

و $a = \sqrt{2} > 1$ لأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2}^n = +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (3)^n - \frac{1}{2^n} = +\infty - 0 = +\infty$$

$(-2)^n$ ليست لها نهاية لأن: $a = -2 < -1$

لأن: $-1 < a = \frac{1}{4} < 1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4)^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(4)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

و لأن: $a = \frac{5}{4} > 1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(5)^n}{(4)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n = +\infty$

تمرين 5: أحسب النهايات التالية: (1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{3n}} - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{5}{n^2} - 1$

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-3 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ (3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 - 3n - 7}{3n^2 + 5}$

(4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3)^n + (2)^n}{(2)^n}$

(5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} - 2n$ (6) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n$

أجوبة: (1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{3n}} - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{5}{n^2} - 1 = 0 - 0 + 0 - 1 = -1$

لأن: $-1 < a = \frac{2}{3} < 1$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n^2} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{3n}} = 0$

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-3 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = (-3 + 0)(1 + 0) = (-3)(1) = -3$

لأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$

(3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 - 3n - 7}{3n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \left(4 - \frac{3}{n} - \frac{7}{n^2}\right)}{n^2 \left(3 + \frac{5}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(4 - \frac{3}{n} - \frac{7}{n^2}\right)}{\left(3 + \frac{5}{n^2}\right)} = \frac{4}{3}$

لأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{n^2} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n^2} = 0$

(5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n$ الحساب مباشرة نحصل على شكل غير محدد

من قبيل: $+\infty - \infty$

(4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ لأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(n-1) = +\infty$

و $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 1 = +\infty$ و $+\infty \times +\infty = +\infty$ لأن: $-1 < a = \frac{2}{3} < 1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3)^n + (2)^n}{(2)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3)^n}{(2)^n} + \frac{(2)^n}{(2)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n + 1 = +\infty + 1 = +\infty$

تمرين 1: أحسب النهايات التالية: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2}{n^3}$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n}$ و

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{n^7}$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-6}{\sqrt{n}}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^9$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}n^6$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} -3n^5$

أجوبة: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2}{n^3} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n} = 0$ و

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{n^7} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-6}{\sqrt{n}} = 0$

و $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}n^6 = -\infty$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} -3n^5 = -\infty$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^9 = +\infty$

تمرين 2: أحسب النهايات التالية: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-4}{n^3} - 7$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + 3$ و

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{n^7}$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{n}} + 5$ و

أجوبة: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-4}{n^3} - 7 = 0 - 7 = -7$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + 3 = 0 + 3 = 3$ و

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{n^7} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{n}} + 5 = 0 + 5 = 5$

تمرين 3: أحسب النهايات التالية: $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n$ ، $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ،

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-5)^n$

أجوبة: لأن: $a = 2 > 1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$

لأن: $-1 < a = \frac{2}{3} < 1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

$(-5)^n$ ليست لها نهاية لأن: $a = -5 < -1$

تمرين 4: أحسب النهايات التالية: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2})^n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,7)^n$ و

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(5)^n}{(4)^n}$ ، $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4)^{-n}$ ، $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2)^n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n - \frac{1}{2^n}$ و

أجوبة: لأن: $-1 < a = 0,7 < 1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,7)^n = 0$

الحساب مباشرة نحصل على شكل غير محدد من $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} - 2n$ (6)
قبيل: $+\infty - \infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} - 2n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} (1 - 2\sqrt{n}) = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - 2\sqrt{n}) = -\infty \text{ و } +\infty \times -\infty = -\infty$$

تمرين 6: أحسب النهايات التالية: (1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{7}{n^2}}$

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6n^3 - 2n^5 + 7n - 9$ (3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^3 - 5n^2 + 3n - 1$

(4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9n-3}{3n+5}$ (5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2-9}{3n+1}$ (6) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+1}{n^5+3n-4}$

(7) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2+1}{14n^3-5n+9}$ (8) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)^2 - (n-1)^2$

أجوبة: (1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{7}{n^2}} = \frac{5}{3}$ لأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{n^2} = 0$

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^3 - 5n^2 + 3n - 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^3 = +\infty$ لأن: نهاية

متتالية حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة

(3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6n^3 - 2n^5 + 7n - 9 = \lim_{n \rightarrow +\infty} -2n^5 = -\infty$ لأن: نهاية متتالية

حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة

(4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9n-3}{3n+5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9n}{3n} = \frac{9}{3} = 3$ لأن: نهاية متتالية جذرية هي

خارج نهاية حديها الأكبر درجة.

(5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2-9}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2}{3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \times 2 \times n \times n}{3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \times n = +\infty$

لأن: نهاية متتالية جذرية هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة

(6) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+1}{n^5+3n-4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \times n}{n \times n \times n \times n \times n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$

(7) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2+1}{14n^3-5n+9} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2}{14n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n \times n}{14n \times n \times n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0$

(8) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)^2 - (n-1)^2$ الحساب مباشرة نحصل على شكل

غير محدد من قبيل: $+\infty - \infty$

لأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)^2 - (n-1)^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + 2n + 1 - (n^2 - 2n + 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4n = +\infty$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$

تمرين 7: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي:

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = 5u_n + 8 \\ u_0 = 4 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي: $v_n = u_n + 2$

