PLEASE, JEG SKAL IKKE DUMPE

Eske Penjor Hermann
31.5.2023

Af Eske Penjor Hermann

MATEMATIK B: NOTER

Indholdsfortegnelse

Matricer

101: Basis Information og Overordnet Regneregler

Basis information:

Matricer er opbygget af *m* rækker og *n* koloner. En $A_{3\times2}$ matrix optræder således:

$$\mathbf{A}_{3\times2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Hvor a_{ij} er værdien i den hhv. *i*'te række og *j*'te søjle

Matrix Typer:

Kvadratisk Matrix

En kvadratisk matrix har lige mange række og søjler. Eksempel:

$$\mathbf{B}_{3\times3} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{32} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Diagonal Matrix:

En diagonal matrix, er en matrix som kun indeholder værdier på de diagonale værdier. Eksempel:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_m \end{pmatrix}$$

Identitets Matrix & Initial 1'taller:

Identitets matricer har ligesom diagonale matricer kun værdier langs den diagonale, men disse er alle initial 1'taller. Et initial 1'tal, er et 1'tal som optræder som den eneste værdi i sin søjle, ergo har 0'er for oven og neden, og optræder tættere mod "venstre siden" jo mindre dens række tal er. Eksempel:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (\textbf{Identits Matrix})$$

Transponeret Matricer:

Når man transponerer en matrix, bytter man om kort sagt rækker og søjler, med andre ord: $\mathbf{A}(a_{ij})_{m\times n}$ er en given matrix, hvor den transponeret er markeret som $\mathbf{A}' = (a_{ji})_{n\times m}$ F.eks.

$$\mathbf{A}_{3\times2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}'_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Der gælder også følgende regneregler:

$(i)\ (A')' = A \quad (ii)\ (\mathbf{A}+\mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}' \quad (iii)(\alpha\mathbf{A})' = \alpha\mathbf{A}' \quad (iiii)(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}' \Leftrightarrow (\mathbf{BA}) = \mathbf{A}'\mathbf{B}'$

Symmetrisk Matrix:

En matrix er symmetrisk hvis $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$

Basale Regneregler

Der gælder nogen overordnet regneregler hvordan man lægger, fratrække og ganger matricer med hinanden. Overordnet ser de således ud, men gennemgås yderligere længere ned:

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \quad \textbf{(Associativ Lov)}$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC} \quad \textbf{(Venstre Påtrængende Lov)}$$
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC} \ \textbf{(Højre Påtrængende Lov)}$$

Hvis både **A** og **B** er matricer, så er det muligt for **AB** (Matrice produktet) eksistere, mens at **BA** ikke nødvendigvis gør. Yderligere så gælder det at:

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \ \text{ Undtagen specielle tilfælde}$$

$$\mathbf{AB} = 0 \text{ betyder ikke at } \mathbf{A} = 0 \text{ eller } \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{AB} = \mathbf{AC} \ \text{ og } \mathbf{A} \neq 0 \text{ er ikke ensbetydende med } \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

Addition mellem matricer:

Når man lægger to matricer sammen, ligger man værdierne i samme plads (v_{ij}). F.eks.:

$$\mathbf{A}_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n} \quad \mathbf{B}_{m\times n} = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$$
$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{m\times n}$$
$$\mathbf{A}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3+1 & 2+6 \\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Subtraktion mellem matricer:

Ligeledes når man trækker to matricer fra hinanden, trække man værdierne på samme plads (v_{ij}) fra hinanden. F.eks.:

$$\mathbf{A}_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n} \quad \mathbf{B}_{m\times n} = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$$
$$\mathbf{A}-\mathbf{B} = \left(a_{ij}-b_{ij}\right)_{m\times n}$$
$$\mathbf{A}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ 9 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}-\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2-3 & \frac{3}{2}-2 \\ 9-6 & \frac{1}{2}-\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 3 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Gange med et skalar produkt:

Når man ganger med et skalar (et tal) ganger man blot skala ind på hver af de $\left(v_{ij}\right)$. F.eks.:

$$\alpha = et\ tal$$
$$\alpha\mathbf{A} = \left(\alpha a_{ij}\right)_{m\times n}$$
$$\alpha = 3 \quad \mathbf{A}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{3} & 3 \\ 7 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \qquad 3\mathbf{A} = 3\cdot\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{3} & 3 \\ 7 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot\frac{1}{3} & 3\cdot 3 \\ 3\cdot 7 & 3\cdot 1 & 3\cdot\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & \frac{3}{3} & 9 \\ 21 & 3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Gange to matricer sammen:

Når man skal gange matricer er rækkefølgende man gør det vigtigt. Som vist tidligere, så er $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, (undtagen i specielle tilfælde). Når to matricer ganges sammen, så bliver det nye matrixproduktet opbygget af antallet af rækker fra den første matrix, og antallet af søjler fra den anden. Med andre ord:

$$\mathbf{A}_{m_1 \times n_1} \ \& \ \mathbf{B}_{m_2 \times n_2}$$
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{AB}_{m_1 \times n_2}$$
$$\mathbf{A}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{31} \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{AB}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} ab_{11} & ab_{12} \\ ab_{21} & ab_{21} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{BA}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} ba_{11} & ba_{12} & ba_{13} \\ ba_{21} & ba_{22} & ba_{23} \\ ba_{31} & ba_{32} & ba_{33} \end{pmatrix}$$

For at finde værdierne der skal side, kan det matematisk opskrives således:

$$\mathbf{AB} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$
$$\mathbf{BA} = \sum_{r=1}^{n} b_{ir}a_{rj} = b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \cdots + b_{in}a_{nj}$$

Hvori *i* betegner rækkenummer, *j* er søjler nummeret. Eksempel med tal:

$$\mathbf{A}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{AB}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 2\cdot 0 + 4\cdot 2 + 0\cdot 1 & 2\cdot 3 + 4\cdot 1 + 0\cdot 3 \\ 1\cdot 0 + 3\cdot 2 + 1\cdot 1 & 1\cdot 3 + 3\cdot 1 + 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{BA}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 0\cdot 2 + 3\cdot 1 & 0\cdot 4 + 3\cdot 3 & 0\cdot 0 + 3\cdot 1 \\ 2\cdot 2 + 1\cdot 1 & 2\cdot 4 + 1\cdot 3 & 2\cdot 0 + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 2 + 3\cdot 1 & 1\cdot 4 + 3\cdot 3 & 1\cdot 0 + 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 3 \\ 5 & 11 & 1 \\ 5 & 13 & 3 \end{pmatrix}$$

102 Ligning systemer og løsninger:

Lineær Uafhængighed:

Hvis man får givet en række søjle vektorer, $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots \boldsymbol{a_n}$, kan man undersøge om hvorvidt de er lineære uafhængige - Er det muligt at gang et skalar produkt på en vektor, og omdanne den til en af de andre.

Kort fortalt:

$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ er lineært uafhængige hvis:

$$c_1\boldsymbol{a_1} + c_2\boldsymbol{a_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{a_n} = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$
$$For\ reele\ tal\ c_1, c_2, \ldots, c_n$$

Yderligere:

$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ er lineært uafhængige hvis:

Der findes reelle tal $c_1, c_2, \ldots., c_n$ med $c_i \neq 0$ for mindst et *i* så:

$$c_1\boldsymbol{a_1} + c_2\boldsymbol{a_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{a_n} = 0$$

Søjlevektorer;

Hvis $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ er søjlevektorer, i **A,** er de lineært uafhængige ⇔ ligningsystemet: $\mathbf{A}x = 0$, kun har den trivielle løsning ⇔ $|\mathbf{A}| \neq 0$

Gauss Elimination:

Man kan opskrive ligningssystemer som er forbundet, i form af en matrix, og løser det derfra. F.eks.

$$\begin{aligned}&Lignings\ system:\\&2x+2y+4z=2\\&-x+2y=2\\&x-y+z=1\end{aligned}$$

Omskrives til

$$\begin{pmatrix}2&2&4\\-1&2&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

Vi kan løse systemet, ved at omdanne det til det *Udvidet Koefficient Matrix*, og derefter lave række operationer. Ergo:

$$\begin{pmatrix}2&2&4&2\\-1&2&0&2\\1&-1&1&1\end{pmatrix}_{\frac{1}{2}R1}\to\begin{pmatrix}1&1&2&1\\-1&2&0&2\\1&-1&1&1\end{pmatrix}_{R2+R1}\to\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&3&2&3\\1&-1&1&1\end{pmatrix}_{R3-R1}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&3&2&3\\0&-2&-1&0\end{pmatrix}_{R2+R3}\to\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&1&1&3\\0&-2&-1&0\end{pmatrix}_{R3+2R2}\to\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&1&1&3\\0&0&1&6\end{pmatrix}_{R1-R2}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&-2\\0&1&1&3\\0&0&1&6\end{pmatrix}_{\substack{R1-R3\\R2-R3}}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-8\\0&1&0&-3\\0&0&1&6\end{pmatrix}$$

Vi har nu omdannet matrixen til en reduceret echelon matrix, ved at der ved være række kun er initial 1'taller. Vi kan nu omskrive den reduceret echelon matrixen tilbage til ligningsform:

$$x=-8\ ,y=-3\ \ z=6$$

Sæt disse værdier i det originale ligningssystem for at tjekke det går op, og bekræfte at ligning systemet er løst:

$$\begin{aligned}&2\cdot(-8)+2\cdot(-3)+4\cdot6=2\Leftrightarrow 24-22=2\\&-(-8)+2\cdot(-3)=2\Leftrightarrow 8-6=2\\&-8-(-3)+6=1\Leftrightarrow 9-8=1\end{aligned}$$

Ligning system med ubekendt

Det kan fremgå at man får et ligningssystem med en ubekendt. F.eks.

$$\begin{aligned}&2x+4z=2\\&-x+2y=2\\&x-y+z=b\end{aligned}$$

Igen så omskriver vi til udvidet koefficientmatrix og laver række operationer til vi opnår en echelon matrix:

$$\begin{pmatrix}2&0&4&2\\-1&2&0&2\\1&-1&1&b\end{pmatrix}_{\frac{1}{2}R1}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&0&2\\1&-1&1&b\end{pmatrix}_{\substack{R2+R1\\R3-R1}}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&2&2&3\\0&-1&-1&b-1\end{pmatrix}_{\frac{1}{2}R2}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&\frac{3}{2}\\0&-1&-1&b-1\end{pmatrix}_{R3+R2}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&\frac{3}{2}\\0&0&0&\frac{1}{2}+b\end{pmatrix}$$

Vi kan set at i den nederste række, har vi anskaffet en nulrække, vi kan derudfra læse at hvis $b+\frac{1}{2}\neq 0\Leftrightarrow b=-\frac{1}{2}$, så vil der være ingen løsning fordi at ligning systemet ikke kan gå op.

For $b=-\frac{1}{2}$ har vi så, at z optræder som en fri variabel, som vi omskriver til $z=t$, og får:

$$x+2z=1 \iff x=1-2t$$
$$y+z=\frac{3}{2} \iff y=\frac{3}{2}-t$$

Hvilket formelt set skriver op som:

$$Hvis\ og\ kun\ hvis\ b=-\frac{1}{2}, så\ er\ løsningen\ til\ ligning\ systemet:$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad t \in \mathbb{R}$$

To frie variabler og en ubekendt:

Vi har ligningssystemet

$$\begin{array}{rcl} 2x_3+4x_4 & = & 2 \\ x_1+2x_2+2x_3+5x_4 & = & 3 \\ x_1+2x_2+x_3+3x_4 & = & a \end{array} \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}$$

Omdanner det igen til en den udvidede koefficient matrix, og laver række operationer indtil vi får echelon.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & a \end{pmatrix}_{R1\Leftrightarrow R2} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & a \end{pmatrix}_{\frac{1}{2}R2} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & a \end{pmatrix}_{R3-R1} \to$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & a-3 \end{pmatrix}_{R3+R2} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}_{R1-2R2} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$$

Igen, kan vi aflæse at hvis $a \neq 2$, så går systemet ikke op. Men hvis, og kun hvis $a=2$, så fremgår løsning således:

Både x_2 og x_4 fremgår som fri variabler, og vi har:

$$1.række: x_1+2x_2+x_4=1 \iff x_1=1-2x_2-x_4$$
$$2.række: x_3+2x_4=1 \iff x_3=1-2x_4$$
$$Og\ x_2\ \&\ x_4\ er\ fri\ variabler: x_2=t\ , x_4=s$$
$$hertil\ har\ vi:$$
$$For\ a=2, fremgår\ løsning\ til\ lignignssystemet:$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t,s \in \mathbb{R}$$

Kan evt. omskrives således: $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(1-2t-s,t,1-2s,s)$

103: Determinanter og Inverse Matricer

Man kalder en matrix for invertibel, hvis dens determinant $\neq 0$. Hvis en matrix har en determinant$=$ 0, kaldes den for Singulær. Man betegner determinant til en matrix således:

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ er en given matrix. $|\mathbf{A}| = \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2-(3\cdot 1) = -1$

Beregning af determinanter:

Der er en række metoder for at udregne determinanter for forskellige former af matricer.

For en 2x2 matrix, siger man blot: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, det$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - (b \cdot c) = ad - bc$

For større matricer, er en metode at man udvikler efter en række/søjle, for at omdanne en matrix til en 2x2. F.eks.

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{pmatrix}$**,** $\det(\mathbf{A}) = a_{i1} \cdot \mathbf{A}_{i1} + \cdots + a_{ij} \cdot \mathbf{A}_{ij} + \cdots + a_{in} \cdot \mathbf{A}_{in}$

Hvor $\mathbf{A_{11}}$ f.eks. er determinanten til matrixen uden 1. række og første 1.søjle:

$$\mathbf{A_{11}} = (-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ergo kan det skrives såldes:

$$\mathbf{A_{ij}} = (-1)^{(i+j)} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2j} & a_2,j+1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{ij} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Tip: Det kan være klogt at lave rækkeoperationer, indtil man har en række/søjle med kun et tal.

Saurus Metoden:

Saurus metoden kan benyttes til hurtigt finde determinanten til en 3x3 matrix. Man tillægge de første to søjler, og udregner derefter determinanten således via diagonalen:

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $|\mathbf{A}|$ via Saurus : $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$

$(a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) - (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}) = \det(\mathbf{A})$

Hoved Underdeterminanter

I en given kvadratisk matrix (samme antal række og søjler), ville der være en række hovedunderdeterminanter. Disse vil fremstå i forskellige "ordner" og der ville lige så mange ordner, som der er rækker/søjler. I den 1. orden sletter man de samme antal rækker og søjler, så der kun et element tilbage - altså man sletter f.eks. 1.første række og 1. søjle. Så i 2.orden sletter man en færre antal rækker og søjler, og man bliver ved til man når tilbage til matricen selv. F.eks.

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, 1. orden: $\Delta_1^{(1)} = |5| = 5$, $\Delta_1^{(2)} = |2| = 2$, 2.orden $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 19$

Ledende Hoved Underdeterminanter

Ligesom med hovedunder determinanter, sletter man rækker og søjler, men sletter man kun de "bagerste", det vil sige man arbejder baglæns. Man markerer disse med *D*. F.eks.:

$$\begin{aligned} &\mathit{Ledende\ Hoved\ Underdeterminanter}: \\ &1.\,\mathit{Orden}: D_1 = |5| = 5 \\ &2.\,\mathit{Orden}: D_2 = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 19 \end{aligned}$$

Definithed:

Man bruger underdeterminanterne fra før, til at bestemme en matrix' definithed. Ved brug af eksemplet fra før:

En given Matrix *er*:

$a)\ Positivt\ Semidefinit \Leftrightarrow \Delta_k \geq 0, k = 1,2,\dots,n$ *(k er alle hoved underdeterminanter)*

$b)\ Positivt\ Definit \Leftrightarrow D_k > 0, k = 1,2,..,n$ *(k er alle ledende hoved underdeterminanter)*

(Hvis en matrix er Positivt definit $\Rightarrow$ $Positivt\ semidefinit$) $(b) \Rightarrow a)$

$c)\ Negativt\ Semidefinit \Leftrightarrow (-1)^k\Delta_k \geq 0, k = 1,2,\dots n$

$d) Negativ\ Definit \Leftrightarrow (-1)^k D_k > 0, k = 1,2,\dots n$

$d) \Rightarrow c)$

Så for **A** ser vi at den hverken er Positivt- eller negativt definit. Så kaldes matricen for Indefinit.

Teorem fra EMEA 13.12.2

Lad $Q(x_2, \dots, x_n) = Q(\vec{x})$ være en kvadratisk form og A den tilhørende symmetriske $n \times n$ matrix (dvs. $Q(\vec{x}) = x'Ax$)

Idet D_k betegner den ledende hovedunderdeterminant af orden k for A og Δ_k^K er en vilkårlig hovedunderdeterminant af orden k for A, gælder at

(a) Q er positiv definit $\Leftrightarrow$ $D_k > 0$ for alle $k = 1, \dots, n$

(b) Q er positiv semidefinit $\Leftrightarrow$ $\Delta_k^K \geq 0$ for alle hovedunderdet. af orden $k = 1, \dots, n$

(c) Q er negativ definit $\Leftrightarrow$ < 0 for alle $k = 1, \dots, n$

(d) Q er negativ semidefinit$\Leftrightarrow$ $(-1)^k\Delta_k^K \geq 0$ for alle hovedunderdet. af orden $k = 1, \dots, n$

Hvis ingen af de overstående gør sig gældende er Q indefinit. (hvis en matrix har egenværdier med forskeligt fortegn er matrixen indefinit)

Inverse Matricer

Den inverse til en matrix, betegnes som $\mathbf{A}^{-1}$ og er en matrix som når prikkes med matrix **A** bliver matrixproduktet **I** (identitetsmatrixen, side 2.)

Der er flere metoder til at beregner den inverse matrix:

Metode A:

Opstil Matrix **A** op mod **I** og lave række operationer til de har" *byttet plads*". F.eks.:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{-1R1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{R2+3R1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}_{R1-R2}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}_{R1-R2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}_{-1R2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Vi har nu **I** på venstre siden, og nu $\mathbf{A}^{-1}$ på "højre".

Dette vil være den generelle metode til at finde den inverse matrice.

Metode B:

Metode B kan kun benyttes til matricer af 2x2 størrelser. Metoden ser således ud:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Overordnet regler:

$(i)\ \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A} \quad (ii)\ (\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \quad (iii)\ (\mathbf{A}')^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)' \quad (iiii)\ (c\mathbf{A})^{-1} = c^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

104 Egenværdier og Matrix Rank

Egenværdier:

Man betegner egenværdier ved *lambda* (λ). λ er en værdi $\in \mathbb{R}$, som betyder at hvis λ er en egenværdi for en matrix, så gælder det at der findes en *vektor* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \neq 0$, også kaldt en *egen vektor*, som opfylder:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

For at finde en matrix' egenværdier, så gælder det at $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$.
Dette kan omskrives således at:

$$p(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{pmatrix} a11 - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Hvis man får givet en egenværdi i en opgave, kan man tjekke om det rent faktisk er en egenværdi blot ved at indsætte den i formlen fra oven, og sikre sig at det giver 0.

$$Karakteristiske\ Ligning: |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$$
$$Karakteristiske\ Polynomie: |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|$$

Man løser det karakteristiske polynomier, hvis ikke kender til egenværdierne. Dette ville resultere i at λ vil være rødderne i det karakteristiske polynomium for en givet matrix. F.eks.

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & -8 \end{pmatrix}$, Det indsættes i det karakteristiske polynomium:

$$p(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & -4 \\ 0 & -4-\lambda & 0 \\ 4 & -2 & -8-\lambda \end{vmatrix}$$

Vi kan løse dette ved hjælp af at udvikle efter 2.række,

$$Vi\ udvikler\ ud\ fra\ 2.række:$$
$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & -4 \\ 0 & -4-\lambda & 0 \\ 4 & -2 & -8-\lambda \end{vmatrix} = 0 + (-1)^{(2+2)} \cdot (-4-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 4 & -8-\lambda \end{vmatrix} + 0$$
$$= (-4-\lambda)(6\lambda + \lambda^2) = \lambda(-4-\lambda)(6+\lambda)$$

$\lambda(-4-\lambda)(6+\lambda) = 0, når\ \ \lambda_1 = -4\,, \lambda_2 = 0\ eller\ \lambda_3 = -6$

Egen vektorer:

Sæt egenværdien ind i formlen, og løs som var det et homogent ligningssystem, via denne formel:

$$p(\lambda) = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n) \cdot x = 0$$

Hvor $(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})$ er koefficientmatricen. F.eks.:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\ ,\quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)((3-\lambda)^2 - 1)$$

$\lambda_1 = 2, (med\ et\ multiplikation\ på\ 2)\ og\ \lambda_2 = 4\ (multiplikation\ på\ 1)$

$Fordi, (2-\lambda)((3-\lambda)^2 - 1) = 0\,, 2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$

$eller\ (3-\lambda)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 8\,, D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 4\ \ \lambda = \dfrac{6 \pm 2}{2 \cdot 1}\begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$

Så har vi formlen:

$$For\ \lambda = 2: \mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{R2-R1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Løsningen\ aflæses\ til:$$

$x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2$
$0 = 0$
$0 = 0$
$Hvor\ x_2 = t, en\ fri\ variabel\ og\ x_3 = s, en\ fri\ variabel:$

$$Egenvekotren\ for\ \lambda = 2: \boldsymbol{v_1} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (t, s) \neq (0,0)$$

$$For\ \lambda = 4: \mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}_{\substack{-\frac{1}{2}R3 \\ R2+R1}} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\substack{R2 \Leftrightarrow R3 \\ -1R1}} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, løsning\ er:$$

$x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$
$x_3 = 0$
$0 = 0$
$Hvor\ x_2 = t, en\ fri\ variabel$

$$Egenvekotren\ for\ \lambda = 4: \boldsymbol{v_2} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \neq 0$$

Matrix Rank:

Ranken af en matrix **A**, skrevet $r(\mathbf{A})$, er det maksimale antal af lineære uafhængige søjle vektorer i **A.**

Fra Thm. 1.2.1 har vi at for en given kvadratisk matrix **A**:

$$De\ n'te\ søjlevektorer\ af\ \mathbf{A}: \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\ af\ en\ n \times n$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, hvor\ \boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

$$Er\ lineære\ uafhænige\ hvis, og\ kun\ hvis\ |\mathbf{A}| \neq 0$$

Ydermere giver Thm. 1.3.1 os:

> $Ranken\ r(\mathbf{A})\ af\ en\ matrix\ \mathbf{A}, er\ lig\ med\ ordnen\ af\ dens\ største\ underdeterminant,$
> $som\ er\ forskelligt\ fra\ 0.$

Eksempel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, 3. ordens\ Hoved\ under\ determinanter:$$

$$\Delta_3^4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{(1+1)} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0, udviklet\ fra\ 1. søjle$$

$r(\mathbf{A}) = 3$

Ranken af en matrix er upåvirket af evt. rækkeoperationer.

Vektor Længde:

Længden af en vektor, findes ved denne formel:

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

Man dertil gælder der nogen ”uligheder”

$$Cauchy\text{-}Schwarz'\ ulighed$$
$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n\ er$$
$$|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|$$

Kan benyttes til at bevise trekantsuligheden:

$$\text{Trekantsuligheden:}$$
$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$$
$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$$

Vinkel mellem vektorerne:

Det gælder at vinklen mellem to vektorer kan findes ved denne sætning,

$$for\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\ \neq 0$$
$$\cos(\theta) = \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|}$$

Hvis $\cos(\theta) = \frac{\pi}{2} = 90°$, så siges de to vektorer at være ortogonale: $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y} \Rightarrow \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$

Afstand mellem to vektorer:

Afstanden mellem to vektorer er givet ved:

$$\det(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

105: Kvadratiske Former & Ortogonal Matrix og det show

Kvadratiske former

De er en speciel form for funktioner.

