$$

A integral do lado direito é chamada **integral iterada**.

significa que primeiro integramos com relação a y de c a d e depois em relação a x de a até b.

Em geral, os colchetes são omitidos. Assim,

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy \right] dx$$

Integrais duplas

Exemplo 1

Calcule o valor das integrais iteradas

(a) $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy \, dx$ (b) $\int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx \, dy$

Integrais duplas

Exemplo 1

Calcule o valor das integrais iteradas

(a) $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy \, dx$ (b) $\int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx \, dy$

Solução:

(a) Olhando x como constante, obtemos

$$\int_1^2 x^2 y \, dy$$

Integrais duplas

Exemplo 1

Calcule o valor das integrais iteradas

(a) $\displaystyle\int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy \, dx$ (b) $\displaystyle\int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx \, dy$

Solução:

(a) Olhando x como constante, obtemos

$$\int_1^2 x^2 y \, dy = \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} =$$

Integrais duplas

Exemplo 1

Calcule o valor das integrais iteradas

(a) $\int_0^3 \int_1^2 x^2y\,dy\,dx$ (b) $\int_1^2 \int_0^3 x^2y\,dx\,dy$

Solução:

(a) Olhando x como constante, obtemos

$$\int_1^2 x^2y\,dy = \left[x^2\frac{y^2}{2}\right]_{y=1}^{y=2} = x^2\left(\frac{2^2}{2}\right) - x^2\left(\frac{1^2}{2}\right)$$

Integrais duplas

Exemplo 1

Calcule o valor das integrais iteradas

(a) $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy \, dx$ (b) $\int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx \, dy$

Solução:

(a) Olhando x como constante, obtemos

$$\int_1^2 x^2 y \, dy = \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} = x^2 \left(\frac{2^2}{2} \right) - x^2 \left(\frac{1^2}{2} \right) = \tfrac{3}{2} x^2$$

Exemplo 1

Calcule o valor das integrais iteradas

(a) $\displaystyle\int_0^3 \left[\int_1^2 x^2y\,dy\right] dx$ (b) $\displaystyle\int_1^2 \int_0^3 x^2y\,dx\,dy$

Solução:

(a) Olhando x como constante, obtemos

$$\int_1^2 x^2y\,dy = \left[x^2\frac{y^2}{2}\right]_{y=1}^{y=2} = x^2\left(\frac{2^2}{2}\right) - x^2\left(\frac{1^2}{2}\right) = \tfrac{3}{2}x^2$$

Portanto, $A(x) = \frac{3}{2}x^2$ neste exemplo.

Integrais duplas

Exemplo 1

Integramos agora essa função de x de 0 até 3:

$$\int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy \, dx = \int_0^3 \left[\int_1^2 x^2 y \, dy \right] dx$$

Integrais duplas

Exemplo 1

Integramos agora essa função de x de 0 até 3:

$$\int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy \, dx = \int_0^3 \left[\int_1^2 x^2 y \, dy \right] dx$$

$$= \int_0^3 \tfrac{3}{2} x^2 \, dx$$

Integrais duplas

Exemplo 1

Integramos agora essa função de x de 0 até 3:

$$\int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy \, dx = \int_0^3 \left[\int_1^2 x^2 y \, dy \right] dx$$

$$= \int_0^3 \tfrac{3}{2} x^2 \, dx = \frac{x^3}{2} \Bigg]_0^3 = \frac{27}{2}$$

Integrais duplas

Exemplo 1

(b) Aqui integraremos primeiro em relação a x:

$$\int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx \, dy = \int_1^2 \left[\int_0^3 x^2 y \, dx \right] dy$$

Integrais duplas

Exemplo 1

(b) Aqui integraremos primeiro em relação a x:

$$\int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx \, dy = \int_1^2 \left[\int_0^3 x^2 y \, dx \right] dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=3} dy$$

