التمرين 1

1) ليكن α عدد حقيقي : بين أن $\left((\forall \varepsilon>0) ; |\alpha|<\varepsilon\right) \Rightarrow \alpha=0$

باستلزام المضاد للعكس نبين أن $\alpha \neq 0 \Rightarrow \left((\exists \varepsilon>0) ; |\alpha| \geqslant \varepsilon\right)$

لأن $(P \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{P})$

نفترض أن $\alpha \neq 0$ إذن

$$\alpha \neq 0 \Rightarrow |\alpha|>0$$

ونعلم أن $\Rightarrow |\alpha| \geqslant \frac{|\alpha|}{3}>0$

نضع $\varepsilon=\frac{|\alpha|}{3}$

إذن

$$\alpha \neq 0 \Rightarrow |\alpha| \geqslant \varepsilon$$

وبالتالي

$$(\exists \varepsilon>0) ; |\alpha| \geqslant \varepsilon$$

وبالتالي

$$\alpha \neq 0 \Rightarrow \left((\exists \varepsilon>0) ; |\alpha| \geqslant \varepsilon\right)$$

خلاصة :

$$\left((\exists \varepsilon>0) ; |\alpha|<\varepsilon\right) \Rightarrow \alpha=0$$

---

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^2-|x-2|-5=0$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$\|x-2\|$	$2-x$		$x-2$

• إذا كان $x \geqslant 2$

المعادلة تصبح :

$$x^2-x+2-5=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-x-3=0$$

ونعلم أن

$$\Delta = b^2-4a\times c$$

ت.ع

$$= (-1)^2-4\times1\times(-3)$$

$$= 1+12=13>0$$

وبالتالي المعادلة تقبل حلين مختلفين

إذن

$$\begin{cases} x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-\sqrt{13}}{2} < 2 \end{cases}$$

إذن $S=\left\{\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}$ (1)

إذا كان $x<2$

المعادلة تصبح : $x^2-2+x-5=0$

$$\Leftrightarrow x^2+x-7=0$$

مميز المعادلة

$$\Delta = b^2-4\times a\times c$$

ت.ع

$$= 1^2-4\times1\times(-7)$$

$$= 1+28=29>0$$

إذن المعادلة تقبل حلين مختلفين

$$\begin{cases} x_1=\frac{-1+\sqrt{29}}{2} > 2 \\ x_1'=\frac{-1-\sqrt{29}}{2} \end{cases}$$

إذن المعادلة تقبل حل واحد

أي $S=\left\{\frac{-1-\sqrt{29}}{2}\right\}$ (2)

من ① و ② نستنتج أن :

$$S = \left\{ \frac{-1-\sqrt{29}}{2} ; \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right\}$$

3) استنتج حل المتراجحة :

$$x^2-|x-2| \geq 5$$

$$\Leftrightarrow x^2-|x-2|-5 \geq 0$$

ولدينا حسب السؤال السابق حلول المعادلة $(E): x^2-|x-2|-5=0$ هي

$$S = \left\{ \frac{-1-\sqrt{29}}{2} ; \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right\}$$

اذن

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{29}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$		$+\infty$
$x^2-\|x-2\|-5$		$+$	0	$-$	0	$+$	

وبالتالي جدول اشارة $x^2-|x-2|-5$

$$\boxed{S = \left]-\infty ; \frac{-1-\sqrt{29}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{13}}{2} ; +\infty\right[}$$

4) A) بين أن $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$

(برهان بالخلف)

نفترض ان $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$

اذن $a \in \mathbb{Z}$ و $b \in \mathbb{Z}^*$ و $a \wedge b = 1$

$$\sqrt{6} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow 6 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow 6b^2 = a^2 \quad ①$$

$$\Rightarrow a^2 = 2 \times (3b^2)$$

إذن a^2 عدد زوجي وبالتالي a عدد زوجي

أي $\exists k \in \mathbb{Z}$ بحيث $a = 2k$

اذن $a^2 = 4k^2$

نعوض a^2 بقيمتها في ① ونجد :

$$6b^2 = 4k^2$$

$$\Rightarrow \cancel{2} \times 3b^2 = \cancel{2} \times 2k^2$$

$$\Rightarrow 3b^2 = 2k^2$$

اذن $3b^2$ عدد زوجي

وبما أن 3 عدد فردي إذن b^2 عدد زوجي.