Så benyt denne overordnet formel for en evt. $Q(x, y, z)$ kvadratisk form, for at finde den symmetriske matrix som tilhører.

$$(x, y, z)\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
$$= ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$$

Hvis det evt. er en 2x2 matrix, så:

$$(x, y)\begin{pmatrix} a & d \\ d & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + by^2 2dxy$$

Hvor det er muligt at kigge på den oplyste kvadratisk form, og se direkte hvordan den symmetriske matrix ser ud. F.eks.:

$$Q(x, y, z) = -x^2 + 2y^2 - z^2 + 2xz$$

Vi kan direkte aflæse og få følgende symmetrisk matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Digitalisering og Spektral Sætningen: $\mathbf{P'AP = D}$

En matrix $(\mathbf{A})$ siges at være diagonaliserbar, hvis der findes en invertibel $n \times n$ matrix $\boldsymbol{P}$ og en $n \times n$ diagonal matrix $\boldsymbol{D}$**,** så at:

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$$

Nu skal i se et smart hack jeg fik fra Aspiri.

Det gælder, at hvis **D** (Diagonal Matricen) består af egenværdierne for **A**, så vil **P** bestå af de normeret vektorer, i samme rækkefølge som egenværdierne i **D**.
Et eksempel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}, \lambda_1 = -2: \boldsymbol{v}_1 = t\begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}, \lambda_2 = 0: \boldsymbol{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_3 = 2: \boldsymbol{v}_3 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Så vælger vi en række for **D**, rækkefølgende er vigtigt:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{bemærk at 0'tallet i } d_{22} \text{ er egenværdien } \lambda_2 = 0.$$

Så finder man de normeret vektorer:

$$Find\ længden: \|\boldsymbol{v}_1\| = \sqrt{(-1)^2 + 0 + 1^2} = \sqrt{2}, så\ normeret\ fås: \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$Find\ længden: \|\boldsymbol{v}_2\| = \sqrt{1^2 + 0 + 1^2} = \sqrt{2}, så\ normeret\ fås: \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$Find\ længden: \|\boldsymbol{v}_3\| = \sqrt{0 + 1^2 + 0} = 1, så\ normeret\ fås: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Det vil sige at **P** vil være:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \text{ og for god ordens skyld: } \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Så har man anskaffet den Ortogonale **P** matrix, samt den Diagonale **D**, som opfylder Spektral sætningen.

Gradienter og Funktioner af n'te variabler: Kvasi-konveks, -konkav, konveks osv.

Det meste af denne del, er takket værd Oscar Borring. Jeg har enten rent Copy pasted hans noter, eller omskrevet dem en del for at gøre det mere forklarings venligt.

201: Gradienter:

Gradienten til en funktion, er den vektor som er ortogonal til tangent i et punkt (x_0, y_0)

Gradienten til en funktion findes ved denne overordnet formel:

$$\nabla f(x_1, x_2, .., n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)\right)$$

F.eks.:

$$f(x, y) = x^2 + 2y + xy$$
$$\nabla f(x, y) = (2x + y, 2 + x)$$

Gradienten fortæller en række nyttige informationer:

$a)\nabla f(x, y)$ står vinkelret på niveau gennem (x, y)
$b))\nabla f(x, y)$ peger i retningen af maksimal stigning for f
$c)$ $\|)\nabla f(x, y)$ $\|$ er en funktions væksthastighed i retningen med maksimal stigning

Retningsflade:

Hvis $\boldsymbol{a}$ er en enhedsvektor, $dvs.$ $\|\boldsymbol{a}\| = 1$, så kaldes:

$$f_a'(x, y) = \nabla f_a'(x, y) \cdot \boldsymbol{a}$$

Den retningsafledede af f i punktet (x, y) i retningen af a.

Der er et eksempel i Februar 2023, Opgave 2, 3)

202: Konveks, Konkav, Kvasi-konveks og Kvasi-konkav

Jeg forstår ærligt talt det stadig ikke, men her er de overordnet formler jeg benytter:

For en givet funktion, så undersøg dens Hesse-matrice, Hvis:

$$Hessematrice\ er\ Positivt\ Definit \Rightarrow Strengt\ Konveks$$
$$Hessematrice\ er\ Negativt\ Definit \Rightarrow Strengt\ Konkav$$

$$Hessematrice\ er\ Positivt\ Semidefinit \Leftrightarrow Konveks$$
$$Hessematrice\ er\ Negativt\ Semidefinit \Leftrightarrow Konkav$$

Og

$$Konveks \Rightarrow Kvasikonveks$$
$$Konkav \Rightarrow Kvasikonkav$$

Theorem 2.3.1: Konkav/konvekse C^2- funktioner

For funktioner af to variabler, gælder denne teorem.

$$Lad\ z = f(x, y)\ væren\ en\ C^2\ funktion, definieret\ på\ et\ åbent\ konveks\ set\ S, så\ gælder\ det$$
$$a)\ f\ er\ konveks \Leftrightarrow f_{11}'' \geq 0, f_{22}'' \geq 0\ \ og\ f_{11}''f_{22}'' - (f_{12}'')^2 \geq 0$$
$$b)\ f\ er\ konkav \Leftrightarrow f_{11}'' \leq 0, f_{22}'' \leq 0\ \ og\ f_{11}''f_{22}'' - (f_{12}'')^2 \geq 0$$
$$c)\ f_{11}'' > 0\ og\ f_{11}''f_{22}'' - (f_{12}'')^2 > 0 \Rightarrow\ f\ er\ strengt\ konveks$$
$$c)\ f_{11}'' < 0\ og\ f_{11}''f_{22}'' - (f_{12}'')^2 > 0 \Rightarrow\ f\ er\ strengt\ konkav$$

Yderligere har vi også Teorem 2.3.2 og 2.3.3, som giver en overordnet formulering på definithed, samt konveksitet/konkavitet.

Teorem 2.3.2: Funktion af n'te variabler, Strengt- Konveks / -Konkav - Side 57

$$Forstil\ at\ f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, .., x_n)\ er\ en\ C^2 funktion, defineret\ på\ et\ åbent, konveks\ set\ S\ i\ \mathbb{R}^n.$$
$$a)\ Lad\ D_r(\boldsymbol{x}) > for\ alle\ \boldsymbol{x}\ i\ S\ og\ alle\ r = 1, \dots, n \Rightarrow f\ er\ strengt\ konveks\ i\ S$$

$$b)\ Lad\ (-1)^r\ D_r(\boldsymbol{x}) > for\ alle\ \boldsymbol{x}\ i\ S\ og\ alle\ r = 1, \dots, n \Rightarrow f\ er\ strengt\ konkav\ i\ S$$

Teorem 2.3.3: Funktion af n'te variabler, Konveks /Konkav - Side 58

$$Forstil\ at\ f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, .., x_n)\ er\ en\ C^2 funktion, defineret\ på\ et\ åbent, konveks\ set\ S\ i\ \mathbb{R}^n.$$
$$Lad\ \Delta_r(\boldsymbol{x})\ være\ en\ arbritrær\ hovedunderdeterminant\ af\ orden\ r, i\ Hessematricen. Så:$$
$$a)\ f\ er\ konveks \Leftrightarrow \Delta_r(\boldsymbol{x}) \geq 0\ for\ alle\ \boldsymbol{x}\ i\ S, og\ alle\ \Delta_r(\boldsymbol{x}), r = 1, \dots, n$$
$$b)\ f\ er\ konkav \Leftrightarrow (-1)^r \Delta_r(\boldsymbol{x}) \geq 0\ for\ alle\ \boldsymbol{x}\ i\ S, og\ alle\ \Delta_r(\boldsymbol{x}), r = 1, \dots, n$$

203: Kvasi-Konveks og -Konkav

Vi starter ud med en definition på hvad kvasi-konvekse og -konkave funktioner overhoved er.

$$Definitionen\ af\ Kvasikonkave\ og\ Kvasikonveks\ funktioner:$$
$$Lad\ f(x)\ være\ en\ funktion\ på\ S \subseteq \mathbb{R}^n$$
$$f\ er\ kvasikonkav, hvis\ den\ øvre\ nivueamængde$$
$$P_a = \{x \in S: f(x) \geq a\}\ er\ konveks\ for\ ethvert\ a \in \mathbb{R}$$
$$f\ er\ kvasikonveks, hvis\ den\ nedre\ nivueamængde$$
$$P^a = \{x \in S: f(x) \leq a\}\ er\ konkav\ for\ ethvert\ a \in \mathbb{R}$$

Kort om fortalt, (og hold fast i dette):

$$a)\ f\ er\ (strengt) konveks \Rightarrow f\ er\ kvasikonevks$$
$$b)\ f\ er\ (strengt) konav \Rightarrow f\ er\ kvasikonkav$$
$$c)\ f\ er\ kvasikonkav \Leftrightarrow -f\ er\ kvasikonveks$$

Yderligere har vi endnu en generel formel, for at undersøge en funktion af to variabler:

Teorem. 2.5.5 Begrænset Hessematrice's determinant og kvasikonkavitet

$$Lad\ f(x,y) være\ en\ C^2 - funktion\ defineret\ på\ et\ åbent\ konveks\ mængde\ S \subseteq \mathbb{R}$$
$$Den\ omgrænsede\ Hesse - determinant, defineres\ ved$$

$$B_2(x,y) = \begin{vmatrix} 0 & f_1'(x,y) & f_2'(x,y) \\ f_1'(x,y) & f_{11}''(x,y) & f_{12}''(x,y) \\ f_2'(x,y) & f_{21}''(x,y) & f_{22}''(x,y) \end{vmatrix}$$

$Så$:

$a)\ En\ nødvendig\ betingelse\ for\ at\ f\ er\ kvasikonkav\ i\ S, er\ at\ B_2(x,y) \geq 0\ for\ alle\ (x,y) \in S$

$b)\ En\ nødvendig\ betingelse\ for\ at\ f\ er\ strengt\ kvasikonkav\ i\ S, er\ at\ f_1'(x,y) \neq 0\ og$
$B_2(x,y) > 0\ for\ alle\ (x,y) \in S$

Teorem for konveksitet(konkavitet) og kvasikonveksitet (kvasikonkavitet) for sammensatte funktioner.

Der er en række teorem som går længere i dybden angående summen af funktioner, sammensatte funktioner, se Her

204: Optimering af konkave og konvekse funktioner

Kort afsnit, men godt at have hvis det kommer op til eksamen. Hertil kommer der nogen enkelte korte formler, samt teorems som man kan smide tal ind i. Håber det giver mening :D

Nødvendige førsteordensbetingelser

Vi kalder et stationære punkt for x^*, til funktionen $f(x_1,..,x_n)$ defineret på $S \subseteq \mathbb{R}^n$, hvis dette gælder, så gælder det at:

$$\frac{\partial(fx^*)}{\partial x_i} = 0, for\ alle\ i = 1,2,\dots,n \Leftrightarrow \nabla f(x^*) = \vec{0}$$

Globale Ekstremumspunkter - Teorem 3.1.2 - Side. 104

$Lad\ f\ være\ defineret\ på\ en\ konveksmængde\ S \subseteq \mathbb{R}^n\ og\ lad\ x^* være\ et\ indre\ punkt\ for\ S$

$i)\ Hvis\ f\ er\ konkav: x^*\ er\ et\ globalt\ maksimumspunkt\ for\ f$

$\Leftrightarrow x^*\ er\ et\ stationære\ punkt\ for\ f$

$ii)\ Hvis\ f\ er\ konveks: er\ et\ globalt\ minimumspkt. for\ f \Leftrightarrow x^*\ er\ et\ stationære\ punkt\ for\ f$

Lokale Ekstremumspunkter - Teorem 3.2.1 - Side. 111

$Lad\ f(x) = f(x_1,\dots,x_n)\ være\ definreret\ på\ konveksmængde\ S \subseteq \mathbb{R}^n$

$og\ at\ x^* er\ et\ indre\ stationært\ punkt. Ydermere\ antag\ at\ f\ også\ er\ en\ C^2 - funktion,$

$og\ lad\ D_k(x), k = 1,\dots,n\ de\ ledende\ hovedunderdeterminanter\ for\ Hessematricen. S$å:

$a)\ D_k(x^*) > 0, k = 1,\dots,n \Rightarrow x^*\ er\ et\ lokalt\ minimumspunkt\ for\ f$

$b)(-1)^k D_k(x^*) > 0, k = 1,\dots,n \Rightarrow er\ et\ lokalt\ maksimumspunkt\ for\ f$

$c)\ D_n(x^*) \neq 0\ samt, hverken\ (a)\ eller\ (b)\ gælder \Rightarrow x^* er\ et\ saddelpunkt\ for\ f$

Dobbeltintegraler

Kort afsnit, igen tak til Oscar Borring.

301: Definitionen af dobbeltintegraler, fra FMEA, 4.4.1 - s.168:

$Lad\ f\ være\ en\ kontinuerlig\ funktion\ defineret\ over$

$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b\ og\ c \leq y \leq d\} = [a,b] \times [c,d]$

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

Kort fortalt, hvis hverken af de to variablers grænser, afhænger af den anden, så er integrationsrækkefølgende ligegyldig.

302: Dobbeltintegral over domæner fra FMEA - s.171

$Lad\ f\ være\ en\ kontinuerlig\ funktion\ defineret\ over$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b\ og\ u(x) \leq y \leq v(x)\} = [a,b] \times [c,d]$

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

Altså, nu hvor den ene grænse til variablen *y* afhænger af variablen *x*, skal man første integrere efter *y*.

[Afsnit om: Partiel integration, Substitutions metoden, og overordnet formel samling]

Differentialligninger:

Nu kommer den storeslemme. Der er ikke meget jeg kan forklare her ift. at bedre sådan forstå hvad der sker. Men jeg giver det et forsøg alligevel.

Differensligninger, er hvor man ved klassiske funktioner får en "værdi" når mand indtaster værdier ind, får man til differensligninger en ny ligning, mega sjovt.

Vær på udkig efter hvordan man kan omskrive ligningerne, yderligere forklaringer senere:

401: Separation af variabler:

Vi kommer til at benytte os af to metoder for at løse disse differensligninger: Separations metoden og Panserformlen. Den første af de to, kan anses for at være den "nemme" af de to. Når man får givet en differens ligning, så giv den et ordentlig kig og se om ikke du kan omdanne den til:

$$\dot{x} = t^2 e^x$$

a) Vi kigger og ser at vi kan omskrive dette overordnet:

$$\frac{dx}{dt} = f(t)g(x)$$

b) Nu Separere vi variablerne *t* og *x* på hver sin side af lighedstegnet:

$$\frac{dx}{g(x)} = f(t)dt, g(x) \neq 0$$

Hvis det skulle være tilfældet at $g(x) = 0$, så vil den konstante funktion$x(t) = a$ være en løsning til diff. Ligningen.

c) Så integrerer vi på begge sider:

$$\int \frac{1}{g(x)} dx = \int f(t)dt$$

$$G(x) = F(t) + C, hvor\ C\ er\ en\ arbitrær\ konstant$$

Hvor $G(x)$ er stamfunktionen til $\frac{1}{g\,(x)}$, $F(t)$ er stamfunktionen til f og C igen er den arbitrære konstant.

d) Isolere *x*:

$$x = G^{-1}(F(t) + C)$$

Notere at hvis G^{-1}, kan dette kræve restriktioner på *t*, tilsvarende der bliver skabt en definitions mængde for *x*.

Versionen som oversat fra bogen:

Metode for løsningen af Separable Differensligninger - Side 194

$$a)\ Skriv\ en\ differens\ ligningen\ (fx): \dot{x} = f(t)g(x), som:$$

$$\frac{dx}{dt} = f(t)g(x)$$

$$b)\ Separere\ variablerne:$$

$$\frac{dx}{g(x)} = f(t)dt$$

$$c)\ Integrere\ de\ to\ sider:$$

$$\int \frac{1}{g(x)} dx = \int f(t)dt$$

$$d)\ Evaluere\ de\ to\ integraler, se\ om\ \text{det}\ er\ muligt\ at\ isolere\ x$$

$$x = G^{-1}(F(t) + C)$$

Husk at den arbitrære konstant *C*, skal tages med(hvilket oftest gøres ved f(t) siden)

Eksempler:

$i) \frac{dx}{dt} = -2tx^2 \Rightarrow_{Separere} \frac{1}{x^2} dx = 2tdt \Rightarrow_{Integrere} \int \frac{1}{x^2} dx = \int 2tdt \Leftrightarrow \frac{1}{x} = t^2 + C \Rightarrow_{Isolere\ x}$
$x = \frac{1}{t^2+C}$

$ii)\dot{x} = \frac{t^3}{x^6+1} \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{t^3}{x^6+1} \Rightarrow_{Separere} (x^6+1)dx = t^3 dt \Rightarrow_{Integrere} \int x^6 + 1\, dx = \int t^3 dt \Leftrightarrow$
$\frac{1}{7}x^7 + x = \frac{1}{4}t^4 + C$

402: Panserformlen og dens mange gaver

Nu gennemgår vi hvordan man benytter panserformlen. Panserformlen kan/skal benyttes til at finde generelle løsninger for Første Ordens Lineære Differensligningerne. Det betyder at de kan skrives som:

$$\dot{x} + a(t)x = b(t)$$

Hvor $a(t)$ og $b(t)$ angiver kontinuerlige funktioner af t, på et bestemt interval. Samt at $x = x(t)$ er vores ukendte funktion. Den kaldes for lineære fordi, venstre side af lighedstegnet er en lineære funktion af $x\ og\ \dot{x}$.
Eksempler for lineære første ordens ligninger:

$i)\ \dot{x} + x = t\,,\qquad a(t) = 1\ og\ b(t) = t$
$ii)\ \dot{x} + 2tx = 4t,\qquad a(t) = 2t\ og\ b(t) = 4t$
$iii)(t^2+1)\dot{x} + e^t x = t\ln(t) \Leftrightarrow \dot{x} + \frac{e^t}{(t^2+1)}x = \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)},\ \ a(t) = \frac{e^t}{(t^2+1)}\ \ og\ b(t) = \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)}$

Til det opskriver panserformlen således:

Panserformlen - FMEA-side 203

Antag en første ordens differensligning $\dot{x} + a(t)\cdot x = b(t)$, hvor $a(t)$ og $b(t)$ er kontinuerlige funktioner på et interval:

$$\dot{x} + a(t)\cdot x = b(t) \Leftrightarrow x = e^{-\int a(t)}\cdot (C + \int e^{\int a(t)} b(t)dt \Leftrightarrow$$
$$x = Ce^{-\int a(t)} + e^{-\int a(t)} \int e^{\int a(t)} b(t)dt$$

Der er følgende specielle tilfælde:

i) $a\ og\ b\ er\ konstant$

$$\dot{x} + a\cdot x = b \Leftrightarrow x = C\cdot e^{-at} + \frac{b}{a}$$

ii) $a\ er\ en\ konstant\ og\ b(t)\ er\ en\ funktion$

$$\dot{x} + a\cdot x = b(t) \Leftrightarrow x = Ce^{-at} + e^{-at}\int e^{at} b(t)dt$$

Eksempel:

i) $\dot{x} + 2tx = 4t\ \ , a(t) = 2t\ og\ b(t) = 4t\ , A(t) = t^2$

$$x = Ce^{-t^2} + e^{-t^2}\int e^{t^2}\, 4t\, dt$$
$$= Ce^{-t^2} + e^{-t^2}\left(2e^{t^2}\right)$$
$$= Ce^{-t^2} + e^{-t^2+t^2}\cdot 2$$
$$= Ce^{-t^2} + e^0\cdot 2$$
$$= Ce^{-t^2} + 2$$

Man kan komme ud for at man skal undersøge en bestemt løsning ved evt. pkt. fx

$$(t, x) = (0, -2)$$

Hertil indsætter du i den generelle løsning man lige har fundet, og isolere C:

$$x(0) = -2 \Rightarrow t = 0, -2 = Ce^{-0^2} + 2 \Leftrightarrow -2 = Ce^0 + 2 \Leftrightarrow C = -4$$

Dvs. at løsningen som opfylder: $x(0) = -2$, hedder: $x = -4e^{-t^2} + 2$

Stamfunktioner, Fkt og Differentialkvotient:

Stamfunktion $F(x)$	Grundfunktion $f(x)$	Differentialkvotient $f'(x)$
kx	k	0
x	1	0
$\frac{1}{2}x^2$	x	1
$\frac{1}{3}x^3$	x^2	$2x$
$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$x^n, n \neq -1$	nx^{n-1}
e^x	e^x	e^x
$x \cdot (\ln(x) - 1)$	$\ln(x)$	x^{-1}
$\ln(\|x\|)$	x^{-1}	$-x^{-2}$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$-\ln\|\cos(x)\|$	$\tan(x)$	$tan(\mathrm{x})^2 + 1$

Differentialkvotienter:

$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{x}$	$-x^2$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$e^{k\cdot x}$	$k \cdot e^{k\cdot x}$
k^x	$k^x \cdot \ln(k)$

$\ln(x)$ og e^x regler, plus underlige situationer

Funktion:	Reglen
$\ln(x \cdot y)$	$\ln(x) + \ln(y)$
$\ln\left(\frac{x}{y}\right)$	$\ln(x) - \ln(y)$
$\ln(x^n)$	$n \cdot \ln(x)$
$\ln(\sqrt[n]{x})$	$\frac{1}{n} \cdot \ln(x)$
Situationer der kunne ske:	Ensbetydende med
$\ln(1)$	$= 0$
e^0	$= 1$
$e^{\ln(x)}$	$= x$
$\ln(e^x)$	$= x$
$e^{t\ln(x)}$	$= x^t$
$y = \ln(x)$	$e^y = x$
$2x + 2y - \frac{4}{x} = 0$	$\frac{4}{x} = 4 \Leftrightarrow x = 1$

Differentialkvotient Regler

Navn:	Funktion	Reglen
Sumreglen	$h(x) = f(x) \pm g(x)$	$h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
Konstantreglen	$g(x) = k \cdot f(x)$	$g'(x) = k \cdot f'(x)$
Produktreglen	$h(x) = f(x) \cdot g(x)$	$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Kvotientreglen	$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Integrations Regler:

Navn:	Integral	Reglen
Sumreglen	$\int f(x) + g(x)dx$	$\int f(x)dx + \int g(x)dx$
Differensreglen	$\int f(x) - g(x)dx$	$\int f(x)dx - \int g(x)dx$
Produkt af konstant Reglen	$\int k \cdot f(x)dx$	$k \cdot \int f(x)dx$

Integrations via. Substitution

Kort Overgang hvordan Integration via. Substitution virker

Funktion	Metode
$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx$	$\int f(t)dt$
Forklaring:	Eksempel:
Find en "indre funktion" hvori dens afledte allerede optræder i funktion	$\int x \cdot e^{x^2} dx$
Skridt 1:	Skridt 2:
Finder den indre funktion, og kalder for *t* $t = x^2$	Differentiere *t*, og isolere *dx* $\frac{dt}{dx} = 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2x}dt = dx$
Skridt 3:	Skridt 4:
Indsæt i funktion: $\int x \cdot e^{x^2} dx = \int x \cdot e^t \cdot \frac{1}{2x} dt$	Reducere integranden: $\int x \cdot e^t \cdot \frac{1}{2x} dt = \int e^t \cdot \frac{1}{2} dt$
Skridt 5:	Skridt 6:
Udfør integration: $\int e^t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} e^t + C$	Substituere den originale indre funktion ind igen $\int x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

Partiel Integration:

Kort overgang hvordan Partiel integration virker

Funktion	Metode
$\int f(x)g(x)dx$	$f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)dx$
Eksempel:	Skridt 1:
$\int 4e^{2x} x dx = 4 \cdot \int e^{2x} x dx$	$4 \cdot \left(x \frac{1}{2} e^{2x} - \int 1 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} dx\right)$
Skridt 2:	Skridt 3:
$4 \cdot \left(x \frac{1}{2} e^{2x} - \left(\frac{1}{4} e^{2x} + C\right)\right)$	$4 \cdot \left(x \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} - C\right)$
Skridt 4:	Skridt 5:
$(2e^{2x} x - e^{2x} - 4C) \Leftrightarrow 2e^{2x} x - e^{2x} + C$	$e^{2x}(2x - 1) + C,$ $hvor\ C\ er\ en\ Arbitrær\ konstant$

Teorems fra EMEA og FMEA: Sidetal er hhv. FMEA

Her er noget forskelligt teorem, så man bl.a. kan henvise til under sin opgave skrivning.

