# Cálculo II

## Bacharelado e Engenharias

# Semana 13 - Aula 1
# Campos vetoriais

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria
henrique.faria@unesp.br

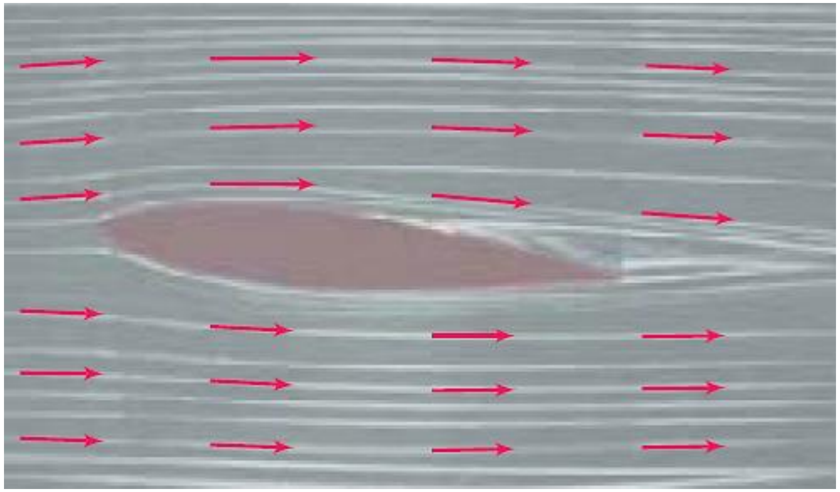
# Campos vetoriais

- Um **campo vetorial** é uma função cujo **domínio** é um conjunto de pontos de $R^2$ (ou $R^3$) e cuja **imagem** é um conjunto de vetores em $V_2$ (ou $V_3$).

# Campos vetoriais

- Um **campo vetorial** é uma função cujo **domínio** é um conjunto de pontos de $R^2$ (ou $R^3$) e cuja **imagem** é um conjunto de vetores em $V_2$ (ou $V_3$).
- Exemplos de campos vetoriais de velocidade estão ilustrados nas Figuras a seguir.


(a) Correntes oceânicas



(b) Escoamento do ar por um aerofólio

# Definições de campos vetoriais

## Definição no plano

Seja $D$ um conjunto em $\mathbb{R}^2$ (uma região plana). Um **campo vetorial em** $\mathbb{R}^2$ é uma função $\mathbf{F}$ que associa a cada ponto $(x, y)$ em $D$ um vetor bidimensional $\mathbf{F}(x, y)$.

# Definições de campos vetoriais

## Definição no plano

Seja $D$ um conjunto em $\mathbb{R}^2$ (uma região plana). Um **campo vetorial em** $\mathbb{R}^2$ é uma função $\mathbf{F}$ que associa a cada ponto $(x, y)$ em $D$ um vetor bidimensional $\mathbf{F}(x, y)$.

## Definição no espaço

Seja $E$ um subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Um **campo vetorial em** $\mathbb{R}^3$ é uma função $\mathbf{F}$ que associa a cada ponto $(x, y, z)$ em $E$ um vetor tridimensional $\mathbf{F}(x, y, z)$.

# Campos vetoriais

- A melhor maneira de construir um campo vetorial no plano é desenhar a seta representando o vetor **F**(x, y) começando no ponto (x, y).
- Podemos visualizar **F** fazendo isso para alguns pontos representativos em D.

# Campos vetoriais

- A melhor maneira de construir um campo vetorial no plano é desenhar a seta representando o vetor **F**(x, y) começando no ponto (x, y).
- Podemos visualizar **F** fazendo isso para alguns pontos representativos em D.
- **F**(x, y) é um vetor bidimensional, podemos escrevê-lo em termos de suas funções componentes P e Q da seguinte forma:

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j} = \langle P(x, y), Q(x, y) \rangle$$

$$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$$

# Campos vetoriais

- P e Q são funções escalares de duas variáveis e são chamadas, algumas vezes, campos escalares, para distingui-los dos campos vetoriais.