وبالتالي b عدد زوجي

وهذا تناقض مع كون $a \wedge b = 1$

$$\boxed{\text{وبالتالي } \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}}$$

B) إستنتج أن $\sqrt{3}-\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

(برهان بالخلف)

نفترض ان $\sqrt{3}-\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

اذن يوجد $\alpha \in \mathbb{Q}$ بحيث $\sqrt{3}-\sqrt{2} = \alpha$

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 = \alpha^2$$

ومنه $3 - 2\sqrt{3}\times\sqrt{2} + 2 = \alpha^2$

أي $5 - 2\sqrt{6} = \alpha^2$

اذن $5 - \alpha^2 = 2\sqrt{6}$

وبالتالي $\sqrt{6} = \frac{5-\alpha^2}{2} \in \mathbb{Q}$

وهذا تناقض لأن $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$

ملاحظة:

$$(a \in \mathbb{Q}^*, b \notin \mathbb{Q}) \Rightarrow \begin{cases} a+b \notin \mathbb{Q} \\ ab \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

تتمة التمرين 1

5- بين أن

$$0\times1+1\times2+2\times3+3\times4+\dots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{2}$$

(برهان بالتراجع)

المرحلة 1: من أجل $n=0$ لدينا

$$\frac{0\times(0+1)(0+2)}{2}=0=0\times1$$

إذن العبارة صحيحة من أجل $n=0$

المرحلة 2: ليكن $n\in\mathbb{N}$:

نفترض أن:

$$\underbrace{1\times2+2\times3+3\times4+\dots+n(n+1)}_{}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

ونبين أن:

$$1\times2+2\times3+3\times4+\dots+n(n+1)+(n+1)(n+2)=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

لدينا:

$$\underbrace{1\times2+2\times3+3\times4+\dots+n(n+1)}_{}+(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}+(n+1)(n+2)$$

$$\Leftrightarrow 1\times2+2\times3+3\times4+\dots+(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}+\frac{3(n+1)(n+2)}{3}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)}{3}$$

$$=\frac{(n+3)(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\Leftrightarrow 1\times2+2\times3+3\times4+\dots+(n+1)(n+2)=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

وبالتالي

وبالتالي العبارة صحيحة من أجل $n+1$

المرحلة الثالثة:

حسب مبدأ التراجع:

$$(\forall n\in\mathbb{N}):\quad 1\times2+2\times3+3\times4+\dots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

تصحيح السؤال 6 التمرين 1.

6) بين أن $3^{2n}+2^{6n-5}$ يقبل القسمة على 11 لكل $n\in\mathbb{N}^*$

المرحلة 1:

من اجل $n=0$

لدينا
$$3^{2\times1}+2^{6\times1-5} = 9+2 = 11$$

إذن العبارة صحيحة من أجل الحد الأول

المرحلة 2:

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$.

نفترض أن $(\exists k\in\mathbb{N})\ ;\ 3^{2n}+2^{6n-5}=11k$

ونبين أن $(\exists k'\in\mathbb{N})\ ;\ 3^{2n+2}+2^{6n+1}=11k'$

لدينا
$$\begin{aligned}3^{2(n+1)}+2^{6(n+1)-5} &= 3^{2n+2}+2^{6n+6-5}\\ &= 3^2\times3^{2n}+2^6\times2^{6n-5}\\ &= 9\times3^{2n}+64\times2^{6n-5}\\ &= 9\times3^{2n}+(9+55)\times2^{6n-5}\\ &= 9\times3^{2n}+9\times2^{6n-5}+55\times2^{6n-5}\\ &= 9(3^{2n}+2^{6n-5})+11\times5\times2^{6n-5}\\ &= 9\times11k+11\times5\times2^{6n-5}\\ &= 11(9k+5\times2^{6n-5})\end{aligned}$$

نضع $9k+5\times2^{6n-5}=k'\in\mathbb{N}$

وبالتالي
$$3^{2n+2}+2^{6n+1}=11k'$$

اذن العبارة صحيحة من اجل $n+1$

المرحلة 3.