Teorem fra EMEA 13.12.2

$Lad\ Q(x_2, \dots, x_n) = Q(\vec{x})være\ en\ kvadratisk\ form\ og\ \mathbf{A}\ den\ tilhørende\ symmetriske$
$n \times n\ matrix\ (dvs.\ Q(\vec{x}) = x'\mathbf{A}x).\ \ Idet\ D_k\ betegner\ den\ ledende\ hovedunderdeterminant$
$af\ orden\ k\ for\ A\ og\ \Delta_k^K\ er\ en\ vilkårlig\ hovedunderdeterminant\ af\ orden\ k\ for\ A, gælder\ at:$

(a) $Q\ er\ positiv\ definit \quad \Leftrightarrow \quad D_k > 0\ for\ alle\ \ k = 1, \dots, n$
(b) $Q\ er\ positiv\ semidefinit \quad \Leftrightarrow\ \ \Delta_k^K \geq 0\ for\ alle\ hovedunderdet.af\ orden\ k = 1, \dots, n$
(c) $Q\ er\ negativ\ definit\ \ \Leftrightarrow\ < 0\ for\ alle\ \ k = 1, \dots, n$
(d) $Q\ er\ negativ\ semidefinit \Leftrightarrow\ \ (-1)^k \Delta_k^K \geq 0\ for\ alle\ hovedunderdet.af\ orden\ k =$
$1, \dots, n$

$Hvis\ ingen\ af\ de\ overstående\ gør\ sig\ gældende\ er\ Q\ indefinit.$
$(hvis\ en\ matrix\ har\ egenværdier\ med\ forskeligt\ fortegn\ er\ matrixen\ indefinit)$

Teorem 1.2.1 - Side 10

$De\ n'te\ søjlevektorer\ af\ \mathbf{A}: \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\ af\ en\ n \times n$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, hvor\ \boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

$Er\ lineære\ uafhænige\ hvis, og\ kun\ hvis\ |\mathbf{A}| \neq 0$

Teorem 1.3.1 Matrix Rank - Side 12

$Ranken\ r(\mathbf{A})\ af\ en\ matrix\ \mathbf{A}, er\ lig\ med\ ordnen\ af\ dens\ største\ underdeterminant,$
$som\ er\ forskelligt\ fra\ 0.$

Teorem 1.3.2: Matrix Rank Transponeret - Side 13

$Ranken\ r(\mathbf{A})\ af\ en\ matrix\ \mathbf{A}, er\ lig\ ranken\ af\ dens\ transponerert\ matrix: r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}')$

Teorem 1.4.1: Matrix Rank og Lineære Ligningssystem - Side 15

$Hvis\ et\ lineært\ ligningssystem\ kun\ har\ en\ entydig\ løsning, gælder\ det:$
$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}\ har\ entydig\ løsning \Leftrightarrow r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}_{\boldsymbol{b}})$

Teorem 1.5.1: Egenværdier - Side 23

$Hvis\ \mathbf{A}\ er\ en\ n \times n\ matrix, med\ egenværdierne\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ så.
$a)\ |\mathbf{A}| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$
$b)\ \mathrm{tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$

Teorem 1.6.1: Digitalisering af Matricer - Side 25

$En\ \times n\ matrix\ \mathbf{A}\ er\ digitaliserbar, hvis\ og\ kun\ hvis\ den\ har\ et\ set\ af\ n\ lineære$
$egenvektorere\ \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots \boldsymbol{v_n}. Hvis\ dette\ er\ tilfældet, gælder\ det:$

$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$
$Hvor\ \mathbf{P}\ er\ matricen\ bestående\ af\ \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots \boldsymbol{v_n}\ som\ dens\ søjler, og\ \lambda_1, \dots, \lambda_n\ er\ de$
$hhv. følgende\ egenværdier$

Teorem 1.6.2: Spektral Sætningen - Side 26

$Hvis\ matricen\ \mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times m}\ er\ symetrisk,$ så:

$a)\ Alle\ de\ n'te\ egenværdier\ \lambda_1, \dots, \lambda_n\ er\ reelle\ tal$
$b)\ Egenvektorer\ der\ korspondere\ med\ deres\ egenværdi, er\ ortogonale$
$c)\ Der\ eksiterer\ en\ ortogonal\ matrix\ \mathbf{P}\ \left(der\ gælder\ \mathbf{P}' = \mathbf{P^{-1}}\right)\ således\ at$

$$\mathbf{P^{-1}AP} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$Søjlerne\ \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\ \ af\ matricen\ \mathbf{P}\ er\ de\ normeret\ egenvektorer, i\ samme\ rækkefølge\ som\ egenværdierne\ i\ \boldsymbol{D}: \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_3$

Teorem 2.3.1: Funktion af 2 variabler, Konveks/Konkav - Side 56

$Lad\ z = f(x,y)\ væren\ en\ C^2\ funktion, definieret\ på\ et\ åbent\ konveks\ set\ S, så\ gælder\ det$

$a)\ f\ er\ konveks \Leftrightarrow f''_{11} \geq 0, f''_{22} \geq 0\ \ og\ f''_{11}f''_{22} - (f''_{12})^2 \geq 0$
$b)\ f\ er\ konkav \Leftrightarrow f''_{11} \leq 0, f''_{22} \leq 0\ \ og\ f''_{11}f''_{22} - (f''_{12})^2 \geq 0$
$c)\ f''_{11} > 0\ og\ f''_{11}f''_{22} - (f''_{12})^2 > 0 \Rightarrow\ f\ er\ strengt\ konveks$
$c)\ f''_{11} < 0\ og\ f''_{11}f''_{22} - (f''_{12})^2 > 0 \Rightarrow\ f\ er\ strengt\ konkav$

Teorem 2.3.2: Funktion af n’te variabler, Strengt- Konveks / -Konkav - Side 57

$Forstil\ at\ f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, .., x_n)\ er\ en\ C^2 funktion, defineret\ på\ et\ åbent, konveks\ set\ S\ i\ \mathbb{R}^n.$
$a)\ Lad\ D_r(\boldsymbol{x}) > for\ alle\ \boldsymbol{x}\ i\ S\ og\ alle\ r = 1, \dots, n \Rightarrow f\ er\ strengt\ konveks\ i\ S$
$b)\ Lad\ (-1)^r\ D_r(\boldsymbol{x}) > for\ alle\ \boldsymbol{x}\ i\ S\ og\ alle\ r = 1, \dots, n \Rightarrow f\ er\ strengt\ konkav\ i\ S$

Teorem 2.3.3: Funktion af n’te variabler, Konveks /Konkav - Side 58

$Forstil\ at\ f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, .., x_n)\ er\ en\ C^2 funktion, defineret\ på\ et\ åbent, konveks\ set\ S\ i\ \mathbb{R}^n.$
$Lad\ \Delta_r(\boldsymbol{x})\ være\ en\ arbritrær\ hovedunderdeterminant\ af\ orden\ r, i\ Hessematricen. Så:$
$a)\ f\ er\ konveks \Leftrightarrow \Delta_r(\boldsymbol{x}) \geq 0\ for\ alle\ \boldsymbol{x}\ i\ S, og\ alle\ \Delta_r(\boldsymbol{x}), r = 1, \dots, n$
$b)\ f\ er\ konkav \Leftrightarrow (-1)^r \Delta_r(\boldsymbol{x}) \geq 0\ for\ alle\ \boldsymbol{x}\ i\ S, og\ alle\ \Delta_r(\boldsymbol{x}), r = 1, \dots, n$

Teorem 2.3.4: Sum af konkave og konvekse funktioner - Side.59

$Hvis\ f_1, \dots, f_m\ er\ funktioner, definerert\ på\ en\ konveks\ mængde\ S \subseteq \mathbb{R}^n, så:$

$a)\ f_1, \dots, f_m\ er\ konkave\ og\ a_1 \geq 0, \dots, a_m \geq 0 \Rightarrow a_1 f_1 +, \dots, a_m f_m\ også\ konkav$
$b) f_1, \dots, f_m\ er\ konvekse\ og\ a_1 \geq 0, \dots, a_m \geq 0 \Rightarrow a_1 f_1 +, \dots, a_m f_m\ også\ konvekse$

Teorem 2.3.5: Konveks/Konkav for sammensatte funktion af en 2 funktioner - Side.59

$Lad\ f(x) være\ defineret\ for\ alle\ x\ i\ et\ konveks\ set\ S\ i\ \mathbb{R}^n, og\ at\ F\ er\ defineret\ over\ et\ interval\ i\ \mathbb{R}\ som\ indeholder\ f(x) for\ alle\ x\ i\ S. Så:$

$a)\ f(x)\ er\ konkav, F(u)\ er\ konkav\ og\ voksende \Rightarrow U(x) = F\big(f(x)\big)\ er\ konkav$
$b)\ f(x)\ er\ konveks, F(u)\ er\ konveks\ og\ voksende \Rightarrow U(x) = F\big(f(x)\big)\ er\ konveks$
$c)\ f(x)\ er\ konkav, F(u)\ er\ konveks\ og\ aftagende \Rightarrow U(x) = F\big(f(x)\big)\ er\ konveks$
$a)\ f(x)\ er\ konveks, F(u)\ er\ konkav\ og\ aftagende \Rightarrow U(x) = F\big(f(x)\big)\ er\ konkav$

Teorem 2.5.2: Kvasikonveks/Kvasikonkav for sammensatte funktion af en 2 funktioner - Side.70

$Lad\ f(x) være\ defineret\ for\ alle\ x\ i\ et\ konveks\ set\ S\ i\ \mathbb{R}^n, og\ at\ F\ er\ defineret\ som\ en\ funktion\ af\ en\ variabel\ \ hvis\ domæne\ inkludere\ f(S). Så:$

$a)\ f(x)\ er\ kvasikonkav, F\ er\ voksende \Rightarrow F\big(f(x)\big)\ er\ kvasikonkav$
$b)\ f(x)\ er\ kvasikonveks, F\ er\ voksende \Rightarrow F\big(f(x)\big)\ er\ kvasikonveks$
$c)\ f(x)\ er\ kvasikonkav, F\ er\ aftagende \Rightarrow F\big(f(x)\big)\ er\ kvasikonveks$
$a)\ f(x)\ er\ kvasikonveks, F(u)\ er\ aftagende \Rightarrow F\big(f(x)\big)\ er\ kvasikonkav$

Teorem 2.5.5 : C^2-funktioner og kvasikonveksitet

$Lad\ f(x,y)\ være\ C^2\text{-}funktion\ defineret\ på\ åbne\ konveks\ mængde\ S \subseteq \mathbb{R}^n$
$Den\ omgrænsede\ Hesse - determinant\ (The\ bordered\ Hessian\ Determinant) defineres\ ved$

$$B_2(x,y) = \begin{vmatrix} 0 & f_1'(x,y) & f_2'(x,y) \\ f_1'(x,y) & f_{11}''(x,y) & f_{12}''(x,y) \\ f_2'(x,y) & f_{21}''(x,y) & f_{22}''(x,y) \end{vmatrix}$$

$Så\ gælder$:

$a)\ Hvis\ f\ er\ kvasikonkav, så\ er\ B_2(x,y) \geq for\ alle\ (x,y) \in S$
$b)\ Hvis\ f_1'(x,y) \neq 0\ og\ B_2(x,y) \geq for\ alle\ (x,y) \in S, så\ er\ f\ strengt\ kvasikonkav$

Globale Ekstremumspunkter - Teorem 3.1.2 - Side. 104

$Lad\ f\ være\ defineret\ på\ en\ konveksmængde\ S \subseteq \mathbb{R}^n\ og\ lad\ x^* være\ et\ indre\ punkt\ for\ S$
$i)\ Hvis\ f\ er\ konkav: x^*\ er\ et\ globalt\ maksimumspunkt\ for\ f$
$\Leftrightarrow x^*\ er\ et\ stationære\ punkt\ for\ f$
$ii)\ Hvis\ f\ er\ konveks: er\ et\ globalt\ minimumspkt.for\ f \Leftrightarrow x^*\ er\ et\ stationære\ punkt\ for\ f$

Lokale Ekstremumspunkter - Teorem 3.2.1 - Side. 111

$Lad\ f(x) = f(x_1, \dots, x_n)\ være\ definreret\ på\ konveksmængde\ S \subseteq \mathbb{R}^n$
$og\ at\ x^* er\ et\ indre\ stationært\ punkt. Ydermere\ antag\ at\ f\ ogå\ er\ en\ C^2 - funktion,$
$og\ lad\ D_k(x), k = 1, \dots, n\ de\ ledende\ hovedunderdeterminanter\ for\ Hessematricen. Så$:
$a)\ D_k(x^*) > 0, k = 1, \dots, n \Rightarrow x^*\ er\ et\ lokalt\ minimumspunkt\ for\ f$
$b)(-1)^k D_k(x^*) > 0, k = 1, \dots, n \Rightarrow er\ et\ lokalt\ maksimumspunkt\ for\ f$
$c)\ D_n(x^*) \neq 0\ samt, hverken\ (a)\ eller\ (b)\ gælder \Rightarrow x^* er\ et\ saddelpunkt\ for\ f$

Gamle Eksamens Sæt: Rettevejledning

Februar 2023

Opgave 1: Matricer, Egenværdi & 4 × 4 Matrix

1) Begrund at matricen **A** er invertibel, og bestem dens inverse.
Vi kan konkludere om **A** er invertibel, ved at bestemme om hvorvidt dens determinant er forskellig fra 0. Hvis **A**'s, determinant er forskellig fra 0, så kaldes den regulær og er invertibel:
Vi finder determinant ved brug af Saurus' metoden, og får:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (1 \cdot (-1) \cdot 4 + 0 + 0) - (0 + 0 + 4 \cdot 1 \cdot 1) = -4 - 4 = -8 \neq 0$$

Det ønsket er fundet, og vi konkluderer at **A** er regulær, og at $\mathbf{A}^{-1}$ findes. Vi finder $\mathbf{A}^{-1}$ ved at sætte den op ved siden af en Indentitetsmatrix **(I),** hvorefter der laves rækkeoperationer indtil de har "byttet" plads, dertil fås:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\substack{R1 \Leftrightarrow R2 \\ \frac{1}{4}R3}} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}_{R2-R1} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}_{R1+\frac{1}{2}R2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}_{\frac{1}{2}R2} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$,Herfra aflæses den inverse til **A** til at være:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$ Hermed er det ønsket bestemt og vist.

2) Vi skal begrunde at $\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$**,** kun har en entydig løsning. Vi gør dette ved hjælp af Gauss Elimination, hvori vi omdanner det lineære ligningssystem til den udvidet koefficient matrix, hvorefter vi laver rækkeoperationer indtil vi opnår den Reduceret Echelon form. Hertil fås:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{pmatrix}_{\substack{R2-R1 \\ \frac{1}{4}R3}} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{R1+\frac{1}{2}R2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{-\frac{1}{2}R2} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$, Løsningen til læses ud fra den reduceret echelon form:

$$x_1 = 4$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 3$$

Vi omdanner dette tilbage til lignignsform og får den entydig løsning der hedder:

$$(x_1, x_2, x_3) = (4{,}0{,}3) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Hermed er det ønsket anskaffet. Der kan evt. gøres prøve, ved at prikke **A** med **x**, for at sikre det rigtige produkt anskaffes, hvis vi omdanner matricerne til ligningsform, fås:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \qquad \textit{Med løsningen:} \quad 4 + 0 = 4 \\ x_1 - x_2 &= 4 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 4 - 0 = 4 \\ 4x_3 &= 12 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 4 \cdot 3 = 12 \end{aligned}$$

Da **A** er invertibel, har ligningssystemet en entydig løsning, nemlig:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2 + 0 \\ 2 - 2 + 0 \\ 0 + 0 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3) Vi skal begrunde at 4 er en egenværdi til **A**, hvilket vi gør ved at sætte 4 ind i det kar.pol og ser om det går op:

$$p(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \mathbf{0}$$

$$p(4) = |\mathbf{A} - 4\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-4 & 1 & 0 \\ 1 & -1-4 & 0 \\ 0 & 0 & 4-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Vi kan se det stemmer overens, da hvis vi udvikler determinanten ved brug af 3.række fås:

$$|\mathbf{A} - 4\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0$$

Yderligere skal vi finde egen vektorerne, ved egenværdien 4. Vi benytter os igen en formel, hvor vi løser det som var det et homogent ligningssystem:

$$p(4) = (\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{R1+R2} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{R2+\frac{1}{2}R1} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\substack{-\frac{1}{7}R2 \\ -\frac{1}{2}R1}} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{R1-2R2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$, Herfra aflæses løsningen til at være:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ x_3 &= t, \textit{da } x_3 \textit{ optræder som en fri variabel} \end{aligned}$$

Egenvektorende til egenværdierne 4, er derfor:

$$\lambda = 4: \boldsymbol{v}_1 = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

4) Vi skal bestemme de to yderligere egenværdier for **A**, hvilket vi gør ved brug af det kar.pol ($p(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|$), hvor vi derefter finder rødderne i det polynomie som kommer. Hertil fås:

$$p(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$\textit{Udviklingen gennem } 3.\textit{række}$

$$= 0 + 0 + (4-\lambda)\cdot(-1)^{(3+3)}\cdot\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}$$
$$= (4-\lambda)\cdot(\lambda^2+\lambda-\lambda-2) = (4-\lambda)(\lambda^2-2)$$
$$= (4-\lambda)(\lambda^2-2) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 4\ eller\ \lambda_3 = +\sqrt{2}\ eller\ \lambda_3 = -\sqrt{2}$$

Da **A** er symmetrisk, og har både en positiv og negativ egenværdi, er **A** indefinit

5) Vi skal bestemme løsningerne til det lineære ligningssystem $\mathbf{Bx} = \begin{pmatrix}4\\4\\12\end{pmatrix}$**,** hvor vi gøre det samme som i spm. 2, blot med **B**, i stedet for **A**, i den udvid idet koefficient matrix:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 4\\ 1 & 2 & -1 & 4\\ 3 & 4 & -5 & 12\end{pmatrix}_{\substack{R2-R1\\R3-3R1}} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}_{\substack{R1-R2\\R3-R2}} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & -3 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$, Herfra aflæses løsningen til at være:

$$x_1 - 3x_3 = 4 \Leftrightarrow x_1 = 4 + 3x_3$$
$$x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -x_3$$
$$0 = 0$$
$$x_3 = t, da\ x_3\ optræder\ som\ en\ fri\ variabel$$

Konkret er løsningen til ligningsystemet:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

6) Vi skal afgøre om matrixproduktet $\mathbf{A^{-1}B}$ er en invertibel matrix, samt om matrixproduktet $\mathbf{B'A}$, er en invertibel matrix.
I spm. 5 så vi at den reduceret echelon form af **B**, inden holdte en nulrække, derfor ved vi at $|\mathbf{B}| = 0$, ydermere har vi at $|\mathbf{B}| = |\mathbf{B}'|$, til sidst har vi at $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|$
Derfor til det første spørgsmål har vi at:

$$|\mathbf{A^{-1}B}| = |\mathbf{A^{-1}}|\cdot|\mathbf{B}| = |\mathbf{A^{-1}}|\cdot 0 = 0$$
$$Og$$
$$|\mathbf{B'A}| = |\mathbf{B}'|\cdot|\mathbf{A}| = 0\cdot|\mathbf{A}| = 0$$

Dermed kan vi konkludere at ingen af de to matricer er invertibel.

7) Vi skal udregne determinanten af **C.** Til det benytter vi os af det faktum, at determinaten til en matrix er upåvirket af rækkeoperationer, som set i spm.5&6. Hertil fås:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix}0 & -1 & -1 & 3\\ 0 & 2 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 5 & -4\\ 0 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}_{R1+R2} \to \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 5\\ 0 & 2 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 5 & -4\\ 0 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Hertil udvikler vi efter første søjle og får:

$$\det(\mathbf{C}) = 0 + 0 + 2\cdot(-1)^{(1+3)}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 5\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix} + 0 =$$
$$2\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 5\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}, vi\ laver\ to\ rækkeopeartioner$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}_{\substack{R-2R1\\R3-R1}} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & -8\\ 0 & 1 & -6\end{pmatrix}$$, hvorefter vi udvikler denne efter første søjle:

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & -8\\ 0 & 1 & -6\end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{(1+1)}\cdot\begin{vmatrix}1 & -8\\ 1 & -6\end{vmatrix} + 0 + 0 = -6 - (-8) = 2$$
$$Vi\ får\ dermed:$$

$$\det(\mathbf{C}) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \left(1 \cdot (-1)^{(1+1)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} + 0 + 0\right) = 4$$

Vi konkluderer at determinanten til **C** er 4: $\det(\mathbf{C}) = 2$

Opgave 2: Hessematrice, Retningsaflede & Dobbeltintegraler

1) Vi skal bestemme hessematricen for funktion *f*, givet ved:

$$f(x,y) = -2 + \frac{1}{x} + e^{x+y}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, med\ x > 0\ og y > 0,$$
$$Dm_f\ er: D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\ og\ y > 0\}$$

Vi starter med at finde de første ordens partielle aflede af funktionen *f* og får:

$$f_1'(x,y) = -x^{-2} + e^{x+y}\ \ \&\ f_2'(x,y) = e^{x+y}$$

Hertil finder vi Hessematricen til *f*:

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 2x^{-3} + e^{x+y} & e^{x+y} \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} + e^{x+y} & e^{x+y} \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix}$$

Det ønsket er fundet

2) Vi skal nu vise at *f* er en strengt konveks funktion. Vi gør dette ved brug af undersøge Hessematricens ledende hoved underdeterminanter, for hvis Hessematricen er positivt definit, så vil *f* være strengt konveks:

$$D_1 = \left|\frac{2}{x^3} + e^{x+y}\right| = \frac{2}{x^3} + e^{x+y} > 0, da\ (x,y) \in D$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \frac{2}{x^3} + e^{x+y} & e^{x+y} \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{vmatrix} = e^{x+1}\left(\frac{2}{x^3} + e^{x+y}\right) - (e^{x+1})^2 = \frac{2}{x^3}e^{x+1} + (e^{x+y})^2 - (e^{x+y})^2$$
$$= \frac{2}{x^3}e^{x+1} > 0,, da\ (x,y) \in D$$

Vi kan konkludere at Hessematricen er positivt definit, ergo at *f* er strengt konveks på definitionsmængden, som givet i opgaven. Hermed er det ønsket vist

3) Vi skal udregne den retningsafledede af funktionen *f*, i punktet $(1,4)$ i retningen givet ved vektoren $\boldsymbol{a} = \frac{(4,-3)}{\|(4,-3)\|}$.