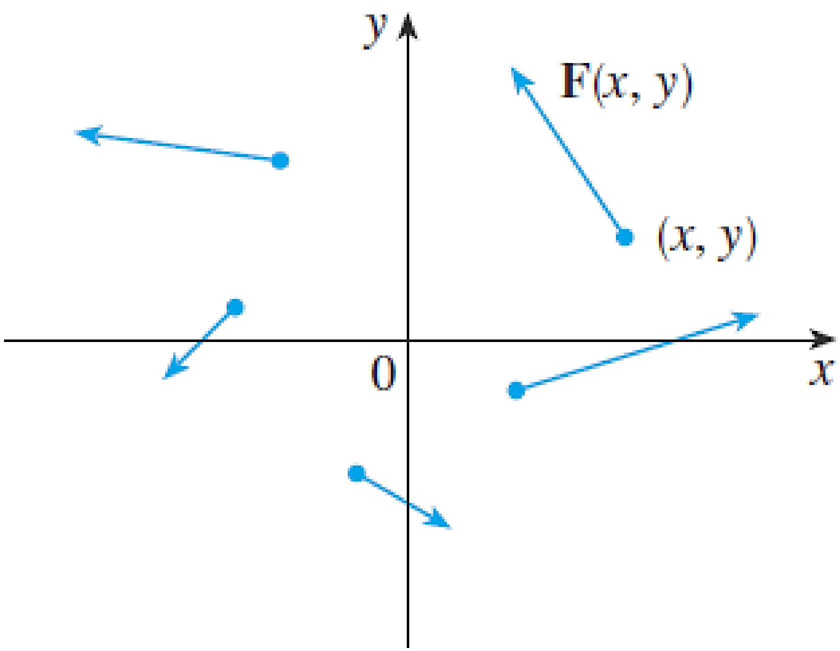



**FIGURA 3** Campo vetorial em $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$$

# Campos vetoriais

- Um campo vetorial **F** em $R^3$ é ilustrado na Figura 4.

- **F** será contínua se e somente se suas funções componentes P, Q e R forem contínuas.

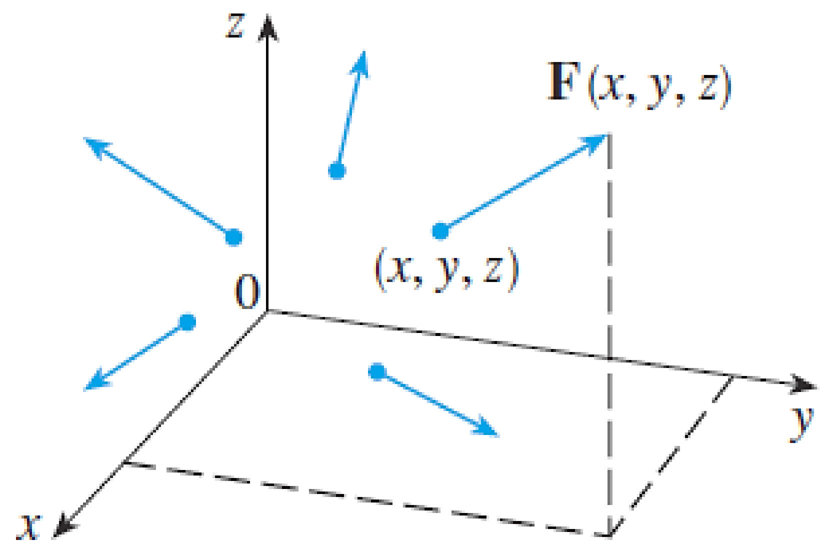



**FIGURA 4** Campo vetorial em $\mathbb{R}^3$

# Campos vetoriais

- Um campo vetorial **F** em $R^3$ é ilustrado na Figura 4.

- **F** será contínua se e somente se suas funções componentes P, Q e R forem contínuas.

- Podemos escrevê-lo em termos das funções componentes P, Q e R:

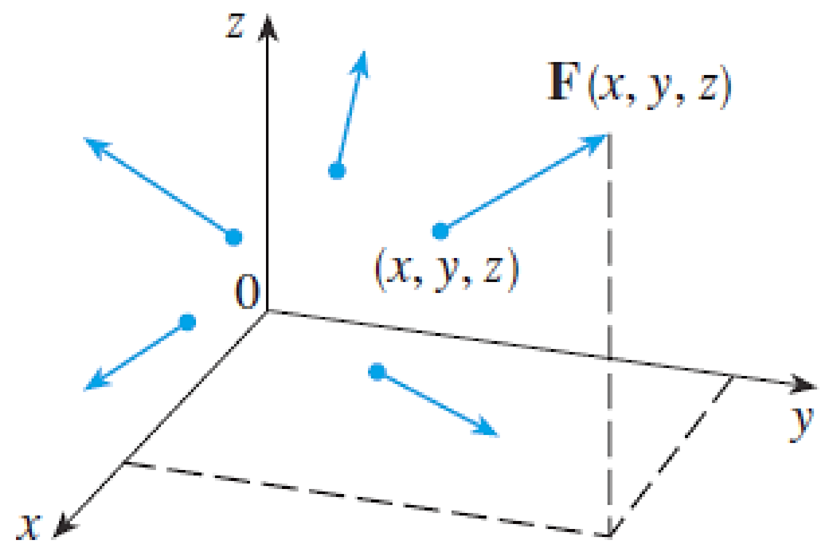



**FIGURA 4** Campo vetorial em $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

## Exemplo 1

Um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ é definido por $\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$. Descreva $\mathbf{F}$ esboçando alguns dos vetores $\mathbf{F}(x, y)$ como na Figura 3.

# Campos vetoriais

## Exemplo 1

Um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ é definido por $\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$. Descreva $\mathbf{F}$ esboçando alguns dos vetores $\mathbf{F}(x, y)$ como na Figura 3.

