SÅ DU VIL GERNE BESTÅ MAKRO 1

Damn, not gonna lie, det gad jeg også godt

Af: Eske Penjor Hermann

Jeg, Eske Penjor Hermann, har selv skabt og skrevet dette dokument. Det bruger information fra både ”*Introducing Advanced Macroeconomics (IAM), Peter Birch Sørensen & Hans Jørgen Whitta-Jacobsen*” og information fra forelæsningslides af Casper Worm, fra Efteråret 2023. Dette dokument er ikke til at blive solgt eller delt uden ordentlig kreditering til Casper Worm, Peter Birch Sørensen og Hans Jørgen Whitta-Jacobsen.
Jeg håber at i kan få gavn af dette dokument, og i det mindste bruge det for en lidt kortere opsummering af pensum i Makro I, 2023.

Indhold

Introduktion til Makroøkonomiske Tankegang og Metode

Velkommen til en gennemgang af makroøkonomiske tangegang og metodik fra Makro 1. Dette dokument har til intention at være en kort og brist gennemgang af pensum fra Makro 1 Efteråret 2023. Indeholdt i dokumentet er skrevet med en forventning om at læseren har en baggrundsviden der svarer til at have deltaget aktivt i forelæsninger og holdundervisning til Makro 1.

Overordnet set, er der ingen fuldkommen accepteret definition af makroøkonomi som en helhed. Fra pensumbogen, bruges den bredt accepterer definition:

" Macroeconomics seeks to explain observed time series such as GDP, Consumption, Investments, Prices, Wages and the rate of employment"[1]

Ligesom i mikroøkonomi arbejder økonomer i to brede former for "tid": Langsigtet og kortsigtet. Langsigtet makroøkonomiske analyse forsøger at bedre kunne forstå trends der observeres over længere perioder (år, årtier osv.) - og endda muligvis give evt. forklaringer på disse observationer Kortsigtet makroøkonomiske analyse vil gerne bedre forstå de kvartal-/år udsving fra det forventede. Vi arbejder kun med langsigtet makro i makro 1.

I makroøkonomi benytter vi os af en kort række antagelser ift. de modeller vi bruger, for bl.a. at gøre livet nemmere for os selv. Makroøkonomiske modeller vil nok aldrig være fuldkommen akkurat, men et kendt citat siger også " *All models are wrong, but some are useful*". En af disse antagelser kan være:

Perfekte markeder - Der er fri information og enheder kan frit træde ind og ud af markeder uden omkostninger. Ingen enkelt aktør har mere magt end den anden.

Imperfekter markedet - Nogen aktører har mere magt end andre

Os studerende bruger makroøkonomi til at bedre forstå nogen af de større aggregerede tal og bevægelser, for at derefter kunne forklare mulige årsager til disse observationer. Yderligere, skal vi også kunne analysere forskellige modeller - Primært variationer af Solow - og være i stand til at både matematisk og intuitivt udpege specifikke nøgle variabler og tilstande. Til sidst i dokumentet, vil der være en såkaldt "Legende" som vil indeholde en kort forklarelse på specifikke begreber og variabler.

Der er også nogen generelle teorier og grundlag som der kort bliver gennemgået her, da de er gode at have opfrisket inden vi dykker ned i analyse teori.

Grund Teorier

Sticky Prices

Priser og Løn kan være semi rigid - og kan derfor potentielt være en årsag til nogen af de udsving vi ser. Dette er grundet idéen om Menu Kost. Grund idéen er at det tag tid og ressourcer at opdaterer en menu på en bar eller ansættelsesvilkårene i en kontrakt f.eks. Disse ting bliver som regel opdateret en gang om året eller lignede. Derfor optræder priser og løn ikke som fuldkommen fleksible, hvilken bl.a. kan bidrage til nogen af de observerede markedsfejl vi vil komme igennem - Også såkaldt "Sticky Prices"

Konvergens[2]

Grundeteori fortæller os at alle lande burde på langt sigt konvergere mod den samme $BNP/Capita$. Men dette er tydeligt hvis ikke tilfældet. Herfra introduceres:
Betinget Konvergens: Hvert land konvergerer mod sit unikke $BNP/Capita$ på langt sigt.
Klub Konvergens: Et lands vækst på langsigt er prædetermineret af strukturelle institutioner og dens initial værdi af $BNP/Capita$

[1] Introducing Advanced Macroeconomics (IAM), Peter Birch Sørensen & Hans Jørgen Whitta-Jacobsen
[2] For summary, IAM, s.50, Peter Birch Sørensen & Hans Jørgen Whitta-Jacobsen

Solow Modellen

Generelt om Solow

Velkommen til 99% af makro 1 pensum. Robert Solow er en af de mest indflydelsesrige økonomer af det 20-århundered. Groft fortalt, så udgav han en artikel hvori han introduceret ideen om at teknologisk vækst - og teknologiens evne til at øge produktivitet - også havde en indflydelse på økonomisk vækst; og ikke bare akkumulationen af kapital og mere arbejdskraft, som var den generelle tanke før.

Grund idéen bag Solow modellen - og dens mere komplekse søskende - er at beskrive et økonomisk kredsløb (en økonomi) med en række ligninger, som man derefter kan benytte til en masse ting, heriblandt prædiktioner om modellens udvikling og ende værdier. Til dette er der en række værktøjer som vil blive gennemgået osv.

I legende afsnittet er der en samlet liste over alle begreber som jeg følte nødvendige lige at have en liste over. Det vil nok opdages at der er nogen betegnelser som f.eks. Reelle Renten og Nominel Rente, hvor der vil være en lille forskel. Alle de begreber vi vil bruge til Solow, bliver derfor gennemgået her for neden.

Økonomiens Struktur:

Som standard arbejder vi med en lukket økonomi, og derfor et lukket kredsløb - dog har vi modeller som kap 4 som betragter en lille åben økonomi.

Først og fremmest arbejder Solow-modellen traditionelt i diskret tid, altså år til år. Tidsperioden en variabel er i betegnes ved: $_t$, $t = 0,1,2, \dots$. F.eks. den samlede produktion i en periode: Y_t.
Der er to aktører som basis: Husholdninger og Virksomheder. Varer og markeder består af: Output, Kapitalydelser og Arbejdskraft.

Outputmarkedet:

Udbud er lig virksomhedens produktion, Y_t. Efterspørgslen kommer fra husholdninger til forbrug og investering, $= C_t + I_t$. Dette svarer til en En-sektor model: $Output = BNP$

Kapitalydelser:

Husholdningerne ejer kapitalbeholdningen, og lejer den ud til virksomheder. Udbud af kapitalydelser, K_t, og virksomhedernes efterspørgsel, K_t^d. Prisen for at leje en enhed kapital i en periode er real lejesatsen, r_t, på kapital.
Realrenten er: $\rho_t = r_t - \delta$, hvor δ er nedslidningsraten.

Arbejdsmarkedet:

Består af udbud af arbejdskraft fra husholdningerne, L_t og efterspørgsel på arbejdskraft, L_t^d. Prisen på arbejdskraften er reallønnen, w_t.

Som nævnt tidligere, antages der Fuld Kommen Konkurrence på alle markedet, svarende til at r_t og w_t vil justere sig indtil at $output = efterspørgsel$

Kapital 3 - Lille lukkede økonomi - Basic Solow-Model: Kapital og Arbejdskraft

Vi bevæger os nu ind i kapital 3 og den helt basale Solow-model. Dette bliver en gennemgang diverse ligninger og analyse værktøjer. I denne model, så er vores Output-, Arbejds- og Kapitalydelses markedet defineret i ligevægt som:

$$Y_t = C_t + I_t; K_t = K_t^d \wedge L_t = L_t^d$$

Alt produktionen kommer fra en virksomhed som bruger L_t og K_t til at producere Y_t. Denne virksomhed har produktionsfunktionen:

$$Y_t = F(K_t, L_t)$$

Her antages følgende:

$$\text{CRS: } [F(\lambda K_t, \lambda L_t) = \lambda F(K_t, L_t)]$$
$$\text{Positive Marginalprodukter: } F_K', F_L' > 0$$
$$\text{Aftagende Marginal produkt: } F_{KK}'', F_{LL}'' < 0$$
$$\text{Positivt Krydsafledt: } F_{LK}'' = F_{KL}'' > 0 \textit{ Mere kapital gør arbejdskraft mere produktiv.}$$

Vi bruger en Cobb-Douglas produktionsfunktionen, da den overholder alle vores antagelser og har konstant indkomstandele - Konstant indkomstandele er rart da det sparer os yderligere beregninger for dette. Hermed får vi den samlede produktions funktion:

$$Y_t = F(K_t, L_t) = BK_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \quad ,0 < \alpha < 1 \quad (1)$$

Dette kan omskrives til produktionen pr. arbejder:

$$y_t \equiv \frac{Y_t}{L_t} \quad k_t \equiv \frac{K_t}{L_t}$$
$$\frac{Y_t}{L_t} = \frac{BK_t^\alpha L_t^{1-\alpha}}{L_t} \Leftrightarrow y_t = BK_t^\alpha L_t^{-\alpha} = B\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^\alpha = Bk_t^\alpha$$

Vi kan også opstille virksomhedens profit maksimerings problem, for at vise at vores antagelser om ligevægt holder fast gennem markedsclearing:

$$\max_{K_t^d, L_t^d} \pi_t = F(K_t, L_t) - r_t K_t^d - w_t L_t^d$$

Første ordens betingelser findes:

$$F_K'(K_t^d, L_t^d) = r_t \quad \wedge \quad F_L'(K_t^d, L_t^d) = w_t$$

Vi ser at de stemmer overens. Vi kan bestemme faktor priserne for r_t og w_t som værende et produkt af efterspørgslen og output i en periode, ved at indsætte Produktionsfunktion ind:

$$r_t = F_K'(K_t^d, L_t^d) = \alpha Bk_t^{\alpha-1} \quad \wedge \quad w_t = F_L'(K_t^d, L_t^d) = (1-\alpha)Bk^\alpha$$

Husholdningernes indkomst er: $r_t K_t + w_t L_t = Y_t$, gns indkomst pr. arbejder: $y_t = r_t k_t + w_t$. Da husholdningerne bestemmer forbrug, bestemmer de også opsparingen, S_t: $S_t = Y_t - C_t$. Vi skriver dette som:

$$S_t = sY_t \quad ,0 < s < 1$$

Arbejdskraften vokser med befolkningsvæksten, n. Hertil kan man beskrive arbejdskraften i næste t:

$$L_{t+1} = (1+n)L_t \ , \qquad n > -1$$

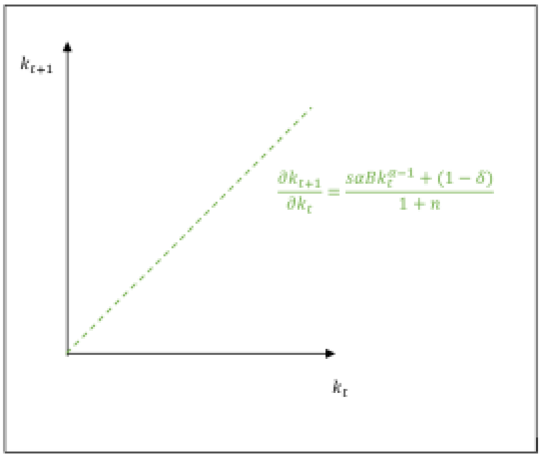
Kapitalen vokser i takt med opsparing, minus nedslidningsraten.

$$K_{t+1} = S_t + K_t - \delta K_t = S_t + (1-\delta)K_t \ , \quad 0 < \delta < 1$$

Vi har nu alle ligninger for at "løse" modellen. Vi starter med at finde transitionsligningen ved at fjerne alle endogene variabler:

$$K_{t+1} = S_t + (1-\delta)K_t \Leftrightarrow \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{(sY_t + (1-\delta)K_t)}{(1+n)L_t} \Leftrightarrow k_{t+1} = \frac{1}{1+n}[sy_t + (1-\delta)k_t] \Leftrightarrow$$
$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n}[sBk_t^\alpha + (1-\delta)k_t]$$

Vi smider transitionsligningen ind i et fasediagram, for at kunne forstå dens bevægelser over tid.



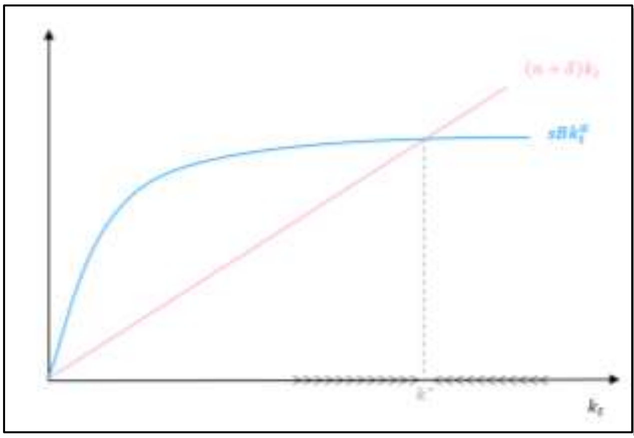
Vi kan se at det er en ret linje, men vi har ingen idé hvad der sker når f.eks. $k_t \to \infty \wedge k_t \to 0$. Hvad vi kan se er at vi har konvergens mod et $k^* > 0$ for $k_t, k_0 > 0$. Dette stabile niveau kaldes Steady State, ruten der til for den Balanceret Vækst Rate.

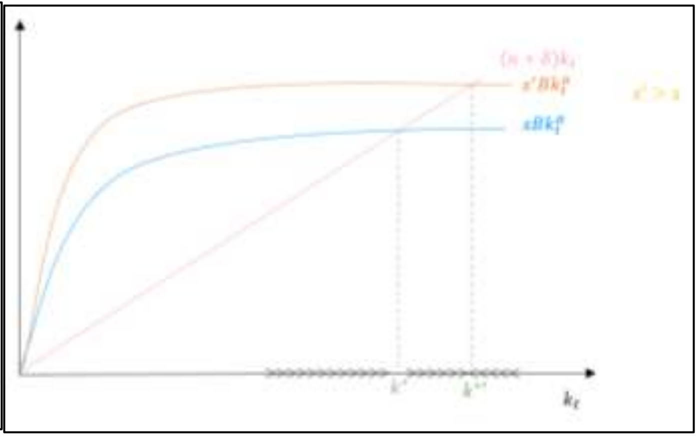
Intuitionen bag Steady State, er Aftagende Marginal Produkt (AMP), på tids punkt opnår man et punkt hvor effekten er så lille at den elimineres af nedslidningseffekten.