Den retningsaflede i punktet (1,4) heder: $\nabla f(1,4) \cdot \boldsymbol{a}$

Vi starter med at udregne $\boldsymbol{a}$ og får:

$$\boldsymbol{a} = \frac{(4,-3)}{\|(4,-3)\|} = \frac{(4,-3)}{\sqrt{(4)^2 + (-3)^2}} = \frac{(4,-3)}{\sqrt{25}} = \left(\frac{4}{\mathbf{5}}, -\frac{3}{5}\right)$$

Nu starter vi med at finde $\nabla f(x,y) = (f_1'(x,y), f_2'(x,y))$

Jf. spm. 1 har vi: $\nabla f(1,4) = \left((-1^{-2} + e^{1+4}), e^{1+4}\right) = \left(-\frac{1}{1^2} + e^5, e^5\right) = (e^5 - 1, e^5)$

Nu kan vi løse for den retningsaflede, og får:

$$\nabla f(1,4) \cdot \boldsymbol{a} = (e^5 - 1) \cdot \left(\frac{4}{5}\right) + e^5 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4e^5}{5} - \frac{4}{5} - \frac{3e^5}{5} = \frac{-4 + e^5}{5}$$

4) Vi skal løse dobbeltintegralet, for *f*, inden for kvadratet:

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2\ og\ 1 \le y \le 2\}$$
$$\int\int_K f(x,y)dxdy$$

Vi bemærker, at da ingen af de to variablers grænser er afhængige af hinanden, er integrationsrækkefølgende ligegyldig. Hertil integreres y først, derefter x. Det giver:

$$\int_1^2\left(\int_1^2 -2+\frac{1}{x}+e^{x+y}dy\right)dx=\int_1^2\left[-2y+\frac{1}{x}y+e^{x+y}\right]_1^2 dx$$
$$=\int_1^2\left(-4+\frac{2}{x}+e^{x+2}-\left(-2\cdot 1+\frac{1}{x}+e^{x+1}\right)\right)dx$$
$$=\int_1^2\left(-4+\frac{2}{x}+e^{x+2}+2-\frac{1}{x}-e^{x+1}\right)dx$$
$$=\int_1^2\left(-2+\frac{1}{x}+e^{x+2}-e^{x+1}\right)dx$$
$$=[-2x+\ln(|x|)+e^{x+2}-e^{x+1}]_1^2$$
$$=-2\cdot 2+\ln(2)+e^{2+2}-e^{2+1}-(-2\cdot 1+\ln(1)+e^{1+2}-e^{1+1})$$
$$=-4+\ln(2)+e^4-e^3+2-\ln(1)-e^3+e^2$$
$$=\ln(2)+e^4-2e^3+e^2-2$$

Opgave 3: Differentiabelligning af 1.orden

1) Vi skal bestem den generelle løsning til differentialligningen givet ved:

$$\dot{x}+\left(\frac{1}{t}+1\right)x=\frac{3}{t}, t>0$$

Hvis vi omdanner dette til at se således ud: $a(t)=\frac{1}{t}+1$, $b(t)=\frac{3}{t}$, $A(t)=\ln(t)+t$

Så kan vi indsætte udtrykket ind i panserformlen, for at finde den generelle løsning:

$$\dot{x}+a(t)x=b(t)\Leftrightarrow x=Ce^{-\int a(t)dt}+e^{-\int a(t)dt}\int e^{\int a(t)dt}b(t)dt$$

Når vi indsætter de fundet værdier for oven, fås:

$$x=Ce^{-\ln(t)-t}+e^{-\ln(t)-t}\int e^{\ln(t)+t}\cdot\frac{3}{t}dt$$
$$x=Ct^{-1}e^{-t}+t^{-1}e^{-t}\int te^{t}\cdot\frac{3}{t}dt$$

Vi ligger mærke til at $te^t\cdot\frac{3}{t}=3e^t$

$$x=Ct^{-1}e^{-t}+t^{-1}e^{-t}\int 3e^t dt$$
$$x=Ct^{-t}e^{-t}+t^{-1}e^{-t}\cdot 3e^t$$
$$x=Ct^{-1}e^{-t}+t^{-1}\cdot 3=t^{-1}(Ce^{-t}+3), t>0, C\ er\ en\ arbitrær\ konstant$$

2) Vi skal nu bestemme den løsning, der opfylder betingelsen $x(1)=6$

Vi gør dette ved indsætte disse ny opgivet værdier: $x=6$, $t=1$ i vores fundet generelle løsning, for derefter at isolere C og se hvad konstanten skal være:

$$x(1)=C1^{-1}e^{-1}+1^{-1}\cdot 3=1^{-1}(Ce^{-1}+3)=6$$
$$6=\frac{1}{1}(Ce^{-1}+3)\Leftrightarrow 6=Ce^{-1}+3\Leftrightarrow Ce^{-1}=3\Leftrightarrow C=3e$$

Dvs. løsningen til differentialligningen som opfylder betingelsen $x(1)=6$, har forskriften:

$$x(t)=t^{-1}(3e\cdot e^{-1t}+3)=t^{-1}(3e^{1-t}+3), hvor\ t>0$$

Januar 2023

Opgave 1: Matricer

a) En matrice anses som værende invertibel, hvis den er regulær, ensbetydende med at dens determinant er forskelligt fra nul: $\det(\mathbf{B}) \neq 0$. Vi finder **B'**s determinant og får:

Vi udvikler efter 2.række: $\det(\mathbf{B}) = 0 + (-2) \cdot (-1)^{(2+2)} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 0 = (-2) \cdot (3-2) = -2 \neq 0,$

Hermed er det ønsket bevist. Desuden, skal vi finde den inverse matrix til **B**, hvilket er$\mathbf{B}^{-1}$**,** som når prikket med **B,** bliver til en indentitets matrix, **I**. Vi sætter matricerne **B & I** ved siden af hinanden, og laver række operationer indtil de har "byttet" plads:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\substack{-\frac{1}{2}R2 \\ R1+R3}} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\substack{R1+2R2 \\ 2R3}} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 4 & -8 & -6 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{R3-4R1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -8 & 2 & -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}_{R3+8R2} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}_{R1+R3} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}_{\frac{1}{2}R3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$, nu har de to matricer "byttet plads" og dermed har vi at

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2) Vi skal løse det linære ligningsystem. Dette gør vi, ved brug af Gauss elimination, hvori vi omdanner ligning systemet til den udvidiedet koeeficient matrix, laver rækkeoperationer indtil vi har opnår den reduceret echelon form:

$$\mathbf{B}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 2 & -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}_{\substack{R3+2R1 \\ -\frac{1}{2}R2}} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \end{pmatrix}_{R1+R3} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \end{pmatrix}_{\substack{R1-2R2 \\ -1R3}} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -11 \end{pmatrix}_{-1R1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -11 \end{pmatrix}_{-1R1}$$ Herfra

aflæses løsning til ligniningsystemet let:

$$x_1 = -12$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = -11$$

Omdannet til ligningssystemt igen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 2 \\ -11 \end{pmatrix}$$

3) Vi udregner det kar.poly for **A**, hvorefter vi finder rødderene i polynomiet, for at anskaffe egenværdierne (λ) til **A**:

$$p(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$$

$$\lambda = \frac{2 \pm 4}{2 \cdot 1} \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

Egenværdierne er $\lambda_1 = -1$ & $\lambda_2 = 3$, og resultater er fundet som ønsket. Yderligere skal vi vise at **A** er indefinit, hvilke vi gør ved at finde de ledende hovedunderdeterminanter:

$$D_1 = \Delta_1^{(1)} = |1| = 1 > 0$$

$$D_2 = \Delta_2^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 < 0$$

Da **A** hverken opfylder parameteren for hverken Positivt- eller Negativt-definit, kan vi kort observere om den opfylder semi-definitheden:

$$\Delta_1^{(2)} = |1| = 1 > 0$$

Den kan hellere ikke være positivt semidefinit, da den anden. Ordens hoved underdeterminant er mindre end 0, og hellere ikke negativt semidefinit, da 1.ordens hoved underdeterminatnerne er større end 0. Vi konkluderer derfor at **A** er indefinit

4) Vi bestemmer egenvektorene tilhørende **A**, ved hjælp af formlen som siger:

$$\mathbf{Av} = \mathbf{vx} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I_n}) \cdot \boldsymbol{x} = 0$$

Dertil finder vi egenvektorerne tilhørende **A,** til at være:

$$\lambda_1 = -1: (\mathbf{A} - (-1)\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} 1-(-1) & -2 \\ -2 & 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Vi laver rækkeoperationer, til vi opnår den reduceret Echelon form:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}_{R2+R1} \to \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\frac{1}{2}R1} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Herfra aflæses løsningen til at være:

$$\begin{aligned} & x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \\ & 0 = 0 \qquad \Leftrightarrow \boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0 \\ & x_2 = t, da\ x_2\ er\ en\ fri\ variabel \end{aligned}$$

$$\lambda_2 = 3: (\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} 1-3 & -2 \\ -2 & 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Vi laver rækkeoperationer, til vi opnår den reduceret Echelon form:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}_{R2-R1} \to \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{-\frac{1}{2}R1} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Herfra aflæses løsningen til at være:

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \\ & 0 = 0 \qquad \Leftrightarrow \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0 \\ & x_2 = t, da\ x_2\ er\ en\ fri\ variabel \end{aligned}$$

5) Vi bestemmer den ortogonale matrix **P**, samt den diagonale matrix **D**, ved brug af Spektral sætningen, som siger at hvis den Diagonale Matrix **D** er beståede af egen værdierne til **A**, så vil **P** bestå af deres normeret egen vektorer i samme rækkefølge. Ved benyttelse af dette, fås:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

Kort fortalt, så gælder det også at for en ortogonal matrix at: $\mathbf{P}' = \mathbf{P^{-1}}$

$$\lambda_1 = -1: \|\boldsymbol{v}_1\| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}\,, hertil\ den\ normeret\ vektor: \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3: \|\boldsymbol{v}_2\| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}\,, hertil\ den\ normeret\ vektor: \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Vi danner **P** hertil udefra dette og får:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{P}' = \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Hertil har vi nu opfyldt det ønsket krav om en ortogonal matrix og diagonal matrix, hvori det gælder:

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

6) Vi udregner matrixproduktet: **CA** og får:

$$\mathbf{CA} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) & -1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) & 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) & (-1) \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -5 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Derefter finder vi nu rangen af **CA,** og da **CA** kun har to søjler, er den maksimale rang 2. Yderligere, da de to søjler i **CA** er lineært uafhængige, dette ses oplagt da de ikke er proportionale, kan vi konkludere at rangen af **CA** er 2. ’

7)
Løsning:
C har 3 rækker og 2 søjler, hvilket betyder at **C’** vil have 2 rækker og 3 søjler. Da matrixproduktet **C’F** er defineret, vil dette betyde af mængden af rækker i **F** er det samme som søjlerne i **C**. Tilsvarende, da **F** er kvadratisk, hvis **F** har 3 rækker, vil den også have 3 søjler.

Opgave 2: Funktioner af 3 variabeler, Hessematrice, Konveks

1) Vi undersøger om $(x, y, z) = (0,0,0)$ er et stationære punkt for funktionen *f*, ved at udregner de første ordens afledte af *f*:

$$f_1'(x, y, z) = 4x^3 + 2x - 3y = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 2x - 3\left(\frac{1}{2}x\right) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 2x - \frac{3}{2}x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(4x + 2 - \frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f_2'(x, y, z) = 6y - 3x \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x, indsætter\ for\ oven: Hvis\ x = 0, så\ y = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

$$f_3'(x, y, z) = 4z = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

Vi kan bekræfte at punktet $(x, y, z) = (0,0,0)$ er et stationære punkt for *f*, og endda det eneste stationære punkt.

2) Vi finder Hessematricen for *f*, for at undersøge om *f* er strengt konveks. Jf. FMEA Teorem 2.3.2, ved vi at hvis *f* er defineret på et konveks set, hvilket vi kan se givet opgavebeskrivelsen ($\mathbb{R}^3$ *er konvekst*), så har vi at kan undersøge de ledende hoved underdetermiannter i Hessematricen:

$$f''(x, y, z) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \Delta_1^{(1)} = |12x^2 + 2\,| = 12x^2 + 2 > 0, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$$D_2 = \Delta_2^{(1)} = \begin{vmatrix} 12x^2 + 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 72x^2 + 12 - 9 = 72x^2 + 3 > 0, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$$D_3 = \Delta_3^{(2)} = Udvikler\ efter\ 3.række: 0 + 0 + (4) \cdot (-1)^{(3+3)} \cdot \begin{vmatrix} 12x^2 + 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 4(72x^2 + 12 - 9) = 4(72x^2 + 3) = 288x^2 + 12 > 0, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Vi kan hertil se at Hessematricen er positivt definit, og dermed også Strengt Konveks. Dermed er det ønsket bevist.

3) Vi skal bestemme værdimængden for *f*. Vi starter ud med at undersøge hvad det globale minimums punkt angiver for en værdi, da jf. spm 2 vi fandt ud af funktionen *f* var strengt konveks, og dermed må det stationære punkt fundet i spm 1, være et globalt minimumspunkt:

$$f(0,0,0) = 0^4 + 0^2 + 3 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0^2 + 3 = 3$$

Dertil fastlåser vi to af værdierne, fx $(y, z) = (0,0)$, og ser hvad der sker når vi lader $x \to \infty$.

Det ses oplagt at får: $f(x, 0,0) = x^4 + x^2 + 3 \cdot 0^2 - 3 \cdot x \cdot 0 + 2 \cdot 0^2 + 3 \to \infty, for\ x \to \pm\infty$. Yderligere kan vi se, at da alle de forskellige led indgår opløftet i et positivt tal, vil funktionen stadig gå mod ∞, for et variabelt gående mod $-\infty$.

Hertil er værdimængden: $Vm_f = [3; \infty[$

4) Vi skal begrunde af $g(x, y, z) = 8 \cdot e^{f(x,y,z)}$ er konveks.

Hvis vi danner en funktion som er defineret ved: $G(u) = 8 \cdot e^u$, så har vi at $g(x, y, z) = G\big(f(x, y, z)\big)$.

Jf. Spm. 3 ved vi at $f(x, y, z)$ er en strengt konveks funktion. Yderligere kan vi også se at $G(u) = 8 \cdot e^u$ er også en strengt voksende funktion og konveks: $(da\ G'(u) = e^u > 0, G''(u) = e^u > 0)$

Hertil har vi af FMEA-side 59, Teorem 2.3.5, har vi at en funktion bestående af en indre funktion som er konveks, *f*, og en ydere funktion som er voksende og konveks, vil sig selv være konveks.

$$g(x, y, z) = G(f(x, y, z))$$

Dermed kan vi konkludere at $g(x, y, z)$ er (strengt) konveks, og det ønsket er bevist:

Opgave 3: Dobbelt Integraler

1) Vi skal udregne dobbeltintegralet, givet på en lukket mængde. Da vi kan se at hverken af to de to variablers grænser, er afhængige af hinanden, er integrationsrækkefølgende ligegyldig. Hertil får vi følgende:

$$\iint_A f(x,y)dxdy \;=\int_0^1\left(\int_0^2 e^{x+y}-2x^3y+4x\,dy\right)dx=\int_0^1 [e^{x+y}-x^3y^2+4xy]_0^2dx=$$

$$\int_0^1 (e^{x+2}-4x^3+8x-e^x)dx=[e^{x+2}-x^4+4x^2-e^x\,]_0^1$$

$$=e^3-1+4-e^1-(e^2-e^0)=e^3-e^2-e\;+4$$

2) Vi skal udregne den retningsafledede af funktionen *f* i punktet $(1,-1)$ i retningen, givet ved vektoren $\boldsymbol{a}=\frac{(2,-3)}{\|(2,-3)\|}$

Vi udregner den retningsafledede af *f* i punktet $(1,-1)$ i retningen givet ved $\boldsymbol{a}$ som et skalarprodukt:

$$\nabla f(1,-1)\cdot\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{(2,-3)}{\|(2,-3)\|}=\frac{(2,-3)}{\sqrt{(2)^2+(-3)^2}}=\frac{(2,-3)}{\sqrt{13}}=\left(\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{-3}{\sqrt{13}}\right)$$

$$\nabla f(x,y)=(f_1'(x,y),f_2'(x,y)=(e^{x+y}-6x^2y+4,e^{x+y}-2x^3)$$

$$\nabla f(1,-1)=\left(f_1'(1,-1),f_2'(1,-1)\right)=\left(e^{1+(-1)}-6\cdot 1^2(-1)+4,e^{1+(-1)}-2\cdot 1^3\right)=$$

$$(e^0+6+4,e^0-2)=(11,-1)$$

Ergo er:

$$\nabla f(1,-1)\cdot\boldsymbol{a}=11\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}+(-1)\cdot\frac{-3}{\sqrt{13}}=\frac{22}{\sqrt{13}}+\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{25}{\sqrt{13}}$$

August 2022

Opgave 1

Betragt følgende matricer:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Udregn matrixproduktet **AB**.

Løsningsforslag: Ved matrixmultiplikation fås

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 8 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestem alle løsninger til ligningssystemet

$$\mathbf{A}' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix},$$

hvor $\mathbf{A}'$ er den transponerede til $\mathbf{A}$.

Løsningsforslag: Systemet kan løses ved Gauss-elimination. Den udvidede koefficientmatrix er

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ved rækkeoperationer kan denne bringes på reduceret echelon-form (detaljer bør vises i besvarelsen):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Heraf ses, at x_3 kan vælges som en fri variabel, og at

$$x_1 + 2x_3 = 1 \quad \text{og} \quad x_2 - 2x_3 = 2.$$

Sættes $x_3 = t$, kan løsningerne således skrives

$$x_1 = 1 - 2t, \quad x_2 = 2 + 2t \quad \text{og} \quad x_3 = t, \quad \text{hvor } t \in \mathbb{R}.$$

På vektorform bliver det

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{hvor } t \in \mathbb{R}.$$

(c) Lad $\mathbf{D}$ være en invertibel 3×3 matrix.
Vis, at ligningssystemet

$$(\mathbf{DC})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

kun har den trivielle løsning $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Løsningsforslag: Det homogene ligningssystem har ikke-trivielle løsninger, hvis og kun hvis determinanten af koefficientmatricen $\mathbf{DC}$ er lig med nul (EMEA Theorem 13.8.2). Det er således tilstrækkeligt at vise, at $|\mathbf{DC}| \neq 0$.
Da $\mathbf{D}$ er invertibel, er $|\mathbf{D}| \neq 0$ (EMEA Theorem 13.7.1). Determinanten af $\mathbf{C}$ kan fx bestemmes ved udvikling efter første række:

$$|\mathbf{C}| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2\,.$$

Altså har vi som ønsket $|\mathbf{DC}| = |\mathbf{D}||\mathbf{C}| \neq 0$.

(d) Vis, at $\lambda = 1$ er en egenværdi for $\mathbf{C}$.
Bestem de øvrige egenværdier for $\mathbf{C}$.

Løsningsforslag: Det karakteristiske polynomium for $\mathbf{C}$ er

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= |\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)((1-\lambda)(-\lambda) - 1) + 1(-(1-\lambda)) = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2)\,. \end{aligned}$$

Det ses umiddelbart, at $\lambda = 1$ er en rod i p og dermed en egenværdi for $\mathbf{C}$ (EMEA Theorem 13.10.1). Og det ses videre, at de øvrige egenværdier er løsningerne til andengradsligningen $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, som er $\lambda = -1$ og $\lambda = 2$.

(e) Bestem alle egenvektorerne for $\mathbf{C}$ hørende til egenværdien $\lambda = 1$

Løsningsforslag: De ønskede egenvektorer fås som de ikke-trivielle løsninger til det homogene ligningssystem $(\mathbf{C} - \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Koefficientmatricen

$$\mathbf{C} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

kan ved rækkeoperationer bringes på reduceret echelon-form:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Heraf ses, at x_2 kan vælges som en fri variabel, og at

$$x_1 + x_2 = 0 \quad \text{og} \quad x_3 = 0\,.$$

Sættes $x_2 = t$, kan egenvektorerne således skrives

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{hvor } t \neq 0.$$

Opgave 2

(a) Vis, at vektorerne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ og } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

er lineært uafhængige.

Løsningsforslag: Lad $\mathbf{A}$ være 3×3 matricen, der har de tre vektorer som søjlevektorer. Vektorerne er lineært uafhængige netop hvis $|\mathbf{A}| \neq 0$ (FMEA Theorem 1.2.1). Ved udvikling efter tredje række fås

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3(1-6) + 2(2-2) = -15\,.$$

Altså har vi det ønskede.

(b) Lad **a**, **b** og **c** være lineært uafhængige vektorer i $\mathbb{R}^m$.
Afgør, om vektorerne $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{b}+\mathbf{c}$ og $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ også er lineært uafhængige. Begrund dit svar.

Løsningsforslag: Lad c_1, c_2, c_3 være tal, så

$$c_1(\mathbf{a}-\mathbf{b}) + c_2(\mathbf{b}+\mathbf{c}) + c_3(\mathbf{c}-\mathbf{a}) = \mathbf{0}\,.$$

Hvis det heraf følger, at $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, så er de tre vektorer lineært uafhængige (FMEA afsnit 1.2).
Ligningen ovenfor kan omskrives til

$$(c_1 - c_3)\mathbf{a} + (c_2 - c_1)\mathbf{b} + (c_2 + c_3)\mathbf{c} = \mathbf{0}\,.$$

Da **a**, **b** og **c** er antaget lineært uafhængige, følger det heraf, at

$$c_1 - c_3 = 0\,, \quad c_2 - c_1 = 0 \quad \text{og} \quad c_2 + c_3 = 0\,.$$

Af disse ligninger fås $c_3 = c_1 = c_2 = -c_3$, hvoraf det umiddelbart følger, at $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Altså er vektorerne $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{b}+\mathbf{c}$ og $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ lineært uafhængige.

Opgave 3

Lad f være funktionen af tre variable, der er givet ved forskriften

$$f(x,y,z) = -x^2e^z - y^2 + 2y \quad \text{for alle } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Udregn den retningsafledede (*the directional derivative*) af f i punktet $(1,1,0)$ i retningen givet ved vektoren

$$\mathbf{a} = \frac{(2,1,2)}{\|(2,1,2)\|}\,.$$

.

Løsningsforslag: Først bestemmes gradienten af f ved partiel differentiation:

$$\nabla f(x,y,z) = (f_1'(x,y,z), f_2'(x,y,z), f_3'(x,y,z)) = (-2xe^z, -2y+2, -x^2e^z)\,.$$

I punktet $(1,1,0)$ har vi således

$$\nabla f(1,1,0) = (-2e^0, -2+2, -e^0) = (-2,0,-1)\,.$$

Den retningsafledede er (FMEA afsnit 2.1)

$$f_{\mathbf{a}}'(1,1,0) = \nabla f(1,1,0)\cdot\mathbf{a} = (-2,0,-1)\cdot\mathbf{a}\,.$$

Da $\|(2,1,2)\| = \sqrt{2^2+1^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$ fås endelig

$$f_{\mathbf{a}}'(1,1,0) = (-2,0,-1)\cdot\frac{1}{3}(2,1,2) = \frac{1}{3}(-4-2) = -2\,.$$

(b) Bestem alle stationære punkter for f.

Løsningsforslag: De stationære punkter er givet ved ligningerne

$$f_1'(x,y,z) = -2xe^z = 0\,, \quad f_2'(x,y,z) = -2y+2 = 0\,, \quad f_3'(x,y,z) = x^2e^z = 0\,.$$

Første og tredje ligning er opfyldt netop hvis $x = 0$. Anden ligning er opfyldt netop hvis $y = 1$. De stationære punkter er således punkterne $(0,1,z)$, hvor $z \in \mathbb{R}$.

(c) Bestem Hessematricen $\mathbf{f}''(x,y,z)$.
Vis, at f hverken er konveks eller konkav.

Løsningsforslag: De førsteordens partielle afledede er bestemt i (a). Ved partiel differentiation af disse fås Hessematricen:

$$\mathbf{f}''(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2e^z & 0 & -2xe^z \\ 0 & -2 & 0 \\ -2xe^z & 0 & -x^2e^z \end{pmatrix}.$$

Den hovedunderdeterminant af orden 2, der fremkommer ved at slette anden række og anden søjle, er

$$\begin{vmatrix} -2e^z & -2xe^z \\ -2xe^z & -x^2e^z \end{vmatrix} = 2x^2e^{2z} - 4x^2e^{2z} = -2x^2e^{2z}\,.$$

Da denne er strengt negativ for alle $x \neq 0$, er f hverken konveks eller konkav (FMEA Theorem 2.3.3). (At f ikke er konveks kan også konkluderes ved bare at se på en af hovedunderdeterminanterne af orden 1).