## Solução:

Uma vez que $\mathbf{F}(1, 0) = \mathbf{j}$, desenhamos o vetor $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$

| $(x, y)$ | $\mathbf{F}(x, y)$ |
|---|---|
| $(1, 0)$ | $\langle 0, 1 \rangle$ |

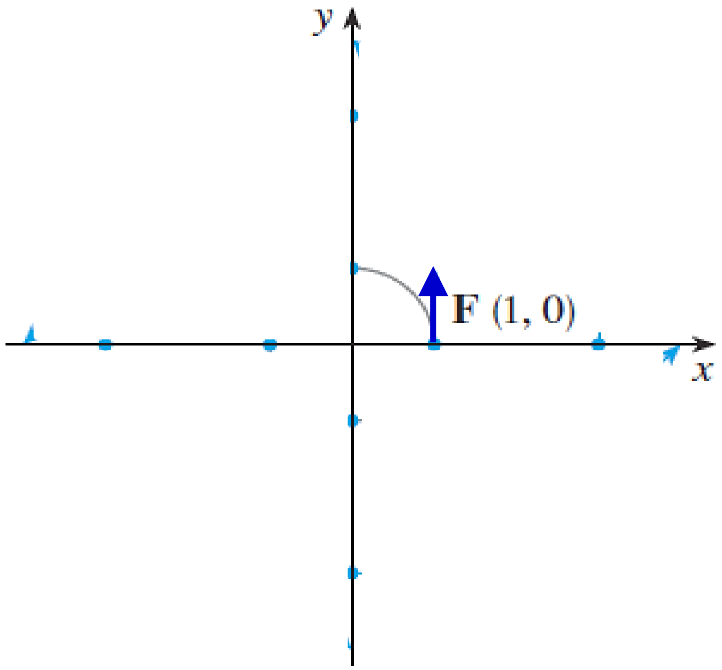



FIGURA 5 $\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$

# Campos vetoriais

## Exemplo 1

Um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ é definido por $\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$. Descreva $\mathbf{F}$ esboçando alguns dos vetores $\mathbf{F}(x, y)$ como na Figura 3.

## Solução:

Uma vez que $\mathbf{F}(1, 0) = \mathbf{j}$, desenhamos o vetor $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$

| $(x, y)$ | $\mathbf{F}(x, y)$ | $(x, y)$ | $\mathbf{F}(x, y)$ |
|---|---|---|---|
| $(1, 0)$ | $\langle 0, 1 \rangle$ | $(-1, 0)$ | $\langle 0, -1 \rangle$ |

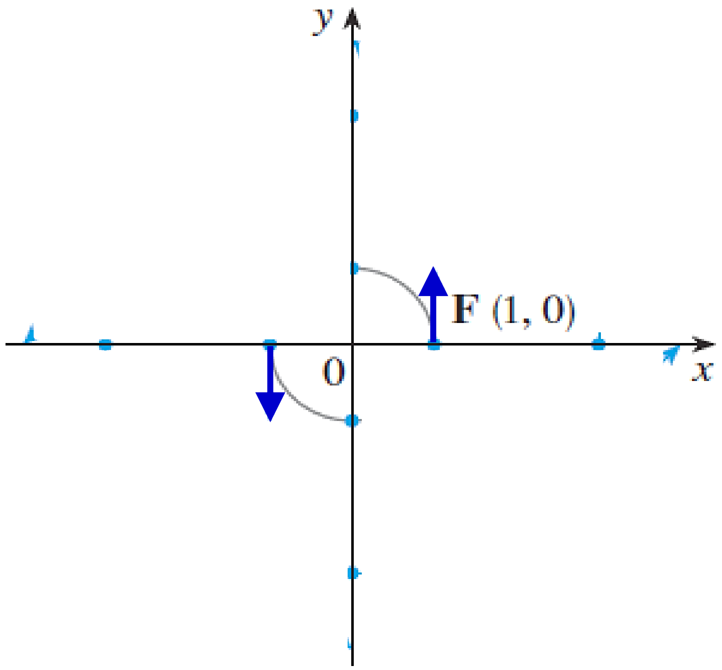



**FIGURA 5** $\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$

# Campos vetoriais

## Exemplo 1

Um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ é definido por $\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$. Descreva $\mathbf{F}$ esboçando alguns dos vetores $\mathbf{F}(x, y)$ como na Figura 3.