Exemplo 1

(b) Aqui integraremos primeiro em relação a x:

$$\int_1^2 \int_0^3 x^2 y\,dx\,dy = \int_1^2 \left[\int_0^3 x^2 y\,dx \right] dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=3} dy$$

$$= \int_1^2 9y\,dy$$

Integrais duplas

Exemplo 1

(b) Aqui integraremos primeiro em relação a x:

$$\int_1^2 \int_0^3 x^2 y\,dx\,dy = \int_1^2 \left[\int_0^3 x^2 y\,dx \right] dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=3} dy$$

$$= \int_1^2 9y\,dy = 9 \frac{y^2}{2} \Bigg]_1^2$$

Exemplo 1

(b) Aqui integraremos primeiro em relação a x:

$$\int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx \, dy = \int_1^2 \left[\int_0^3 x^2 y \, dx \right] dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=3} dy$$

$$= \int_1^2 9y \, dy = 9 \frac{y^2}{2} \bigg]_1^2 = \frac{27}{2}$$

Integrais duplas

Exemplo 1

(b) Aqui integraremos primeiro em relação a x:

$$\int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx \, dy = \int_1^2 \left[\int_0^3 x^2 y \, dx \right] dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=3} dy$$

$$= \int_1^2 9y \, dy = 9 \frac{y^2}{2} \bigg]_1^2 = \frac{27}{2}$$

Observe que obtemos a mesma resposta se integramos primeiro em relação a y ou a x.

Integrais duplas

Exemplo 1

(b) Aqui integraremos primeiro em relação a x:

$$\int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx \, dy = \int_1^2 \left[\int_0^3 x^2 y \, dx \right] dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=3} dy$$

$$= \int_1^2 9y \, dy = 9 \frac{y^2}{2} \bigg]_1^2 = \frac{27}{2}$$

Observe que obtemos a mesma resposta se integramos primeiro em relação a y ou a x.

Em geral, a ordem da integração não é importante. Isso é semelhante ao Teorema de Clairaut sobre as igualdades das derivadas parciais mistas.

Teorema de Fubini

Se f for contínua no retângulo

$R = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$, então

Teorema de Fubini

Se f for contínua no retângulo

$R = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$, então

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy$$

Teorema de Fubini

Se f for contínua no retângulo

$R = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$, então

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy$$

esse resultado vale se f limitada em R, tenha descontinuidades apenas em um número finito de curvas suaves e se a integral iterada exista.

Exemplo 2

Calcule a integral dupla $\iint_R (x - 3y^2)\, dA$, onde $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\}$.

Exemplo 2

Calcule a integral dupla $\iint_R (x - 3y^2)\, dA$, onde $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\}$.

Solução 1: O Teorema de Fubini nos dá

$$\iint\limits_R (x - 3y^2)\, dA = \int_0^2 \int_1^2 (x - 3y^2)\, dy\, dx$$

Exemplo 2

Calcule a integral dupla $\iint_R (x - 3y^2)\,dA$, onde $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\}$.

Solução 1: O Teorema de Fubini nos dá

$$\iint\limits_R (x - 3y^2)\,dA = \int_0^2 \int_1^2 (x - 3y^2)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 \left[xy - y^3\right]_{y=1}^{y=2} dx$$

Exemplo 2

Calcule a integral dupla $\iint_R (x - 3y^2)\, dA$, onde $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\}$.

Solução 1: O Teorema de Fubini nos dá

$$\iint_R (x - 3y^2)\, dA = \int_0^2 \int_1^2 (x - 3y^2)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^2 \left[xy - y^3\right]_{y=1}^{y=2} dx$$

$$= \int_0^2 (x - 7)\, dx = \frac{x^2}{2} - 7x \bigg]_0^2 = -12$$

Integrais duplas

Exemplo 2

Calcule a integral dupla $\iint_R (x - 3y^2)\,dA$, onde $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\}$.

Solução 2: dessa vez integrando com relação a x primeiro,

$$\iint_R (x - 3y^2)\,dA = \int_1^2 \int_0^2 (x - 3y^2)\,dx\,dy$$

Integrais duplas

Exemplo 2

Calcule a integral dupla $\iint_R (x - 3y^2)\,dA$, onde $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\}$.

Solução 2: dessa vez integrando com relação a x primeiro,

$$\iint\limits_R (x - 3y^2)\,dA = \int_1^2 \int_0^2 (x - 3y^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} - 3xy^2 \right]_{x=0}^{x=2} dy$$

Integrais duplas

Exemplo 2

Calcule a integral dupla $\iint_R (x - 3y^2)\,dA$, onde $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\}$.