Men dette kan være svært at se ud fra dette diagram. Derfor benytter vi oftest Solow-Diagrammet for bedre at kunne se denne bevægelse. For at lave Solow-Diagrammet starter vi med at tage vores transitionsligning og danne den om til Solow-ligning: Meget simpelt, træk k_t fra på begge sider :D

$$k_{t+1} - k_t = \frac{1}{1+n}[sBk_t^\alpha + (1-\delta)k_t] - k_t \Leftrightarrow$$
$$k_{t+1} - k_t = \frac{1}{1+n}[sBk_t^\alpha + \big((1-\delta) - (1+n)\big)k_t] \Leftrightarrow$$
$$k_{t+1} - k_t = \frac{1}{1+n}[sBk_t^\alpha - (\delta+n)k_t]$$
$$sBk_t^\alpha = opsparingen \wedge (\delta+n)k_t = nedslidning\ og\ udtydning$$

Vi ved at Steady State for k er når $k_{t+1} - k_t = 0 \Leftrightarrow sBk_t^\alpha - (\delta+n)k_t = 0 \Leftrightarrow sBk_t^\alpha = (\delta+n)k_t$
Dette kan vi indsætte i et diagram og får:





Til højere er et eksempel på hvordan ændringer i parametre kan påvirke Solow-diagrammet.
Man kan udlede en konkret værdi for SS ved at regne. Både Solow-ligning og Transitionsligningen kan bruges. Begge gennemgås: Transitionsligningen dropper man tidsindekset og isolerer k:

$$k = \frac{1}{1+n}[sBk^\alpha + (1-\delta)k] \Leftrightarrow k + nk = sBk^\alpha + k - \delta k \Leftrightarrow 1 + n = sBk^{\alpha-1} + 1 - \delta \Leftrightarrow$$

$$Bk^{\alpha-1} = \frac{n+\delta}{s} \Leftrightarrow B^{-1}k^{1-\alpha} = \frac{s}{n+\delta} \Leftrightarrow k^{1-\alpha} = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)B \Leftrightarrow k^* = B^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Solow-ligning dropper man igen tidsindekst og isolerer k:

$$k - k = \frac{1}{1+n}[sBk^\alpha - (\delta+n)k] \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{1+n}[sBk^\alpha - (\delta+n)k] \Leftrightarrow sBk^\alpha = (\delta+n)k$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{s}{\delta+n}Bk^\alpha \Leftrightarrow k^{1-\alpha} = B\frac{s}{\delta+n} \Leftrightarrow k^* = B^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{s}{\delta+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Vi kan nu benytte vores fundet udtryk og finde SS-værdien for y ved at indsætte værdien:

$$y_t = Bk_t^{\alpha} \Leftrightarrow$$
$$y^* = B(k^*)^{\alpha} \Leftrightarrow$$
$$y^* = B^{1+\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot \left(\frac{s}{\delta+n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = B^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{s}{\delta+n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Det vil sige at i SS er y og k konstante værdier. Tjek Real lejesatsen og lønandelen:

$$r_t = \alpha B k_t^{\alpha-1} \wedge w_t = (1-\alpha)Bk_t^{\alpha}$$
$$r^* = \alpha B\left(B^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{s}{\delta+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{\alpha-1} = \alpha\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{-1} = \alpha\left(\frac{n+\delta}{s}\right)$$

Lønandelen er:

$$\frac{L_t w_t}{Y_t} = \frac{L_t(1-\alpha)Bk_t^{\alpha}}{BK_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha}} = (1-\alpha)$$

Det ses at lønandelen altid er en konstant, også under SS. Kapitalejerne får α del af profiten, mens arbejderne tag $1-\alpha$ del af profitten. Det noteres at empiri viser at $\alpha \approx 1/3$. Desuden så sætter man generelt $\delta = 0.05$ når man skal simulere modellen.

Betingelser for SS

Bare lige kort, så når man har fundet en transitionsligning, så er der en checkliste så man hurtigt kan løbe igennem for at se om der overhovedet opnås konvergens.

1. Går den igennem Origio (0,0): Smid 0 ind på start værdierne og tjek om det giver 0.
2. Er $\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} > 0$
3. Tjek at: $\lim_{k_t \to \infty} \frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} < 1$ og at $\lim_{k_t \to 0} \frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} > 1$

Opsummering

Kapital 3 Solow-Modellen fortæller os at i SS er produktionen- og kapital pr. arbejder faste konstante, da pga. AMP vil effekten blive så lille at den elimineres at den samlede effekt af nedslidning og udtydning. Problemet med denne model, er at der ingen positiv vækst i BNP/pr. capita på lang sigt, hvilket ikke stemmer overens med hvad data viser os - Mere i Kap 5.

Kapital 4 - Lille åben økonomi - Eksogene variabler og justering i indlandet

Nu kommer vi til en model, som lidt er en outlier ift. alle de andre modeller vi gennemgår i dette dokument. Vi betragter nemlig nu, en lille åben økonomi. Lidt ligesom fra ØP B, så går nogen ting igen, så forhåbentligt bliver det her afsnit ikke alt for langt.

I alle andre modeller i pensum, har vi antaget at investeringer = opsparing, da der ikke er nogen mulighed for at placere dem andre steder. I den virkelige verden kan investeringer gå på tværs af landegrænser - og er noget som historien har vist os sker i stigende grad. I takt med globalisering har kapitalejerne mere rig mulighed for at gå ind og håndplukke ideale steder at investerer deres kapital for at maksimere deres udbytte. Nå, tilbage til modellen. I den Åbne Solow model antager vi perfekt kapitalmobilitet, ingen restriktioner - kapital ejere kan frit og uden problemer flytte deres kapital med det samme.

Vi definerer den samlede mængde af kapital som indlandet ejer, både ud-og indland.

$$V_t \equiv K_t + F_t \quad , V_t = Formue \ , \ K_t = Kapital \quad , \ F_t = Nettofordringer$$

K_t bestå af alt kapitalen investeret i indlandet, $\left(K_t = K_t^i + K_t^o\right)$. F_t er hvor meget kapital indlandet har til gode i udlandet $F_t = \overline{K}_t^i - K_t^o$. Hvis $\overline{K}_t^i < K_t^o$: Net debitor (Skylder penge netto). Hvis $\overline{K}_t^i > K_t^o$: Net kreditor. $\overline{K}_t^i =$ Indlandsk kapital investeret i udlandet. $K_t^i =$Indlandsk kapital i indlandet.

Vi definerer opsparing og nationalindkomsten:

$$K_{t+1}^i + \overline{K}_{t+1}^i = S_t + (1-\delta)K_t^i + (1-\delta)\overline{K}_t^i \Leftrightarrow V_{t+1} = S_t + (1-\delta)V_t$$

Til forskel fra kapitel 3, så antag vi at opsparing er en konstant del af *Nationalindkomsten*, Y_t^n, som er $BNP + netto\ renteindkomst$: $Y_t^n = Y_t + \bar{r}\left(\overline{K}_t^i - K_t^o\right) = Y_t + \bar{r}\, F_t$. Nu kommer vi ind i det sjove, vi betegner den indlandske reallejesatsen ved r, og den udenlandske bestemt ved $\bar{r}$. Da vi er en lille økonomi, og derfor ikke i stand til at påvirke $\bar{r}$, hvad vil der ske hvis $r < \bar{r}\ eller\ r > \bar{r}$? Vi har at:

$$\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = \alpha B K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} = r = \bar{r}\ , \qquad Y_t = BK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}\ \&\ B\ er\ konstant\ \&\ L_{t+1} = (1+n)L_t$$

Da vi har perfekt kapitalmobilitet, så sekundet reallejesatsen var højere i udlandet ind indlandet, vil kapital strømme ud, som får MP for K til at stige, indtil $r = \bar{r}$. I den anden situation, hvis $r > \bar{r}$, så vil kapital strømme ind og presse MP for K ned, indtil $r = \bar{r}$. Vi antag at disse bevægelser sker øjeblikkelig. Vores samlet model er så:

$$V_{t+1} - (1-\delta)V_t = S_t\ \ , V_0\ givet$$

$$\begin{aligned}
S_t &= sY_t^n \\
Y_t^n &= Y_t + \bar{r}F_t \\
V_t &= K_t + F_t \\
V_t &= K_t + F_t \\
Y_t &= BK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \\
L_{t+1} &= L_t(1+n)\ , L_0\ givet \\
\bar{r} &= B\alpha K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} = B\alpha k_t^{\alpha-1}
\end{aligned}$$

Grundet vores antagelser om en lille åbenøkonomi, så er k_t konstant. Vi vælger at sige at k_t altid er i SS: $k^* = \left(\frac{B\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, når vi indsætter det i vores produktion pr. arbejder får vi:

$$y_t = B(k^*)^{\alpha} = B^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = y^*$$

Igen, både for SS og udenfor, er BNP/arbejder konstant. Vi kan også kort finde lønnen, som er $\frac{\partial Y_t}{\partial L_t}$:

$$w_t = \frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = (1-\alpha)BK_t^{\alpha} L_t^{-\alpha} = (1-\alpha)Bk_t^{\alpha} = (1-\alpha)B(k^*)^{\alpha} = w^*$$

Den er også konstant, og altid i SS. Dvs. at $k, y\ \&\ w$, alle er konstante og altid i SS, hvor $\bar{r}$ påvirker dem og deres niveau i SS. Da vi så har at kapital ikke akkumuleres, så skal vi finde transitionsligningen for formue pr arbejder: $v_t = V_t / L_t$. For at gøre dette starter vi med at udlede nationalindkomsten pr arbejder først:

$$\begin{aligned}
Y_t^n &= Y_t + \bar{r}F_t = w^* \cdot L_t + \bar{r}K_t + \bar{r}F_t = w^* \cdot L_t + \bar{r}V_t \Leftrightarrow \\
y_t^n &= w^* + \bar{r}v_t
\end{aligned}$$

Nationalindkomsten er altså aflønning af arbejdere plus aflønning af formue. Vi finder transitionsligningen for formue.

$$V_{t+1} = S + (1-\delta)V_t \Leftrightarrow v_{t+1} = \frac{sY_t^n + (1-\delta)V_t}{(1+n)L_t} = \frac{1}{1+n}\left[sy_t^n + (1-\delta)v_t\right] \Leftrightarrow$$

$$v_{t+1} = \frac{1}{1+n}[s(w^* + \bar{r}v_t) + (1-\delta)v_t] = \frac{sw^*}{1+n} + \frac{1-\delta+s\bar{r}}{1+n}v_t$$

Vi kan let aflæse at stabilitetsbetingelsen er at $s\bar{r} < n + \delta$. Fordi opsparingsbidraget fra lønnen er konstant, så det er kun konvergens hvis der kommer AMP på bidraget fra formueindtægtet, hvilket kun sker hvis udtyndingen (n) og nedslidningen (δ) er større end den ekstra opsparing fra den øget renteindtægt $(s\bar{r})$. For at bedre forstå det, lad os finde Solow ligningen, og derfor SS-værdierne:

$$v_{t+1} - v_t = \frac{sw^*}{1+n} + \frac{1-\delta+s\bar{r}}{1+n}v_t - v_t = \frac{1}{1+n}[sw^* - (\delta + n - s\bar{r})v_t] \Leftrightarrow$$

$$\frac{v_{t+1} - v_t}{1+n} = sw^* - (\delta + n - s\bar{r})v_t$$

Vi dropper tidsindekset og isolerer v:

$$v^* = \frac{s}{n+\delta-s\bar{r}}w^* = \frac{\frac{s}{n+\delta}}{\frac{n+\delta}{n+\delta} - \frac{s\bar{r}}{n+\delta}}w^* = \frac{\frac{s}{n+\delta}}{1-\frac{s}{n+\delta}\bar{r}}w^*$$

Indsætter på nationalindkomst pr. arbejder:

$$y^{n^*} = w^* + \bar{r}v^* = w^* + \bar{r}\frac{\frac{s}{n+\delta}}{1-\frac{s}{n+\delta}\bar{r}}w^* = \left(1 + \bar{r}\frac{\frac{s}{n+\delta}}{1-\frac{s}{n+\delta}\bar{r}}\right)w^*$$

$$= \left(\frac{1-\frac{s}{n+\delta}\bar{r}}{1-\frac{s}{n+\delta}\bar{r}} + \frac{\bar{r}\frac{s}{n+\delta}}{1-\frac{s}{n+\delta}\bar{r}}\right)w^* = \left(\frac{1}{1-\left(\frac{s}{n+\delta}\right)\bar{r}}\right)w^*$$

Vi indsætter w^*:

$$y^{n^*} = \frac{1}{1-\left(\frac{s}{n+\delta}\right)\bar{r}}w^* = \frac{1}{1-\left(\frac{s}{n+\delta}\right)\bar{r}}(1-\alpha)B(k^*)^\alpha = \frac{1}{1-\left(\frac{s}{n+\delta}\right)\bar{r}}(1-\alpha)B^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Herfra kan vi se, at ligesom i vores lukkede modeller, så har vi mange af de samme politiske anbefalinger. Højere opsparingsrate er godt, højere teknologi er også bedre. Lavere befolkningsvækst godt osv. I denne model, går nogen af de her ting bare igennem formue i stedet for kapital. En af de store forskelle fra lukkede økonomier, er at grundet vores antagelser i om den verden vores åbne økonomi er i, så vil f.eks. effekten af en stigning i $B \uparrow \Rightarrow k^* \uparrow \Rightarrow y^*$ vil ske i den samme periode. Sekundet at der er et sted hvor afkastet af kapitalen er bedre, vil kapital flyde ind indtil AMP sørge for at afkastet falder til det samme som alle andre steder.

Lad os undersøge situationen hvor vi er en lukkede økonomi som åbner deres kapitalmarkeder. Vi definerer den indlandske reallejesats som $r_c^* = \alpha\frac{n+\delta}{s}$ og undersøger matematisk $\frac{y^{n^*}}{y_c^*}$:

$$y_c^* = B^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad \& \; y^{n^*} = \frac{1}{1-\left(\frac{s}{n+\delta}\right)\bar{r}}(1-\alpha)B^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\frac{y^{n^*}}{y_c^*} = \frac{\frac{1}{1-\left(\frac{s}{n+\delta}\right)\bar{r}}(1-\alpha)B^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{B^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} = (1-\alpha)\left(\frac{1}{\bar{r}}\alpha\frac{n+\delta}{s}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\frac{1}{1-\left(\frac{s}{n+\delta}\right)\bar{r}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{y^{n^*}}{y_c^*} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha\frac{\bar{r}}{r_c^*}}\left(\frac{\bar{r}}{r_c^*}\right)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}},$$

- $Hvis\ r_c^* = \bar{r}$: Sker intet, da $r_c^*/\bar{r} = 1 \Rightarrow y^{n^*}/y_c^* = 1$
- $Hvis\ r_c^* > \bar{r}$: Kapital vil flyde ind i landet, som medfører at $k^* \uparrow$, hvilket resultere i højere produktivitet og indkomst. Men nu skal der betales leje/rente til udlandet.
- $Hvis\ r_c^* < \bar{r}$: Kapital strømmer ud af landet mod et højere internationalt afkast, som øger afkastet af investeret kapital. Men tilgængeld falder k^* og produktivitet med den.

Lad os lave en funktionsundersøgelse når $r_c^* \neq \bar{r}$: Det er et $\frac{\alpha}{1-\alpha}$-gradspolynomium. Vi tag ln og differentiere ift. $\bar{r}/r_c^*$:

$$\frac{\partial \ln(y^{n^*}/y_c^*)}{\partial(\bar{r}/r_c^*)} = \frac{\alpha}{1-\alpha\bar{r}/r_C^*} - \frac{1}{\bar{r}/r_c^*}\frac{\alpha}{1-\alpha}$$

Vi kan se at den er $= 0$, for $\bar{r}/r_c^* = 1$. Hvis vi tjekker den anden afledte, ser vi at den er positiv, ergo kan vi konstatere at $\bar{r}/r_c^* = 1$ er et globalt minimum. Hermed har vi vist at $y^{n^*}/y_c^* \geq 1$.
Svarende til, at givet vores antagelser og parameter, så vil en lille lukkede økonomi, aldrig blive stillet dårligere af at åbne op - lige meget hvad deres r_c^* er i forhold til $\bar{r}$. Ifølge modellen, så vi rige lande have mindre kapital hvilket vil medføre mindre løn, og et højere afkast for kapitalejerne. Det modsatte skulle ske for det fattige lande, hvilket i teorien er godt da højere løn og lavere kapitalt afkast er godt for den almene arbejder. Dette er især godt, da fattige lande oftest har mere ulighed, og deres institutioner er mindre i stand til at omfordele ift. rige lande. Ifølge modellen, vil kapitalflow flyde fra rige, opsparingsstærke lande $\left(\frac{(n+\delta)}{s}\ lav\right)$, til fattige opsparingssvage lande $\left(\frac{n}{s}\ høj\right)$. Lande som er opsparingsstærke vil blive netto kreditorer og opsparingssvage vil blive nettodebitorer.

Men hvad siger empirien ift. til vores models konklusion?