## Solução:

Uma vez que $\mathbf{F}(1, 0) = \mathbf{j}$, desenhamos o vetor $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$

| $(x, y)$ | $\mathbf{F}(x, y)$ | $(x, y)$ | $\mathbf{F}(x, y)$ |
|---|---|---|---|
| $(1, 0)$ | $\langle 0, 1 \rangle$ | $(-1, 0)$ | $\langle 0, -1 \rangle$ |
| $(2, 2)$ | $\langle -2, 2 \rangle$ | $(-2, -2)$ | $\langle 2, -2 \rangle$ |
| $(3, 0)$ | $\langle 0, 3 \rangle$ | $(-3, 0)$ | $\langle 0, -3 \rangle$ |
| $(0, 1)$ | $\langle -1, 0 \rangle$ | $(0, -1)$ | $\langle 1, 0 \rangle$ |
| $(-2, 2)$ | $\langle -2, -2 \rangle$ | $(2, -2)$ | $\langle 2, 2 \rangle$ |
| $(0, 3)$ | $\langle -3, 0 \rangle$ | $(0, -3)$ | $\langle 3, 0 \rangle$ |

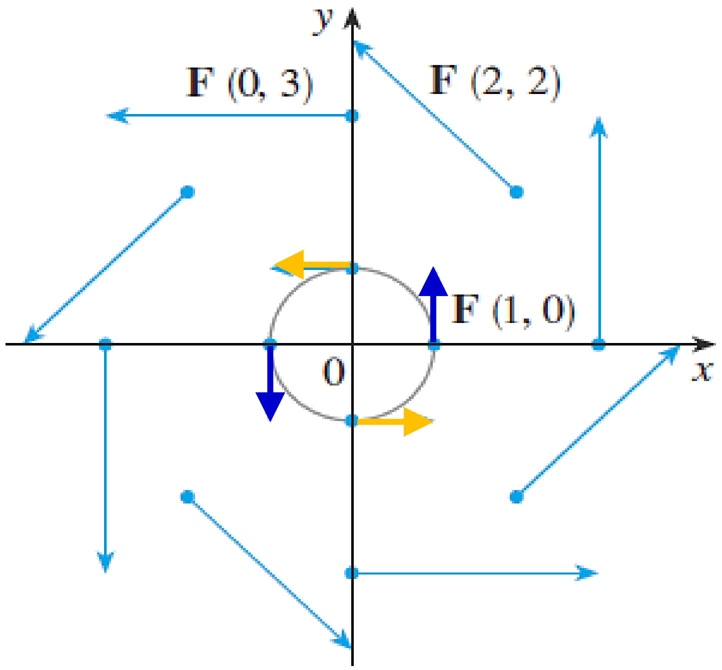



**FIGURA 5** $\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$

# Campos vetoriais

- Alguns sistemas de computação algébrica são capazes de traçar um campo vetorial em duas ou três dimensões.

# Campos vetoriais

- Alguns sistemas de computação algébrica são capazes de traçar um campo vetorial em duas ou três dimensões.
- Eles fornecem melhor visualização do campo, pois representam grande número de vetores.

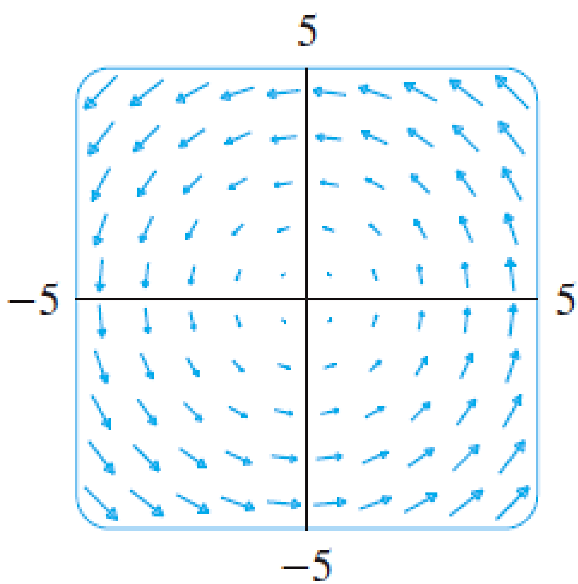



**FIGURA 6** $\mathbf{F}(x, y) = \langle -y, x \rangle$

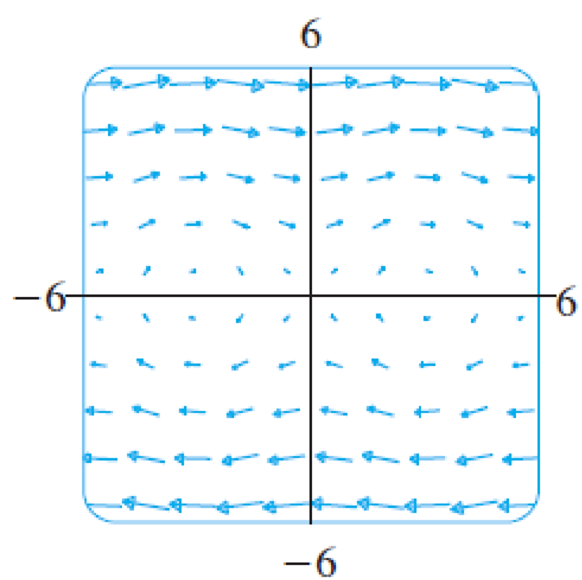



**FIGURA 7** $\mathbf{F}(x, y) = \langle y, \operatorname{sen} x \rangle$

# Campos vetoriais

- Os campos vetoriais nas Figuras 10 e 11 têm fórmulas semelhantes.