1. أحسب u_1 و v_0 و v_1

2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها: 5

3. أكتب v_n بدلالة n

4. استنتج u_n بدلالة n

5. أحسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

الجواب: (1) نعوض ب0

فنجد: $u_{0+1} = 5 \times u_0 + 8 = 5 \times 4 + 8 = 28$

نعوض ب n فنجد: $v_0 = u_0 + 2 = 4 + 2 = 6$

نعوض ب n فنجد: $v_1 = u_1 + 2 = 28 + 2 = 30$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} + 2}{u_n + 2} = \frac{5u_n + 8 + 2}{u_n + 2} = \frac{5u_n + 10}{u_n + 2} = \frac{5(u_n + 2)}{u_n + 2} = 5 = q \quad (2)$$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $5 = q$

وحدها الأول $v_0 = 6$

(3) كتابة v_n بدلالة n

بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $5 = q$ وحدها الأول v_0

فان: $v_n = v_0 \times q^n$ أي: $v_n = 6 \times (5)^n$

استنتاج u_n بدلالة n

(4) لدينا: $v_n = u_n + 2$ اذن: $v_n - 2 = u_n$ أي: $u_n = 6 \times (5)^n - 2$

(5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (5)^n = 0$ لأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 6 \times (5)^n = +\infty$

$1 < q = 5$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 6 \times (5)^n - 2 = +\infty$

تمرين 8: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي:

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 2 \\ u_0 = -1 \end{cases}$$

كالتالي: $v_n = u_n - \frac{8}{3}$

1. أحسب u_1 و v_0 و v_1

2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها: $\frac{1}{4}$

3. أكتب v_n بدلالة n

4. استنتج u_n بدلالة n

5. أحسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

الأجوبة: (1) نعوض ب0

فنجد: $u_1 = \frac{1}{4}u_0 + 2 = \frac{1}{4} \times (-1) + 2 = -\frac{1}{4} + 2 = \frac{7}{4}$ اذن: $u_{0+1} = \frac{1}{4} \times u_0 + 2 = \frac{1}{4} \times (-1) + 2 = -\frac{1}{4} + 2 = \frac{7}{4}$

نعوض ب n فنجد: 0

$v_0 = u_0 - \frac{8}{3} = -1 - \frac{8}{3} = -\frac{11}{3}$

و نعوض ب n فنجد: $v_1 = u_1 - \frac{8}{3} = \frac{7}{4} - \frac{8}{3} = -\frac{11}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{19}{3}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - \frac{8}{3}}{u_n - \frac{8}{3}} = \frac{\frac{1}{4}u_n + 2 - \frac{8}{3}}{u_n - \frac{8}{3}} = \frac{\frac{1}{4}u_n - \frac{2}{3}}{u_n - \frac{8}{3}} = \frac{\frac{1}{4}(u_n - \frac{8}{3})}{u_n - \frac{8}{3}} = \frac{1}{4} = q \quad (2)$$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4} = q$

وحدها الأول $v_0 = -\frac{11}{3}$

(3) كتابة v_n بدلالة n : بما أن المتتالية (v_n) هندسية

3) كتابة v_n بدلالة n

بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2} = q$

وحدها الأول $v_0 = -6$ فان: $v_n = (-6) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

استنتاج u_n بدلالة n : لدينا: $v_n = u_n - 10$

اذن: $u_n + 10 = v_n$ أي: $u_n = -6 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 10$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad (4)$$

لأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ ولأن $-1 < a = \frac{1}{2} < 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 10 = 0 + 10 = 10$$

أساسها $\frac{1}{4} = q$ وحدها الأول v_0 فان: $v_n = v_0 \times q^n$

$$\text{أي: } v_n = -\frac{11}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

4) استنتاج u_n بدلالة n : لدينا: $v_n = u_n - \frac{8}{3}$ اذن: $v_n + \frac{8}{3} = u_n$

$$\text{أي: } u_n = -\frac{11}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{8}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{11}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{11}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{8}{3} = \frac{8}{3} - 1 < a = \frac{1}{4} < 1$$

تمرين 9: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي:

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 5 \\ u_0 = 4 \end{cases}$$

كالتالي: $v_n = u_n - 10$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1

2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

3. أكتب v_n بدلالة n واستنتج u_n بدلالة n

4. أحسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

الجواب: نعوض ب 0

$$\text{فنجد: } u_1 = 7 \quad \text{اذن: } u_{0+1} = \frac{1}{2} \times u_0 + 5 = \frac{1}{2} \times 4 + 5 = 2 + 5 = 7$$

$$\text{نعوض ب } n \text{ فنجد: } u_{1+1} = \frac{1}{2} \times u_1 + 5 = \frac{1}{2} \times 7 + 5 = \frac{7}{2} + \frac{10}{2} = \frac{17}{2}$$

$$\text{اذن: } u_2 = \frac{17}{2}$$

$$\text{نعوض ب } n \text{ فنجد: } v_0 = u_0 - 10 = 4 - 10 = -6$$

$$\text{نعوض ب } n \text{ فنجد: } v_1 = u_1 - 10 = 7 - 10 = -3$$

(2)

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 10}{u_n - 10} = \frac{\frac{1}{2}u_n + 5 - 10}{u_n - 10} = \frac{\frac{1}{2}u_n - 5}{u_n - 10} = \frac{\frac{1}{2}u_n - \frac{10}{2}}{u_n - 10} = \frac{\frac{1}{2}(u_n - 10)}{u_n - 10} = \frac{1}{2} = q$$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2} = q$ وحدها الأول

$$v_0 = -6$$