Kort fortalt, er den ret uenige. Se Casper Worm, Kapitel4_udenDBP, slide 32 til slut, for en grundig gennemgang. Det er primært fordi nogen af de antagelser vi har i vores model, ikke er realistiske ift. den virkelige verden. Vores model tag ikke højde for usikkerhed. Casper opstiller en model, hvor vi bliver nødt til at inkludere at forskellige lande har forskellige niveau af risici, og at denne risici skal der tages højde for. Til det giver vi så at allokeringen af kapital ændres til:

$$\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = r_t = \bar{r} + \rho$$

Hvor ρ repræsenterer risikopræmien for et givet land. F.eks. kun det være renten i Venezuela er givet ved markedsrenten + noget ekstra fordi det er mere risikabelt. I det vi ændrer på det, bliver også nødt til at inkluderer dette i nationalindkomstligningen. Dermed får vi:

$$Y_t^n = Y_t + \bar{r}F_t$$

Hvis F_t er negativt, hvilket er tilfældet hvis de er nettodebitor ($F_t < 0$), så falder nationalindkomsten grundet betalingen af renter til udenlandske investorer:

$$Netto\ Debitor: Y_t^n = Y_t + (\bar{r} + \rho)F_t$$

Hvis landet er netto kreditor $F_t > 0$, så vil den indlandske indkomst forrentes til $\bar{r} + \rho$, men pengene placeret i udlandet kun til $\bar{r}$, og det vil sige at der er ingen ændringer:

$$Netto\ Kreditor:\ Y_t^n = Y_t + \bar{r}F_t$$

Kapital 5 - Lille lukkede økonomi - Eksogen Teknologisk Vækst

Introduktion - Vækst i Teknologi

Vi hopper videre til kapital 5. Vi er nu tilbage i vores lille lukkede økonomi, til forskel fra kapitel 4. Fra kapital 3 dannede vi den basale Solow model, hvor vi kun brugt arbejdskraft og kapital som - men vi husker at der ikke er nogen form for langsigtet vækst (pga. n og δ) hvilket ikke stemmer overens med empirisk data. Derfor introducere vi en ny faktor som også kan opleve vækst. Ligesom kap 3 oplever vi stadig CRS på et makroøkonomiske niveau.

$$Teknologisk\ Vækst$$

Kap 5 modellen er præcis ligesom kap 3 modellen, med den ene ændring at B kan vokse over tid - hvilket skaber mulighed for vækst i BNP/arbejder i SS. Nogen vil måske spørge: "Hvad er Teknologi og hvordan kan den have vækst?", dette er sådan set ikke afgørende vigtigt, man kan tænke på teknologi som værende opskrifter til kombinationer af input, og væksten som værende raten af hvor ofte nye og bedre opskrifter udkommer; så de samme input giver mere output.

Vi erstatter B med $A_t^{1-\alpha}$, hvor A_t vokser med den konstante eksogene vækstrate:

$$A_{t+1} = (1+g)A_t \text{ , } A_0 \text{ } givet$$

Bemærk at med denne definition, så for $g = 0$ og $A_0^{\frac{1}{1-\alpha}} = B$ så kommer vi tilbage til kap 3 modellen. Mange af resultaterne og intuitionen til kap 5 minder kraftigt om dem fra kap 3. Kort kan vi fortælle at der overordnet to former for teknologisk vækst/fremskridt:

Harrod-neutral: A_t indgår i parentesen med L_t: $Y_t = F(K_t, A_t L_t)$
Solow-neutral: A_t indgår i parentesen med K_t: $Y_t = F(A_t K_t, L_t)$

Vi anvender generelt Harrod-neutral tek. Fremskridt, da den giver os vores ønsket Balanceret Vækst. Fun fact: Vi benytter en Cobb-Douglas produktions funktion, hvilket indebærer en substitutionselasticitet mellem kapital og arbejdskraft på 1. Dette betyder at for Cobb-Douglas fkt. Er det ligegyldigt hvilket form for teknologisk vækst/fremskridt vi bruger.
Modellen er dermed defineret som:

$$\begin{gathered}
Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha} \text{ ,} \qquad 0 < \alpha < 1 \\
K_{t+1} = S_t + (1-\delta)K_t \text{ ,} \qquad 0 < \delta < 1 \text{ , } K_0 \text{ } givet \\
S_t = sY_t \text{ ,} \qquad 0 < s < 1 \\
L_{t+1} = (1+n)L_t \text{ ,} \qquad L_0 \text{ } givet \\
A_{t+1} = (1+g)A_t, \qquad A_0 \text{ } givet
\end{gathered}$$

Nu hvor vi som sagt ikke oplever konstant værdier i SS for k^* & y^*. I kap 5 undersøger vi *tilde*-variablerne, defineret ved:

$$\tilde{k}_t = \frac{K_t}{A_t L_t} \quad \wedge \quad \tilde{y}_t = \frac{Y_t}{A_t L_t}$$

Altså kapitalen per effektive arbejder og BNP per effektive arbejder. Vi definerer disse, da de er konstante i SS, frem for vores tidligere k_t og y_t, da de indeholder A_t som er konstant voksende jo.

Transitionsligning:

Lad os nu udlede transitionsligningen:

$$K_{t+1} = S_t + (1-\delta)K_t \Leftrightarrow \frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}} = \frac{sY_t + (1-\delta)K_t}{(1+g)A_t(1+n)L_t} \Leftrightarrow$$

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+g)(1+n)} \cdot \left[s\tilde{y}_t + (1-\delta)\tilde{k}_t\right] \Leftrightarrow$$

$$Y_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha} \Leftrightarrow \tilde{y}_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^{-\alpha} = \tilde{k}_t^\alpha$$

$$\Leftrightarrow \tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+g)(1+n)}\left[s\tilde{k}_t^\alpha + (1-\delta)\tilde{k}_t\right]$$

Vi kan også hurtigt finde Solow-ligningen ved at trække $\tilde{k}_t$ fra på begge sider:

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+g)(1+n)}\left[s\tilde{k}_t^\alpha + (1-\delta)\tilde{k}_t\right] - \tilde{k}_t \Leftrightarrow$$

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+g)(1+n)}\left[s\tilde{k}_t^\alpha - (n+g+\delta+ng)\tilde{k}_t\right]$$

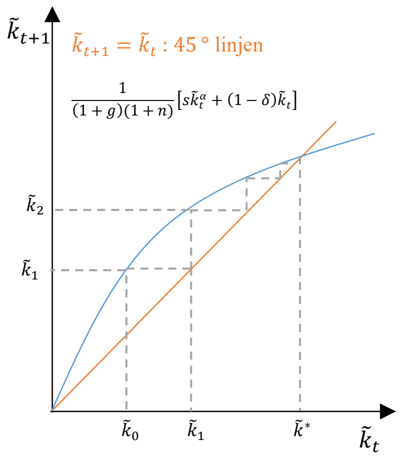
Nu introducerer vi også en form for Solow-ligning, den modificeret solow-ligning. Vi dividerer begge sider med $\tilde{k}_t$, for så har vi at venstre siden bliver $\frac{\tilde{k}_{t+1}-\tilde{k}_t}{\tilde{k}_t}$, også bedre kendt som vækstraten.

$$\frac{\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t}{\tilde{k}_t} = \frac{1}{(1+g)(1+n)}\left[s\tilde{k}_t^{\alpha-1} - (n+g+\delta+ng)\right]$$

Nu indsætter vi alle 3 ligninger i deres diagrammer:

Transitions ligning:

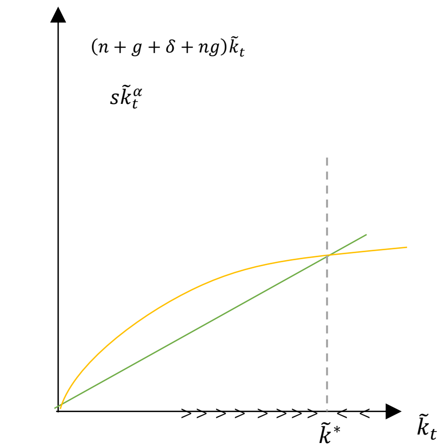
$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+g)(1+n)}\left[s\tilde{k}_t^\alpha + (1-\delta)\tilde{k}_t\right]$



Transitionsligningen helt standard, hvor vi viser gennem trappeiterationer at der er konvergens mod $\tilde{k}^*$

Solow-ligning:

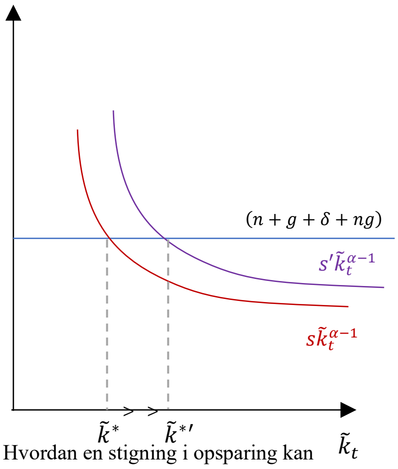
$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+g)(1+n)}\left[s\tilde{k}_t^\alpha - (n+g+\delta+ng)\tilde{k}_t\right]$



Solow-ligningen, som viser os at når væksten i kapital er lig den samlede nedslidning (udtydning, osv), er vi i SS

Modificeret Solow-ligning:

$\frac{\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t}{\tilde{k}_t} = \frac{1}{(1+g)(1+n)}\left[s\tilde{k}_t^{\alpha-1} - (n+g+\delta+ng)\right]$



Hvordan en stigning i opsparing kan resultere i en højere SS-værdi. Det er vækstraten som ses som værende aftagende

Steady State

Finder SS, som normalt. Tag transitionsligningen og sæt $\tilde{k}_{t+1} = \tilde{k}_t = \tilde{k}^*$ og isolerer:

$$\tilde{k} = \frac{1}{(1+g)(1+n)}\left[s\tilde{k}^\alpha + (1-\delta)\tilde{k}\right] \Leftrightarrow$$

$$\tilde{k} - \tilde{k} = \frac{1}{(1+g)(1+n)}\left[s\tilde{k}^\alpha + (1-\delta)\tilde{k}\right] - \tilde{k} = \frac{1}{(1+g)(1+n)}\left[s\tilde{k}^\alpha - (n+g+\delta+ng)\tilde{k}\right] \Leftrightarrow$$

$$s\tilde{k}^\alpha = (n+g+\delta+ng)\tilde{k} \Leftrightarrow s\tilde{k}^{\alpha-1} = (n+g+\delta+ng) \Leftrightarrow \tilde{k}^* = \left(\frac{s}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Indsætter det i vores $\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^\alpha$

$$\tilde{y}^* = (\tilde{k}^*)^\alpha = \left(\frac{s}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Vi ser at ting der kan øge $\tilde{y}^*$ og $\tilde{k}^*$ er nogenlunde de sædvanlige. Højere s og laverer n & δ. Men hvorfor er g, som er vækstraten for teknologi, også i nævneren? Vi skal huske at vi har defineret $\tilde{y}_t = \frac{y_t}{A_t}$, men vi er interesseret i y_t, da BNP/per effektive arbejder ikke giver nogen aktuel mening - vi gjorde det primært for at gøre udregninger markant nemmere. Dertil starter vi med at løse differensligningen:

$$A_{t+1} = (1+g)A_t \Rightarrow A_t = (1+g)^t \cdot A_0$$

Så kan vi undersøge ligningen for $y_t^* = A_t\tilde{y}^*$, ved at tage ln og undersøge nærmere:

$$\ln y_t^* = \ln(A_t \cdot \tilde{y}^*) = \ln(A_t) + \ln(\tilde{y}^*) = \ln((1+g)^t \cdot A_0) + \ln\left(\left(\frac{s}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)$$

$$= \ln(A_0) + t \cdot \ln(1+g) + \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot (\ln(s) - \ln(n+g+\delta+ng))$$

Husker at for $\ln(1+g) \approx g$, når g er et lille tal.

$$= \ln(A_0) + t \cdot g + \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot (\ln(s) - \ln(n+g+\delta+ng))$$

Her ser vi så at $\frac{\partial y^*}{\partial g} > 0$, ergo teknologisk vækst er et positivt bidrag.

Opsummering

Nå, det var kap 5. Lad os kort gennemgå hvad denne model fortæller os. Ved at introducerer eksogen vækst, og dermed Teknologisk Udvikling, overkommer vi problemet af nulvækst i kap 3 i SS. Vi ser at modellen, stadig har konvergens - hvilket kan illustreres gennem tre forskellige diagrammer - mod SS-værdier. I kapital 8 og 9 vil vi komme ind på hvordan endogen vækst i Teknologi virker.

Linearisering & Konvergens Hastigheder

Hvordan bevæger en modellens variabler sig udenfor SS? Der kan vi forholde os til vores dejlige transitionsligningen. Vi bruger den fra kap 5 da vi lige har gennemgået det:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+g)(1+n)}\left[s\tilde{k}_t^\alpha + (1-\delta)\tilde{k}_t\right]$$

Men problemet, som vi originalt gennemgik i kap 3, da vi først introducerede transitionsligningen, var at den ikke har nogen løsning, som vi kan finde ud af på 3. semester. Det betyder at der umiddelbart ikke er nogen analytisk løsning, der vil gives og en regulær løsning som vi kan teste.
En løsning som vi vil benytte, er hvis $\delta = 1$. Er godt klar over at dette er utrolig urealistisk, men hvis man lige leger med i noget tid, så kan man se hvorfor det ikke er den værste ide at lege med den her antagelse.

For $\delta = 1$ så: $\ln(\tilde{k}_{t+1}) = \ln s - \ln[(1+n)(1+g)] + \alpha\ln(\tilde{k}_t)$
Det betyder at hvis $\delta = 1$, så er transitionsligningen log lineær. Vi omskriver vha. produktionsfunktionen til:

$$\ln(\tilde{y}_{t+1}) = \alpha\left[\ln(s) - \ln\left((1+n)(1+g)\right)\right] + \alpha\tilde{k}_t$$

Vi definerer: $\Gamma = \alpha\left[\ln(s) - \ln\left((1+g)(1+n)\right)\right]$

$$\ln(y_t) = \alpha^t\left(\tilde{y}_0 - \frac{\Gamma}{1-\alpha}\right) + \frac{\Gamma}{1-\alpha}$$

Hvor $\frac{\Gamma}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \cdot [\ln(s) - \ln[(1+g)(1+n)]]$, fra kap 5. Som sagt så er $\delta = 1$ urealistisk, især hvis perioden er kun 1 år. Så en løsnings er at sætte perioden lig 50 år. Alternativt kunne vi lineriser transitionsligning - dette er lidt nemmere og det gør vi:

Til det vil vi benytte noget matematik, det meste af det her er taget fra Caspers slides. Men vi vil bruge den følgende approksimation:

$$f(x') - f(x'') \approx b = f'(x')(x' - x'') \Leftrightarrow f(x'') - f(x') \approx b = f'(x')(x'' - x')$$

Hvor vi kan benytte noget mere bekendt notation i form af:

$$x' = x^* \; og \; f(x) = y$$

Så vi har at:

$$y - y^* \approx f'(x^*)(x - x^*)$$

Vi siges nu at have lineariseret $f(x)$ omkring x^*. Bogen bruger følgende notation:

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}^* \approx G'(\tilde{k}^*)(\tilde{k}_t - \tilde{k}^*) \quad , \qquad \tilde{k}_{t+1} \equiv G(\tilde{k}_t)$$

Hvis vi bruger bogens notation, og lineariser $G(\tilde{k}_t)$ omkring $\tilde{k}^*$:

$$G(\tilde{k}_t) - G(\tilde{k}^*) = G'(\tilde{k}^*)(\tilde{k}_t - \tilde{k}^*) \Leftrightarrow \tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}^* = G'(\tilde{k}^*)(\tilde{k}_t - \tilde{k}^*)$$

Dette er en lineære differensligning i $\tilde{k}_t$, hvor vi godt kan løse for $\tilde{k}_t$, hvor:

$$G'(\tilde{k}_t) = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left[\alpha s \tilde{k}_t^{\alpha-1} + (1-\delta)\right]$$

$$\tilde{k} \; i \; SS \; er: \tilde{k} = \left(\frac{s}{n + g + \delta + ng}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$G'(\tilde{k}) = \frac{1}{(1+n)(1+g)}[\alpha(n + g + \delta + ng) + (1-\delta)]$$

Nu vil vi gerne undersøge vækstraterne, uden for SS, hvilket vi gør ved at kigge på logaritmer. Svarer til endnu en linearisering. Vi har at: $H(\tilde{k}_t) = \ln \tilde{k}_t$

$$H(\tilde{k}_t) - H(\tilde{k}^*) = \ln(\tilde{k}_t) - \ln(\tilde{k}^*) \approx H'(\tilde{k}^*)(\tilde{k}_t - \tilde{k}^*) = \frac{1}{\tilde{k}^*}(\tilde{k}_t - \tilde{k}^*)$$

$$\Leftrightarrow \tilde{k}_t - \tilde{k}^* = \tilde{k}^*(\ln(\tilde{k}_t) - \ln(\tilde{k}^*)) \Rightarrow \tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}^* = \tilde{k}^*(\ln(\tilde{k}_{t+1}) - \ln(\tilde{k}^*))$$

Indsæt de to ligninger i den oprindelige lineariseret transitionsligning for at få:

$$\ln \tilde{k}_{t+1} - \ln \tilde{k}^* \approx G'(\tilde{k}^*)(\ln(\tilde{k}_t) - \ln(\tilde{k}^*))$$

Nu kan vi så indsætte produktionsfunktionen, for at undersøge BNP/arbejder. Vi har at:

$$\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^\alpha \Leftrightarrow \ln(\tilde{y}_t) = \alpha \ln \tilde{k}_t \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}\ln(\tilde{y}_t) = \ln(\tilde{k}_t)$$

Så kan vi indsætte i vores lineariseret funktion:

$$\frac{1}{\alpha}(\ln(\tilde{y}_{t+1}) - \ln(\tilde{y}_t)) \approx G'(\tilde{k}^*)\left(\frac{1}{\alpha}\ln(\tilde{y}_t) - \frac{1}{\alpha}\ln(\tilde{y}^*)\right) \Leftrightarrow$$
$$\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln(\tilde{y}_t) \approx G'(\tilde{k}^*)(\ln(\tilde{y}_t) - \ln(\tilde{y}^*)) \Leftrightarrow$$
$$\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln(\tilde{y}_t) \approx [1 - G'(\tilde{k}^*)](\ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_t)$$

Så har vi nu at:

$$\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln(\tilde{y}_t) \approx v\text{æ}ksten \; i \; \tilde{y}$$
$$(\ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_t) \approx \% \; afstand \; fra \; \tilde{y}_t \; til \; \tilde{y}^*$$
$$[1 - G'(\tilde{k}^*)] : Konvergenshastigeheden, \lambda$$

Altså repræsentere λ, hvor meget af det gap til SS der er, som bliver lukket i hver periode. Vi kan indsætte værdier og får så $G'(\tilde{k}^*) \Rightarrow \lambda \approx (1-\alpha)(n + g + \delta)$. Matematikken viser at jo større α er, desto langsommere konvergens vil der være. Intuitionen bag dette er at jo større α, desto vigtigere er kapital, som fører til mindre tendens til AMP som fører til langsommere konvergens.