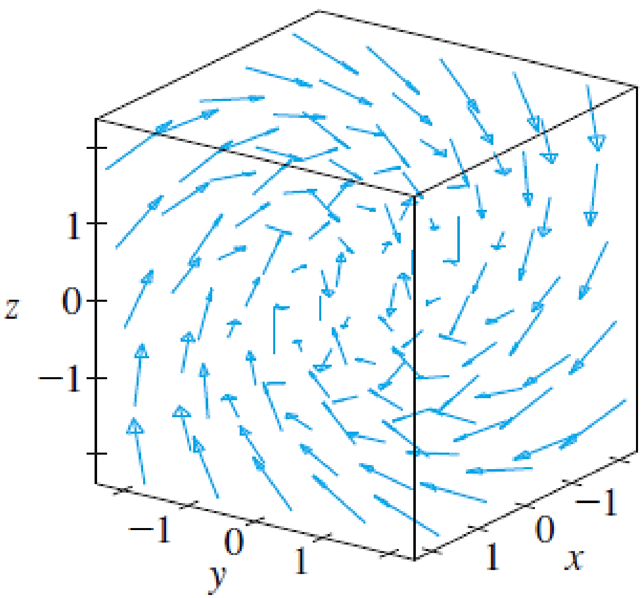



**FIGURA 10** $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$

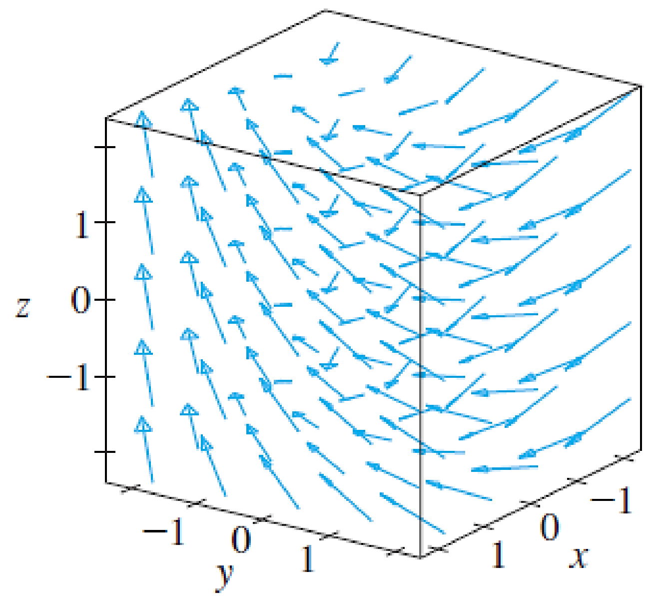



**FIGURA 11** $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$

# Campos vetoriais

- Os campos vetoriais nas Figuras 10 e 11 têm fórmulas semelhantes.
- Contudo, todos os vetores na Figura 11 apontam na direção do eixo negativo y porque seus componentes y são todos -2.

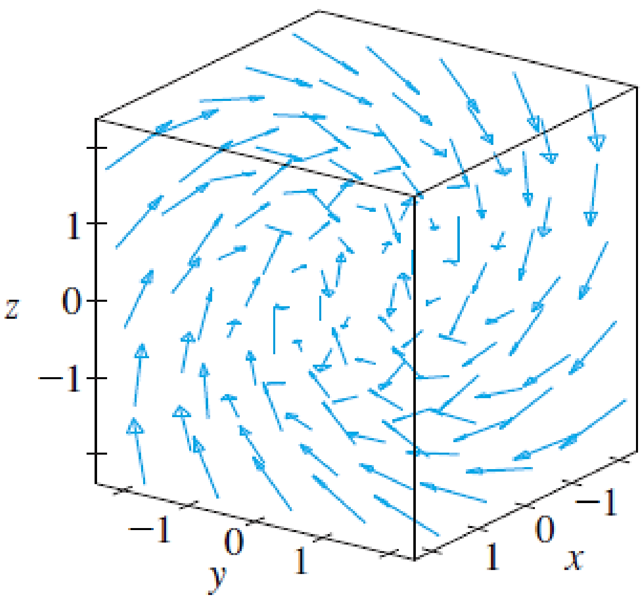



**FIGURA 10** $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$

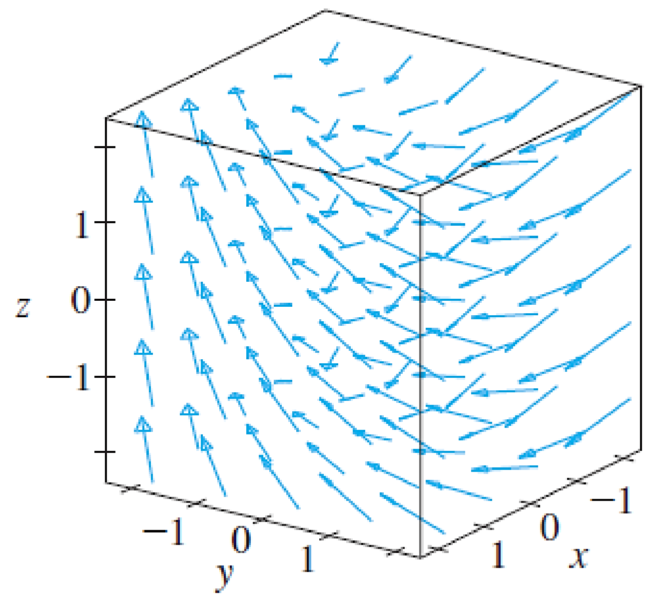



**FIGURA 11** $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$

# Campos vetoriais

## Exemplo 2

A Lei da Gravitação de Newton afirma que a intensidade da força gravitacional entre dois objetos com massas $m$ e $M$ é