Solução 2: dessa vez integrando com relação a x primeiro,

$$\iint_R (x - 3y^2)\,dA = \int_1^2 \int_0^2 (x - 3y^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} - 3xy^2 \right]_{x=0}^{x=2} dy$$

$$= \int_1^2 (2 - 6y^2)\,dy = 2y - 2y^3 \Big]_1^2 = -12$$

Integrais duplas

Exemplo 3

Calcule $\iint_R y \operatorname{sen}(xy)\, dA$, onde $R = [1, 2] \times [0, \pi]$.

Exemplo 3

Calcule $\iint_R y \operatorname{sen}(xy)\, dA$, onde $R = [1, 2] \times [0, \pi]$.

Solução 1: Se integrarmos primeiro em relação a x,

$$\iint_R y \operatorname{sen}(xy)\, dA = \int_0^{\pi} \int_1^2 y \operatorname{sen}(xy)\, dx\, dy$$

Integrais duplas

Exemplo 3

Calcule $\iint_R y \operatorname{sen}(xy)\, dA$, onde $R = [1, 2] \times [0, \pi]$.

Solução 1: Se integrarmos primeiro em relação a x,

$$\iint\limits_R y \operatorname{sen}(xy)\, dA = \int_0^{\pi} \int_1^2 y \operatorname{sen}(xy)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^{\pi} \left[-\cos(xy)\right]_{x=1}^{x=2} dy$$

Exemplo 3

Calcule $\iint_R y \operatorname{sen}(xy)\, dA$, onde $R = [1, 2] \times [0, \pi]$.

Solução 1: Se integrarmos primeiro em relação a x,

$$\iint_R y \operatorname{sen}(xy)\, dA = \int_0^{\pi} \int_1^2 y \operatorname{sen}(xy)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^{\pi} \left[-\cos(xy)\right]_{x=1}^{x=2} dy$$

$$= \int_0^{\pi} (-\cos 2y + \cos y)\, dy$$

Exemplo 3

Calcule $\iint_R y \operatorname{sen}(xy)\, dA$, onde $R = [1, 2] \times [0, \pi]$.

Solução 1: Se integrarmos primeiro em relação a x,

$$\iint\limits_R y \operatorname{sen}(xy)\, dA = \int_0^{\pi} \int_1^2 y \operatorname{sen}(xy)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^{\pi} \left[-\cos(xy)\right]_{x=1}^{x=2} dy$$

$$= \int_0^{\pi} (-\cos 2y + \cos y)\, dy$$

$$= -\tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2y + \operatorname{sen} y\Big]_0^{\pi} = 0$$

Integrais duplas

Exemplo 3

Calcule $\iint_R y \operatorname{sen}(xy)\, dA$, onde $R = [1, 2] \times [0, \pi]$.

Solução 2: Se invertermos a ordem de integração,

$$\iint_R y \operatorname{sen}(xy)\, dA = \int_1^2 \int_0^\pi y \operatorname{sen}(xy)\, dy\, dx$$

Exemplo 3

Calcule $\iint_R y \operatorname{sen}(xy)\, dA$, onde $R = [1, 2] \times [0, \pi]$.

Solução 2: Se invertermos a ordem de integração,

$$\iint_R y \operatorname{sen}(xy)\, dA = \int_1^2 \int_0^\pi y \operatorname{sen}(xy)\, dy\, dx$$

Para calcularmos a integral interna, usamos a integração por partes com

$$u = y \qquad dv = \operatorname{sen}(xy)\, dy$$

$$du = dy \qquad v = -\frac{\cos(xy)}{x}$$

Integrais duplas

Exemplo 3

Calcule $\iint_R y \operatorname{sen}(xy)\, dA$, onde $R = [1, 2] \times [0, \pi]$.

Solução 2: Se invertermos a ordem de integração,

$$\iint\limits_R y \operatorname{sen}(xy)\, dA = \int_1^2 \int_0^\pi y \operatorname{sen}(xy)\, dy\, dx$$

Para calcularmos a integral interna, usamos a integração por partes com

$$u = y \qquad dv = \operatorname{sen}(xy)\, dy$$

$$du = dy \qquad v = -\frac{\cos(xy)}{x}$$

$$\int_0^\pi y \operatorname{sen}(xy)\, dy = -\frac{y\cos(xy)}{x}\Bigg]_{y=0}^{y=\pi} + \frac{1}{x}\int_0^\pi \cos(xy)\, dy$$