Konvergenshastighed

Vi arbejder videre fra før. Starter med at konkret definerer $1 - G'(\tilde{k}^*) \equiv \lambda$
Så har vi at overstående ligning omskrives til:

$$\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln(\tilde{y}_t) \approx [1 - G'(\tilde{k}^*)](\ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_t) \Leftrightarrow \ln \tilde{y}_{t+1} = \lambda \ln \tilde{y}^* + (1-\lambda)\ln(\tilde{y}_t)$$

Dette er en lineære første ordens differensligning. Fra undervisning har vi at:
$x_{t+1} = ax_t + b$ har den følgende løsning: $x_t = a^t\left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a},\ a \neq 1$. Brug denne og vi får:

$$\ln \tilde{y}_t = (1-\lambda)^t\left(\ln \tilde{y}_0 - \frac{\lambda \ln \tilde{y}^*}{1-(1-\lambda)}\right) + \left(\frac{\lambda \ln \tilde{y}^*}{1-(1-\lambda)}\right) = (1-\lambda)^t\left(\ln \tilde{y}_0 - \frac{\lambda \ln \tilde{y}^*}{\lambda}\right) + \ln \tilde{y}^* \Leftrightarrow$$
$$\ln \tilde{y}_t = (1-\lambda)^t(\ln \tilde{y}_0 - \ln \tilde{y}^*) + \ln \tilde{y}^* = [1-(1-\lambda)^t]\ln \tilde{y}^* + (1-\lambda)^t \ln \tilde{y}_0$$

Nu indsætter vi et specifikt tidspunkt ($t = T$), for at teste vækstraten uden for SS. Vi trækker $\ln \tilde{y}_0$ fra

$$\ln \tilde{y}_T - \ln \tilde{y}_0 = [1-(1-\lambda)^T]\ln \tilde{y}^* + (1-\lambda)^T \ln \tilde{y}_0 - \ln \tilde{y}_0 = [1-(1-\lambda)^T](\ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_0)$$

Vi divider med T og indsætter at $\ln \tilde{y}_t = \ln y_t - \ln A_t$ for både $t = T$ & $t = 0$:

$$\frac{(\ln y_T - \ln A_T) - (\ln y_0 - \ln A_0)}{T} = \frac{[1-(1-\lambda)^T]\left(\ln \tilde{y}^* - \left((\ln y_0 - \ln A_0)\right)\right)}{T} \Leftrightarrow$$
$$\frac{\ln y_T - \ln y_0}{T} = \frac{\ln A_T - \ln A_0}{T} + \frac{1-(1-\lambda)^T}{T}(\ln A_0 + \ln \tilde{y}^* - \ln y_0), \frac{\ln A_T - \ln A_0}{T} \approx g$$

Vi har så at konvergensligningen bliver:

$$\frac{\ln y_T - \ln y_0}{T} \approx g + \frac{1-(1-\lambda)^T}{T}(\ln A_0 + \ln \tilde{y}^* - \ln y_0)$$

$$\frac{\ln y_T - \ln y_0}{T} : Gns\ vækst\ i\ y$$

$$g : teknologisk\ vækst$$

$$\frac{1-(1-\lambda)^T}{T}(\ln A_0 + \ln \tilde{y}^* - \ln y_0) : Vækst\ fra\ kapitalakkumulation$$

For at teste den, som Casper gennemgår fra slide 34, kap 5 (Det er værd at tjekke ud). Kan vi indsætte at $\ln \tilde{y}^* = \frac{\alpha}{1-\alpha}[\ln s - \ln(n + g + ng + \delta)]$:

$$\frac{\ln y_t - \ln y_0}{T} = g + \frac{1-(1-\lambda)^T}{T}\ln A_0 - \frac{1-(1-\lambda)^T}{T}\ln y_0$$
$$+ \frac{1-(1-\lambda)^T}{T}\frac{\alpha}{1-\alpha}[\ln s - \ln(n + g + ng + \delta)]$$

Så, vil jeg stærkt anbefale at man kigger på Casper Worms slides, Kapitel5_udenDBP fra slide 35 til slut. Han gennemgår en rækker test, bl.a. at med vores lineariseret ligning, kan vi nu teste modellen via OLS.

Kapital 6 - Lille lukkede økonomi - Human kapital

I kapitel 6, introducerer vi en ny form for kapital: Human Kapital (H_t). Idéen bag dette er at udvide modellens evne til at beskrive den virkelige verden[3]. Human Kapital er lig med evner knyttet til den enkelte arbejder, ting som Uddannelse, erfaring, IQ og Helbred f.eks. Ligesom i Solowmodellen, så akkumuleres H som fysisk kapital. Bredt fortalt, så svarer det til at vi udvider α, som før beskrev elasticiteten af kapital og arbejdskraft. Vi vil se at i Steady State så vil der før nogen krydseffekter som vil resultere i større effekter fra ændringer i parameterende. Den nye Cobb-Douglas produktionsfunktion er:

$$Y_t = K_t^{\alpha} H_t^{\varphi} (A_t L_t)^{1-\alpha-\varphi}$$

Ligesom tidligere så har vi konstant skala afkast, og dermed CRS på et makroniveau. φ er elasticiteten for Humankapital. Funktionen har stadig AMP for H_t, K_t & L_t.

Ift. kap 3 og 5, så var det husholdningerne (forbrugeren) som bestemte hvor meget der blev opsparet i fysisk kapital, det samme gælder for opsparing ift. human kapital. Hertil er den samlede opsparing i kap 6 modellen:

$$S = (s_K + s_H)Y_t$$
$$C_t = Y_t - S_t = (1 - s_K - s_H)Y_t$$

Hvor: $s_K + s_H < 1, s_K =$ opsparingsraten i fysisk kapital og $s_H =$ opsparingsraten i human kapital. Grunden til at vi definerer opsparingsraten sådan her, at vi senere hen kan gå ind og undersøge hvordan evt. ændringer i s_H (en stigning i uddannelsesniveau) har konsekvenser på den samlede model.

Vi skal også have en akkumulations funktion for human kapital, ligesom den for fysisk fra kap 3 & 5:

$$K_{t+1} = s_K Y_t + (1-\delta)K_t$$
$$H_{t+1} = s_H Y_t + (1-\delta)H_t$$

Ergo de akkumuleres på præcis samme måde. Vi har dermed alle ligningerne til at danne modellen:

$$\begin{aligned}
&Y_t = K_t^{\alpha} H_t^{\varphi} (A_t L_t)^{1-\alpha-\varphi} \\
&A_{t+1} = (1+g)A_t, \qquad A_0 \; givet \\
&L_{t+1} = (1+n)L_t, \qquad L_0 \; givet \\
&K_{t+1} = s_K Y_t + (1-\delta)K_t, \qquad K_0 \; givet \\
&H_{t+1} = s_H Y_t + (1-\delta)H_t, \qquad H_0 \; givet
\end{aligned}$$

Ligesom i kap 5, vil vi gerne brude tilde-variabler, da de viser sig at være konstante i SS. Hermed defineres de: $\tilde{y}_t = \frac{Y_t}{A_t L_t}, \tilde{k}_t = \frac{K_t}{A_t L_t}, \tilde{h}_t = \frac{H_t}{A_t L_t}$. Men så løber vi ind i hvad der nok er den mest irriterende model ift. fasediagrammer osv. Vi får lige kort tilde produktionsfunktionen:

$$\frac{Y_t}{A_t L_t} = \frac{K_t^{\alpha} H_t^{\varphi} (A_t L_t)^{1-\alpha-\varphi}}{A_t L_t} \Leftrightarrow \tilde{y}_t = \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi}$$

Vi har jo to transitionsligninger, grundet vores to kapitalakkumulations ligninger. Vi starter derfor med lidt intuition. Ligesom i kap 5, så har både $\tilde{h}_t$ og $\tilde{k}_t$ AMP, og derfor konvergere de mod SS-værdierne: $\tilde{h}^*$ & $\tilde{k}^*$. Ligesom før, så oplever de begge de typiske parameter ændring:

$$s_K \Uparrow (fald \; i \; n \; eller \; \delta) \Rightarrow \tilde{k}_t \Uparrow$$
$$s_H \Uparrow (fald \; i \; n \; eller \; \delta) \Rightarrow \tilde{h}_t \Uparrow$$

Men nu, sker der en yderligere effekt, fordi de to kapitaler begge påvirker den samlede produktion, Y_t, som dermed påvirker dem, fås der nogen krydseffekter. F.eks. $s_H \Uparrow \rightarrow \tilde{h}_t \Uparrow \rightarrow \tilde{y}_t \Uparrow \rightarrow \tilde{k} \Uparrow \rightarrow osv$, hvor effekten går mod nul, pga. AMP. Kort sagt, så selvforstærkes effekterne af parameterændringer ift. model uden humankapital.

---

[3] Slide 2, Kap 6, Casper Worm.

Transitionsligningen

Vi skal finde transitionsligningerne, så vi starter med Fysisk Kapital: K_{t+1}

$$\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}} = \frac{s_K Y_t + (1-\delta)K_t}{(1+g)A_t(1+n)L_t} \Leftrightarrow \tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+g)(1+n)}\left[s_K \tilde{y}_t + (1-\delta)\tilde{k}_t\right] \Leftrightarrow$$

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+g)(1+n)} \cdot \left[s_K \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} + (1-\delta)\tilde{k}_t\right]$$

Så finder vi den for Human Kapital: H_{t+1}

$$\frac{H_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}} = \frac{s_H Y_t + (1-\delta)H_t}{(1+g)A_t(1+n)L_t} \Leftrightarrow \tilde{h}_{t+1} = \frac{1}{(1+g)(1+n)}\left[s_H \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} + (1-\delta)\tilde{h}_t\right]$$

Suprise suprise, så minder de meget om hinanden. Men, da $\tilde{h}_t$ og $\tilde{k}_t$ indgår i begge ligninger, så har vi at gøre med et system af *ikke-lineære 1. ordens differensligninger*. Til det er der ingen analytiske løsninger, og vi må derfor benytte fase diagrammer, eller simulering, til at forstå deres bevægelser bedre.

Vi starter med at finde solow-lignignerne og løser for steady state, altså når: $\tilde{h}_{t+1} = \tilde{h}_t = \tilde{h}^* \wedge \tilde{k}_{t+1} = \tilde{k}_t = \tilde{k}^*$. Det vil gå lidt hurtigt, men metoden er præcis den samme som normalt:

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+g)(1+n)} \cdot \left[s_K \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} + (1-\delta)\tilde{k}_t\right] - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+g)(1+n)} \cdot \left[s_K \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} - (n+g+ng+\delta)\tilde{k}_t\right]$$

$$\tilde{h}_{t+1} - \tilde{h}_t = \frac{1}{(1+g)(1+n)}\left[s_H \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} + (1-\delta)\tilde{h}_t\right] - \tilde{h}_t = \frac{1}{(1+g)(1+n)} \cdot \left[s_H \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} - (n+g+ng+\delta)\tilde{h}_t\right]$$

Vi isolerer hhv. for $\tilde{h}_t$ i begge ligninger, for at finde såkaldte Nullclines:

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+g)(1+n)} \cdot \left[s_K \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} - (n+g+ng+\delta)\tilde{k}_t\right] \Leftrightarrow 0 = s_K \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} - (n+g+ng+\delta)\tilde{k}_t$$

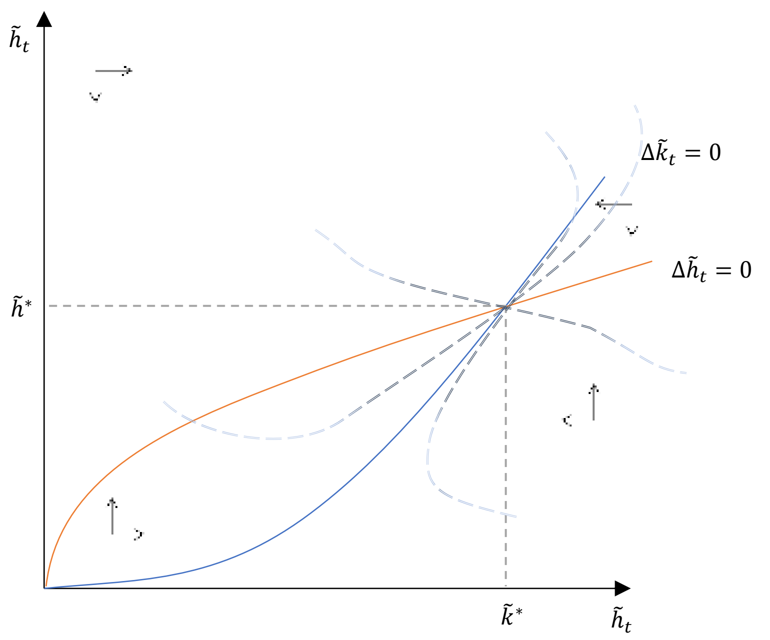
$$\tilde{h}_{t+1} - \tilde{h}_t = \frac{1}{(1+g)(1+n)} \cdot \left[s_H \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} - (n+g+ng+\delta)\tilde{h}_t\right] \Leftrightarrow 0 = s_H \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} - (n+g+ng+\delta)\tilde{h}_t$$

Danner nullclines, altså hvornår Δ er nul, svarende til ingen forskel fra $t+1$ og t:

$$0 = s_K \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} - (n+g+ng+\delta)\tilde{k}_t \Leftrightarrow \tilde{h}_t = \left(\frac{n+g+ng+\delta}{s_K}\right)^{\frac{1}{\varphi}} \tilde{k}_t^{\frac{1-\alpha}{\varphi}} \quad (\Delta\tilde{k}_t = 0)$$

$$0 = s_H \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} - (n+g+ng+\delta)\tilde{h}_t \Leftrightarrow \tilde{h}_t = \left(\frac{s_H}{n+g+ng+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\varphi}} \tilde{k}_t^{\frac{\alpha}{1-\varphi}} \quad (\Delta\tilde{h}_t = 0)$$

Dem indsætter vi et fasediagram, Advarsel det er underligt men hold tungen i munden.



Nu ses det hvorfor at vi isoleret ift. $\tilde{h}_t$, så vi kunne få dem ind i samme diagram. Det punkt hvor graferne krydser, er som altid hvor vores SS er. De stiplede linjer, viser bevægelsen diverse steder i diagrammet.