(d) Lad g være funktionen af to variable, der er givet ved

$$g(x,y) = f(x,y,0) \quad \text{for alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Lad R være følgende rektangel i planen:

$$R = [0,3] \times [0,1] = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 1 \,\}\,.$$

Udregn dobbeltintegralet

$$\iint_R g(x,y)\; dx\, dy\,.$$

Løsningsforslag: Funktionen, der skal integreres, er

$$g(x,y) = f(x,y,0) = -x^2e^0 - y^2 + 2y = -x^2 - y^2 + 2y\,.$$

Integralet udregnes her ved først at integrere mht y og dernæst mht x, men det kan også gøres omvendt (FMEA afsnit 4.4):

$$\begin{aligned}
\iint_R g(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^3 \Big(\int_0^1 (-x^2 - y^2 + 2y)\,dy \Big)\,dx \\
&= \int_0^1 [(-x^2)y - \frac{1}{3}y^3 + y^2]_{y=0}^{y=1}\,dx \\
&= \int_0^1 \big(-x^2 + \frac{2}{3} \big)\,dx \\
&= [-\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x]_0^3 = -9 + 2 = -7\,.
\end{aligned}$$

Opgave 4

Betragt følgende differentialligning af første orden:

$$\frac{dx}{dt} = -e^t(x+1)^2 .$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen (definitionsintervaller kræves ikke bestemt).

Løsningsforslag: Bemærk først, at $g(x) = (x+1)^2$ er lig med nul hvis og kun hvis $x = -1$. Dette er derfor den eneste konstante løsning.
De øvrige løsninger findes ved separation af de variable (FMEA afsnit 5.3):

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -e^t(x+1)^2 \\
-(x+1)^{-2}\,dx &= e^t\,dt \\
\int -(x+1)^{-2}\,dx &= \int e^t\,dt \\
(x+1)^{-1} &= e^t + C \\
x+1 &= \frac{1}{e^t+C} \\
x &= \frac{1}{e^t+C} - 1 ,
\end{aligned}$$

hvor C er en arbitrær konstant og $e^t + C \neq 0$.

(b) Bestem den løsning, der opfylder betingelsen $x(\ln(2)) = 0$.
Hvad er definitionsintervallet for denne løsning?

Løsningsforslag: Ved anvendelse af resultatet fra spørgsmål (a) bliver betingelsen

$$x(\ln(2)) = \frac{1}{e^{\ln(2)}+C} - 1 = \frac{1}{2+C} - 1 = 0 .$$

Heraf fås $C = -1$, og løsningsforskriften bliver derfor

$$x = \frac{1}{e^t - 1} - 1 .$$

Da $e^t - 1 = 0$ hvis og kun hvis $t = 0$, er de mulige definitionsintervaller $(-\infty, 0)$ og $(0, \infty)$. Da $t_0 = \ln(2) > 0$ er det relevante defintionsinterval $(0, \infty)$. Løsningen kan således skrives

$$x(t) = \frac{1}{e^t - 1} - 1 , \quad \text{hvor } t \in (0, \infty).$$

Juni 2022

Opgave 1: Matricer

a) Udregn matrixproduktet **B'B**, hvor **B'** betegner den transponerede til **B**

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&1&3\\1&0&-2\\0&2&4\end{pmatrix}\quad,\mathbf{B}'=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&2\\3&-2&4\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}'\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&2\\3&-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&3\\1&0&-2\\0&2&4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0\cdot0+1\cdot1+0\cdot0 & 0\cdot1+1\cdot0+0\cdot2 & 0\cdot3+1\cdot(-2)+0\cdot4\\ 1\cdot0+0\cdot1+2\cdot0 & 1\cdot1+0\cdot0+2\cdot2 & 1\cdot3+0\cdot(-2)+2\cdot4\\ 3\cdot0+(-2)\cdot1+4\cdot0 & 3\cdot1+(-2)\cdot0+4\cdot2 & 3\cdot3+(-2)\cdot(-2)+4\cdot4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&5&11\\-2&11&29\end{pmatrix}$$

b) Givet almen viden, ved vi at en matrix er invertibel, når dens determinant er $\neq 0$. Vi løser begge matricers determinanter for at undersøge. Vi ved også at den transponerets determinant, er det samme som dens tidligere determinant. Og at et matrix produks determinant, er det samme som de to individuelles matricers determinant ganget sammen:

$$|\mathbf{B}|=|\mathbf{B}'|\quad,\quad|\mathbf{AB}|=|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|$$

$$\det(\boldsymbol{B})=\begin{vmatrix}0&1&3\\1&0&-2\\0&2&4\end{vmatrix},vi\ udvikler\ efter\ første\ søjle:$$

$$1.Søjle: 0+(-1)^{(1+2)}\cdot1\cdot\begin{vmatrix}1&3\\2&4\end{vmatrix}+0=-1\cdot(-2)=2$$

c) Bestem $\mathbf{B^{-1}}$

Vi benytter os af metoden, for at bestemme en matrices inverse, ved at opstille den ved siden af en indentitsmatrice, og lav række operationer indtil de har "bytte plads":

$$\begin{pmatrix}0&1&3&1&0&0\\1&0&-2&0&1&0\\0&2&4&0&0&1\end{pmatrix}_{R2\Leftrightarrow R1}\to\begin{pmatrix}1&0&-2&0&1&0\\0&1&3&1&0&0\\0&2&4&0&0&1\end{pmatrix}_{R3-2R2}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-2&0&1&0\\0&1&3&1&0&0\\0&0&-2&-2&0&1\end{pmatrix}_{-\frac{1}{2}R3}\to\begin{pmatrix}1&0&-2&0&1&0\\0&1&3&1&0&0\\0&0&1&1&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}_{R1+2R3}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&2&1&-1\\0&1&3&1&0&0\\0&0&1&1&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}_{R2-3R3}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2&1&-1\\0&1&0&-2&0&\frac{3}{2}\\0&0&1&1&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Dvs. at den inverse til **B**, er altså:

$$\mathbf{B^{-1}}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\-2&0&\frac{3}{2}\\1&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

d) Bestem alle løsninger til ligningssystemet:

Vi omskriver ligningssystemet til den udvidet koefficient matrix, og laver række operationer, til den reduceret echelon form opnås.

$$\mathbf{C}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&1&2\\2&1&-4\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{R1 \Leftrightarrow R3} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}_{R2-2R1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}_{\substack{R3+R2 \\ R1+R2}}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{-1R2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{-1R2}$$

Herfra kan vi aflæse løsningen til lignings systemet til at være:

$$x_1 - 3x_3 = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1 + 3t$$
$$x_2 + 2x_3 = -1 \Leftrightarrow x_2 = -1 - 2t$$
$$x_3 = 0, ergo\ en\ fri\ variabel: x_3 = t$$

Omdannet til:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e) Bestem tallet *v*, så vektoren

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Er en egen vektor for **C.**

Vi ved at en egenvektor til **C**, vil opfylde:

$$\mathbf{C}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$$

Så vi kan opsætte og løse lignigsystemet derfra:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Her har vi at $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2v - 4 \\ v - 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$Heraf\ løser\ fra\ 2. række\ først:$$
$$2. række: 2v - 4 = 0 \Leftrightarrow v = 2$$
$$1. række: 2 = v \Leftrightarrow 2 = 2$$
$$3. række: v - 1 = 1 \Leftrightarrow 2 - 1 = 1$$

Vi kan se at det stemmer ovens, og dermed er egenværdien $\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 = 1$

Opgave 2: Kvadratiske Former, Definithed

a) Bestem den symmetriske matrix **A** hørende til Q

Gennem den kvadratisk form, kan vi aflæse den tilhørende summetriske matrix **A** til at være:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & a \\ 0 & a & -3 \end{pmatrix}$$

De er en speciel form for funktioner.

Så benyt denne overordnet formel for en evt. $Q(x,y,z)$ kvadratisk form, for at finde den symmetriske matrix som tilhører.

$$(x,y,z)\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
$$= ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$$

b) Bestem alle værdier af, *a* hvor hvilke *Q* er negativ definit:

En given Matrix *er*:

a) Positivt Semidefinit $\Leftrightarrow \Delta_k \geq 0, k = 1,2,\ldots,n$ *(k er alle hoved underdeterminanter)*

b) Positivt Definit $\Leftrightarrow D_k > 0, k = 1,2,\ldots,n$ *(k er alle ledende hoved underdeterminanter)*

(Hvis en matrix er Positivt definit $\Rightarrow$ *Positivt semidefinit*) $(b) \Rightarrow a)$

c) Negativt Semidefinit $\Leftrightarrow (-1)^k\Delta_k \geq 0, k = 1,2,\ldots n$

d)Negativ Definit $\Leftrightarrow (-1)^k D_k > 0, k = 1,2,\ldots n$

$d) \Rightarrow c)$

Så for **A** ser vi at den hverken er Positivt- eller negativt definit. Så kaldes matricen for Indefinit.

Vi bestemmer de ledende hoved underdeterminanter:

$$D_1 = \Delta_1^1 = (-1)^1|-1| = 1$$

$$D_2 = (-1)^2\begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$D_3 = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & a \\ 0 & a & -3 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (-3 + (-1)(-a^2 - \frac{3}{4})$$

$$= -a^2 + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = a = \pm\frac{3}{2}$$

Vi burger Sarurus metoden, for at finde determianten til D_3, hvor efter vi finder andengrads polynomiets røder, for at se hvilke værder a ikke må være:

Det vil sige at *Q* er negativt definit, når *a* hvis, og kun hvis:

$$-\frac{3}{2} < a < \frac{3}{2}$$

Opgave 3: Gradienter, Hessematrice

a) Bestem gradienten $\nabla f(x,y,z) = x^2 + 2y + z^2 + e^{x-y}$

Vi bestemmer gradienten til $\nabla f(x,y,z)$ til at være:

$$x: f_1'(x,y,z) = 2x + e^{x-y}$$
$$y: f_2'(x,y,z) = 2 - e^{x-y}$$
$$z: f_3'(x,y,z) = 2z$$

Vi har udregnet gradienten til at være:

$$\nabla f(2x + e^{x-y}, 2 - e^{x-y}, 2z)$$

Vi udregner: $\left\|\nabla f(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right\|$, vi starter med at udregne vektoren:

$$\nabla f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right) = \left(2\cdot\frac{1}{2}+e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}, 2-e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}, 2\cdot 1\right) = (2,1,2)$$

Så udregner vi længden til at være:

$$\|(2,1,2)\| = \sqrt{2^2+1^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$$

Længden er 3, og den normeret vektor er:

$$\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

b) Bestem hessematricen:

Vi finder hessematricen til at være:

$$f''(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2+e^{x-y} & -e^{x-y} & 0 \\ -e^{x-y} & e^{x-y} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vi finder de ledende hovedunderdeterminanter, og hvis de > 0, så er den strengt konveks

$$D_1: 2+e^{x-y} > 0, da\ 2 > 0\ og\ e^t > 0$$
$$D_2: 2e^{x-y} + e^{2(x-y)} - \left(e^{2(x-y)}\right) = 2e^{x-y} > 0$$
$$D_3: 2e^{2(x-y)} + \left(4e^{x-y} + 2e^{2(x-y)}\right) = 4e^{x-y} > 0$$

Dermed har vi vist at funktionen er strengt konveks

c) Bestem *f*'s enkelte stationære punkt, og vist at dette er et globalt minimumspunkt og bestem dens minimumsværdi:

$$x: f_1'(x,y,z) = 2x + e^{x-y} = 0 \Leftrightarrow 2\mathrm{x} = -\mathrm{e}^{x-y}$$
$$y: f_2'(x,y,z) = 2 - e^{x-y} = 0 \Leftrightarrow 2 = e^{x-y}$$
$$z: f_3'(x,y,z) = 2z = 0 \Leftrightarrow 0$$
$$Herfra\ har\ vi:$$
$$x: f_1'(x,y,z) = 2x + e^{x-y} = 0 \Leftrightarrow 2\mathrm{x} = -\mathrm{e}^{x-y} \Leftrightarrow 2\mathrm{x} = -2 \Leftrightarrow \mathrm{x} = -1$$
$$y: f_2'(x,y,z) = 2 - e^{x-y} = 0 \Leftrightarrow 2 = e^{x-y} \Leftrightarrow 2 = e^{-1-y} \leftrightarrow y = -1 - \ln(2)$$

Det stationære punkt er således:

$$(x,y,z) = (-1,-1-\ln(2),0)$$

Da vi har at *f* er strengt konveks, kan vi konkludere at dette eneste stationære punkt, må være et minimumspunkt, og dermed det globale minimumspunkt (FMEA Theorem 3.1.2)

Minimumsværdien er:

$$f(-1,-1-\ln(2),0) = (-1)^2 + 2(-1-\ln(2)) + 0^2 + e^{-1-(-1-\ln(2))}$$
$$= 1 - 2\ln(2) + e^{\ln(2)} = 1 - 2\ln(2)$$

d) Vis at fuktionen *g*, kvasikonkav

$$g(x,y,z) = \left(1 + x - f(x,y,z)\right)^3, \forall\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

Vi opdeler *g* i to indre funktioner: $u = 1 + x$, en lineære funktion som dermed er både konkav og konveks.

$t = -f(x,y,z)$, vi så fra tidligere spørgsmål at *f* var en streng konveks funktion, i det den ganges med -1, bliver den strengt konkav.

Så har vi at den indre funktion til *g*; $h(x,y,z) = 1 + x - f(x,y,z)$ er en sum af konkave funktioner, og der dermed konkav. (FMEA Teorem 2.3.4) Så har vi at $Da\ F(u) = u^3$, er strengt voksende, så følger det at:

$$g(x,y,z) = \left(1 + x - f(x,y,z)\right)^3 = F(h(x,y,z))$$

Er dermed kvasikonkav (FMEA Theorem 2.5.2, *h* er konkav, og dermed kvasikonkav)

Opgave 4: Differentialligning

Betragt følgende differentialligning af første orden:

$$\dot{x} + \frac{1}{t}x = 4e^{2t}, hvor\ t > 0$$

a) Bestem en fuldstændige løsning til differentialigningen.
Vi benytter os af Panser Formlen for at løse den fuldstændige løsning. Den hedder:

$$Panser\ Formlen: Ce^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int b(t)e^{A(t)}dt$$

Hvor $A(t) = \ln(t)$ er en stamfunktion til $a(t) = \frac{1}{t}\ \ og\ b = 4e^{2t}$

$$x(t) = Ce^{-\int \frac{1}{t}dt} + e^{-\int \frac{1}{t}dt} \int 4e^{2t}e^{\ln(t)}dt$$

Vi laver partiel integration på $\int 4e^{2t}t\ dt$

$$4\int e^{2t}t\ dt = 4(e^{2t}\frac{1}{2}t^2 - \int 2e^{2t}\frac{1}{2}t^2dt$$

$$4 * \int e^{2t}t\ dt$$

$$G(x) = \frac{1}{2}e^{2t}$$
$$f(x) = t$$

$$4 * \left(t * \frac{1}{2}e^{2t} - \int 1 * \frac{1}{2}e^{2t}\ dt\right)$$
$$4 \cdot \left(\frac{1}{2}te^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t}\right) = 2te^{2t} - e^{2t}$$

Vi indsætter dette udtryk ind i panserformlen igen:

$$x(t) = Ct^{-1} + t^{-1}(2te^{2t} - e^{2t})$$
$$x(t) = Ct^{-1} + 2e^{2t} - t^{-1}e^{2t}$$

Og så har vi en generel løsningsformel til differential ligningen:

b) Bestem den løsning, der opfylder betingelse $x(1) = 2 + e^2$
Vi indsætter 1, på t's plads og løser:

$$x(1) = C \cdot 1^{-1} + 2e^{2\cdot 1} - 1^{-1}e^{2\cdot 1}$$
$$x(1) = C + e^2$$

$C = 2$ er løsningen der opfylder, og dermed bliver løsningen:

$$x(1) = 2t^{-1} + 2e^{2t} - t^{-1}e^{2t} = 2 + e^2$$

Panserformlen! $a(t) = \frac{1}{t}$, $A(t) = \ln(t)$, $b(t) = 4e^{2t}$

$$x(t) = Ce^{-\ln(t)} + e^{-\ln(t)}\int 4e^{2t} \cdot e^{\ln(t)}\, dt$$
$$= Ct^{-1} + t^{-1}\int 4e^{2t} \cdot t\ dt$$
$$= Ct^{-1} + t^{-1}\left(2e^{2t} \cdot t - \int 2e^{2t} \cdot 1\ dt\right)$$ Partiel!
$$\underline{= Ct^{-1} + 2e^{2t} - t^{-1}e^{2t},}$$ hvor C er arbitr. konst og $t > 0$.

Februar 2022

Opgave 1

Betragt matricerne $\mathbf{A}(s)$ og $\mathbf{B}(s)$ givet ved

$$\mathbf{A}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & s & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ og } \mathbf{B}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & s & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

hvor s er et reelt tal.

1) Udregn for enhver værdi af s de to matrixprodukter $\mathbf{A}(s)\mathbf{B}(s)$ og $\mathbf{B}(s)\mathbf{A}(s)$.

Løsning:

$$\mathbf{A}(s)\mathbf{B}(s) = \begin{pmatrix} 1+0+1 & 0+0+0 & -1+0-1 \\ 0+0+0 & 0+s^2+0 & 0+0+0 \\ -1+0-2 & 0+0+0 & 1+0+2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & s^2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}(s)\mathbf{A}(s) = \begin{pmatrix} 1+0+1 & 0+0+0 & -1+0-2 \\ 0+0+0 & 0+s^2+0 & 0+0+0 \\ -1+0-1 & 0+0+0 & 1+0+2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & s^2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2) Vis, at $\mathbf{A}(s)$ er invertibel, hvis og kun hvis $s \neq 0$.

Løsning:

En kvadratisk matrix er invertibel, hvis og kun hvis dens determinant er forskellig fra 0.

For eksempel ved udvikling efter 2. række fås:

$$|\mathbf{A}(s)| = 0 + s\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 = s \cdot 1 = s$$

Altså er $\mathbf{A}(s)$ invertibel, hvis og kun hvis $s \neq 0$, som det skulle vises.

3) Bestem den inverse af matricen $\mathbf{A}(2)$. Her er altså $s = 2$.

Løsning:

Den inverse matrix $\left(\mathbf{A}(2)\right)^{-1}$ findes ved først at opstille matricen

$$(\mathbf{A}(2) \ : \ \mathbf{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3×6 matricen omformes ved hjælp af rækkeoperationer til matricen

$$\left(\mathbf{I} \ : \ \left(\mathbf{A}(2)\right)^{-1}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

For eksempel fører disse rækkeoperationer til den ønskede omformning: Til 3. række lægges 1. række, og 2. række ganges med $\frac{1}{2}$. Endelig lægges 3. række til 1. række.

Vi aflæser af den omformede matrix, at $\left(\mathbf{A}(2)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) Bestem alle løsninger til følgende lineære ligningssystem (hvor $s = -1$):

$$\mathbf{A}(-1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Løsning:

Totalmatricen for ligningssystemet er

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

hvor de tre første søjler udgør matricen $\mathbf{A}(-1)$.

Ved rækkeoperationer omformes $\mathbf{T}$ til følgende reducerede echelon form:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Af de tre rækker i denne matrix fremgår, at $x_1 = 7, x_2 = 4, x_3 = 4$.

Ligningssystemet har altså netop én løsning, nemlig

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

5) Gør rede for, at 2 er en egenværdi for $\mathbf{A}(2)$ og bestem de øvrige egenværdier for $\mathbf{A}(2)$.

Løsning:

2 er en egenværdi for $\mathbf{A}(2)$, hvis og kun hvis $|\mathbf{A}(2) - 2\mathbf{I}| = 0$.

$|\mathbf{A}(2) - 2\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-2 & 0 & -1 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ -1 & 0 & 2-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ (for eksempel ved udvikling efter 2. række), så 2 er en egenværdi for $\mathbf{A}(2)$.

For at bestemme de øvrige egenværdier finder vi det karakteristiske polynomium $p(\lambda)$ for $\mathbf{A}(2)$ og bestemmer rødderne heri:

$$p(\lambda) = |\,\mathbf{A}(2) - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\big((1-\lambda)(2-\lambda) - 1\big) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 2 \ \text{ eller } \ \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

Rødderne i 2.-gradspolynomiet findes ved diskriminantmetoden:

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

De øvrige egenværdier for $\mathbf{A}(2)$ er altså

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} \ \text{og} \ \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

6) Bestem alle egenvektorerne for $\mathbf{A}(2)$ hørende til egenværdien 2.

Løsning:

Egenvektorerne hørende til egenværdien 2 er de ikke-trivielle løsninger til det homogene ligningssystem

$$(\mathbf{A}(2) - 2\mathbf{I})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Totalmatricen for dette ligningssystem er

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2-2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2-2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Af 3. række fremgår, at $x_1 = 0$, hvorefter 1. række giver, at også $x_3 = 0$.

Der er ingen betingelser på x_2, der altså er en fri variabel. Sættes $x_2 = t$, kan egenvektorerne for $\mathbf{A}(2)$ hørende til egenværdien 2 skrives

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ hvor } t \neq 0$$

7) Gør rede for, at matricen $\mathbf{A}(2)$ er positiv definit, og at matricen $\mathbf{A}(-2)$ er indefinit.

Løsning:

Vi har ovenfor bestemt alle egenværdierne for $\mathbf{A}(2)$, nemlig

$$2, \frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ og } \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Da $\mathbf{A}(2)$ er symmetrisk, og alle disse egenværdier er positive, er $\mathbf{A}(2)$ positiv definit.

$$\mathbf{A}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Da den ledende hovedunderdeterminant af 2. orden $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 < 0$, er $\mathbf{A}(-2)$ hverken positiv semidefinit eller negativ semidefinit og er dermed indefinit.

Man kunne alternativt argumentere med, at $\mathbf{A}(-2)$ har både positive og negative egenværdier. Egenværdierne for $\mathbf{A}(-2)$ er

$$-2, \frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ og } \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Opgave 2

Lad funktionen f være givet ved

$$f(x,y) = \left(\frac{1}{y} + 4xy - 4x\right)$$

for alle $x \in \mathbb{R}$ og alle $y > 0$.

Lad desuden rektanglet K være givet ved

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \text{ og } 1 \leq y \leq 2\}$$

1) Udregn dobbeltintegralet

$$\iint_K f(x,y)\, dx\, dy$$

Løsning:

$$\iint_K f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_1^2 \left(\tfrac{1}{y} + 4xy - 4x \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^2 [\ln(y) + 2xy^2 - 4xy]_{y=1}^{y=2}\,dx$$

$$= \int_0^2 (\ln(2) + 8x - 8x - (0 + 2x - 4x))\,dx = \int_0^2 (\ln(2) + 2x)\,dx$$

$$= [\ln(2) \cdot x + x^2]_0^2 = 2\ln(2) + 4 - (0+0) = 2\ln(2) + 4$$

2) Udregn den retningsafledede (*the directional derivative*) af funktionen f i punktet $(1,1)$ i retningen givet ved vektoren

$$\boldsymbol{a} = \frac{(1,3)}{\parallel (1,3) \parallel}$$

Løsning:

Vi skal bestemme

$$\nabla f(1,1) \cdot \boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{(1,3)}{\parallel (1,3) \parallel} = \frac{(1,3)}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{(1,3)}{\sqrt{10}} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}} \right)$$

$\nabla f(x,y) = \left(f_1'(x,y), f_2'(x,y) \right) = \left(4y - 4, -\frac{1}{y^2} + 4x \right)$, så

$$\nabla f(1,1) = (4-4, -1+4) = (0,3)$$

Dermed er

$$\nabla f(1,1) \cdot \boldsymbol{a} = 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} + 3 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{9}{\sqrt{10}}$$

Opgave 3

Lad

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0 \text{ og } y > 0\}$$

Betragt funktionen f givet ved forskriften

$$f(x,y,z) = \ln(x) - x + \ln(y) - y - z^2 + 2z \text{ for alle } (x,y,z) \in D$$

Lad desuden funktionen g være givet ved forskriften

$$g(x,y,z) = e^{f(x,y,z)+3} \text{ for alle } (x,y,z) \in D$$

1) Bestem Hessematricen $f''(x,y,z)$ for funktionen f for alle $(x,y,z) \in D$.