Exemplo 3: solução 2 (continuação)

$$\int_0^{\pi} y\,\mathrm{sen}(xy)\,dy = -\frac{\pi\cos\pi x}{x} + \frac{1}{x^2}\left[\mathrm{sen}(xy)\right]_{y=0}^{y=\pi}$$

Exemplo 3: solução 2 (continuação)

$$\int_0^{\pi} y \operatorname{sen}(xy)\, dy = -\frac{\pi \cos \pi x}{x} + \frac{1}{x^2}\left[\operatorname{sen}(xy)\right]_{y=0}^{y=\pi}$$

$$= -\frac{\pi \cos \pi x}{x} + \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x^2}$$

Exemplo 3: solução 2 (continuação)

$$\int_0^{\pi} y \,\mathrm{sen}(xy)\, dy = -\frac{\pi \cos \pi x}{x} + \frac{1}{x^2}\left[\mathrm{sen}(xy)\right]_{y=0}^{y=\pi}$$

$$= -\frac{\pi \cos \pi x}{x} + \frac{\mathrm{sen}\, \pi x}{x^2}$$

Se integrarmos o primeiro termo por partes com

$$u = -1/x \qquad dv = \pi \cos \pi x \, dx$$

$$du = dx/x^2 \qquad v = \mathrm{sen}\, \pi x$$

Exemplo 3: solução 2 (continuação)

$$\int_0^{\pi} y \operatorname{sen}(xy)\, dy = -\frac{\pi \cos \pi x}{x} + \frac{1}{x^2}\left[\operatorname{sen}(xy)\right]_{y=0}^{y=\pi}$$

$$= -\frac{\pi \cos \pi x}{x} + \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x^2}$$

Se integrarmos o primeiro termo por partes com

$$u = -1/x \qquad dv = \pi \cos \pi x\, dx$$

$$du = dx/x^2 \qquad v = \operatorname{sen} \pi x$$

$$\int \left(-\frac{\pi \cos \pi x}{x}\right) dx = -\frac{\operatorname{sen} \pi x}{x} - \int \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x^2}\, dx$$

Exemplo 3: solução 2 (continuação)

$$\int \left(-\frac{\pi \cos \pi x}{x} + \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x^2} \right) dx = -\frac{\operatorname{sen} \pi x}{x}$$

Exemplo 3: solução 2 (continuação)

$$\int \left(-\frac{\pi \cos \pi x}{x} + \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x^2} \right) dx = -\frac{\operatorname{sen} \pi x}{x}$$

$$\int_1^2 \int_0^\pi y \operatorname{sen}(xy)\, dy\, dx = \left[-\frac{\operatorname{sen} \pi x}{x} \right]_1^2$$

Exemplo 3: solução 2 (continuação)

$$\int \left(-\frac{\pi \cos \pi x}{x} + \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x^2} \right) dx = -\frac{\operatorname{sen} \pi x}{x}$$

$$\int_1^2 \int_0^\pi y \operatorname{sen}(xy)\, dy\, dx = \left[-\frac{\operatorname{sen} \pi x}{x} \right]_1^2$$

$$= -\frac{\operatorname{sen} 2\pi}{2} + \operatorname{sen} \pi = 0$$

Exemplo 3: solução 2 (continuação)

$$\int \left(-\frac{\pi \cos \pi x}{x} + \frac{\text{sen}\, \pi x}{x^2} \right) dx = -\frac{\text{sen}\, \pi x}{x}$$

$$\int_1^2 \int_0^\pi y\, \text{sen}(xy)\, dy\, dx = \left[-\frac{\text{sen}\, \pi x}{x} \right]_1^2$$

$$= -\frac{\text{sen}\, 2\pi}{2} + \text{sen}\, \pi = 0$$

- A integração em dy primeiro deixou o cálculo muito mais complicado, embora de mesmo resultado.

Valor médio

- O valor médio de uma função f de uma variável definida em um intervalo [a, b] é.

$$f_{\text{med}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Valor médio

- O valor médio de uma função *f* de uma variável definida em um intervalo [a, b] é.

$$f_{\text{med}} = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx$$

- De modo semelhante, o valor médio de uma função *f* de duas variáveis em um retângulo R, sendo *A*(R) a área de R, será:

$$f_{\text{med}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y)\, dA$$

Valor médio

- Se $f\,(x, y) \geq 0$ a equação

$$A(R) \times f_{\text{med}} = \iint_R f(x, y)\, dA$$

Valor médio

- Se $f(x, y) \geq 0$ a equação

$$A(R) \times f_{\text{med}} = \iint_R f(x, y)\, dA$$

diz que a caixa com base R e altura f_{med} tem o mesmo volume que o sólido sob o gráfico de f.