For at finde Steady State, så løser vi vores to Solow-ligninger ved at sætte dem lig hinanden og løser for dem. Alternativt kunne man tage nulclines og sætte dem lig hinanden og isolere. Hertil fås:

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+g)(1+n)} \cdot \left[s_K \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} - (n + g + ng + \delta)\tilde{k}_t\right]$$
$$\tilde{h}_{t+1} - \tilde{h}_t = \frac{1}{(1+g)(1+n)} \cdot \left[s_H \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} - (n + g + ng + \delta)\tilde{h}_t\right]$$

Sætter venstre siden lig nul og løser:

$$0 = \frac{1}{(1+n)(1+g_t)}\left(s_K \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} + (1-\delta)\tilde{k}_t - (1+n)(1+g_t)\tilde{k}_t\right)$$
$$\Leftrightarrow s_K \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} = (\delta + n + g_t + ng_t)\tilde{k}_t \; s_K \tilde{k}_t^{\alpha-1} \tilde{h}_t^{\varphi} = \delta + n + g_t + ng_t$$
$$\tilde{k}_t^{1-\alpha} = \left(\frac{s_K \tilde{h}_t^{\varphi}}{\delta + n + g + ng}\right) \Leftrightarrow \tilde{k}_t = \left(\frac{\delta + n + g + ng}{s_K \tilde{h}_t^{\varphi}}\right)^{\frac{1}{\alpha - 1}} = \left(\frac{s_K \tilde{h}_t^{\varphi}}{\delta + n + g + ng}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Det samme gøres så for humankapital og man får:

$$\tilde{h}_t = \left(\frac{\delta + n + g + ng}{s_H \tilde{k}_t^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\varphi - 1}} = \left(\frac{s_H \tilde{k}_t^{\alpha}}{\delta + n + g + ng}\right)^{\frac{1}{1-\varphi}}$$

Nu kan vi indsætte og løse. Vi gør det for $\tilde{k}$ først:

$$\tilde{k}_t^{1-\alpha} = \frac{s_K}{n + g + ng + \delta} \cdot \tilde{h}_t^{\varphi} = \frac{s_K}{n + g + ng + \delta} \cdot \left(\frac{s_H \tilde{k}_t^{\alpha}}{n + g + ng + \delta}\right)^{\frac{\varphi}{1-\varphi}} \Leftrightarrow$$
$$\tilde{k}_t^{1-\alpha} = \frac{s_K}{n + g + ng + \delta} \cdot \left(\frac{s_H}{n + g + ng + \delta}\right)^{\frac{\varphi}{1-\varphi}} \cdot \tilde{k}_t^{\alpha\frac{\varphi}{1-\varphi}} \Leftrightarrow$$
$$\tilde{k}_t^{1-\alpha \cdot \frac{(1-\varphi)}{(1-\varphi)}} = \frac{s_K}{n + g + ng + \delta} \cdot \left(\frac{s_H}{n + g + ng + \delta}\right)^{\frac{\varphi}{1-\varphi}} \cdot \tilde{k}_t^{\alpha\frac{\varphi}{1-\varphi}} \Leftrightarrow$$
$$\tilde{k}_t^{\frac{(1-\alpha)(1-\varphi)}{(1-\varphi)} - \frac{\alpha\varphi}{1-\varphi}} = \frac{1}{n + g + ng + \delta} \cdot \left(\frac{1}{n + g + ng + \delta}\right)^{\frac{\varphi}{1-\varphi}} \cdot s_K s_H^{\frac{\varphi}{1-\varphi}} \Leftrightarrow$$
$$\tilde{k}_t^{\frac{(1-\alpha)(1-\varphi)}{(1-\varphi)} - \frac{\alpha\varphi}{1-\varphi}} = \tilde{k}_t^{\frac{1-\varphi-\alpha}{1-\varphi}} \quad \wedge \left(\frac{1}{n + g + ng + \delta}\right)^{1 + \frac{\varphi}{1-\varphi} = \frac{1-\varphi}{1-\varphi} + \frac{\varphi}{1-\varphi}} = \left(\frac{1}{n + g + ng + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\varphi}}$$

$$\tilde{k}^{\frac{1-\varphi-\alpha}{1-\varphi}} = \left(\frac{1}{n + g + ng + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\varphi}} s_K s_H^{\frac{\varphi}{1-\varphi}} \Leftrightarrow \tilde{k} = \left(\frac{1}{n + g + ng + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\varphi} \cdot \frac{1-\varphi}{1-\varphi-\alpha}} s_K^{\frac{1-\varphi}{1-\varphi-\alpha}} s_H^{\frac{\varphi}{1-\varphi} \cdot \frac{1-\varphi}{1-\varphi-\alpha}}$$
$$\Leftrightarrow \tilde{k} = \left(\frac{1}{n + g + ng + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\varphi} \cdot \frac{1-\varphi}{1-\varphi-\alpha}} s_K^{\frac{1-\varphi}{1-\varphi-\alpha}} s_H^{\frac{\varphi}{1-\varphi} \cdot \frac{1-\varphi}{1-\varphi-\alpha}} = \left(\frac{1}{n + g + ng + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\varphi-\alpha}} s_K^{\frac{1-\varphi}{1-\varphi-\alpha}} s_H^{\frac{\varphi}{1-\varphi-\alpha}}$$
$$\Leftrightarrow \tilde{k}^* = \left(\frac{s_H^{\varphi} s_K^{1-\varphi}}{n + g + ng + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\varphi-\alpha}}$$

Vi benytter så, at indtil videre når vi har fundet både transitions ligning og mere for både K_t og H_t, har der været en form for symmetri. Udregningen for $\tilde{h}^*$ er ens til den for oven, udover at man får.

$$\tilde{h}^* = \left(\frac{s_K^{\alpha} s_H^{1-\alpha}}{n + g + ng + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\varphi-\alpha}}$$

Hermed har vi fundet vores SS-værdier. For at finde $\tilde{y}^*$ indsættes $\tilde{k}^*$ og $\tilde{h}^*$ i $\tilde{y} = \left(\tilde{k}^*\right)^{\alpha}\left(\tilde{h}^*\right)^{\varphi}$:

$$\tilde{y}^* = \left(\frac{s_H^{\varphi} s_K^{1-\varphi}}{n + g + ng + \delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\varphi-\alpha}} \left(\frac{s_K^{\alpha} s_H^{1-\alpha}}{n + g + ng + \delta}\right)^{\frac{\varphi}{1-\varphi-\alpha}} = \left(\frac{s_K}{n + g + ng + \delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}} \left(\frac{s_H}{n + g + ng + \delta}\right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}}$$

Der er en del udregninger som der springes over her. Kort fortalt, så er det bare en masse eksponent manipulering og mere. Men nu, hvor vi har vores SS-værdier, kan vi gå ind og undersøge deres hhv. elasticiteten, hvilket bare er første ordens afledte ift. den parameter man gerne vil undersøge. F.eks.

Elasticiteten af s_K på $\tilde{k}^*$:

$$\frac{\partial \tilde{k}^*}{\partial s_K} = \left(\frac{1-\varphi}{1-\alpha-\varphi}\right) s_K^{\frac{1-\varphi}{1-\alpha-\varphi}-1} \left(\frac{s_H^{\varphi}}{(n+g+ng+\delta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\varphi}}$$

Hvor det vi kan se at $\left(\frac{1-\varphi}{1-\alpha-\varphi}\right) > \frac{1}{1-\alpha} \quad for\ \varphi > 0$. Det vil sige, at matematikken viser os det samme som vores intuition fortalte os, at ved inkludering af human kapital, så vil den positive effekt af eksempelvis en højere opsparings rate for fysisk kapital, være større end hvor $\varphi = 0$. Vi kan også kigge på hvordan SS-vækstbanen for $\tilde{y}^*$ ser ud. Fra kap 5 har vi at: $y_t^* = A_t \tilde{y}$:

$$\ln y_t^* \approx \ln(A_0) + \frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}(\ln(s_K) - \ln(n+g+ng+\delta)) + \frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}(\ln(s_H) - \ln(n+g+ng+\delta)) + gt$$

Hvor vi igen kan se at stigninger i s_H og s_K vil resultere i et højere niveau.

Opsummering

Så, lad os kort gennemgå kap 6 modellen. Vi har delt al kapitalen i økonomien op, så vi har Fysisk Kapital og Human kapital. Vi kan gendanne vores kapitel 5 model, ved at sætte $\varphi = 1$, og dermed har vi også meget af den samme intuition. Grundet vores to former for kapital, vil ændringer i f.eks. opsparings rate for de to, have en stærkere effekt på dem selv og produktionen som helhed - pga. krydseffekter.

Kapital 7 - Lille lukkede økonomi - Land som en eksogen ressource

Introduktion

Nå, nu kan i glæder jer fordi vi har endelig fokus på en anden økonom Robert Solow. Vi skal beskæftige os med Thomas Robert Malthus, ja de hedder alle samme Robert på en eller anden måde. Malthus skrev "An Essay on the Principle of Population" hvori han overordnet mente at populations størrelser vil på længden have en negativ vejende effekt på produktionen pr. arbejder.
Det gør han, ved at introducerer et konstant input i produktionen: Land (kan også godt være andet, fx olie). Det vil sige at hvis befolkningen stiger, så har vi flere arbejder på den samme mængde land, hvilket overtid vil fører til AMP - fuldkommen som i mikro teori.
Indtil videre har vi alle vores modeller arbejdet med CRS (Constant Return to Scale). Nu vil vi introducere DRS (Decreasing Return to Scale).

Det skal lige pointeres at Malthus har ikke teknologisk vækst med i hans teori, og derfor ikke kan benytte den samme antagelse om at teknologi vil opveje den faldende produktivitet. Men Malthus er stadig relevant i dag, selvom at empirien har vist stigende vækst i vestlige lande siden slut 1800-tallet, så har vi i andre dele af verden set mulige beviser for hans grund ide om at befolknings størrelse negativt påvirker produktivitet.

En del fattige ikke vestlige lande har enten først slet ikke oplevet den samme økonomiske vækst som vesten, eller først sent efterfølgende. Grundet data, ved vi at i disse lande er befolkningsvæksten høj hvilket medfører et større pres på land, ergo mindre vækst. Grunden til den høje befolkningsvækst, kan måske forklares af gennembrud i medicin, som antibiotika osv.[4]. Her er Malthus' teorier stadig relevant, og kan være med til at give en bedre forståelse.

-Land som en ressource

Modellens ligninger

Vi tag vores elskede Cobb-Douglas og danner vores produktion funktion:

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{\beta} X^{\kappa} \ , \quad \alpha, \beta, \kappa > 0 \ , \alpha + \beta + \kappa = 1$$

Vi beholder Konstant Skalaafkast til K_t, L_t og X, men da $X = land$ er konstant over tid, vil der på lang sigt være DRS til K_t, L_t. Vi har droppet humankapital, det er muligt at inkluderer det, men hvis i troede at kap 6 udregninger var vilde så skulle i se dem her.
I kap 3 & 5, så havde vi det var primært n, som havde en effekt via udtyndingen, dermed førte os til vores stabile værdier i SS - da vi havde CRS til L_t og K_t. I kap 7 har vi nu også at DRS, samt udtydning som påvirker Solowmodellen.

Ligningerne til modellen er som vi kender dem:

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{\beta} X^{\kappa} \ , \quad \alpha, \beta, \kappa > 0 \ , \alpha + \beta + \kappa = 1$$
$$K_{t+1} = sY_t + (1-\delta)K_t$$
$$L_{t+1} = (1+n)L_t$$
$$A_{t+1} = (1+n)A_t$$

Vi har som sædvanligt at modellen konvergerer mod konstant vækstrater for y_t og k_t. Dog vil det vises sig at være lidt nemmere at analysere kapitaloutput forhold, som vi definerer: $z_t = k_t / y_t$. Intuitionen bag dette er vækstraten i SS vil ikke bare være lig g.

[4] Acemoglu and Johnson, 2007

Transitionsligningen

Vi kører som altid:

$$z_{t+1}=\frac{K_{t+1}}{Y_{t+1}}=\frac{K_{t+1}}{K_{t+1}^{\alpha}(A_{t+1}L_{t+1})^{\beta}X^{\kappa}}=\frac{K_{t+1}^{1-\alpha}}{(A_{t+1}L_{t+1})^{\beta}X^{\kappa}}\Leftrightarrow$$
$$z_{t+1}=\frac{(sY_t+(1-\delta)K_t)^{1-\alpha}}{\left((1+g)A_t(1+n)L_t\right)^{\beta}X^{\kappa}}=\frac{(s+(1-\delta)z_t)^{1-\alpha}}{\left((1+g)A_t(1+n)L_t\right)^{\beta}X^{\kappa}}Y_t^{1-\alpha}\Leftrightarrow$$
$$z_{t+1}=\frac{(s+(1-\delta)z_t)^{1-\alpha}}{\left((1+g)(1+n)\right)^{\beta}}\cdot\frac{Y^{1-\alpha}}{(A_tL_t)^{\beta}X^{\kappa}}\cdot\frac{K_t^{\alpha}}{K_t^{\alpha}}=\frac{(s+(1-\delta)z_t)^{1-\alpha}}{\left((1+g)(1+n)\right)^{\beta}}\cdot\frac{Y_tz_t^{\alpha}}{Y_t}\Leftrightarrow$$
$$z_{t+1}=\frac{1}{\left((1+g)(1+n)\right)^{\beta}}\cdot[s+(1-\delta)z_t]^{1-\alpha}\cdot z_t^{\alpha}=\frac{1}{\left((1+g)(1+n)\right)^{\beta}}\cdot[s+(1-\delta)z_t]^{1-\alpha}\cdot z_t^{\alpha}$$

Så har vi dannet transitionsligningen. Lad os kort dykke ned i vækstraten for y:

$$Pr.arbejder\ funktion:\ y_t=k_t^{\alpha}A_t^{\beta}\left(\frac{X}{L_t}\right)^{\kappa}=k_t^{\alpha}A_t^{\beta}x_t^{\kappa}$$

Nu tag vi så ln til funktionen og differens fra $t\ til\ t+1$:

$$\ln(y_{t+1})-\ln(y_t)=\alpha(\ln(k_{t+1})-\ln(k_t))+\beta(\ln(A_{t+1})-\ln(A_t))+\kappa(\ln(x_{t+1})-\ln(x_t))$$

Hvor i har at: $\ln(y_{t+1})-\ln(y_t)=g_t^y$, $\ln(k_{t+1})-\ln(k_t)=g_t^k$, $\ln(A_{t+1})-\ln(A_t)\approx g$,

$$\ln(x_{t+1})-\ln(x_t)=\ln(X)-\ln(L_{t+1})-(\ln(X)-\ln(L_t))=-(\ln(L_{t+1})-\ln(L_t))\approx -n$$

Vi indsætter så og får:

$$g_t^y\approx \alpha g_t^k+\beta g-\kappa n$$

Endvidere har vi at $z_t=k_t/y_t$ er jo konstant i SS, og derfor må det gælde at $g^y=g_t^y=g_t^k$. Vi skriver så:

$$g^y\approx\frac{\beta g}{1-\alpha}-\frac{\kappa n}{1-\alpha}$$

Vi kan her aflæse, hvad vi originalt snakkede om i introduktionen, at den teknologiske vækst kan opveje de negative effekter af befolkningsvæksten.