Løsning:

Vi skal bestemme alle de 2.-ordens partielle afledede og finder derfor først de 1.-ordens partielle afledede:

$$f_1'(x,y,z) = \frac{1}{x} - 1 \quad f_2'(x,y,z) = \frac{1}{y} - 1 \quad f_3'(x,y,z) = -2z + 2$$

Herefter fås:

$$f_{11}''(x,y,z) = -\frac{1}{x^2} \quad f_{22}''(x,y,z) = -\frac{1}{y^2} \quad f_{33}''(x,y,z) = -2$$

Alle de seks øvrige 2.-ordens partielle afledede er 0, da ingen af leddene i f indeholder mere end én af de variable.

Dermed er

$$f''(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_{11}''(x,y,z) & f_{12}''(x,y,z) & f_{13}''(x,y,z) \\ f_{21}''(x,y,z) & f_{22}''(x,y,z) & f_{23}''(x,y,z) \\ f_{31}''(x,y,z) & f_{32}''(x,y,z) & f_{33}''(x,y,z) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ for alle } (x,y,z) \in D$$

2) Gør rede for, at f er en strengt konkav funktion.

Løsning:

De ledende hovedunderdeterminanter for Hessematricen $f''(x,y,z)$ er

$$D_1(x,y,z) = -\frac{1}{x^2} < 0 \text{ for alle } (x,y,z) \in D$$

$$D_2(x,y,z) = -\frac{1}{x^2} \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{1}{x^2y^2} > 0 \text{ for alle } (x,y,z) \in D$$

$$D_3(x,y,z) = -\frac{1}{x^2} \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) \cdot (-2) = \frac{-2}{x^2y^2} < 0 \text{ for alle } (x,y,z) \in D$$

Da begge ledende hovedunderdeterminanter af ulige orden er negative overalt på D, og den ledende hovedunderdeterminant af lige orden er positiv overalt på D, er $f''(x,y,z)$ negativ definit overalt på D. Dermed er f en strengt konkav funktion.

Man kan også redegøre for, at $f''(x,y,z)$ er negativ definit overalt på D ved at bemærke, at egenværdierne for $f''(x,y,z)$ er de tre diagonal-elementer, og de er alle negative overalt på D.

3) Gør rede for, at punktet $(x,y,z) = (1,1,1)$ er et globalt maksimums-punkt for funktionen f og bestem den globale maksimumsværdi for f.

Løsning:

Vi ved, at et stationært punkt for en (strengt) konkav funktion er et globalt maksimumspunkt for funktionen. Dermed er det nok at eftervise, at $(x,y,z) = (1,1,1)$ er et stationært punkt for f.

Ved indsætning af punktet i de 1.-ordens partielle afledede fås:

$$f_1'(1,1,1) = \frac{1}{1} - 1 = 0$$
$$f_2'(1,1,1) = \frac{1}{1} - 1 = 0$$
$$f_3'(1,1,1) = -2 + 2 = 0$$

$(x,y,z) = (1,1,1)$ er altså et stationært punkt for f og dermed et globalt maksimumspunkt for f.

Den globale maksimumsværdi for f er

$$f(1,1,1) = \ln(1) - 1 + \ln(1) - 1 - 1^2 + 2 \cdot 1 = -1$$

4) Gør rede for, at funktionen g er kvasikonkav.

Løsning:

Da funktionen $f(x,y,z)$ er konkav, er funktionen $f(x,y,z) + 3$ også konkav og dermed kvasikonkav.

Da den naturlige eksponentialfunktion er en voksende funktion, er funktionen $g(x,y,z) = e^{f(x,y,z)+3}$ dermed kvasikonkav.

Man kan også besvare spørgsmålet ved at anføre, at funktionen $f(x,y,z)$ er konkav og dermed kvasikonkav, og funktionen $F(u) = e^{u+3}$ er en voksende funktion. Dermed er den sammensatte funktion $F\big(f(x,y,z)\big) = e^{f(x,y,z)+3} = g(x,y,z)$ kvasikonkav.

Januar 2022

Opgave 1

Betragt matricerne $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ og $\mathbf{C}(a)$ givet ved

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ og } \mathbf{C}(a) = \begin{pmatrix} 1 & a^2-1 & -1 \\ 2a-2 & 1 & 1+\ln(a) \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix},$$

hvor a er et positivt, reelt tal.

1) Udregn matrixproduktet $\mathbf{A}'\mathbf{B}$, hvor $\mathbf{A}'$ betegner den transponerede til $\mathbf{A}$.

Løsning:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dermed er

$$\mathbf{A}'\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1+4+6 & 0+6+6 & 1-2+0 \\ 4+0+2 & 0+0+2 & 4+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 12 & -1 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2) Gør rede for, at følgende ligningssystem ikke har nogen løsning:

$$\mathbf{B}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Løsning:

Totalmatricen for ligningssystemet er

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ved rækkeoperationer omformes $\mathbf{T}$ til følgende reducerede echelon form:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Af den tredje række fremgår et krav om, at $0 = 1$. Ligningssystemet har dermed ingen løsning.

3) Bestem determinanten af $\mathbf{B}$ og gør derefter rede for, at matrixproduktet $\mathbf{C}(a)\mathbf{B}$ ikke er en invertibel matrix for nogen værdi af det positive, reelle tal a.

Løsning:

Ved udvikling efter 1. række udregnes

$$|\mathbf{B}| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) = 0$$

Dermed er $|\mathbf{C}(a)\mathbf{B}| = |\mathbf{C}(a)||\mathbf{B}| = |\mathbf{C}(a)| \cdot 0 = 0$ for enhver værdi af a.

Da determinanten af $\mathbf{C}(a)\mathbf{B}$ er 0 for enhver værdi af a, er matrixproduktet ikke en invertibel matrix for nogen værdi af a.

4) Gør rede for, at matricen $\mathbf{C}(a)$ er symmetrisk, hvis og kun hvis $a = 1$.

Løsning:

$\mathbf{C}(a)$ er symmetrisk, hvis og kun hvis $a^2 - 1 = 2a - 2$ og $1 + \ln(a) = 1$

Den sidste ligning giver $\ln(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

Denne værdi af a opfylder også den første ligning, da

$1^2 - 1 = 0 = 2 \cdot 1 - 2$.

Altså er $\mathbf{C}(a)$ symmetrisk, hvis og kun hvis $a = 1$.

I resten af denne opgave er $a = 1$.

5) Vis, at 1 er en egenværdi for matricen $\mathbf{C}(1)$ og bestem alle egenvektorerne for $\mathbf{C}(1)$ hørende til egenværdien 1.

Løsning:

Ved indsættelse af $a = 1$ fås:

$$\mathbf{C}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1 er en egenværdi for $\mathbf{C}(1)$, hvis og kun hvis $|\mathbf{C}(1) - 1 \cdot \mathbf{I}| = 0$.

$$|\mathbf{C}(1) - 1 \cdot \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Dermed er 1 en egenværdi for $\mathbf{C}(1)$.

Egenvektorerne hørende til egenværdien 1 findes som de ikke-trivielle løsninger til det homogene ligningssystem

$$(\mathbf{C}(1) - \mathbf{I}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Totalmatricen for dette ligningssystem er

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Af begge de to første rækker fremgår, at $x_3 = 0$, og af den nederste række fremgår, at

$$-x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Sættes for eksempel $x_2 = t$, kan egenvektorerne således skrives

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ hvor } t \neq 0$$

6) Gør rede for, at matricen $\mathbf{C}(1)$ er indefinit.

Løsning:

Da $|\mathbf{C}(1)| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 + (-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = -1$,

findes der altså en negativ hovedunderdeterminant. Derfor er $\mathbf{C}(1)$ ikke positiv semidefinit.

Da for eksempel den ledende hovedunderdeterminant af 1. orden er 1, findes der altså en positiv hovedunderdeterminant af ulige orden. Derfor er $\mathbf{C}(1)$ heller ikke negativ semidefinit.

Da $\mathbf{C}(1)$ hverken er positiv semidefinit eller negativ semidefinit, er $\mathbf{C}(1)$ indefinit.

Man kan også besvare spørgsmålet ved at finde alle egenværdierne for $\mathbf{C}(1)$ og så bemærke, at der er både positive og negative egenværdier.

7) Gør rede for, at matricen $\mathbf{C}(1)$ er invertibel og bestem den inverse matrix $\left(\mathbf{C}(1)\right)^{-1}$.

Løsning:

Under spørgsmål 6) fandt vi, at $|\mathbf{C}(1)| = -1 \neq 0$. Derfor er $\mathbf{C}(1)$ invertibel.

Den inverse matrix $\left(\mathbf{C}(1)\right)^{-1}$ kan bestemmes ved først at opstille matricen

$$(\mathbf{C}(1) \; : \; \mathbf{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Denne omformes ved hjælp af rækkeoperationer til matricen

$$\left(\mathbf{I} \; : \; \left(\mathbf{C}(1)\right)^{-1}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Operationerne er (for eksempel): Til 3. række lægges 1. række, derefter ombyttes 2. række og 3. række, derefter trækkes 2. række fra 3. række, og endelig lægges 3. række til 1. række.

Altså er $\left(\mathbf{C}(1)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Opgave 2

Lad funktionerne f og g være givet ved

$$f(x, y) = e^{x+y} + 3x^2$$

og

$$g(x, y) = e^{f(x,y)+2x}$$

for alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Lad desuden kvadratet A være givet ved

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ og } 0 \leq y \leq 1\}$$

1) Udregn den retningsafledede (*the directional derivative*) af funktionen f i punktet $(0, 1)$ i retningen givet ved vektoren

$$\boldsymbol{a} = \frac{(3, -4)}{\| (3, -4) \|}$$

Løsning:

Den retningsafledede af f i punktet $(0, 1)$ i retningen givet ved $\boldsymbol{a}$ udregnes som skalarproduktet

$$\nabla f(0, 1) \cdot \boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{(3, -4)}{\| (3, -4) \|} = \frac{(3, -4)}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{(3, -4)}{\sqrt{25}} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

$\nabla f(x, y) = \left(f_1'(x, y), f_2'(x, y)\right) = (e^{x+y} + 6x,\ e^{x+y})$, så

$$\nabla f(0, 1) = \left(e^{0+1} + 6 \cdot 0,\ e^{0+1}\right) = (e, e)$$

Dermed er den retningsafledede

$$\nabla f(0, 1) \cdot \boldsymbol{a} = e \cdot \frac{3}{5} + e \cdot \frac{-4}{5} = -\frac{e}{5}$$

2) Udregn dobbeltintegralet

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy$$

Løsning:

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 (e^{x+y} + 3x^2)\, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 [e^{x+y} + 3x^2 y]_{y=0}^{y=1}\, dx$$

$$= \int_0^1 (e^{x+1} + 3x^2 - e^x)\, dx = [e^{x+1} + x^3 - e^x]_0^1$$

$$= e^2 + 1 - e - (e^1 + 0 - e^0) = e^2 - 2e + 2$$

3) Udregn Hessematricen for funktionen f og gør rede for, at f er en strengt konveks funktion.

Løsning:

Vi finder de fire 2.-ordens partielle afledede ved at differentiere de 1.-ordens partielle afledede med hensyn til hhv. x og y:

$$f''_{11}(x,y) = e^{x+y} + 6$$
$$f''_{22}(x,y) = e^{x+y}$$
$$f''_{12}(x,y) = f''_{21}(x,y) = e^{x+y}$$

Dermed er Hessematricen

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{11}(x,y) & f''_{12}(x,y) \\ f''_{21}(x,y) & f''_{22}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x+y}+6 & e^{x+y} \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix}$$

for alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

f er en C^2-funktion defineret på den åbne, konvekse mængde $\mathbb{R}^2$. En tilstrækkelig betingelse for, at f er strengt konveks, er, at Hessematricen er positiv definit for alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

De ledende hovedunderdeterminanter er hhv.

$$e^{x+y} + 6$$
og
$$(e^{x+y} + 6)e^{x+y} - e^{x+y}e^{x+y} = 6e^{x+y}$$

Da $e^{x+y} > 0$ for alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, er begge ledende hovedunderdeterminanter positive overalt på $\mathbb{R}^2$. Dermed er Hessematricen for f positiv definit for alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, så f er strengt konveks.

4) Gør rede for, at funktionen g er en konveks funktion.

Løsning:

Funktionerne $f(x,y) + 2x$ og $f(x,y)$ har samme Hessematrix. Leddet $2x$ forsvinder jo ved to gange differentiation.

Dermed er Hessematricen for $f(x,y) + 2x$ også positiv definit overalt, så $f(x,y) + 2x$ er også (strengt) konveks.
Da den naturlige eksponentialfunktion er en konveks og voksende funktion, er $g(x,y) = e^{f(x,y)+2x}$ derfor en konveks funktion.

Opgave 3

Betragt for $t > 0$ differentialligningen af første orden

$$\dot{x} + \left(2 - \frac{1}{t}\right)x = e^{-2t}$$

1) Bestem den generelle løsning til differentialligningen.

Løsning:

Ligningen er en lineær differentialligning af første orden og kan skrives

$$\dot{x} + a(t)x = b(t), \text{ hvor } a(t) = 2 - \frac{1}{t} \text{ og } b(t) = e^{-2t}.$$

Den generelle løsning til differentialligningen udregnes ved hjælp af "Panserformlen":

$$x(t) = Ce^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int e^{A(t)} b(t)\, dt,$$

hvor $A(t)$ er en stamfunktion til $a(t)$, og C er en arbitrær konstant.

En stamfunktion til $a(t)$ er $A(t) = 2t - \ln(t)$.

Den generelle løsning er derfor

$$x(t) = Ce^{-2t+\ln(t)} + e^{-2t+\ln(t)} \int e^{2t-\ln(t)} e^{-2t}\, dt$$
$$= Ce^{-2t} e^{\ln(t)} + e^{-2t} e^{\ln(t)} \int e^{-\ln(t)}\, dt$$
$$= Ce^{-2t}t + e^{-2t}t \int \frac{1}{t} dt = Ce^{-2t}t + e^{-2t}t \cdot \ln(t)$$

$$= e^{-2t}t(C + \ln(t)),$$

hvor $t > 0$ og C er en arbitrær konstant.

2) Bestem den løsning til differentialligningen, der opfylder betingelsen $x(1) = 1$.

Løsning:

Vi indsætter $t = 1$ i den generelle løsning ovenfor. Dermed fås:

$$x(1) = e^{-2} \cdot 1(C + 0) = e^{-2} \cdot C = 1 \Leftrightarrow C = e^2$$

Den løsning til differentialligningen, der opfylder betingelsen, har således forskriften

$$x(t) = e^{-2t}t(e^2 + \ln(t)), \text{ hvor } t > 0\,.$$

August 2021

Opgave 1

Lad matricerne $\mathbf{B}$ og $\mathbf{C}(s)$ være givet ved:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{C}(s) = \begin{pmatrix} 1 & s & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

hvor s er et reelt tal.

(a) Udregn matrixproduktet $\mathbf{C}(2)\mathbf{B}$.

Løsningsforslag: Ved standard matrixmultiplikation fås

$$\mathbf{C}(2)\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestem alle løsninger til ligningssystemet

$$\mathbf{C}(2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Løsningsforslag: Ligningssystemet kan løses ved Gauss elimination. Den udvidede koefficientmatrix er

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ved rækkeoperationer kan den bringes på reduceret echelon form:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Heraf ses, at x_3 kan vælges som en fri variabel, og at

$$x_1 + x_3 = -3 \quad \text{og} \quad x_2 = 2\,.$$

Sættes $x_3 = t$, kan løsningerne således skrives

$$x_1 = -3 - t\,, \quad x_2 = 2 \quad \text{og} \quad x_3 = t\,, \quad \text{hvor } t \in \mathbb{R}.$$

På vektorform bliver det:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-t \\ 2 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{hvor } t \in \mathbb{R}.$$

(c) Vis, at der for alle værdier af s gælder, at det homogene ligningssystem

$$\mathbf{C}(s) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

har ikke-trivielle løsninger (altså løsninger, der er forskellige fra $x_1 = x_2 = x_3 = 0$).

Løsningsforslag: Det homogene ligningssystem har ikke-trivielle løsninger netop hvis $|\mathbf{C}(s)| = 0$ (EMEA Theorem 16.8.2, s.655). Ved udregning ses, at dette gælder for alle s (determinanten kan fx udvikles efter tredje række).

(d) Vis, at

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

er en egenvektor for $\mathbf{C}(1)$. Hvad er den tilhørende egenværdi?

Løsningsforslag: Ved matrixmultiplikation fås

$$\mathbf{C}(1)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\mathbf{x}\,.$$

Heraf ses umiddelbart, at $\mathbf{x}$ er en egenvektor for $\mathbf{C}(1)$ hørende til egenværdien 2.

(e) Vis, at -1 og 0 er egenværdier for $\mathbf{C}(1)$.

Løsningsforslag: Det karakteristiske polynomium er

$$\begin{aligned} p(\lambda) = |\mathbf{C}(1) - \lambda\mathbf{I}| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -1(-\lambda) - \lambda((1-\lambda)(-\lambda) - 1) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda\,. \end{aligned}$$

Ved indsættelse ses, at $p(-1) = p(0) = 0$. Da -1 og 0 således er rødder i det karakteristiske polynomium, er de egenværdier for $\mathbf{C}(1)$ (FMEA afsnit 1.5).

I resten af opgaven betragtes følgende kvadratiske form:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3\,.$$

(f) Opskriv den symmetriske matrix $\mathbf{A}$ hørende til Q.

Løsningsforslag: (Se FMEA afsnit 1.7). Lad a_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$, være elementerne i $\mathbf{A}$. Diagonalelementet a_{ii} er konstanten foran x_i^2-leddet. For $i \neq j$ skal elementerne a_{ij} og a_{ji} opfylde, at $a_{ij} + a_{ji}$ er konstanten foran x_ix_j-leddet, og at $a_{ij} = a_{ji}$ (symmetri). Derfor får vi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(g) Vis, at Q ikke er positiv definit. Afgør, om Q er positiv semidefinit.

Løsningsforslag: Vi udregner først hovedunderdeterminanterne (principal minors, se FMEA afsnit 1.7) for $\mathbf{A}$ fra spørgsmål (f).
Orden 1: Diagonalelementerne, altså 3, 2 og 3.
Orden 2:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \quad \text{og} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5\,.$$

Orden 3:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Af FMEA Theorem 1.7.1(a,b) (s.32) kan vi så konkludere følgende: Q er ikke positiv definit, da den ledende hovedunderdeterminant af orden 3 er lig med nul. Q er positiv semidefinit, da alle hovedunderdeterminanterne er større end eller lig med nul.

Opgave 2

Lad f være funktionen af tre variable, der er givet ved følgende forskrift:

$$f(x,y,z) = -e^{x+z} + x - y^2 - z^2 \quad \text{for alle } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Bestem gradienten $\nabla f(x,y,z)$. Vis, at

$$\|\nabla f(1,1,-1)\| = \sqrt{5}\,.$$

Løsningsforslag: Først bestemmes gradienten af f ved partiel differentiation:

$$\nabla f(x,y,z) = (f_1'(x,y,z), f_2'(x,y,z), f_3'(x,y,z)) = (-e^{x+z}+1, -2y, -e^{x+z}-2z)\,.$$

Heraf fås $\nabla f(1,1,-1) = (-e^0+1, -2, -e^0+2) = (0,-2,1)$ og endelig

$$\|\nabla f(1,1,-1)\| = \|(0,-2,1)\| = \sqrt{0^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{5}\,.$$

(b) Bestem Hessematricen $\mathbf{f}''(x,y,z)$, og vis, at f er en strengt konkav funktion.

Løsningsforslag: De førsteordens partielle afledede er bestemt i (a). Ved partiel differentiation af disse fås Hessematricen:

$$\mathbf{f}''(x,y,z) = \begin{pmatrix} -e^{x+z} & 0 & -e^{x+z} \\ 0 & -2 & 0 \\ -e^{x+z} & 0 & -e^{x+z}-2 \end{pmatrix}.$$

Så kan de ledende hovedunderdeterminanter udregnes:

$$\begin{aligned}
D_1 &= -e^{x+z} \\
D_2 &= \begin{vmatrix} -e^{x+z} & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2e^{x+z} \\
D_3 &= \begin{vmatrix} -e^{x+z} & 0 & -e^{x+z} \\ 0 & -2 & 0 \\ -e^{x+z} & 0 & -e^{x+z}-2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -e^{x+z} & -e^{x+z} \\ -e^{x+z} & -e^{x+z}-2 \end{vmatrix} = -2(2e^{x+z}) = -4e^{x+z}\,.
\end{aligned}$$

Da $D_1, D_3 < 0$ og $D_2 > 0$ for alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, er f strengt konkav (FMEA Theorem 2.3.2(b), s.57).

(c) Bestem det entydige globale maksimumspunkt for f og den tilhørende globale maksimumsværdi.

Løsningsforslag: Da f er (strengt) konkav, er de stationære/kritiske punkter netop de globale maksimumspunkter (FMEA Theorem 3.1.1(a), s.104). De stationære punkter er givet ved

$$\nabla f(x,y,z) = (-e^{x+z}+1, -2y, -e^{x+z}-2z) = (0,0,0)\,.$$

Løsning af de tre ligninger med tre ubekendte giver $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$ og $z = -\frac{1}{2}$. Altså er det entydige maksimumspunkt $(x,y,z) = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$. Maksimumsværdien er $f(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}) = -e^0 + \frac{1}{2} - 0^2 - (\frac{1}{2})^2 = -\frac{3}{4}$.

(d) Lad g være funktionen af to variable, der er givet ved:

$$g(x,y) = f(x,y,0) \quad \text{for alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Lad R være følgende rektangel i planen:

$$R = [0,1] \times [0,2] = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\,\}\,.$$

Vis, at

$$\iint_R g(x,y)\,dx\,dy = -2e + \frac{1}{3}\,.$$

Løsningsforslag: Integralet udregnes som et dobbeltintegral (FMEA afsnit 4.4). Her integreres først mht y og dernæst mht x, men det kan også gøres omvendt.

$$\begin{aligned}
\iint_R g(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^1 \Big(\int_0^2 (-e^x + x - y^2)\,dy \Big)\,dx \\
&= \int_0^1 [(-e^x + x)y - \frac{1}{3}y^3]_{y=0}^{y=2}\,dx \\
&= \int_0^1 \Big(-2e^x + 2x - \frac{8}{3}\Big)\,dx \\
&= [-2e^x + x^2 - \frac{8}{3}x]_0^1 = (-2e + 1 - \frac{8}{3}) - (-2) = -2e + \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

Opgave 3

Betragt følgende differentialligning af første orden:

$$\frac{dx}{dt} = 4(t + t^3)e^{-x}\,.$$

(a) Gør rede for, at differentialligningen er separabel, og bestem den fuldstændige løsning (en forskrift er tilstrækkelig, definitionsintervaller skal ikke bestemmes).

Løsningsforslag: (Se FMEA afsnit 5.3). Da højresiden er et produkt af funktionerne $f(t) = 4(t + t^3)$ og $g(x) = e^{-x}$, er differentialligningen separabel. Den fuldstændige løsning bestemmes ved separation af de variable (der er ingen konstante løsninger, da $e^{-x} \neq 0$ for alle x):

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= 4(t+t^3)e^{-x} \\
e^x\,dx &= 4(t+t^3)\,dt \\
\int e^x\,dx &= \int 4(t+t^3)\,dt \\
e^x &= 2t^2 + t^4 + C \\
x &= \ln(2t^2 + t^4 + C)\,,
\end{aligned}$$

hvor C er en arbitrær konstant og $2t^2 + t^4 + C > 0$.

(b) Bestem den løsning $x(t)$, der opfylder betingelsen $x(1) = \ln(5)$. Hvad er definitionsmængden for denne løsning?