$$|\mathbf{F}| = \frac{mMG}{r^2}$$

onde $r$ é a distância entre os objetos e $G$ é a constante gravitacional.

# Campos vetoriais

## Exemplo 2

A Lei da Gravitação de Newton afirma que a intensidade da força gravitacional entre dois objetos com massas $m$ e $M$ é

$$|\mathbf{F}| = \frac{mMG}{r^2}$$

onde $r$ é a distância entre os objetos e $G$ é a constante gravitacional.

## Interpretação:

Vamos supor que o objeto com massa $M$ esteja localizado na origem em $\mathbb{R}^3$. Seja o vetor posição do objeto com massa $m$

# Campos vetoriais

## Exemplo 2

A Lei da Gravitação de Newton afirma que a intensidade da força gravitacional entre dois objetos com massas $m$ e $M$ é

$$|\mathbf{F}| = \frac{mMG}{r^2}$$

onde $r$ é a distância entre os objetos e $G$ é a constante gravitacional.

## Interpretação:

Vamos supor que o objeto com massa $M$ esteja localizado na origem em $\mathbb{R}^3$. Seja o vetor posição do objeto com massa $m$

$\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$. A direção do vetor unitário é $-\dfrac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$

# Campos vetoriais

## Exemplo 2

A Lei da Gravitação de Newton afirma que a intensidade da força gravitacional entre dois objetos com massas $m$ e $M$ é

$$|\mathbf{F}| = \frac{mMG}{r^2}$$

onde $r$ é a distância entre os objetos e $G$ é a constante gravitacional.

## Interpretação:

Vamos supor que o objeto com massa $M$ esteja localizado na origem em $\mathbb{R}^3$. Seja o vetor posição do objeto com massa $m$

$\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$. A direção do vetor unitário é $-\dfrac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$

Então $r = |\mathbf{x}|$, logo, $r^2 = |\mathbf{x}|^2$.

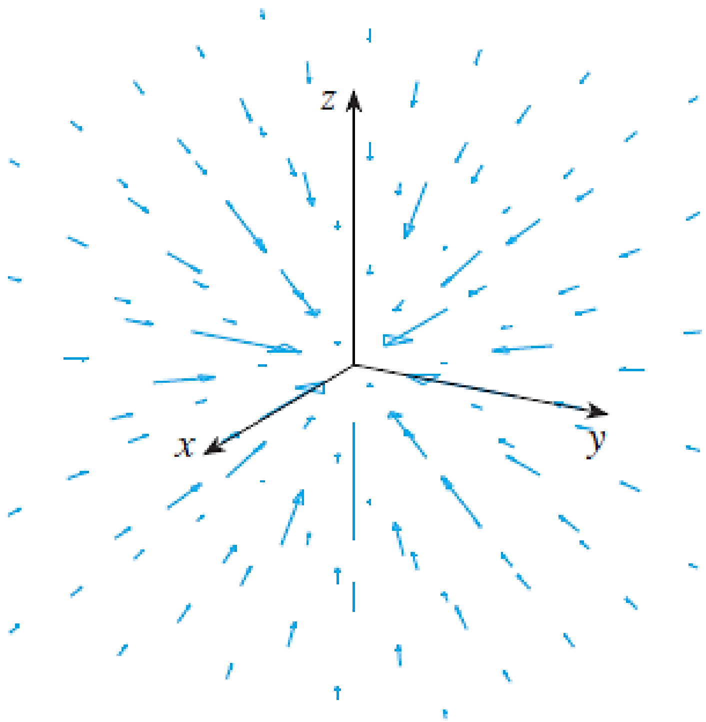
# Campos vetoriais

## Exemplo 2 - Interpretação

Portanto, a força gravitacional agindo no objeto em $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$ é