Nu skal vi tilbage til finde Steady State værdien for z. Vi gør som altid og udregner ud fra transitionsligningen.

$$z=\frac{1}{\left((1+g)(1+n)\right)^{\beta}}\cdot[s+(1-\delta)z]^{1-\alpha}\cdot z^{\alpha}$$
$$\Leftrightarrow 1=\frac{1}{\left((1+g)(1+n)\right)^{\beta}}\cdot[s+(1-\delta)z]^{1-\alpha}\cdot z^{\alpha-1}$$
$$\Leftrightarrow \left((1+g)(1+n)\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha}}=(s+(1-\delta)z)\cdot z^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha}=-1}$$
$$\Leftrightarrow \left((1+g)(1+n)\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha=\beta+\kappa}}=s\cdot z^{-1}+(1-\delta)$$
$$\Leftrightarrow \left((1+g)(1+n)\right)^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}}-(1-\delta)=s\cdot z^{-1}$$
$$\Leftrightarrow z^*=\frac{s}{\left((1+g)(1+n)\right)^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}}-(1-\delta)}$$

Vi får så SS-vækstien for BNP/arbejder:

$$Produktionsfunktion:$$
$$y_t=k_t^{\alpha}A_t^{\beta}x_t^{\kappa}=z_t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}A_t^{\frac{\beta}{1-\alpha}}x_t^{\frac{\kappa}{1-\alpha}}$$

Vi indsætter så vores z^* værdi, samt at $A_{t+1} = (1+g)A_t \wedge L_{t+1} = (1+n)L_t$ kan man skrive at:

$$y_t^* = (z^*)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_t^{\frac{\beta}{1-\alpha}} x_t^{\frac{\kappa}{1-\alpha}} = (z^*)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_0^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}} \left(\frac{X}{L_0}\right)^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa}} (1+g)^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}} (1+n)^{\frac{-\kappa}{\beta+\kappa}t}$$

Så har vi fundet Steady State for BNP/arbejder. Se Casper Slides ift. model forudsigelser og sådan nogen detaljer.

Olie som en ressource

Vi har lige gennemgået hvordan Solowmodellen ser ud, når vi har den her konstante ressource. Men, det super cool ved den her model, er at vi også kan undersøge en økonomi, hvor vi har en ressource som svinder ind, som f.eks. olie. Hertil opstiller modellens ligninger

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{\beta} E_t^{\varepsilon} \quad , \qquad \alpha, \beta, \varepsilon > 0 \wedge \alpha + \beta + \varepsilon = 1$$

Hvor vi har erstattet X, land, med $E_t = olie$. Det skal nævnes at modellen godt kan indebære både land og olie, overordnet set samme intuition, men lidt mere kompliceret - kan ses i bogen.

Vi har så modellens ligninger:

$$\begin{aligned} Y_t &= K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{\beta} E_t^{\varepsilon} \\ E_t &= s_R R_t \\ R_{t+1} &= R_t - E_t \\ K_{t+1} &= sY + (1-\delta)K_t \\ L_{t+1} &= (1+n)L_t \\ A_{t+1} &= (1+g)A_t \end{aligned}$$

Hvor vi har defineret R_t som værende den resterende mængde af olie, og s_E som den procent del af olie vi bruger i hver periode. Vi kan undersøge produktionen pr. arbejder ligesom i før ved at dividere med L_t, tage ln til udtrykket og så differens, for at finde vækstraten.

$$y_t = k_t^{\alpha} A_t^{\beta} \left(\frac{s_R R_t}{L_t}\right)^{\varepsilon}$$

$$\ln(y_{t+1}) - \ln(y_t) = g_t^y = \alpha(\ln(k_{t+1}) - \ln(k_t)) + \beta(\ln(A_{t+1}) - \ln(A_t)) + \varepsilon\left(\ln\left(\frac{s_E R_t}{L_t}\right)\right) \Rightarrow$$

$$g_t^y \approx \alpha g_t^k + \beta g + \varepsilon(-s_E - n) = \alpha g_t^k + \beta g - \varepsilon s_E - \varepsilon n$$

Vi har brugt at $g_t^R \approx s_E$. Ligesom fra før, har vi at i SS så er $g_t^y = g_t^k \Rightarrow$

$$g_t^y \approx \frac{\beta g}{1-\alpha} - \frac{\varepsilon s_E}{1-\alpha} - \frac{\varepsilon n}{1-\alpha}$$

Vi kan se at til forskel fra modellen med land, så har vi endnu et led, da R_t falder med raten s_E. Det betyder jo at på lang sigt, så større udtømningsrate, s_E, ⇒ mindre vækstrate i SS. Det kan på førstehåndsindtryk virker lidt paradoksalt, da man vil tro at mere olie som udvindes vil føre til større vækst - og dette sker også, men kun på kort sigt. På lang sigt, så vil en større udtømningsrate fører til et lavere SS. Dertil kan vi lave et kort tankeeksperiment. I denne model, har vi antaget at væksten i teknologi vil opveje vores evigt svindende ressource. Da vi benytter en andel, vil vi aldrig løbe tør, men er det en realistisk antagelse at vores teknologisk niveau vil blive så godt at vi f.eks. kunne få det samme ud af en dråbe olie som ved et lavere teknologisk niveau og ti milliard tønder? Nej, det er ikke realistisk, men husk at modellen også betinger al produktion på denne olie, hvilket hellere ikke er særligt realistisk. Grunden til at dette sker, er bl.a. pga. vi bruger Cobb-Douglas funktionen, som vores produktion funktion - hvilket indebærer en høj grad af substituerbarhed mellem teknologi og ressourcer. Jeg kan fortælle at hvis vi går over i andre produktionsfunktioner, som f.eks. CES-funktionen, så vil nogen af vores konklusioner ændre sig. Men, substituerbarhed kan godt forsvares, hvis der kun er en tønde olie tilbage i verden, så vil dens prise jo være uendelig stor - ergo incitamentet til at forske og udvikle alternative energikilder vil også stige.

Igen, husk at vi bruger modeller for at simplificerer virkeligheden, for at kunne forstå evt. brøkdele af forklaringer.
Kort, hvad med en model som bruger Klima i stedet for olie? Hvis vi betragtede klimaet som en tømmebar ressource, hvortil vi betinger produktionens funktionen på, så begynder vi jo at komme hen mod noget som ligner hvordan vores verden i dag ser ud. Hvis i vil vide lidt mere, så kig på de sidste 8 slides fra Caspers Forelæsning, kap 7.

Kapital 8 - Lille økonomi - Endogen Teknologisk Vækst

Nu vender lige tilbage til en model version som minder mere om kap 5, end 6 & 7. Indtil videre, er vi kommet frem til at BNP/arbejder i Steady State, vokser med g (teknologisk vækst) - svarende til at: $g^y = g^k = g$. Samtidigt har vi defineret g, som en parameter, en eksogen givet variabel som er fastlåst uden for modellen. Men i kap 8, får vi bragt den teknologiske vækst ind i modellens kausale struktur.
Vi kan kort starte med at beskrive hvad teknologisk vækst egentlig er. Da vi først introduceret A, i kap 5, sagde vi at det kan forstille sig at være \ til kombinationer af inputs, som medvirker til en højere produktion. Forstil jer at produktionen består af at flytte jord fra plot a til plot b, vi kan forstille os at en skovl vil være start niveauet af sådan teknologi. Skovlen skal nok hjælpe arbejdskraften med at udfører produktionen, men så forstil jer at vi har noget teknologisk vækst og vi får fat i en gravko. Så har vi tale om en noget mere "effektiv" arbejdskraft. Men hvor kommer denne viden, altså hvor skabes A_t?
Her i kap 8, så antag vi at: "Learning by Doing", dvs. at A_t bliver skabt som et biprodukt af produktionsprocessen. Denne antagelser er ikke helt uden siden historisk opbakning, f.eks. var den første industrielle revolution primært drevet praktikere og håndværkere, ikke forskere[5]. Ergo vi siger at viden kommer fra at arbejde med kapital:

$$A_t = K_t^{\phi}$$

Hvor ϕ angiver i hvor høj grad kapital påvirker viden. Det nævnes at antagelsen kan også ændres til at viden kommer fra større produktion: $A_t = Y_t^{\phi}$ eller igennem mere humankapital: $A_t = H_t^{\phi}$, og fører til de samme konklusioner som vores valgte metode. Da vi vælger kapital, så har vi altså antaget at alt viden er ikke rivaliserende og ikke ekskluderbar, da en overordnet stigning i aggregeret kapital, vil komme alle virksomheder til gode. Ergo, hvis en virksomhed øger deres kapital, vil alle andre virksomheder få en øget produktivitet, selvom deres kapital var fast. Dette siges at være en positiv eksternalitet.

Vi har så at modellens produktion funktioner bliver:

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha} = K_t^{\alpha+(1-\alpha)\phi} L_t^{1-\alpha}$$

I tidligere modeller, kap 3,5 og 6, har vi haft CRS på makro niveau - da vi antag perfekte markeder, har vi som sagt altid CRS på et mikroniveau. Men forstil os at K_t og L_t fordobler sig, nu har vi: $2^{\alpha+(1-\alpha)\varphi} > 2$, vi nu har Increasing Return to Scale (IRS).

Man kan undersøge w_t & r_t, som vi plejer ved at differentiere. Men man skal gøre det før man indsætter $A_t = K_t^{\phi}$, da på virksomheds niveau, så er A_t en eksternalitet som den ene virksomhed har marginal mulighed for at påvirke - ergo de tag den for givet og betaler kun for fysisk input faktorer.

Profit max:

$$w_t = (1-\alpha)K_t^{\alpha} L_t^{-\alpha} A_t^{1-\alpha}$$
$$r_t = \alpha K_t^{\alpha-1}(L_t A_t)^{1-\alpha}$$

Det betyder at, selvom vi har IRS på makroøkonomisk skala, så har vi CRS - og dermed bevarer FKK

[5] Kapitel 8, s.6, Casper Worm

- på et virksomhedsniveau. Før vi går i gang med at løse og analysere modellen, deler vi den lige op i to tilfælde: $\phi = 1$ og $\phi < 1$. Det vil vises sig senere hvorfor det er smart.

For $\phi = 1$, har vi at: $Y_t = K_t L_t^{1-\alpha}$, hvor vi har antaget at eksternaliteten, ϕ, er så kraftig at det er konstant MP i K_t (svarer til CRS til K_t). Vi kalder denne model for *endogenvækst*.

For $\phi < 1$, har vi at: $Y_t = K_t^{\alpha+(1-\alpha)\phi} L_t^{1-\alpha}$ og $\alpha + (1-\alpha)\phi < 1$. Svarende til en mindre kraftig eksternalitet, så der er AMP til K_t (DRS for K_t). Vi kalder denne for den *semi-endogen vækst*.

Endogenvækst model

Kort før vi går i gang, så tillader såkaldt AK-model (det er fordi det er en dum notation fra bogen), ikke befolkningsvækst. Det er fordi, hvis vi antag at $n > 0$, så for $\phi = 1$, vil vi opleve eksplosiv vækst, hvilket slet ikke stemmer overens med empirien, vi dropper derfor tidsindeks fra L. Den samlede model er:

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L\,)^{1-\alpha}$$
$$A_t = K_t$$
$$K_{t+1} = sY_t + (1-\delta)K_t$$
$$\Leftrightarrow$$
$$Y_t = K_t L^{1-\alpha} =, A = L^{1-\alpha}\ (Ik\ spørg\ mig\ hvorfor, = AK_t$$

Vi kan så udlede transitionslignen, Solow og vækstraten:

$$Transitions: K_{t+1} = sY_t + (1-\delta)K_t \Leftrightarrow k_{t+1} = k_t A k_t + (1-\delta)k_t \Leftrightarrow k_{t+1} = [sA + (1-\delta)]k_t$$
$$Solow: k_{t+1} - k_t = [sA + (1-\delta)]k_t - k_t = sAk_t - \delta k_t = sL^{1-\alpha}k_t - \delta k_t$$
$$Vækstrate: \frac{k_{t+1} - k_t}{k_t} = sA - \delta = sL^{1-\alpha} - \delta$$

Modellen fortæller os at et lands befolkningsstørrelse bestemmer dens vækstrate. Casper gennemgår no spænde tværlande empiri, se Kapitel 8 slide 18-22. Men groft sagt, så kan AK modellen ikke beskrive tværlande udviklingen over de sidste 100 år, men set på verdensplan stemmer den faktisk nogenlunde over ens indtil for 100 år siden og på meget langt sigt. Ergo, den har stadig sin nytte.

Semi-endogenvækst model

Godt, vi hopper videre til den anden halvdel af kapitel 8. Nu hvor vi antag at $\phi < 1$, så har vi ikke problemet fra første halvdel, hvor K_t ikke oplevede noget AMP. Da vi nu har AMP, kan vi nu igen lade L_t vokse over tid. Modellen er givet ved:

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha}$$
$$A_t = K_t^{\phi}, \phi < 1$$
$$K_{t+1} = sY_t + (1-\delta)K_t$$
$$L_{t+1} = (1+n)L_t$$

Ligesom i kap 5, vil vi gerne analysere modellen i "tilde" variablen, såkaldte pr. effektive arbejder, $\tilde{k}_t = K_t/(A_t L_t)$. Vi beholder ligeledes at produktionsfunktionen forbliver det samme: $\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^{\alpha}$. Vi udleder transitionsligningen, men på en lidt anden måde denne gang:

$$\tilde{k} = \frac{K_t}{A_t L_t} \quad , \frac{A_{t+1}}{A_t} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\phi} \quad , \frac{L_{t+1}}{L_t} = (1+n)$$

$$\frac{\tilde{k}_{t+1}}{\tilde{k}_t} = \frac{\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}}}{\frac{K_t}{A_t L_t}} = \frac{\frac{K_{t+1}}{K_t}}{\frac{A_{t+1}}{A_t}\frac{L_{t+1}}{L_t}} = \frac{\frac{K_{t+1}}{K_t}}{\left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\phi}\frac{L_{t+1}}{L_t}} = \frac{\left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{1-\phi}}{1+n} = \frac{1}{1+n}\cdot\left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{1-\phi} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\tilde{k}_{t+1}}{\tilde{k}_t} = \frac{1}{1+n}\cdot\left[\frac{sY_t + (1-\delta)K_t}{K_t}\right]^{1-\phi} = \frac{1}{1+n}\cdot\left[\frac{s\tilde{y}_t}{\tilde{k}_t} + (1-\delta)\right]^{1-\phi} \Leftrightarrow$$

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{1+n} \cdot \left[s\tilde{k}^{\alpha-1} + (1-\delta)\right]^{1-\phi} \quad \tilde{k}_t = \frac{1}{1+n} \cdot \left[s\tilde{k}_t^{\frac{\alpha+\phi-\alpha\phi}{1-\phi}} + (1-\delta)\tilde{k}_t^{\frac{1}{1-\phi}}\right]^{1-\phi}$$

Læg mærke til at hvis vi sætter $\phi = 0$, så vil have den præcis samme transitionsligning, som i kap 5 - altså uden produktiv eksternalitet. Før vi finder Steady State, så kører vi hurtigt gennem om den konverger mod et Globalt Stabilt SS:

1. Går den igennem origo (0,0)?
   a. Indsæt $\tilde{k}_t = 0$ og man får $\tilde{k}_{t+1} = 0$
2. Går $\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} > 0$
   a. Finder den:
   $$\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} = \frac{1}{1+n} \cdot \left[s\tilde{k}_t^{\frac{\alpha+\phi-\alpha\phi}{1-\phi}} + (1-\delta)\tilde{k}_t^{\frac{1}{1-\phi}}\right]^{-\phi} \cdot \left(s(\alpha+\phi-\alpha\phi)\tilde{k}_t^{\frac{\alpha-1-\alpha\phi-2\phi}{1-\phi}} + (1-\delta)\tilde{k}_t^{\frac{\phi}{1-\phi}}\right)$$
   For $n > 0$ og $\alpha, \phi < 1$ så har vi at den er positiv
3. Går $\lim_{k_t \to \infty} \frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} < 1$ og $\lim_{k_t \to 0} \frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} > 1$
   a. Taget fra Caspers slide ;D. Vi kan ikke umiddelbart let se hvordan det opfører sig for $\tilde{k}_t \to 0$ og $\tilde{k}_t \to \infty$. Men vi fra tidligere kan vi se $1 + \frac{\tilde{k}_{t+1}-\tilde{k}_t}{\tilde{k}_t} \to \frac{(1-\delta)^{1-\phi}}{1+n}, når\ \tilde{k}_t \to \infty$ og $1 + \frac{\tilde{k}_{t+1}-\tilde{k}_t}{\tilde{k}_t} \to \infty, når\ \tilde{k}_t \to 0$.