اذن حسب مبدأ الترجع: $3^{2n+2}+2^{6n+1}$ يقبل القسمة على 11 لكل $n\in\mathbb{N}^*$

تصحيح التمرين 2 الفرض المنزلي

1) جدول تغيرات الدالة f على I

x	-3		-2		0		2		4
f	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3

2) تحدد مطاريف الدالة f

لدينا حسب جدول تغيرات f

$(\forall x\in I)\ ;\ -2\leq f(x)\leq 3$

وبما أن: $f(2)=-2$ و $f(4)=3$

اذن $(\forall x\in I);\ f(2)\leq f(x)\leq f(4)$

وبالتالي:

⊕ القيمة القصوى لـ f على I هي: 3

⊕ القيمة الدنيا لـ f على I هي: -2

3) عدد حلول المعادلة $f(x)=1$

لدينا المستقيم ذو المعادلة $y=1$ يقطع منحنى الدالة f في 4 نقاط

وبالتالي:

عدد حلول المعادلة هي 4.

5)
$$\begin{cases} f([-2;0])=[-1;2]\\ f([-3;4])=[-2;3]\end{cases}$$

ملاحظة ⚠ :

ليكن I مجال ضمن D_f و f دالة عددية

$f(I)$ هي جميع صور عناصر I

التمرين 3.

الجزء A: لتكن f دالة عددية معرفة كما يلي: $f(x)=x^3+x^2+x$

1) ليكن x و y عددين من $\mathbb{R}$.

تذكير: $x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$

الطريقة 1

$$\overbrace{x^2+(1+y)x}^{x^2+ax}+y^2+y+1=\left(x+\frac{1+y}{2}\right)^2-\frac{(1+y)^2}{4}+y^2+y+1$$

$$=\left(x+\frac{1+y}{2}\right)^2-\frac{y^2+2y+1}{4}+\frac{4y^2}{4}+\frac{4y}{4}+\frac{4}{4}$$

$$=\left(x+\frac{1+y}{2}\right)^2+\frac{-y^2-2y-1+4y^2+4y+4}{4}$$

$$=\left(x+\frac{1+y}{2}\right)^2+\frac{3y^2+2y+3}{4}$$

$$=\left(x+\frac{1+y}{2}\right)^2+\underbrace{\frac{3}{4}y^2+\frac{2}{4}y}+\frac{3}{4}$$

$$=\left(x+\frac{1+y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\overbrace{y^2+\frac{2}{3}y}\right)+\frac{3}{4}$$

$$=\left(x+\frac{1+y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left[\left(y+\frac{\frac{2}{3}}{2}\right)^2-\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{4}\right]+\frac{3}{4}$$

$$=\left(x+\frac{1+y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(y+\frac{2}{6}\right)^2-\frac{3}{4}\times\frac{\frac{4}{9}}{4}+\frac{3}{4}$$

وبما أن

$$-\frac{3}{4}\times\frac{\frac{4}{9}}{4}+\frac{3}{4}=-\frac{3}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{4}}{9\times4}+\frac{3}{4}=\frac{-3}{9\times4}+\frac{3}{4}=\frac{-3+27}{36}=\frac{24}{36}>0$$

$$=\left(x+\frac{1+y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(y+\frac{2}{6}\right)^2+\frac{24}{36}>0$$

لأن $\left(x+\frac{1+y}{2}\right)^2\geq0$ و $\frac{3}{4}\left(y+\frac{2}{6}\right)^2\geq0$ و $\frac{24}{36}>0$