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}$$

**FIGURA 14** Campo de força gravitacional



# Campos vetoriais

## **Exemplo 2** - Interpretação

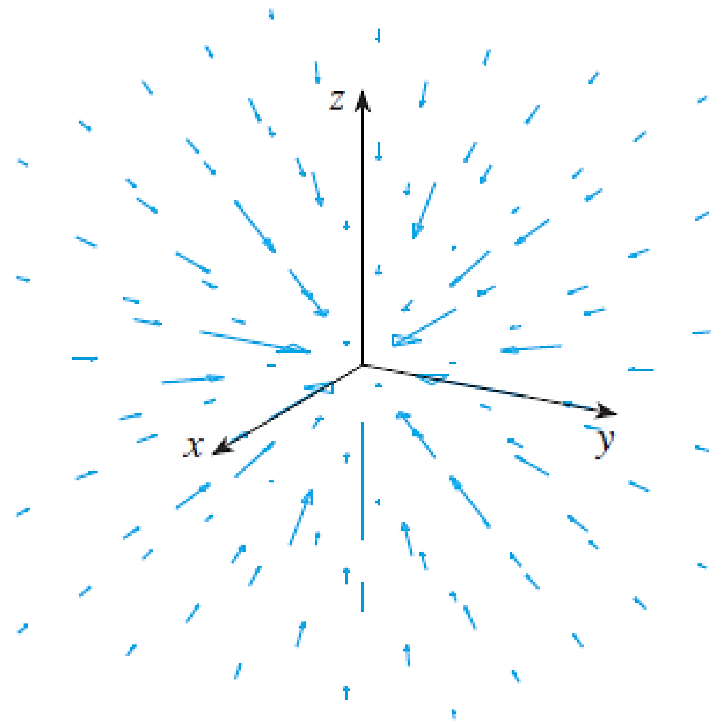
Portanto, a força gravitacional agindo no objeto em $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$ é

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}$$

Os físicos usam a notação $\mathbf{r}$ para o vetor posição, então

$$\mathbf{F} = -(mMG/r^3)\mathbf{r}.$$

**FIGURA 14** Campo de força gravitacional

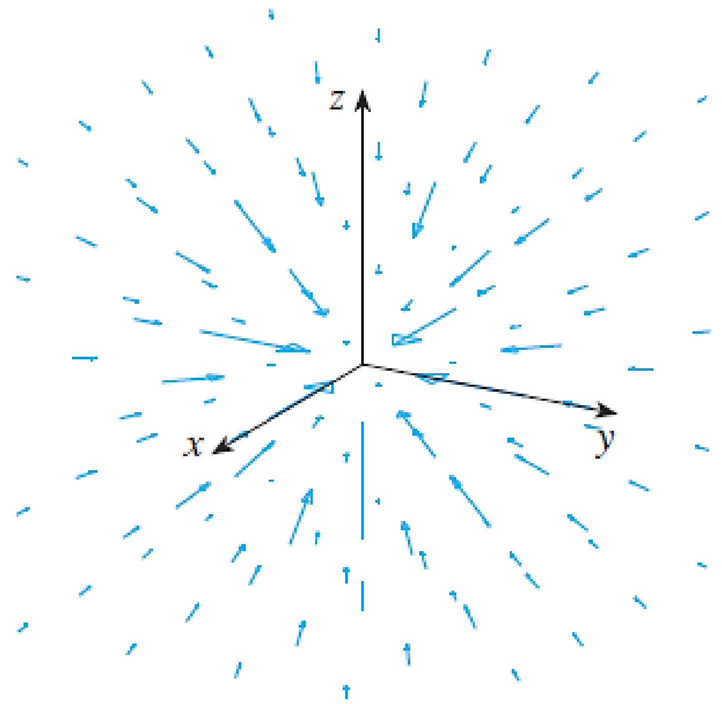


# Exemplo 2 - Interpretação

Portanto, a força gravitacional agindo no objeto em $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$ é

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}$$

FIGURA 14 Campo de força gravitacional




Os físicos usam a notação $\mathbf{r}$ para o vetor posição, então

$$\mathbf{F} = -(mMG/r^3)\mathbf{r}.$$

podemos escrevê-lo em termos de suas funções componentes,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{i} + \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{j} + \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{k}$$

# Campo vetorial Gradiente

- Se $f$ é uma função escalar de duas variáveis, seu gradiente $\nabla f$ (ou grad $f$ ) é definido por:

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\,\mathbf{i} + f_y(x, y)\,\mathbf{j}$$

# Campo vetorial Gradiente

- Se $f$ é uma função escalar de duas variáveis, seu gradiente $\nabla f$ (ou grad $f$ ) é definido por:

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\,\mathbf{i} + f_y(x, y)\,\mathbf{j}$$

- Portanto, $\nabla f$ é realmente um campo vetorial em $R^2$ e é denominado campo vetorial gradiente.

# Campo vetorial Gradiente

- Se $f$ é uma função escalar de duas variáveis, seu gradiente $\nabla f$ (ou grad $f$ ) é definido por:


- Portanto, $\nabla f$ é realmente um campo vetorial em $R^2$ e é denominado campo vetorial gradiente.
- Da mesma forma, se $f$ for uma função escalar de três variáveis, seu gradiente é um campo vetorial em $R^3$ dado por:


- Portanto, $\nabla f$ é realmente um campo vetorial em $R^2$ e é denominado campo vetorial gradiente.
- Da mesma forma, se $f$ for uma função escalar de três variáveis, seu gradiente é um campo vetorial em $R^3$ dado por:

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\,\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\,\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

# Campo vetorial Gradiente

## Exemplo 3

Determine o campo vetorial gradiente de $f(x, y) = x^2y - y^3$. Desenhe o campo vetorial gradiente juntamente com um mapa de contorno de $f$.