Lad os finde Steady State hurtigt:

$$\tilde{k} = \frac{1}{1+n} \cdot \tilde{k}\left[s\tilde{k}^{\alpha-1} + (1-\delta)\right]^{1-\phi} \Leftrightarrow 1 = \left(\frac{1}{1+n}\right)\left[s\tilde{k}^{\alpha-1} + (1-\delta)\right]^{1-\phi} \Leftrightarrow$$

$$(1+n)^{\frac{1}{1-\phi}} = s\tilde{k}^{\alpha-1} + (1-\delta) \Leftrightarrow (1+n)^{\frac{1}{1-\phi}} - (1-\delta) = s\tilde{k}^{\alpha-1} \Leftrightarrow$$

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{(1+n)^{\frac{1}{1-\phi}} - (1-\delta)}{s}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = \left(\frac{s}{(1+n)^{\frac{1}{1-\phi}} - (1-\delta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Som altid vil vi gerne undersøge BNP/arbejder, givet ved $y_t = \tilde{y}_t A_t \Rightarrow y_t^* = \tilde{y}^* A_t$. Nu hvor vi har at A_t vokser med en endogen vækstrate, skal vi finde den. Vi gør så at:

$$\frac{K_{t+1}}{K_t} = \left(\frac{A_{t+1}}{A_t}\right)^{\frac{1}{\phi}} \quad og \quad \frac{L_{t+1}}{L_t} = 1+n \quad , \frac{\tilde{k}_{t+1}}{\tilde{k}_t} = 1$$

$$\frac{\tilde{k}_{t+1}}{\tilde{k}_t} = \frac{\frac{K_{t+1}}{K_t}}{\frac{A_{t+1}}{A_t}\frac{L_{t+1}}{L_t}} = \frac{\left(\frac{A_{t+1}}{A_t}\right)^{\frac{1}{\phi}}}{\left(\frac{A_{t+1}}{A_t}\right)(1+n)} = \frac{1}{1+n}\left(\frac{A_{t+1}}{A_t}\right)^{\frac{1-\phi}{\phi}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{A_{t+1}}{A_t} = (1+n)^{\frac{\phi}{1-\phi}} \Leftrightarrow \frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} = (1+n)^{\frac{\phi}{1-\phi}} - 1 \equiv g_{se}$$

Hermed har vi så fundet vækstraten i SS for A_t, og som sagt da vi har $y_t^* = \tilde{y}^* A_t$, så er g_{se} også vækstraten i y_t^*. Det vil sige at til forskel fra den endogene model, hvor det var den højere befolknings niveau som resulterede i højere BNP/arbejder, grundet højere teknologi. Her i den semi-endogene model, er det befolkningsvæksten som fører til højere teknologi, og BNP/arbejder. Men når vi sammenligner med tværlande empirien, kan vi se at denne prædiktion ikke holder. Casper gennemgår noget data i sine slides, men overordnet set så kan denne model bedre bruges til at forstå hvordan teknologi har udviklet sig på verdens plan.

Kapital 9 - Lille økonomi - R&D baseret endogen vækst

I kapitel 9 arbejder vi med en lignede grund ide ift. den fra kapitel 8, men i stedet for at antage "learning by doing", hvori idéer var en biproduktion af produktionen af kapitel, bliver idéer nu produceret i sine egen sektor. Dette gør vi, ved at antage at en konstant andel af befolkningen arbejder med R&D. Til forskel fra kapitel 8, så fremskaffer vi bl.a. et politikinstrument, nemlig hvor stor en andel af befolkningen skal være i R&D sektoren. Mange af de konkrete resultater som skalaeffekter og vækst er det samme som i kapitel 8.

Vi beskriver denne konstant, og eksogen, andel af befolkningen som arbejder i R&D som s_R. Hvor vi så har at:

$$L_{A_t} = s_R L_t$$

Vi har implicit antaget at der er en eller anden form for patent-system, for at overkomme problemet om at hvis alle idéer/opfindelser er ikke-rivaliserende gode, så vil der være nul-profit og derfor intent incitament til at forske. Så det implicitte antaget patent system er til for at sikre vi har at $s_R > 0$; kunne også være den offentlige sektor som brugte penge på forskning f.eks.

Produktionen af ny teknologi defineres som:

$$A_{t+1} - A_t = \rho A_t^{\phi} L_{At}^{\lambda}$$

Vi har antaget at nye idéer "bygger" på gamle. f.eks. er det blevet markant nemmere at lave avanceret regressionsanalyse efter at man har opfundet computerens opfindelse; derfor $\Rightarrow \phi > 0$.
Men der er også konceptet om "Fishing Out", idet at det bliver sværere og sværere at opfinde nye ting, i det at de "nemme" idéer allerede er fundet; ergo: $0 < \phi < 1$.
λ repræsentere kort sagt hvor mange idéer der kommer ud af ny forskning. Så hvis $\lambda = 1$, så vil en forsker = x antal nye idéer. Men i det flere og større grupper af folk forsker, så er sandsynligheden for at to grupper evt. opfinder den samme idé større, såkaldt "Stepping on toes" effekt, hvilket leder effekten for at $\lambda < 1$. Ligesom i kapitel 8, vil vi analysere den endogene og semi-endogene model.

Endogene model

Når vi betragter den endogene model ($\phi = 1$), har vi nogen af den samme antagelser som i kapitel 8. Vi antag også at $n = 0$, og dropper tidsindekset. Vi antag ligeledes effekten af "Standing on shoulders" er så stærkt, at hvis vi havde $n > 0$, så ville vi opleve eksplosiv vækst. Vi sætter $\phi = 1$. Og har at:

$$\begin{aligned}
&Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_Y)^{1-\alpha} \\
&K_{t+1} = sY_t + (1-\delta)K_t \\
&A_{t+1} = \left(1 + \rho L_A^{\lambda}\right)A_t \\
&L_A = s_R L \\
&L_A + L_Y = L \Leftrightarrow L_Y = (1 - s_R)L
\end{aligned}$$

Ligesom kapitel 5 analyserer vi på præcis samme måde. Definerer tilde-variablerne, udleder transitionsligningen, vis konvergens og finder steady state. Eneste "forskel" er at vækstraten i teknologi nu er endogen og givet ved:

$$\begin{aligned}
&A_{t+1} = \left(1 + \rho L_A^{\lambda}\right)A_t \Leftrightarrow \\
&A_{t+1} - A_t = \rho L_A^{\lambda} A_t \Leftrightarrow \\
&\frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} = \rho L_A^{\lambda} \Leftrightarrow \\
&\frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} = \rho (s_R)^{\lambda} L^{\lambda} \equiv g_e
\end{aligned}$$

I SS er både $\tilde{k}^*$ og $\tilde{y}^*$ konstante, hvilket betyder at vækstbanen for BNP pr. arbejder er.

$$y_t^* = \tilde{y}^* \cdot A_t \quad , \quad A_t \; vokser \; med \; g_e = \rho(s_R)^\lambda L^\lambda$$

Politik der er øger BNP pr. arbejder på lang sigt er: 1) Politik der øger $\tilde{y}^*$: $s \Uparrow, \delta \Downarrow$ 2) Politik der øger vækstraten g_e: $s_R \Uparrow$, men $s_R \Uparrow \rightarrow \tilde{y}^* \Downarrow$. Grunden til at kapitel 9 modellen har denne prædiktion, er fordi væksten skabes af forskere i R&D sektoren, med jo flere der forskere desto mindre er der til at "produktions" arbejdet (arbejde med det fysiske kapital). Men begge modeller er enige om at større befolkningsniveau fører til en større vækstrate i y_t.

Semi-endogen vækst

Nu skal vi undersøge det såkaldte mere "realistiske" tilfælde hvor eksternaliteten ikke er kraftfuld nok til at overkomme vores førnævnte "Stepping on Toes" og "Fishing Out" effekter, hvilket resultere i at vi ændrer vores eksternalitet til $\phi < 1$. I dette tilfælde, kan vores model godt håndterer en befolkningsvækst som ikke er $n = 0$, da vi har aftagende marginalt produkt på videns akkumulationen. Modellens ligninger er så:

$$\begin{aligned}
&Y_t = K_t^\alpha \left(A_t L_{Y_t}\right)^{1-\alpha} \\
&K_{t+1} = sY_t + (1-\delta)K_t \\
&A_{t+1} - A_t = A_t^\phi \rho L_{A_T}^\lambda \,, \phi < 1 \\
&L_{A_t} = s_R L_t \\
&L_{A_t} + L_{Y_t} = L_t \Leftrightarrow L_{Y_t} = (1-s_R)L_t \\
&L_{t+1} = (1+n)L_t
\end{aligned}$$

Lad os undersøge transitionsligningen i den teknologiske vækst nærmere. Vi finder den teknologisk vækst til at være:

$$g_t = \frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} = \rho A_t^{\phi-1} L_{A_t}^\lambda$$

Vi benytter metoden fra kapitel 8, ift. til at finde transitionsligningen og skriver $t+1$ og dividere med t:

$$\frac{g_{t+1}}{g_t} = \frac{\rho A_{t+1}^{\phi-1} L_{A_{t+1}}^\lambda}{\rho A_t^{\phi-1} L_{A_t}^\lambda} = (1+g_t)^{\phi-1}\left(\frac{L_{A_{t+1}}}{L_{A_t}}\right)^\lambda$$

Indsætter $L_{A_t} = s_R L_t$, $\quad L_{A_{t+1}} = s_R L_{t+1}$ & $L_{t+1} = (1+n)L_t$:

$$\begin{aligned}
&\frac{g_{t+1}}{g_t} = (1+g_t)^{\phi-1}\left(\frac{s_R(1+n)L_t}{s_R L_t}\right)^\lambda = (1+g_t)^{\phi-1}(1+n)^\lambda \Leftrightarrow \\
&g_{t+1} = (1+g_t)^{\phi-1} g_t (1+n)^\lambda
\end{aligned}$$

Vi har dannet transitionsligningen for vækstraten i A_t. Bemærk, at produktionssiden har ingen indflydelse på den, ift. kapitel 8 hvor det var det samlede kapital som bestemte A_t. Vi undersøger om den opfylder INADA betingelserne:

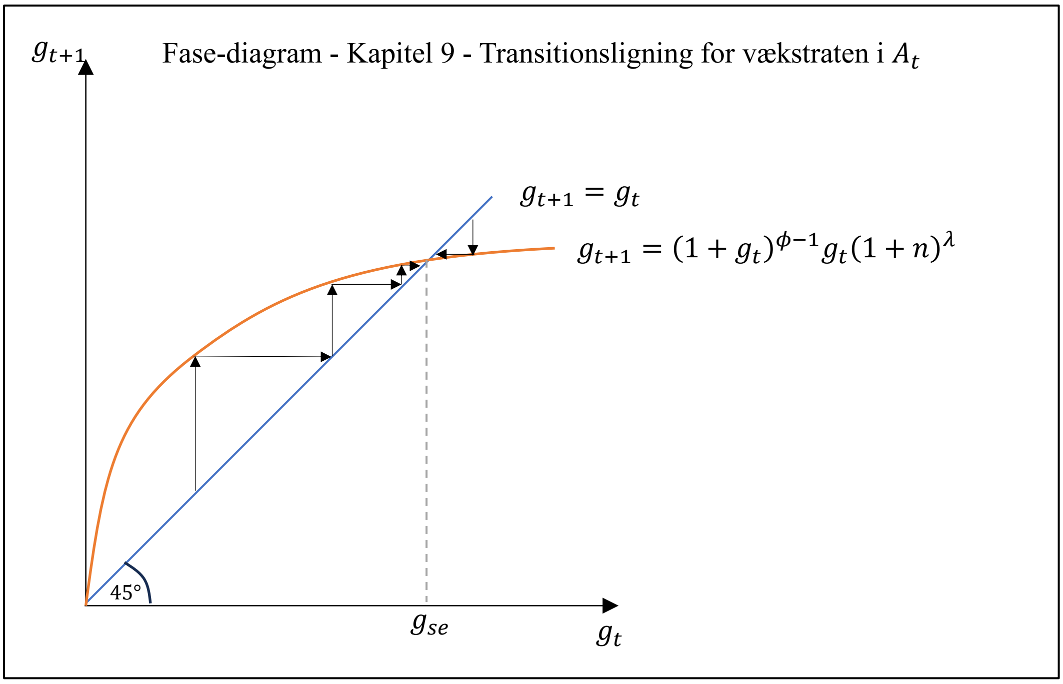
1) Går igennem Origo:
   a. $g_{t+1} = 0 \wedge g_t = 0 \Rightarrow 0 = (1+0)^{\phi-1} \cdot 0 \cdot (1+n)^\lambda = 0$
2) Første ordens afledte er positiv:
   a. $\frac{\partial g_{t+1}}{\partial g_t} = (1+n)^\lambda\left[(\phi-1)(1+g_t)^{\phi-2} g_t + (1+g_t)^{\phi-1}\right] > 0 \; for \; 0 < \phi < 1$
3) Er $\lim\limits_{g_t \to 0} \frac{\partial g_{t+1}}{\partial g_t} > 1$ og $\lim\limits_{g_t \to \infty} \frac{\partial g_{t+1}}{\partial g_t} < 1$
   a. I det at $g_t \rightarrow 0$, så vil $(\phi-1)(1+g_t)^{\phi-2} g_t = 0$ og der vil så stå: $(1+n)^\lambda \cdot 1 > 1$ for $n > 0$. For $g_t \rightarrow \infty$ så har vi at der vil stå:
   $g_t \rightarrow \infty \; så \; vil \;\; (1+n)^\lambda \frac{(\phi-1)(1+g_t)^\phi}{(1+g_t)^2} + \frac{(1+g_t)^\phi}{(1+g_t)}(1+n)^\lambda \rightarrow 0$, da $0 < \phi < 1$, og for $g_t \rightarrow \infty \,, g_t^1 > g_t^\phi$

Vi finder SS-værdi til at være:

$$g = (1+g)^{\phi-1}g(1+n)^{\lambda} \Leftrightarrow \frac{1}{(1+g)^{\phi-1}} = (1+n)^{\lambda} \Leftrightarrow (1+g)^{1-\phi} = (1+n)^{\lambda}$$

$$\Leftrightarrow 1 + g^{1-\phi} = (1+n)^{\lambda} \Leftrightarrow g_{se} = (1+n)^{\frac{\lambda}{1-\phi}} - 1, for\ n > 0$$

Vi kan for god ordensskyld smide det ind i et fase-diagram og tjek trappeiteration:



Det betyder, at for $n > 0$, er der altid konvergens mod et konstant, positivt niveau for vækstraten i teknologi. Hvis $n = 0$, så $g_{se} = 0$, da nulvækst i befolkningen nul vækst i teknologi i SS - skyldes at $\phi < 1$, da grundet ”fishing out” effekten er så stærk at efterhånden bliver det sværere og sværere at opfinde nye teknologi, og vækstraten går mod 0. Det siger så også at ved en given stigning i n, vil vi konvergere mod et nyt og højere vækstrate - skyldes at højere befolkningsvækst resultere i mere vækst i input af forskere hvilket medfører større vækst i idéer.