وبالتالي: $x^2+(1+y)x+y^2+y+1>0$

الجزء A:

A-1) بين أن $x^2+(1+y)x+y^2+y+1>0$

الطريقة 2. ليكن x و y عددين حقيقيين.

$$x^2+(1+y)x+y^2+y+1 = x^2+x+y^2+y+xy+1$$

$$= \frac{1}{2}\,2\left(x^2+x+y^2+y+xy+1\right) = \frac{1}{2}\left(2x^2+2x+2y^2+2y+2xy+2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{x^2+2x+1}+\underbrace{y^2+2y+1}+x^2+2xy+y^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[(x+1)^2+(y+1)^2+(x+y)^2\right] \geq 0$$

تذكير. $a^2+b^2+c^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2>0$ أو $a^2+b^2+c^2=0$

$a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a^2=0$ و $b^2=0$

نفترض أن $(x+1)^2+(y+1)^2+(x+y)^2=0$

$\Leftrightarrow x+1=0$ و $y+1=0$ و $x+y=0$

$\Leftrightarrow x=-1$ و $y=-1$ و $x=-y$

$\Leftrightarrow x=-1$ و $y=-1$ و $-1=-(-1)=1$

وهذه العبارة خاطئة لأن $-1\neq 1$.

وبالتالي

$$\frac{1}{2}\left[(x+1)^2+(y+1)^2+(x+y)^2\right]>0$$

خلاصة

$$x^2+(1+y)x+y^2+y+1>0$$

A - 2) بين ان f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

$$T_f = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{x^3+x^2+x-y^3-y^2-y}{x-y}$$

$$= \frac{x^3-y^3+x^2-y^2+x-y}{x-y}$$

$$= \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)+(x-y)(x+y)+(x-y)}{x-y}$$

$$= \frac{\cancel{(x-y)}(x^2+xy+y^2+x+y+1)}{\cancel{x-y}}$$

$$= x^2+xy+y^2+x+y+1$$

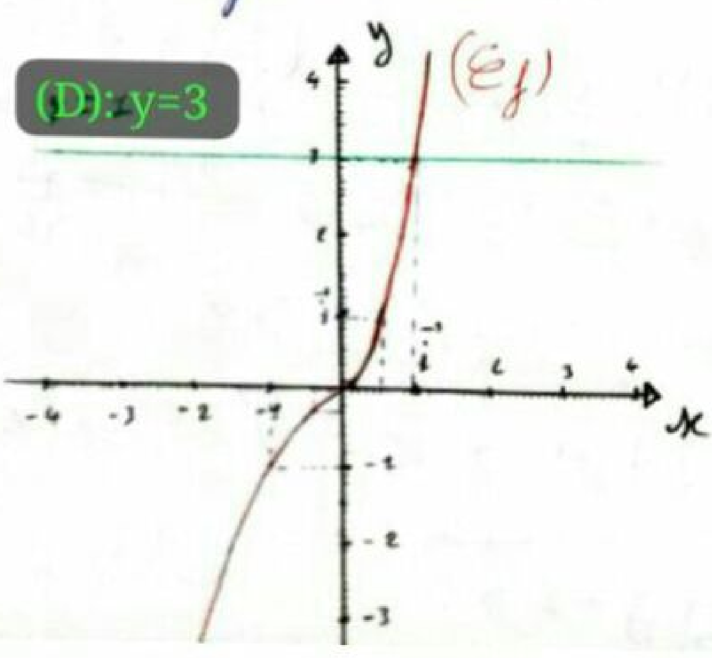
$$= x^2+x+xy+y^2+y+1$$

$$= x^2+(1+y)x+y^2+y+1 > 0$$

حسب السؤال السابق $x^2+(1+y)x+y^2+y+1>0$

وبالتالي الدالة f تزايدية قطعا على $D_f = \mathbb{R}$

3) منحنى الدالة f.



x	-1	$-0,4$	0	$0,1$	$0,54$	1
$f(x)$	-1	$-0,304$	0	$0,111$	$0,989$	3

ـمة الفرض المنزلي

ت. التمرين 3.