Valor médio

- Se f (x, y) ≥ 0 a equação

$$A(R) \times f_{\text{med}} = \iint_R f(x, y)\, dA$$

diz que a caixa com base R e altura f_{med} tem o mesmo volume que o sólido sob o gráfico de f.

- Se $z = f$ (x, y) descreve uma região montanhosa e você corta os topos dos morros na altura f_{med}, então pode usá-los para encher os vales de forma a tornar a região completamente plana. (veja a Figura 11).

Valor médio

- Se $z = f\ (x, y)$ descreve uma região montanhosa f_{med}, divide o volume total, constituído do volume dos picos e o volume vazio dos vales, exatamente ao meio.

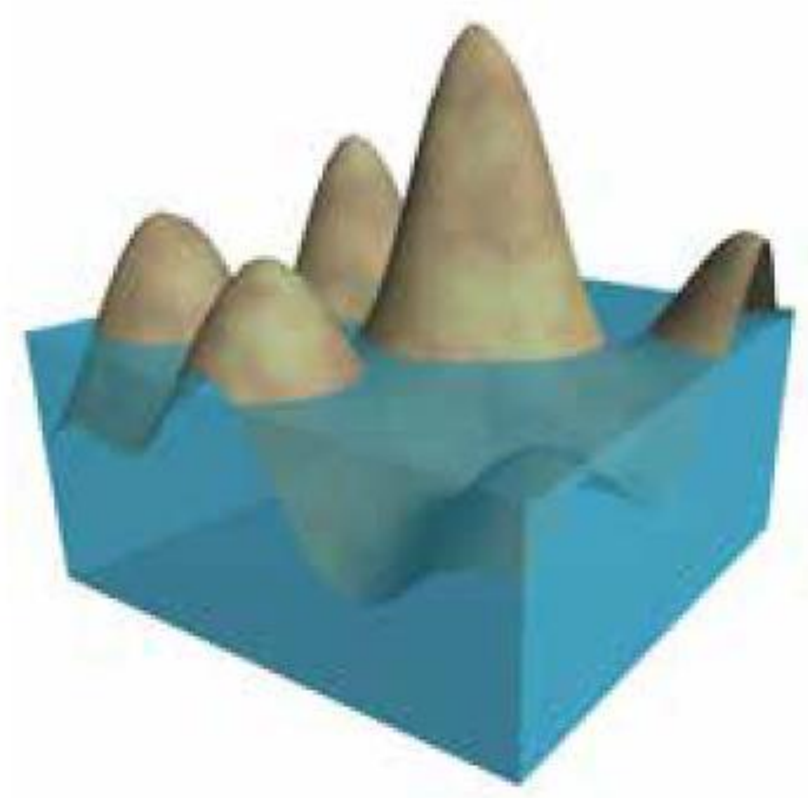


FIGURA 11

Para depois desta aula:

- Estudar seção 15.2 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

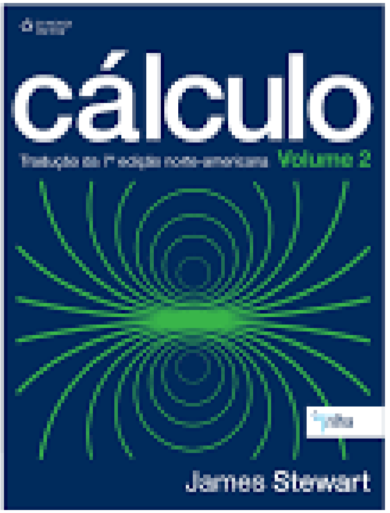
Próxima aula:

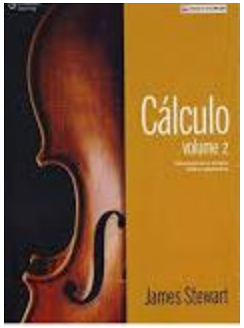
- Integrais duplas sobre regiões mais gerais.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed.





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.

Contatos

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br