Løsningsforslag: Konstanten C i den fuldstændige løsning fra spørgsmål (a) bestemmes vha den givne betingelse:

$$x(1) = \ln(2 + 1 + C) = \ln(5) \quad \Leftrightarrow \quad C = 2.$$

Altså bliver løsningen:

$$x(t) = \ln(2t^2 + t^4 + 2)\,, \quad \text{hvor } t \in \mathbb{R}.$$

Definitionsmængden er hele $\mathbb{R}$, da restriktionen $2t^2 + t^4 + 2 > 0$ er opfyldt for alle $t \in \mathbb{R}$.

Juni 2021

Opgave 1: Matricer, Matrice produkt og Ukendt variabel

1) Vi skal udregne matrixproduktet af $\mathbf{AB'}$, hvor **B'** er den transponeret matrix til **B**. Hertil får vi at:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\quad ,\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\quad \mathbf{B'}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AB'}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 2+0\cdot 0+(-2)\cdot(2) & 2\cdot 1+0\cdot 1+(-2)\cdot 0\\ 1\cdot 2+1\cdot 0+0\cdot(2) & 1\cdot 1+1\cdot 1+0\cdot 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

Hertil er det ønsket beregnet, og opgaven er løst:

2) Vi skal redegøre for at $\mathbf{AB'}$ **er** invertibel, hvilket den er hvis dens determinant er forskelligt fra nul. Hertil fås:

$$\det(\mathbf{AB'})=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-4\neq 0$$

Vi har nu bekræftet at $\mathbf{AB'}$ er invertibel, og dermed at $(\mathbf{AB'})^{-1}$ findes. Vi finder den til at:

$$(\mathbf{AB'})^{-1}=\frac{1}{|(\mathbf{AB'})\,|}\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$

Vi benytter os af metode, for at finde den inverse ved en 2×2 matrice. Hermed er det ønske fundet, og opgaven er slut.

3) Vi skal bestemme alle løsninger til ligning systemet, hvilket vi gør ved at omskrive det til det udvidede koefficient matrix, hvorefter vi benytter Gauss' elimination, til vi har reduceret det til den reduceret echelon form. Hertil fås:

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\ :\quad \begin{pmatrix}2 & 0 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}_{R1-R2}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}_{R2-R1}\to$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 2 & -1\end{pmatrix}_{\frac{1}{2}R2}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}_{R1+R2}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$, herfra

omdannes tilbage til et ligningsystem:

$$x_1-x_3=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x_1=\frac{1}{2}+x_3$$
$$x_2+x_3=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x_2=-\frac{1}{2}-x_3$$
$$x_3=t, da\ x_3\ er\ en\ fri\ variabel.$$

Hertil aflæses løsning som:

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}, t\neq 0$$

Hermed er det ønsket beregnet, og opgaven er løst.

4) Vi skal vise at -1 og 3 er egenværdier for $\mathbf{C}(2)$. Vi opnår dette ved at tjekke at det opfylder det kar.pol og får:

$$\lambda_1 = -1 : \ |\mathbf{C}(2) - (-1)\mathbf{I}| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1+1 & 0 & 1 \\ 0 & 2+1 & 0 \\ 2^2 & 0 & 1+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

, der udvikles efter 2. række:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 3 \cdot (-1)^{(2+2)} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 0 = 0$$

$$\lambda_1 = 3 : \ |\mathbf{C}(2) - 3\mathbf{I}| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-3 & 0 & 1 \\ 0 & 2-3 & 0 \\ 2^2 & 0 & 1-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

, der udvikles efter 2. række:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 + 1 \cdot (-1)^{(2+2)} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 0 = 0$$

Vi kan se at det stemmer, og at både -1 og 3 er egenværdier til $\mathbf{C}(2)$. Hermed er et ønsket vist, og opgaven er slut.

5) Vi skal bestemme egenvektorene for $\mathbf{C}(2)$, til det benytter vi os af formlen som hedder:

$$p(-1) = \mathbf{C(2)v} = (\mathbf{-1})\mathbf{v} = \Leftrightarrow (\mathbf{C(2)} - (-1)\mathbf{I}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Hvor det omdannes til den udvividet koefficient form, og løses. Til det fås:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{\substack{R3 \Leftrightarrow R1 \\ \frac{1}{3}R2}} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{R3 - \frac{1}{2}R1} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\frac{1}{4}R1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

, herfra aflæses løsningen oplagt til at være at:

$$\boldsymbol{v}_1 = t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0$$

Hermed er det ønsket fundet, og opgaven er slut

6) Vi skal bestemme alle værdier af s, for det gælder at $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for $\mathbf{C}(s)$.

Til det prikker vi de to matricer sammen og får:

$$\mathbf{C}(s)\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & s & 0 \\ s^2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ s^2 + 4 \end{pmatrix}$$

Herfra aflæser vi at for det stemmer overens, har vi at:

$$\lambda = 5,$$

$$4\lambda = s^2 + 4 \Rightarrow 20 = s^2 + 4 \Leftrightarrow s^2 = 16 \Leftrightarrow s = 4$$

Hertil kan vi tjekke ved at indsætte egenværdi i det kar.pol og se om det giver ovens:

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 16 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 16 - 16 = 0$$

Dvs. $\mathbf{x}$ er en egenvektor til $\mathbf{C}(4)$, hvor den tilhørende egenværdi er 5. Hermed er det ønsket vist, og opgaven er løst

7) Vi finder alle værdier af s, hvor det vil gælde at rangen af $\mathbf{C}(s)$ er lig 2. For det, finder vi dens hovedunderdeterminanter hvor 3.ordens hovedunderdeterminanter giver 0, og blot en af de 2.ordens skal give noget forskelligt fra 0. Hertil fås:

$\Delta_2^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{vmatrix} = s \neq 0, for\ s \neq 0\ , \Delta_2^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ s^2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - s^2 \neq 0\ , for\ s \neq \pm 1$

Løsningsforslag: Rangen af en matrix er lig med ordenen af den største underdeterminant (*minor*), der er forskellig fra nul (FMEA Theorem 1.3.1). Således har $\mathbf{C}(s)$ rang 2 netop hvis $|\mathbf{C}(s)| = 0$, og der findes mindst en underdeterminant af orden 2, der er forskellig fra nul. Derfor udregnes først determinanten af $\mathbf{C}(s)$:

$$|\mathbf{C}(s)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & s & 0 \\ s^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = s \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ s^2 & 1 \end{vmatrix} = s(1-s^2).$$

Heraf ses, at $|\mathbf{C}(s)| = 0$ netop hvis $s = 0$, $s = -1$ eller $s = 1$. Betragt dernæst underdeterminanterne

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{vmatrix} = s \quad \text{og} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ s^2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - s^2.$$

Den første er forskellig fra nul for alle $s \neq 0$, og den anden er forskellig fra nul for alle $s \neq \pm 1$. Således vil der for alle s eksistere en underdeterminant af orden 2, som er forskellig fra nul. Altså følger det, at $\mathbf{C}(s)$ har rang 2 netop hvis $s = 0$, $s = -1$ eller $s = 1$ (og at rangen er 3 for alle andre s-værdier, men det indgår ikke i spørgsmålet).

Alternativt kan spørgsmålet besvares ved at se på, for hvilke værdier af s det maksimale antal lineært uafhængige søjlevektorer i $\mathbf{C}(s)$ er 2 (FMEA Definition på s.11).

Opgave 2: Retningsaflede, Hessematrice og globale minimumsværdier

1) Vi udregner den retningsaflede, som vil være givet ved: $\boldsymbol{a} \cdot \nabla f(0,2,1)$. Til det starter vi med at udregne vektoren **a** og får:

$$\boldsymbol{a} = \frac{(4{,}0{,}3)}{\|(4{,}0{,}3)\|} = \frac{(4{,}0{,}3)}{\sqrt{(4)^2 + (0)^2 + (3)^2}} = \frac{(4{,}0{,}3)}{\sqrt{25}} = \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)$$

Så finder vi gradienten, ved at finde de første ordens aflede af f, og får:

$$f_1'(x,y,z) = -e^{-x} + 1 \quad , f_2'(x,y,z) = 2(y-z) \quad og\ f_3'(x,y,z) = -2(y-z)$$

$$Hertil\ fås\text{: } \nabla f(x,y,z) = \left(-e^{-x} + 1, 2(y-z), -2(y-z)\right)$$

$$\nabla f(0{,}2{,}1) = \left(-e^{-0} + 1{,}2(2-1), -2(2-1)\right) = (0{,}2,-2)$$

Så finder vi den retningsaflede og får:

$$\boldsymbol{a} \cdot \nabla f(0{,}2{,}1) = 0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right) + 2 \cdot 0 + (-2) \cdot \left(\frac{3}{5}\right) = -\frac{6}{5}$$

2) Vi bestemmer hessematricen, ved hjælp af de første ordens aflede af f, jf. spm 1. og får:

$$f''(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Hertil benytter vi os af Teorem 2.3.3, fra FMEA side 57, og finder dens hovedunderdeterminanter, og får:

$D_1 = \Delta_1^{(1)} = |e^{-x}| = e^{-x} \geq 0, for\ alle\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ , \Delta_1^{(2)} = |2| = 2 \geq 0,$

$\Delta_1^{(3)} = |2| = 2 \geq 0$

$D_2 = \Delta_2^{(1)} = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2e^{-x} > 0, for\ alle\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$, \Delta_2^{(2)} = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2e^{-x} > 0, for\ alle\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$\Delta_2^{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \geq 0, for\ alle\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$D_3 = \Delta_3 = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} =, udvikler\ efter\ 1.søjle$$
$$= e^{-x} \cdot (-1)^{(1+1)} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 0 \geq 0, for\ alle\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

Vi kan bekræft at *f* er en konveks funktion, men ikke en streng konveks funktion, grundet $D_3 = 0$.

3) Vi bestemmer alle de globale minimumspunkter, ved at sætte de første partielle ordens aflede, til det fås:

$$f_1'(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow -e^{-x} + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = e^{-x} \Leftrightarrow x = 0$$
$$f_2'(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow 2(y-z) = 0 \Leftrightarrow 2y - z = 0 \Leftrightarrow y = z$$
$$f_3'(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow -2(y-z) = 0 \Leftrightarrow -2y + 2z = 0 \Leftrightarrow y = z$$

Dvs. at de stationære punkter for *f* vil være ethvert punkt hvor det gælder at $f(x_0, y_0, z_0) = f(0,y,y) = f(0,z,z)$

Vi ved også, da *f* er konveks, jf. spm 2, at disse punkter er globale minimumspunkter for *f*. Vi finder minimumsværdien til at være:

$$f(0,y,y) = e^0 + 0 + (y-y)^2 + 2 = 3$$

Hermed er den globale minimumsværdi 3, og det ønsket er vist - Opgaven er slut.

4) Vi skal afgøre om *f* er strengt konveks. Vi kan ikke benytte

Løsningsforslag: Betragt fx punkterne $(0,0,0)$, $(0,1,1)$ og $(0,2,2)$, som alle er globale minimumspunkter og således giver funktionsværdien 3. $(0,1,1)$ er en konveks kombination af de to andre punkter, idet $\frac{1}{2}(0,0,0) + \frac{1}{2}(0,2,2) = (0,1,1)$. Hvis f var strengt konveks, skulle vi derfor have (FMEA s.54):

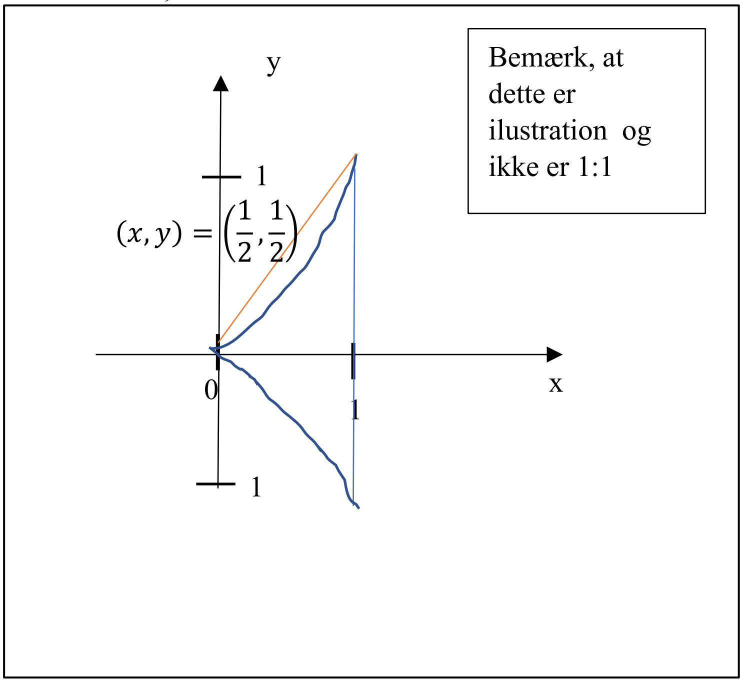
$$f(0,1,1) > \frac{1}{2}f(0,0,0) + \frac{1}{2}f(0,2,2).$$

Men begge sider af denne ulighed er lig med 3, så vi kan konkludere, at f ikke er strengt konveks.

Bemærk, at man *ikke* kan konkludere, at f ikke er strengt konveks ved at konstatere, at den ledende hovedunderdeterminanter af orden 3 for Hessematricen er lig nul. Betingelsen i Theorem 2.3.2(a), s.57 i FMEA (at alle ledende hovedunderdeterminanter for Hessematricen er strengt positive) er en tilstrækkelig betingelse for streng konveksitet, ikke en nødvendig betingelse.

Opgave 3: Skitseret Mængde og dobbeltintegraler:

1) Vi skitserer A, til at være:



Vi kan se fra skitesen, at det ikke er muligt, at tegne en lige linje inden for mængden, som gå uden for "mængden" dermed kan vi grundet dette konkludere at mængden er konveks.

2) Vi skal dobbeltintegerer funktionen f, i mængden A. Hertil ligger vi mærke til at y's nedre og øvere grænser, afhænger af x, og derfor er integrationsrækkefølgende ikke ligegyldig. Til det får vi at:

$$\iint_A 14x^2y\,dxdy = \int_0^1\left(\int_{-x}^{x^2}(14x^2y)dy\right)dx = \int_0^1\left(\left[7x^2y^2\right]_{y=-x}^{y=x^2}\right)dx = \int_0^1(7x^6-7x^4)dx$$

$$= \left[x^7-\frac{7}{5}x^5\right]_0^1 = 1-\frac{7}{5} = -\frac{2}{5}$$

Hermed er det ønsket bevist, og opgaven er færdig.

Februar 2021

Opgave 1: Matricer, Egenværdier og Lineære Ligningssystemer, matricer med ukendt

1) Vi får til at vide, at vi skal vise at **A** har egenværdierne -1 og 8. Vi kan verificere dette, ved at sætte dem in det kar.pol og sikre sig det går op, hertil fås:

$$p(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$$

$$\lambda = -1: p(-1) = |\mathbf{A} - (-1)\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 6-(-1) & -7 \\ -2 & 1-(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -7 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 7 \cdot 2 - \left((-2)\cdot(-7)\right) = 14 - 14 = 0$$

$$\lambda = 8: p(8) = |\mathbf{A} - 8\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 6-8 & -7 \\ -2 & 1-8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -7 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} = (-7)\cdot(-2) - \left((-2)\cdot(-7)\right)$$

$$= 14 - 14 = 0$$

Vi kan se at -1 og 8 er faktiske egenværdier til **A**, og vi kan konkludere at der ikke er flere egenværdier til **A**, da **A** er en 2×2 matrix.
Hermed er det ønsket vist, og argumenteret for.

2) Vi skal nu bestemme de tilhørende egen vektorer til matricen **A**, hvilket vi igen opnår ved at benytte os af ligningen: $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Vi benytter denne omskrivning, for derefter at løse det som var et homogent ligningssystem. Til det fås:

$$\lambda = -1: (\mathbf{A} - (-1)\mathbf{I}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 7 & -7 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}_{\substack{\frac{1}{7}R1 \\ \frac{1}{2}R2}} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ Herfra aflæses løsningen til at være:

$$x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$
$$-x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = x_1$$
$$Vi\ kalder\ blot\ x_2 = t, den\ fri\ variabel$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$\lambda = 8: (\mathbf{A} - 8\mathbf{I}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

Da de to ligninger er identiske, kan vi nøjes med at blot løse den ene og får dermed:

$$-2x_1 - 7x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{7}{2}x_2$$

Hvor vi kalder $x_2 = t$, da det er en fri variabel: $x_2 = t, t \in \mathbb{R}$ og får dermed: $x_1 = -\frac{7}{2}t$
Derfra kan vi oplagt se at egenvektoren for egenværdien 8 er:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hermed er det ønsket løst, og opgaven er færdig.

3) Vis at det ligneære ligningssystem $\mathbf{B}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ har netop en løsning, og bestem denne løsning.
Vi omskriver ligningssystemet til den udvidiet koefficient matrix, og laver Gauss Elimination, for at finde løsningen, og får:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{\substack{R3+2R1 \\ R2-2R1}} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}_{\substack{R3+R2 \\ R1+R2}} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{\substack{R2-2R3 \\ R1-R3}} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{-1R2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$, herfra aflæses den entydig løsning til at være:

$$x_1 = -2$$
$$x_2 = 4$$
$$x_3 = 1$$
$$Hertil\ omskrevet\ til\ matrix\ form:$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hermed er opgaven løst, og det ønske vist.

4) VI skal vise at matricen **C** er invertibel, hvis og kun hvis $s \neq 1$. Dette viser vi, ved at finde determinanten af **C**, og ser hvornår $\det(\mathbf{C}) \neq 0$, da dette er kravet for en matrice er invertibel. Til det får vi at:

*Det kan noteres, at ved at kigge på matricen **C** er det oplagt at determinanten vil til $\mathbf{C}(1) = 0$, og for alt andet, vil være invertibel*

$$V1i\ beregner\ determinanten\ ud\ fra\ Saurus\ Metoden.$$

$$\det(\mathbf{C}(s)) = \begin{vmatrix} s^2 & s & 1 & s^2 & s \\ s & 1 & 1 & s & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (s^2 \cdot 1 \cdot 1 + s \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot s \cdot 1) - (1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot s^2 + 1 \cdot s \cdot s)$$
$$= s^2 + 2s - 1 - s^2 - s^2 = 2s - 1 - s^2 = s(2 - s) - 1 = -s^2 + 2s - 1$$
$$Vi\ benytter\ deskriminant\ metoden:$$
$$\frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Altså, $\mathbf{C}(s)$ er invertibel, hvis og kun hvis $s \neq 1$

Dvs. Determinanten til matricen, vil være lig 0, hvis $s(2 - s) = 1$, hvilket er tilfældet for$s = 1$.

Hertil er det ønsket vist, og opgaven er løst.

5) Vi skal finde den inverse matrix til matricen $\mathbf{C}(0)$, hvor vi jf. spm 4 ved at den inverse findes da det $(\mathbf{C}(0)) \neq 0$. Vi opstiller Matricen $\mathbf{C}(0)$ ved siden af en identitets matrix, hvorefter vi laver rækkeoperationer til de har "byttet plads", til det fås:

$$\mathbf{C}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{R1 \Leftrightarrow R3} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{R1-R2} \rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{R2-R3} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$, hermed har vi fundet den

inversematrice for $\mathbf{C}(0)$ til at være: $\mathbf{C}(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Hermed er det ønsket vist, og opgaven er besvaret.

6) Vi skal vise at $\mathbf{C}(s)$ er positiv semidefinit, for netop en værdi og derefter bestemme denne værdi. For at bestemme **C**'s definithed, undersøger vi dens hovedunderdeterminanter, jf.

EMEA 13.12.2
Hertil fås:

$$D_1 = \Delta_1^{(1)} = |s^2| = s^2 \geq 0, s \in \mathbb{R}\,, \Delta_1^{(2)} = |1| = 1 \geq 0, s \in \mathbb{R}\ , \Delta_1^{(3)} = |1| = 1 \geq 0, s \in \mathbb{R}$$

$$D_2 = \Delta_2^{(1)} = \begin{vmatrix} s^2 & s \\ s & 1 \end{vmatrix} = s^2 - 2s \geq 0, \Delta_2^{(2)} = \begin{vmatrix} s^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = s^2 - 1 \geq 0\ \Delta_2^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \geq 0$$

$$D_3 = \Delta_3 = (jf.spm.4) = s(2-s) - 1 \geq 0, s \in \mathbb{R}$$

Da vi ved at alle syv hovedunderdeterminanter, skal være større eller lig 0, har vi at:

$$s^2 - 1 \geq 0\ og\ \ s(2-s) - 1 = -s^2 + 2s - 1 \geq 0$$

Polynomiet $-s^2 + 2s - 1$ har kun en rod, nemlig $s = 1$, og da koefficienten foran s^2 er negativt, er $-s^2 + 2s - 1$ kun større eller lig 0, når $s = 1$. Når $s = 1$, så er $s^2 - 1 \geq 0$, hvorfra vi har, at de 7 hovedunderdeterminanter er kun større eller lig 0, når $s = 1$.

7) Vi skal også vise hvorfor at $\mathbf{C}(s)$ ikke er negativt definit, dette kræver bl.a. at $(-1) \cdot D_1 > 0$, jf. EMEA 13.2.2, men jf. spm. 6 har vi at $D_1 = s^2 \geq 0\ for\ alle\ s \in \mathbb{R}$, hvilket vil sige at $(-1) \cdot D_1 = (-1) \cdot (s^2) \leq 0, for\ alle\ s \in \mathbb{R}$, herfra kan vi konkludere at $\mathbf{C}(s)$ ikke er negativt definit for nogen værdier af s

Opgave 2: Dobbeletintegraler, hvor y's grænse afhænger af x

1) Vi skal udregne dobbeltintegralet, hvori vi bemærker at $y's$ øvre grænse er x, hvilket er ensbetydende med at integrationsrækkefølgende ikke er ligegyldig. Vi skal første integrere fra y, og til sidst fra x, hertil fås:

$$f(x,y) = 5x^3 - 2xy, for\ alle (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$A = [0,1] \times [0,x] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\ og\ 0 \leq y \leq x\}$$

$$\iint_A f(x,y) = dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^x (5x^3 - 2xy) dy \right) dx = \int_0^1 ([5x^3y - xy^2]_0^x)\ dx =$$

$$\int_0^1 (5x^4 - x^3)\ dx = \left[x^5 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Hermed er det ønsket udregnet, og opgaven er besvaret.

Opgave 3: Hessematricer, Kvasikonveks, retningsaflede

1) Vi skal bestemme hessematricen for funktionen f, hvilket vi gør ved først af finde de første ordens partielle aflede, hertil fås:

$$f_1'(x,y) = 2x - 2 \quad og\ f_2'(x,y) = 4y$$

Dertil bliver hessematricen:

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\ for\ alle\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Vi skal vise at f er strengt konveks, hvori vi benytter os af Teorem 2.3.1 fra FMEA side 56. Hvis $f_{11}''(x,y) > 0$ og $f_{11}''(x,y)f_{22}''(x,y) - \left(f_{12}''(x,y)\right)^2 > 0$, er funktionen konveks. Bemærk at dette er i andre ord, at undersøge om hvorvidt hessematricen er positivt definit, jf. Teorem. 2.3.3 side 58 FMEA. Hertil fås:

$$f_{11}''(x,y) = 2 > 0\ \ og\ f_{11}''(x,y)f_{22}''(x,y) - \left(f_{12}''(x,y)\right)^2 = 2 \cdot 4 - (0)^2 = 8 > 0$$

Dvs. at vi kan konkludere at $f(x,y)$ er strengt konkav, og hermed er det ønsket vist og opgaven besvaret.

2) Vi skal vise at funktionen g er kvasikonveks. $g(x, y) = \ln(f(x, y))\ \ for\ alle\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Hertil benytter vi os af Teorem 2.5.2, for vi definere en funktion som hedder:

$$G(u) = \ln(u)\ , g(x, y) = G(f(x, y))$$

Og da jf. spm.1 $f(x, y)$ er strengt konveks, og dermed kvasikonveks, og den naturlige logaritmefunktion er voksende, kan vi konkludere at $g(x, y)$ er kvasikonveks.