الجزء B:

نعتبر الدالة g المعرفة بما يلي:

$$g : x \longmapsto \sqrt{10-x}$$

1) حدد مجموعة تعريف g

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 10-x \geqslant 0\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \,/\, -x \geqslant -10\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leqslant 10\}$$
$$= \mathbb{R} \cap]-\infty ; 10]$$

وبالتالي $D_g =]-\infty ; 10]$

طريقة أخرى

$$x \in D_g \iff 10-x \geqslant 0$$
$$\iff -x \geqslant -10$$
$$\iff x \leqslant 10$$

وبالتالي $D_g =]-\infty ; 10]$

2) ادرس تغيرات الدالة g

الطريقة 1

ليكن x و y من D_g بحيث $x > y$

$$x > y \Rightarrow -x < -y$$
$$\Rightarrow 10-x < 10-y$$

وبما أن $x \longmapsto \sqrt{x}$ دالة تزايدية

إذن $\Rightarrow \sqrt{10-x} < \sqrt{10-y}$

أي $x > y \Rightarrow g(x) < g(y)$

وبالتالي الدالة g تناقصية قطعا على D_g

الطريقة 2

ليكن x و y من D_g و $x \neq y$

$$T_g = \frac{g(x)-g(y)}{x-y}$$

ت.ع
$$= \frac{\sqrt{10-x}-\sqrt{10-y}}{x-y}$$

$$= \frac{(\sqrt{10-x}-\sqrt{10-y})(\sqrt{10-x}+\sqrt{10-y})}{(x-y)(\sqrt{10-x}+\sqrt{10-y})}$$

$$= \frac{\sqrt{10-x}^2-\sqrt{10-y}^2}{(x-y)(\sqrt{10-x}+\sqrt{10-y})}$$

$$= \frac{\cancel{10}-x-(\cancel{10}-y)}{(x-y)(\sqrt{10-x}+\sqrt{10-y})}$$

$$= \frac{-x+y}{(x-y)(\sqrt{10-x}+\sqrt{10-y})}$$

$$= -\frac{\cancel{x-y}}{\cancel{(x-y)}(\sqrt{10-x}+\sqrt{10-y})}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{10-x}+\sqrt{10-y}} < 0$$

وبالتالي الدالة g تناقصية قطعا على D_g

3- استنتاج أن المعادلة $f(x)=g(x)$ تقبل حل واحد.

حسب السؤال (A-2) الدالة f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ و g تناقصية على $]-\infty ; 10]$

ونلاحظ أن $f(1)=g(1)=3$

وبالتالي المعادلة $g(x)=f(x)$ تقبل حل وحيد.

تمرين 3 :

الجزء C :

نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي :

$$h(x) = \frac{1+x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$$

1) تحقق أن $(\forall x \in]0;+\infty[);\ h(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

ليكن $x \in]0;+\infty[$

لدينا

$$f(x) = x^3 + x^2 + x$$

إذن

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}^2 \times \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} + \frac{x}{x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{x+\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}} = h(x)$$

وبالتالي

$$(\forall x \in]0;+\infty[);\ h(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

2- استنتج رتابة h على المجال $]0;+\infty[$

لندرس رتابة الدالة $k : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ على $]0;+\infty[$ ، ليكن x و y من $]0;+\infty[$

لدينا :

$$x > y \Rightarrow \sqrt{x} > \sqrt{y} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{y}} \Rightarrow k(x) < k(y)$$

إذن k دالة تناقصية قطعا على $]0;+\infty[$ و $k(]0;+\infty[) \subset \mathbb{R} = D_f$

ولدينا حسب السؤال A - 2) الدالة f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ إذن تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$ لأن $]0;+\infty[\subset \mathbb{R}$ وبما أن $h(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = f(k(x)) = (f \circ k)(x)$

وبالتالي h تناقصية قطعا على $]0;+\infty[$ (حسب رتابة مركب دالتين)