# Campo vetorial Gradiente

## Exemplo 3

Determine o campo vetorial gradiente de $f(x, y) = x^2y - y^3$. Desenhe o campo vetorial gradiente juntamente com um mapa de contorno de $f$.

## Solução:

O campo vetorial gradiente é dado por

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j}$$

$$= 2xy\,\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\,\mathbf{j}$$

# Campo vetorial Gradiente

## Exemplo 3

Determine o campo vetorial gradiente de $f(x, y) = x^2y - y^3$. Desenhe o campo vetorial gradiente juntamente com um mapa de contorno de $f$.

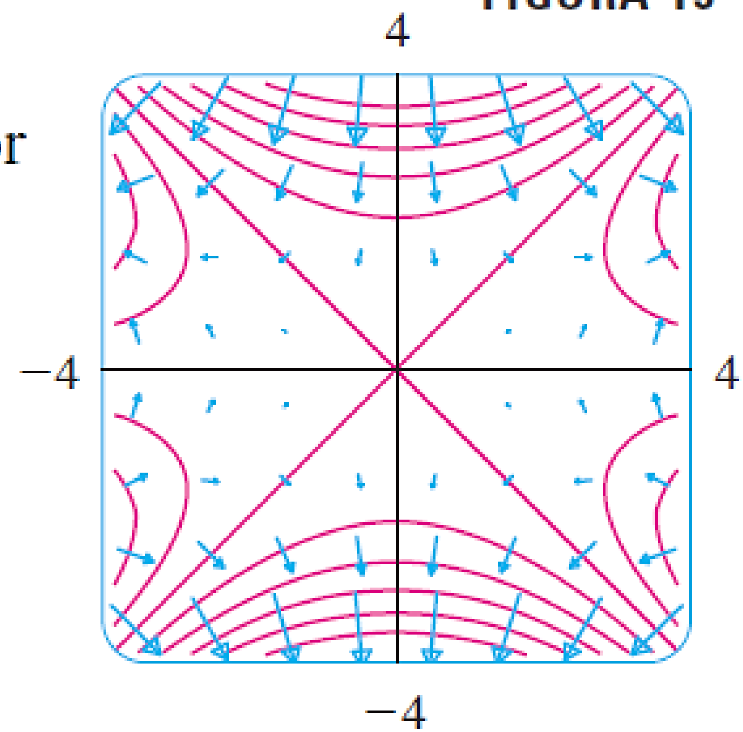
Solução:

O campo vetorial gradiente é dado por

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j}$$

$$= 2xy\,\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\,\mathbf{j}$$

FIGURA 15



# Campo vetorial conservativo

- Um campo vetorial **F** é chamado campo vetorial conservativo se ele for o gradiente de alguma função escalar.
- Ou seja, se existir uma função $f$ tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

# Campo vetorial conservativo

- Um campo vetorial **F** é chamado campo vetorial conservativo se ele for o gradiente de alguma função escalar.
- Ou seja, se existir uma função $f$ tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.
- Nessa situação, $f$ é denominada **função potencial** de **F**.
- Na física isto significa que a força em cada ponto do campo pode ser expressa a partir de um potencial.

# Campo vetorial conservativo

- Um campo vetorial **F** é chamado campo vetorial conservativo se ele for o gradiente de alguma função escalar.
- Ou seja, se existir uma função $f$ tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.
- Nessa situação, $f$ é denominada **função potencial** de **F**.
- Na física isto significa que a força em cada ponto do campo pode ser expressa a partir de um potencial.
- Os campos conservativos mais comuns são: campo gravitacional e campo eletrostático.

# Para depois desta aula:

- Estudar seção 16.1 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

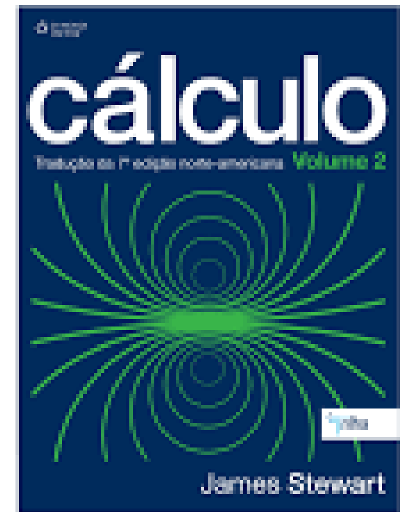
# Próxima aula:

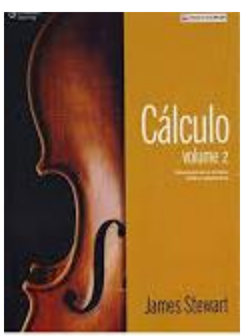
- Integrais de linha.

# Bibliografia

**1**. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed. ▶




STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.

# Contatos

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br