3) Vi skal bestemme Hessematricen for $h(x, y)$ og vise at den er hverken konveks, eller konkav.
Vi starter med at finde de første ordens aflede og får:

$$h(x, y) = f(x, y) + 3xy$$
$$h_1'(x, y) = 2x - 2 + 3y \quad og\ \ h_2'(x, y) = 4y + 3x$$

Hertil får vi hessematricen til at være:

$$h''(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Hertil kan vi undersøge Hessematricen, ved brug af Teorem 2.3.3 fra FMEA s.58, hvor vi får:

$$\mathrm{D}_1 = \Delta_1^{(2)} = |2| = 2 > 0\ \ og\ \Delta_1^{(2)} = |3| = 3 > 0$$
$$D_2 = \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1 < 0\ for\ alle\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Vi kan se at Hessematricen hverken opfylder kravene for at være positivt semidefint, eller negativt semidefinit, hvilket betyder at den er indefinit, og derfor er $h(x, y)$ hverken konveks eller konkav.

4) Vi skal bestemme den retningsaflede af f, i punktet (3,0) i retningen ved vektoren givet ved $\boldsymbol{a} = \frac{(3,4)}{\|(3,4)\|}$, vi ved at den retnignsaflede i punktet (3,0) hedder $\nabla f(3,0) \cdot \boldsymbol{a}$
Vi starter ud med at udregne **a** og får:

$$\boldsymbol{a} = \frac{(3,4)}{\|(3,4)\|} = \frac{(3,4)}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} = \frac{(3,4)}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{(3,4)}{\sqrt{25}} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Så udregnes gradienten til f: $\nabla f(x, y) = (f_1'(x, y), f_2'(x, y))$
Jf. spm. 1 har vi at :

$$\nabla f(x, y) = (2x - 2, 4y)$$

Vi har derfor at $\nabla f(3,0) = (4,0)$
Nu udregnes $\nabla f(3,0) \cdot \boldsymbol{a}$ og det fås til:

$$\nabla f(3,0) \cdot \boldsymbol{a} = 4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right) + 0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{12}{5}$$

Hermed er spørgsmålet udregnet, og opgaven er løst.

Januar 2021

Opgave 1: Matricer, Egenværdier og $\mathbf{P^{-1}AP = D}$

1) Vi finder de tre matricers determinant, for at afgøre om de invertibele og får:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 28 - 4 = 24 \neq 0$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, Vi\ benytter\ af\ \det(\mathbf{B})\ er\ udændret\ af\ evt.$$

$$rækkeoperationer: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}_{R3+R1} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}, udvikler\ efter\ første\ 1. søjle:$$

$$\det(\mathbf{B}) = (-1) \cdot (-1)^{(1+1)} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (4 - 4) = 0$$

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, Da **C** ikke er kvadratisk, er den ikke invertibel.

Vi kan oplagt aflæse at **A** er den eneste invertibel, mens at både **A** og **B** er symmetriske. **C** er hverken invertibel eller symetrisk.

Dermed er det ønsket vist

2) Vi tjekker om de to egenværdier passer og får

$$\lambda = 3 : p(3) = \begin{vmatrix} 7-3 & -2 \\ -2 & 4-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

$$\lambda = 8 : p(8) = \begin{vmatrix} 7-8 & -2 \\ -2 & 4-8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

Vi kan se at begge egenværdier passer for **A**, og da **A** er en 2x2 matrix, er der ikke flere egenværdier.

3) Vi bestemmer for hver af **A**'s egenværdier de tilhørende egenvektorer, ved brug af sætningen: $\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \cdot \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, hertil fås:

$\lambda_1 = 3 : \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Hertil aflæser vi løsningen til at være $4x_1 - 2x_2 = 0 \Leftrightarrow$

$2x_1 = x_2\ og - 2x_2 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 2x_1, hertil\ vælger\ vi\ at\ x_1 = t, for\ at\ få$:

$$x_2 = 2t, hertil\ egenvektoren\ er: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \neq 0$$

$\lambda_2 = 8 : \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Hertil aflæser vi løsningen til at være $-x_1 - 2x_2 = 0 \Leftrightarrow$

$x_1 = -2x_2\ og - 2x_2 - 4x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2x_2, hertil\ vælger\ vi\ at\ x_2 = t, for\ at\ få$:

$$x_1 = 2t, hertil\ egenvektoren\ er: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0$$

Vi har nu bestemt de tilhørende egen vektorer for hver af **A**'s egenværdier

4) Vi skal nu bestemme **D** (en diagonalmatrix) samt en ortogonal matrix **P**. Hertil udnytter vi Teorem 1.6.2 fra FMEA-side 26, navngivet Spektral Sætningen.

$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, dertil udregner vi de normeret egenvektorer for egenværdierne:

$$\boldsymbol{v_1}: \|\boldsymbol{v_1}\| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}, hertil\ normeret\ egenvektor\ \boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v_2}: \|\boldsymbol{v_2}\| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{5}, hertil\ normeret\ egenvektor\ \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$Dvs.\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, desuden: \mathbf{P}' = \mathbf{P^{-1}}, dvs. \mathbf{P^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Dvs. at vi har bestemt de ønsket matricer således at resultat er:

$$\boldsymbol{D} = \mathbf{P^{-1}AP} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Hermed er det ønsket bestemt, og mere til:

5) Vi skal gøre rede for at **A** er positivt definit, hvilket vi gør ved at finde de ledende hovedunderdeterminanter.
Hertil fås:

$$D_1 = \Delta_1^{(1)} = |7| = 7 > 0 \quad , \qquad D_2 = \Delta_2^{(1)} = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 24 > 0$$

Alternativt kan man sige: Da **A**'s egenværdier begge positive, er **A** positivt Definit. $3 > 0\ og\ 8 > 0$
Yderligere skal vi undersøge **B** definit hed, hvilket vi igen gør ved brug af hovedunderdeterminanterne:

$$(-1)^1 D_1 = (-1)^1\Delta_1^{(1)} = (-1)\cdot|-1| = 1 \geq 0\,, (-1)^1\Delta_1^{(2)} = (-1)\cdot|-2| = 2 \geq 0$$
$$(-1)^1\Delta_1^{(3)} = (-1)\cdot|-3| = 3 \geq 0$$
$$(-1)^2 D_2 = (-1)^2\Delta_1^{(1)} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \geq 0, (-1)^2\Delta_1^{(2)} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 \geq 0\,,$$
$$(-1)^2\Delta_1^{(3)} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \geq 0$$
$$(-1)^3 D_3 = (-1)^3\Delta_3 = jf.spm\ 1\ tidligere = 0 \geq 0$$

Herfra kan vi oplagt aflæse, at **B** opfylder kravene for at være negativt semidefint, men ikke negativt definit, da alle de ledende hovedunderdeterminanter ikke er større end 0. Hermed er det ønsket vist, og argumenteret for.

6) Vi skal bestemme alle løsningerne til det lineære ligningssystem, hvilket vi gør ved Gauss elimination, hvori vi omdanner ligning systemet til den udvidede koefficientmatrice, og laver rækkeoperationer til vi opnår den reduceret echelon form, hertil fås:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}_{R3+R1} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}_{\substack{-1R1 \\ R3+R2}} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{-\frac{1}{2}R2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$, Hertil aflæser vi løsningen til at være:

$$x_1 - x_3 = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1 + x_3$$
$$x_2 - x_3 = 1 \Leftrightarrow x_2 = 1 + x_3$$
$$0 = 0$$
$$x_3 = t, da\ x_3\ er\ en\ fri\ variabel, hertil\ omskrives\ løsningen\ til:$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

7) Vi argumenterer for **F**, som følgende:
Da **C** har 2 rækker og 3 søjler, har **C**′ 3 rækker og 2 søjler. Da **C′F** er defineret, har **F** 2 rækker.
Da **B** har tre rækker, og matrixproduktet **FB** er defineret, så har **F** 3 søjler.
Så **F** bliver en 2×3 matrix

Opgave 2: Funktioner, Hessematrice og Konveksitet

1) Vi skal udregne hessematricen for funktion *f*, hvilket vi gør med at første finde de første ordens aflede til:
$$f(x,y) = e^{2x} + e^y + x^2 + 2y^2 + xy, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
Der er som følgende:
$$f_1'(x,y) = 2e^{2x} + 2x + y \; og \; f_2'(x,y) = e^y + 4y + x$$
$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 4e^{2x} + 2 & 1 \\ 1 & e^y + 4 \end{pmatrix}$$
Vi kan undersøge om hvorvidt f er strengt konveks, ved at undersøges dens Hessematrices definithed, jf. FMEA 2.3.2 side 57, hvori vi får:
$$D_1 = \Delta_1^{(1)} = |4e^{2x} + 2| = 4e^{2x} + 4 > 0, for\ alle\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
$$D_2 = \Delta_2^{(1)} = \begin{vmatrix} 4e^{2x} + 2 & 1 \\ 1 & e^y + 4 \end{vmatrix} = 16e^{2x} + 4e^{2x+y} + 8 - 1 = 16e^{2x} + 4e^{2x+y} + 7 > 0, for\ alle\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
Det ses oplagt, at D_1 altid vil være større end 0, da e^{2x} er en strengt voksende funktion for enhver værdi af *x*. Samt $4 > 0$. Det lignende ses igen i D_2, da $16e^{2x} > 0$, $4e^{2x+y} > 0$ og $7 > 0$, er relativt åbenlyst, for samme grundlag som i D_1.
På baggrund af dette, kan vi definere Hessematricen værende Positivt Definit, for enhver værdi af $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, og dermed at $f(x,y)$ er strengt konveks.

Hermed er det ønsket vist, og argumenteret for.

2) Vi benytter os af Teorem 2.3.5 jf. FMEA side 59.
Hertil $g(x,y) = e^{2\cdot f(x,y)-1}$, $G(u) = e^{2u-1}$, $G'(u) = 2e^{2u-1} > 0, G''(u) = 4e^{2u-1} > 0$
Derfor for: $G(f(x,y)) = e^{2\cdot f(x,y)-1} = g(x,y)$
Da $G(u)$ er strengt konveks og voksende, som vist for oven, og $f(x,y)$ også er konveks, jf. spm 1, opgave 2. Har vi gennem Teorem 2.3.5 at:
$a)\ f(x)\ er\ konveks, G(u) er\ konveks\ og\ voksende \Rightarrow g(x,y) = G(f(x,y)) er\ konveks$
Hermed er det ønsket bevist, og argumenteret for.

Opgave 3: Dobbeltintegraler og Retningsaflede

1) Vi skal udregne dobbetintegralet, for funktionen *f*, defineret som:
$$f(x,y) = 2e^{2y} - 4xy + 1, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
I rektanglet *A* givet ved:
$$A = [0,2] \times [0,1] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2\ og\ 0 \le y \le 1\}$$
Vi bemærker at hverken af de to variablers grænser afhænger af hinanden, og derfor er integrationsrækkefølgende ligegyldig. Vi udregner dobbeltintegralet som følgende:
$$\iint_A f(x,y)dxdy$$
$$\int_0^1 \left(\int_0^2 (2e^{2y} - 4xy + 1)dx \right) dy = \int_0^1 [2e^{2y}x - 2yx^2 + x]_0^2 dy =$$

$$\int_0^1 (4e^{2y} - 8y + 2)dy = [2e^{2y} - 4y^2 + 2y]_0^1 = 2e^2 - 2 - (2e^0) = 2e^2 - 4$$

Det ønsket er er udregnet, og delopgaven er færdig.

2) Vi skal udregne den retnignsaflede af funktion *f* i punktet (2,0) i retningen af vektoren givet ved: $\boldsymbol{a} = \frac{(1,1)}{\|(1,1)\|}$, vil hedde $\nabla f(2,0) \cdot \boldsymbol{a}$

Vi starter med at udregne gradienten for funktionen *f* i punktet:

$$\nabla f(x,y) = (-4y, 4e^{2y} - 4x), i\ punktet\ (2,0) er\ det:$$

$$\nabla f(2,0) = (-4 \cdot 0, 4e^{2 \cdot 0} - 4 \cdot 2) = (0, -4)$$

Dernæst udregner vi vektoren $\boldsymbol{a}$ og får:

$$\frac{(1,1)}{\|(1,1)\|} = \frac{(1,1)}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Nu løses der for den retnignsaflede, og fås:

$$\nabla f(2,0) \cdot \boldsymbol{a} = 0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (-4) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{4}{\sqrt{2}}$$

Hermed er opgaven beregnet, og løst.

Opgave 4: Differens Ligning med Panserformel

1) Vi skal bestemme den generelle løsning til differential ligningen af første orden, som hedder:

$$\dot{x} - 3t^2 x = 5t^4 e^{t^3}$$

Vi benytter os af panserformlen, og starter med at identificere: $a(t) = -3t^2$, $A(t) = -t^3\ og\ b(t) = 5t^4 e^{t^3}$

Vi indsætter i panserformlen og får:

$$x = Ce^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int e^{A(t)} b(t) dt$$

$$x = Ce^{t^3} + e^{t^3} \int e^{-t^3} (5t^4 e^{t^3}) dt$$

$$= Ce^{t^3} + e^{t^3} \int 5t^4 e^{t^3 - t^3} dt$$

$$= Ce^{t^3} + e^{t^3} \int 5t^4 dt$$

$$= Ce^{t^3} + t^5 e^{t^3}$$

Dvs. at den generelle løsning er $x = Ce^{t^3} + t^5 e^{t^3} \Leftrightarrow x = e^{t^3}(C + t^5)$,
til differentialligningen: $\dot{x} - 3t^2 x = 5t^4 e^{t^3}$

Hermed er det ønsket bestemt, og opgaven er slut.

2) Vi skal bestemme den løsning til differentialligningen, som opfylder betingelsen $x(1) = e^3$,
Vi kan gøre dette ved at indsætte disse værdier ind i vores generelle løsning og udregne, hertil fås:

$$x(1) = e^{1^3}(C + 1) = e^3 \Leftrightarrow e(C + 1) = e^3 \Leftrightarrow C + 1 = e^2 \Leftrightarrow C = e^2 - 1$$

Dvs. at den bestemte løsning som opfylder $x(1) = e^3$, er:

$$x = e^{t^3}(e^2 - 1 + t^5)$$

Hermed er det ønsket beregnet, og opgaven løst.

Juni 2020

Opgave 1: Matricer, Egenværdi og Kvadratisk Former

a) Vis at matricen **BC** er invertible
Vi får oplyst at **C,** og at dens determinant er -1: $|\mathbf{C}| = -1$, Derudover ved vi at $|\mathbf{BC}| = |\mathbf{B}| \cdot |\mathbf{C}|$, Og at en matrix er invertibel, når den er regulær, dvs. at dens determinant er forskelligt fra 0. Vi finder så $|\mathbf{B}|$ og får

$$\mathit{Udvikler\ efter\ første\ række}: |\mathbf{B}| = 2 \cdot (-1)^{(1+1)} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{(1+2)} \cdot \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 0$$
$$= 2 \cdot (8 - 9) - 2\big((-5) \cdot 2 - 0 \cdot 3\big) = -2 + 20 = 18 \neq 0$$

Hertil finder vi $|\mathbf{BC}| = |\mathbf{B}| \cdot |\mathbf{C}| \Leftrightarrow |\mathbf{BC}| = 18 \cdot -1 = -18 \neq 0$, hermed regulær (og invertibel) det ønsket er vist.

b) Vi skal vise at $\lambda = 2$ er en egenværdi for **B**, hvilket vi gør ved at sætte egenværdi ind det kar.pol. ligning og se at det giver nul.

$$p(2) = |\mathbf{B} - 2\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 2-2 & 2 & 0 \\ -5 & 4-2 & 3 \\ 0 & 3 & 2-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -5 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\mathit{Vi\ udvikler\ efter\ første\ række\ igen}:$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -5 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 \cdot (-1)^{(1+2)} \cdot \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 = 0$$

Vi kan se at 2 er en egenværdi for **B**, og dermed er det ønsket bevist.

c) Vi skal vist at $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$**,** hvilket vi gør ved at benytte omskrivningen: $p(\lambda) = \mathbf{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$, hvori vi yderligere benytter os af det faktum, at vi får givet at det er en egen vektor til **B**, hvilket tillader os at skrive det op, og løse således.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \\ -5 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \\ 0 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Hermed kan vi konkludere at **v**, er en egenvektor til **B**, for egenværdien $\lambda = 3$, og hermed er det ønsket vist.

d) Vi skal opskrive den symmetriske matrix **A**, som tilhøre den kvadratiske form $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 6x_2x_3$, vi får den til at være:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Hermed er det ønsket bevist.

e) Vi skal vise at Q er postivt semidefinit, men ikke positivt, hvilket vi gør ved at undersøge hovedunderdeterminanterne, og vi får

$$\Delta_1^{(1)} = D_1 = |1| = 1 \geq 0, \Delta_1^{(2)} = |4| = 4 > 0, \Delta_1^{(3)} = |3| = 3 \geq 0$$
$$\Delta_2^{(1)} = D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \geq 0\,, \Delta_2^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \geq 0\,,$$
$$\Delta_2^{(3)} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 9 = 3 \geq 0$$
$$D_3 = \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix},$$
$$\mathit{udvikler\ efter}\ 1.\mathit{række}: 1 \cdot (-1)^{(1+1)} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{(1+2)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 3 = 0 \geq 0$$

Da alle hovedunderdeterminanterne er større eller lig med 0, kan vi konkludere at Q er positivt semidefinit, men da de ledededende hoved underdeterminanter ikke alle er større end 0, er den ikke positivt definit. Hermed er det ønsket vist.

Opgave 2: Funktioner af to variabler, Hessematrice og Dobbeltintegraler

a) Vis funktionen *f* er strengt konkav.
Vi gør dette ved at danne hessematricen for den, og undersøge Hessematriecns definithed, hertil finder vi først de første ordens afledede:

$$f_1'(x,y) = -e^x - 2x - 2y \,\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad og \quad f_2'(x,y) = -2x - 2y, \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} -e^x - 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Hertil finder vi de ledende hovedunderdeterminanter, da jf. FMEA 2.3.2, side 57, ved vi at hvis hessematricen er negativt definit, er den også strengt konkav:
$(-1)^1 D_1 = |-e^x - 2| = (-1)(-e^x - 2) = e^x + 2 > 0, \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$, da e^x er strengt voksende funktion.
$(-1)^2 D_2 = \begin{vmatrix} -e^x - 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 2e^x + 4 + 4 = 2e^x + 8 > 0, \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$, da e^x er strengt voksende funktion.
Dermed kan vi konkludere at Hessematricen er negativt definit, og hermed er $f(x,y)$ strengt konkav.

b) Vi skal bestemme hvilke værdier af *b*, gør at $g(x,y)$ er konveks. Vi opstiller igen hessematricen for $g(x,y)$ for at undersøge hvornår Hessematricen er positivt semidefinite, jf. FMEA Teorem. 2.3.3 side 59, til det finder vi først de første ordens aflede og får:

$$g_1'(x,y) = e^x + 2x + by \ \ og \ g_2'(x,y) = 2y + bx$$

$$g''(x,y) = \begin{pmatrix} e^x + 2 & b \\ b & 2 \end{pmatrix}$$

Hertil undersøger vi definitheden:

$$D_1 = \Delta_1^{(1)} = |e^x + 2| = e^x + 2 \geq 0, for\ alle\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,$$

$$\Delta_1^{(2)} = |2| = 2 \geq 0\ for\ alle\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$D_2 = \Delta_2 = \begin{vmatrix} e^x + 2 & b \\ b & 2 \end{vmatrix} = 2e^x + 4 - (b^2) \geq 0$$

Herfra kan vi aflæse at $2e^x$ altid vil være større end 0, da det er en kotinuert voksende funktion, hvilket betyder at $4 - (b^2) \geq 0$, herfra kan vi oplagt se at *b* må ligge inden for denne mængde: $-2 \leq b \leq 2$, for så er g(x,y) konveks, da Hessematricen vil være positivt semidefinit.
Hermed er det ønsket opfyldt.

c) Vi får givet at $h(x,y) = f(x,y) + g(x,y) \Leftrightarrow h(x,y) = (-e^x - (x+y)^2 + 3) + (e^x + x^2 + y^2 + bxy) = -e^x - (x+y)^2 + 3 + e^x + x^2 + y^2 + bxy = e^x - e^x + x^2 - x^2 + y^2 - y^2 + 2xy + bxy + 3 = -2xy + bxy + 3 = h(x,y)$
Hertil får vi givet at vi skal udregne det dobbeltintegral i det følgende rektangel $R\ i\ \mathbb{R}^2$:

$$R = [0,1] \times [0,2] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\ og\ 0 \leq y \leq 2\}$$

Vi skal vise at $\iint_R h(x,y)dxdy = b + 4$, vi ligger først mærke at hverken af de to variablers grænsern indebære de andre, hvilket er ensbetydende med at integrationsrækkefølgende er ligegyldig. Herfra integrer vi og får:

$$\int_0^1 \left(\int_0^2 (-2xy + bxy + 3)dy \right) dx = \int_0^1 \left(\left[-xy^2 + \frac{1}{2}bxy^2 + 3y \right]_0^2 \right) dx =$$

$$\int_0^1 (-4x + 2bx + 6)dx = [-2x^2 + bx^2 + 6x]_0^1 = -2 + b + 6 = b + 4$$

Hermed er det ønsket bevist

Opgave 3: Ligningssystem, med tre ubekendte og en konstant:

a) Vi opskriver koefficientmatricen for ligningssystemet og ved at ligningssystemet har en entydigløsning hvis dens koefficientmatrix har en determinant forskelligt fra nul, jf. EMEA Teorem 16.8.1:

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, Hertil finder vi determinanten af $\det(\mathbf{A})$ og får:

Vi benytter os af at determinanten af en matrice, er uændret af følgende rækkeoperationer:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}_{R3+R1} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2a \end{pmatrix}_{R2+4R1} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 3+4a \\ 0 & 1 & 2a \end{pmatrix}$$

Nu udvikler vi efter første søjle:

$\begin{vmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 3+4a \\ 0 & 1 & 2a \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{(1+1)}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3+4a \\ 1 & 2a \end{vmatrix} + 0 + 0 = -1\cdot(4a-3-4a) = -1\cdot$
$-3 = 3 \neq 0$, Vi kan oplagt aflæse at for alle værdier af a, gælder det at ligningssystemet har en entydig løsning som vist for oven. Hermed er det ønsket vist.

b) Vi skal nu bestemme den entydige løsning, hvilket vi gør ved at opstille den udvidede koefficient matrix, hvorefter vi benytters Gauss elimination, ved at lave rækkeoperationer til vi opnår den reduceret echelon matrix og finder den entydige løsning derfra:
Yderligere skal vi vise at vi kan omdanne den udvidede koefficient matrix til:
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, hvilket vil være markeret med rød tekst i udregneringer: Til det fås:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & a & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}_{\substack{R3+R1 \\ R2+4R1}} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 2 & 3+4a & 6 \\ 0 & 1 & 2a & 0 \end{pmatrix}_{R2-R3} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 3+2a & 6 \\ 0 & 1 & 2a & 0 \end{pmatrix}_{\substack{R3\Leftrightarrow R2 \\ -1R1}} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 2a & 0 \\ 0 & 1 & 3+2a & 6 \end{pmatrix}_{R3-R2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}_{\frac{1}{3}R3} \rightarrow$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Hertil aflæses løsningen til ligningen som være følgende:

$$x_1 - ax_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = ax_3 \Rightarrow x_1 = 2a$$
$$x_2 + 2ax_3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -2a\cdot 2 \Rightarrow x_2 = -4a$$
$$x_3 = 2, vi\ indsætter\ x_3 = 2\ i\ de\ andre\ ligninger$$

Hertil er den entydig løsning til ligning systemet:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ -4a \\ 2 \end{pmatrix}$$