Lad os så finde vores SS-værdier for K og Y, hvilket gøres som sædvanligt. Beholder vores definitioner af $\tilde{k} = \frac{K_t}{A_tL_t}$ og $Y_t = \frac{Y_t}{A_tL_T}$. Vi får så at: $\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^{\alpha}(1-s_R)^{1-\alpha}$. Starter med $\tilde{k}_{t+1}$:

$$\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}} = \frac{K_t + sY_t - \delta K_t}{(1+g_t)A_t(1+n)L_t} = \frac{1}{(1+n)(1+g_t)}\left[s\tilde{y}_t + (1-\delta)\tilde{k}_t\right] \Leftrightarrow$$

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+g_t)(1+n)}\left[s\tilde{k}_t^{\alpha}(1-s_R)^{1-\alpha} + (1-\delta)\tilde{k}_t\right]$$

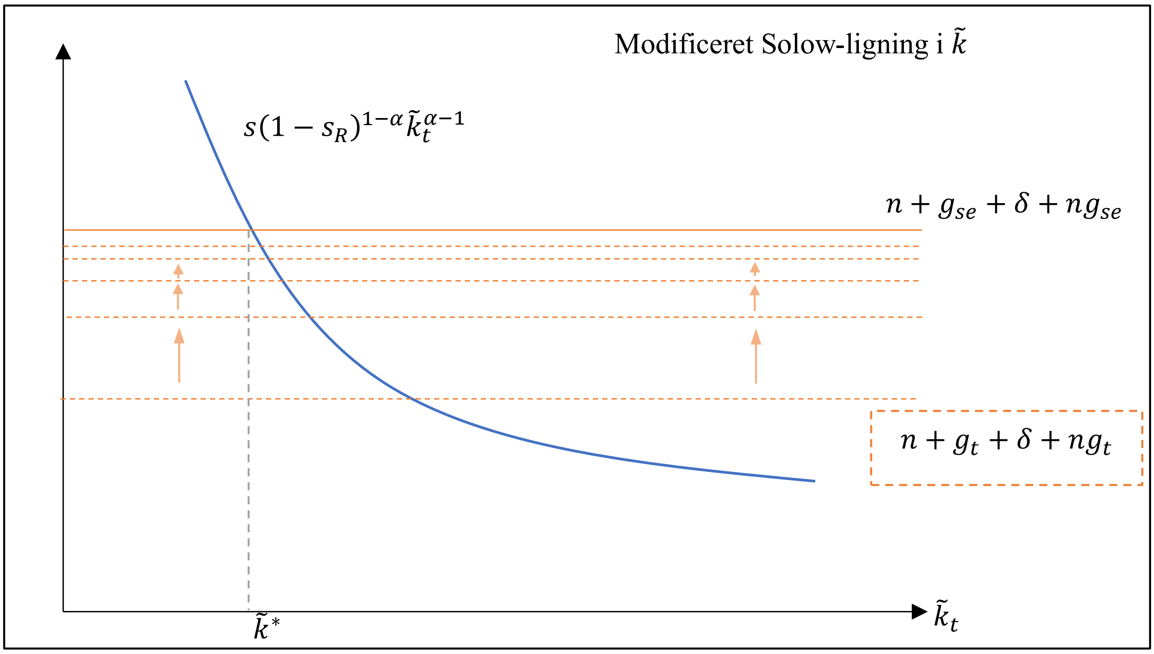
$$\tilde{k}^* = \left(\frac{s}{n+g_t+\delta+ng_t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}(1-s_R)$$

Så har vi udledt transitionsligningen og SS, men den kan være utrolig besværlige at illustrere, da vi jo har at g_t bevæger sig hele tiden. Så lad os i stedet for illustrere den modificeret Solow-ligning:

$$\frac{\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t}{\tilde{k}_t} = \frac{1}{(1+g_t)(1+n)}\left[s(1-s_R)^{1-\alpha}\tilde{k}_t^{\alpha-1} - (n+g_t+\delta+n\cdot g_t)\right]$$

Illustrationen på side viser hvordan at i det g_t konvergerer mod g_{se}, vil $n + g_t + \delta + ng_t$ linjen bevæge sig op ad, indtil den er i sin SS. Derudover kan vi også se at for et hvert $\tilde{k}_0 > 0$, vil der være konvergens mod SS hvor $\tilde{k}_t = \tilde{k}^*$. Desuden så vil der i SS gælde at:

$$\tilde{y}_t = \tilde{y}^* = (1-s_R)^{1-\alpha}\left(\tilde{k}^*\right)^{\alpha}$$



Lad os kort løbe igennem effekter af parameter ændringer. 1) Som sædvanligt vil s ⇑ og δ ⇓ øge $\tilde{k}^*$ og dermed $\tilde{y}^*$ - da hverken af disse parametre har en effekt på A_t så BNP pr. arbejder ($y_t^* = A_t\tilde{y}^*$) også stige. 2) n ⇑ vil øge g_{se} og dermed A_t ⇑, hvilket medfører at vækstraten, g^{y_t}, også stiger. Lad os undersøge en stigning i s_R. Til det bliver vi nødt til at fremskaffe en ligning hvor y_t^* kun er bestående af parameter. Det gøres som følgende:

Start med definitionen af g_t som en funktion af A_t: $g_t = \rho A_t^{\phi-1}L_{A_t}^{\lambda}$, indsæt: $g_t = g_{se}$ og $L_{A_t} = s_R L_t$

$$g_{se} = \rho A_t^{\phi-1}s_R^{\lambda}L_t^{\lambda} \Leftrightarrow A_t = \left(\frac{\rho}{g_{se}}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}} L_t^{\frac{\lambda}{1-\phi}}, \qquad L_t = (1+n)^t L_0\,,$$

$$A_t = \left(\frac{\rho}{g_{se}}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}}((1+n)^t L_0\,)^{\frac{\lambda}{1-\phi}}, \qquad g_{se} = (1+n)^{\frac{\lambda}{1-\phi}} - 1 \Leftrightarrow (1+n) = (1+g_{se})^{\frac{1-\phi}{\lambda}}$$

$$A_t = \left(\left(\frac{\rho}{g_{se}}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}} \left(\left((1+g_{se})^{\frac{1-\phi}{\lambda}}\right)^t L_0\,\right)^{\frac{\lambda}{1-\phi}}\right) = \left(\frac{\rho}{g_{se}}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}} (L_0\,)^{\frac{\lambda}{1-\phi}} (1+g_{se})^t$$

Indsæt i $y_t^* = \tilde{y}^* A_t$, hvor $\tilde{y}^* = \left(\frac{s}{n+g_{se}+\delta+ng_{se}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(1-s_R)$

$$y_t^* = \left(\frac{s}{n+g_{se}+\delta+ng_{se}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(1-s_R)\times\left(\frac{\rho}{g_{se}}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}} (L_0\,)^{\frac{\lambda}{1-\phi}} (1+g_{se})^t$$

Nu kan vi så se effekterne af en stigning i s_R: 1) Gennem $(1-s_R)$ har vi en negativ effekt, vil intuitivt forklares igennem de færre arbejder i produktion sektoren. 2) Men gennem $s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}}$ har vi en positiv effekt, hvilket intuitivt forklares da flere arbejder i R&D er med til at øge det teknologiske niveau. Derudover kan vi observere at L_0, eller initialniveauet af befolkningen (arbejdsstyrken) har en betydning. Et højere befolkningsniveau vil resultere i højere niveau for y_t^*. Lad os kort kigge på de to modeller og deres prædiktioner. For den endogene vækst, så prædiktere skalaeffekterne at jo flere forskere, desto større vækst i BNP pr. arbejder. Dette er dog ikke foreneligt med tværlande empirien, da f.eks. USA har ikke haft markant højere vækst end Danmark. Men hvad hvis man sammenligner på et globalt niveau? I de sidste 100 år har vi oplevet en kraftig stigende i verdens befolkningstal og en stigning i andelen som arbejder i forskningssektoren. Men vi har ikke oplevet accelererende teknologisk vækst som den endogene model prædikterer. Den semiendogene model passer hellere ikke med tværlande empirien. På et globalt niveau har vi set mulighed for at de to kan passe sammen. Men problemet der er at væksten i befolkningen og s_R formentlig ikke bliver ved ude i fremtiden.

Simulering af modeller

Nå man skal simulere en model, så bruger vi primært Excel. Det er ret kortfattet hvad man skal gøre, man får oplyst nogen givne parameter værdier osv. og så indsætter du dem i Excel. Det vigtigste er at man holder øje med celle-referencer og sådan noget. I kan godt ende i en situation hvori i skal udlede f.eks. en funktion for Y_t uden nogen start værdi for Y_t, i det tilfælde skal i forsøge at indsætte og isolerer Y, til en situation hvor ligningen kun består af værdier som i har fået oplyst. Det vil kræve nogen regning ift. potenser, men det kræver bare nogen øvelse.
Jeg har lagt et eksempel på en omskrivning fra Januar 2023, hvor man får opgivet værdier for alle parameterende, K_0 og L_0 ind. Her er hvordan man så danner en ligning for Y_t:

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha} \Leftrightarrow Y_t = K_t^{\alpha}\left(a(\tau Y_t)^{\phi}\right)^{1-\alpha} L_t{}^{1-\alpha}$$

$$\Leftrightarrow Y_t^1 = K_t^{\alpha} a^{1-\alpha} \tau^{(1-\alpha)\phi} Y_t^{\phi(1-\alpha)}\, L_t \Leftrightarrow Y_t^{1-\phi(1-\alpha)} = K_t^{\alpha} a^{1-\alpha} \tau^{(1-\alpha)\phi} L_t^{1-\alpha}$$

$$\Leftrightarrow Y_t^{1-\phi(1-\alpha)} = K_t^{\alpha} a^{1-\alpha} \tau^{(1-\alpha)\phi} L_t^{1-\alpha} \Leftrightarrow Y_t = \left(K_t^{\alpha} a^{1-\alpha} \tau^{(1-\alpha)\phi} L_t^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\phi(1-\alpha)}} \Leftrightarrow$$

$$Y_t = K_t^{\frac{\alpha}{1-\phi(1-\alpha)}} a^{\frac{1-\alpha}{1-\phi(1-\alpha)}} \tau^{\frac{(1-\alpha)\phi}{1-\phi(1-\alpha)}} L_t^{\frac{1-\alpha}{(1-\phi(1-\alpha))}}$$

Så handler det om at få den skrevet ind i Excel.

Generelle Værktøjer til eksamen

Dannelse af transitionsligning - Eksponent regneregler

1. Tag din transitionsligning. F.eks.: $K_{t+1} = S + (1-\delta)K_t$
2. Indsæt ligningerne fra modellen. F.eks.: $K_{t+1} = sK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} + (1-\delta)K_t$
3. Omregn indtil du har en differensligning. $k_{t+1} = \frac{1}{1+n}[sk_t^{\alpha} + (1-\delta)k_t]$
4. Den er fundet. For at finde Solow-ligning, træk $_t$ fra på begge sider:
5. For at finde modificeret Solow-ligning, dividere begge sider med $_t$ for at få vækstraten

$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$	$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$	$x^{1+\frac{a}{b}} = x^{\frac{b}{b}+\frac{a}{b}}$
$x^{a+b} = x^a \cdot x^b$	$x^{a-1} = \frac{1}{a^{1-a}}$	

Kriterier for Konvergens mod Steady State

Konvergens mod Globalt Steady State, kræver de såkaldte INADA-betingelser.

1. Går igennem origo
2. Hældningen er positiv: $\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} > 0$
3. Når $\lim_{k_t \to 0} \frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} > 1 \land \lim_{k_t \to \infty} \frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} < 1$

   Hvis ja til alle tre $\Rightarrow$ *Global stabil SS*

Hvordan man tegner et fasediagram

Man har basically to muligheder. Man kan huske at næsten alle transitionsligninger, som har konvergens, er en konkav funktion som opfylder INADA betingelserne. Hvis man har god til eksamen, og i teorien har fået udleveret noget data eller parameter værdier, kunne man også tegne den i Excel. Hvis de viser konvergens mod et globalt stabilt SS (hvilket de alle burde give i en eksamen situation) så har de jo alle den samme-ish look.

Hvordan analyserer man et fasediagram

Undersøg INADA. Hvis der er konvergens, så lav en trappeitteration for at vise at hvor enhver værdi vil man gå mod SS. Undersøge første- og anden ordens afledte.

Hvordan besvarer de sidste spørgsmål - Meget abstrakt

De sidst spørgsmål plejer kraftig at fokusere på generel forståelse. Enten i form at der f.eks. forslås en grundlæggende ændring til produktionsfunktionen. Rettevejledningerne viser nogen gange sådan 2-3 siders omregninger osv. Hvis man har tid og overskud, så kan det jo ikke skade at forsøge sig an med dem. Men husk, at man virkelig kan komme langt med at forsøge at skrive om hvad man ville gøre eller hvad man tænker det er. Til en hvis grad, hvis du kan overbevise censor, at hvis du havde haft en time eller to til, så ville du no problem havde løst det hele, så er du allerede næsten i mål.

Legende

Oversigt over diverse begreber osv. Beskrivelser er groft simplificeret.

Begreb	Matematik	Beskrivelse	Relevante Modeller	Link
Eksogen		Bestemt uden for modellen	Alle	
Endogen		Bestemmes i modellen	Alle	
Sticky Prices		Idéen om at priser og løn tag tid at ændre		----
Konvergens		En "værdi" som der bevæges hen imod, på de fleste variabler		----
Marginal Produkt	MP			
Constant Return to Scale	CRS	Ingen Aftagende Marginal Produkt.		----
Decreasing Return to Scale	DRS	Aftagende Marginal Produkt		
Increasing Return to Scale	IRS	Stigende Marginal Produkt		
Aftagende Marginal Produkt	AMP	Langsomt så vil effekten falde, f.eks. effekten af en arbejder til på et pizzeria vil falde efter *n* arbejdere.	Alle	
Forbrug	C			
Investeringer	I			
Kapital	K			
Reelle Løn	w			
Real Lejesats	r	Den såkaldte pris på et stk. kapital.		
Nedslidningsrate	δ	Efter hver periode, så vil ting som maskiner osv. nedslides og på et tidspunkt erstattes. Dette udtrykkes gennem nedslidningsrate, som også håndterer inflation		
Reelle Renten	$\rho = r - \delta$	Renten efter der tages højde for nedslidningen. *Bruges til andet*		
Net Debitor	$\bar{K}_t^i < K_t^o$	Kapitalen ejet af indlandet er mindre udenlandsk kapital investeret indland ⇔ Skylder penge til udlandet		
Net Kreditor	$\bar{K}_t^i > K_t^o$	Udlandet skylder Indlandet penge.		
Arbejdskraft	L	Hvor mange arbejder er der. Oftest udtrykket som en del af befolkningen		
Produktionen	Y	Det samlede produkt af al produktionen i økonomien.		
Total Faktor Produktiviteten	B	Hvor produktive er økonomien til at udnytte dens input		
Samlede Opsparing	S			
Opsparings rate	s	Procentdelen af produktionen som opspares		
Steady State (SS)	*	En værdi som endogene variabler konvergerer mod i Solow-modeller		
Substitutionselasticitet		Kort fortalt: F.eks. hvor mange procent mere kapital skal der til for at erstatte et procent mindre arbejdskraft.		

Human Kapital	H	Evner knyttet til den enkelte arbejder, f.eks. IQ, helbred, erfaring osv.
Kapital-Output	z	
Teknologisk Niveau	A	Betinger at totalfaktor produktiviteten er bestemt af det teknologiske niveau, udtrykkes sådan
Vækstrater	g	
Konvergenshastighed	λ	Hvor stor en andel af gap til SS-værdi, der lukkes hver periode
Origo	(0,0)	Start punktet på koordinatsystemet
Risikopræmie	ρ	

Steady State Værdier:

Kapitel 3	$\boldsymbol{k^* = B^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{s}{\delta+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$	$\boldsymbol{y^* = B^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{s}{\delta+n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$
Kapitel 4	$k^*: antages\ altid\ at\ være\ i\ SS$	$y^* = B^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$
Kapitel 5	$\tilde{k}^* = \left(\frac{s}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$	$\tilde{y}^* = \left(\tilde{k}^*\right)^{\alpha} = \left(\frac{s}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$
Kapitel 6	$\tilde{k}^* = \left(\frac{s_H^{\varphi} s_K^{1-\varphi}}{n+g+ng+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\varphi-\alpha}}$	$\tilde{h}^* = \left(\frac{s_K^{\alpha} s_H^{1-\alpha}}{n+g+ng+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\varphi-\alpha}}$
	$\tilde{y}^* = \left(\frac{s_K}{n+g+ng+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}}\left(\frac{s_H}{n+g+ng+\delta}\right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}}$	
Kapital 7	$z^* = \frac{s}{\left((1+g)(1+n)\right)^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}} - (1-\delta)}$	$y_t^* = (z^*)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_0^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}}\left(\frac{X}{L_0}\right)^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa}}(1+g)^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}}(1+n)^{\frac{-\kappa}{\beta+\kappa}t}$
Kapital 8	$\tilde{k}^* = \left(\frac{s}{(1+n)^{\frac{1}{1-\phi}} - (1-\delta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$	$\tilde{y}^* = \left(\frac{s}{(1+n)^{\frac{1}{1-\phi}} - (1-\delta)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$
Kapitel 9	$\tilde{k}^* = \left(\frac{s}{n+g_t+\delta+ng_t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}(1-s_R)$	$\tilde{y}^* = \left(\frac{s}{n+g_{se}+\delta+ng_{se}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(1-s_R)$
	$g_{se} = (1+n)^{\frac{\lambda}{1-\phi}} - 1$	
	$y_t^* = \left(\frac{s}{n+g_{se}+\delta+ng_{se}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(1-s_R) \times \left(\frac{\rho}{g_{se}}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}}(L_0)^{\frac{\lambda}{1-\phi}}(1+g_{se})^t$	