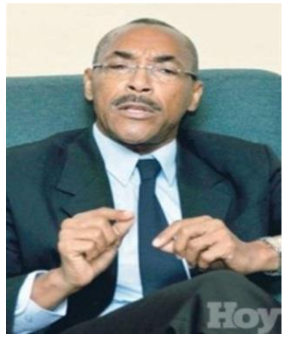
Dr. Manuel de Jesús Linares Jiménez



Obras Completas

Tomo 112

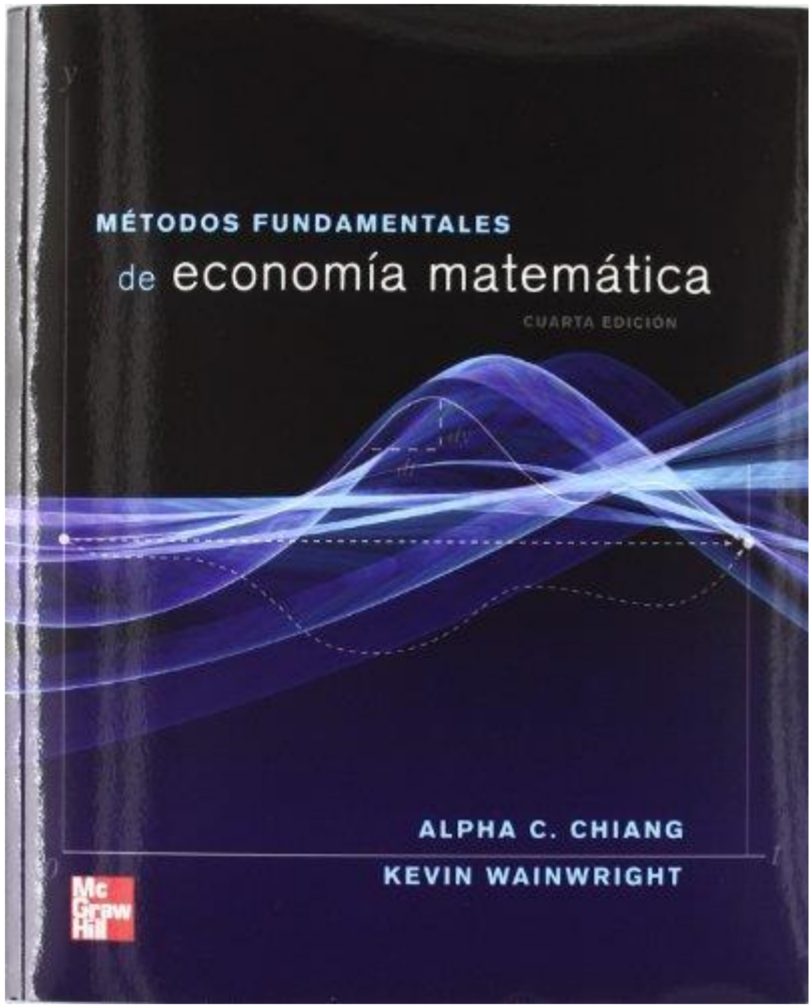
***Estudiando el libro Métodos fundamentales de economía matemática de Alpha Chiang*. Cuarto Volumen. Investigación publicada en el mes de abril del año 2024.**

ESTUDIANDO EL LIBRO MÉTODOS FUNDAMENTALES DE ECONOMÍA MATEMÁTICA DE ALPHA CHIANG Y KEVIN WAINWRIGHT. (VOLUMEN IV)

Autor: Dr. Manuel Linares
profesormanuellinares@gmail.com
829-637-9303

Preparación y difusión edición digital: abril 2024.

Métodos fundamentales de economía matemática de Alpha Chiang. (Volumen IV).



Dedico con particular afecto el volumen IV de mis estudios del magnífico libro “MÉTODOS FUNDAMENTALES DE ECONOMÍA MATEMÁTICA” DE ALPHA CHIANG Y KEVIN WAINWRIGHT, a Fredy Domínguez, el mejor estudiante de nuestra promoción, licenciatura en economía UASD.

ÍNDICE

LA POLITIQUERÍA Y EL CLIENTELISMO SON ENEMIGOS DE LA CIENCIA Y EL PROGRESO ACADÉMICO. LA UASD TIENE QUE EXTIRPAR ESTAS LACRAS DE SU SENO.

PREFACIO AL TOMO 112

El pasado 3 de julio 2023 hicimos de público conocimiento la instalación de nuestras obras completas en una página WEB, libre de la propiedad privada, donde los lectores y lectoras pueden accesar, sin costo alguno, a cualquier libro de nuestra autoría, simplemente colocando en Google la expresión: obras completas del doctor Manuel de Jesús Linares.

En ese momento indicábamos que nuestras obras completas quedaban integradas por 109 tomos. Pero resulta que varios proyectos de investigación, que habíamos emprendido hace unos años, comenzaron a cuajar precisamente en el año 2023. Los nuevos libros, por consiguiente, vienen cayendo por ramilletes.

Justamente, estamos dando la bienvenida al tomo 112, de nuestras obras completas, relacionado con el estudio del libro *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Alpha C. Chiang y Kevin Wainwright. Específicamente, en este volumen IV, estamos resolviendo algunos problemas contenidos en los ejercicios 7.4, 7.5, 8.1, 8.2, 8.3, 8.4 y 8.5, del libro citado.

Reiteramos que esta publicación simplemente la hacemos como una prueba de que continuamos formándonos como economista, como un alumno ordinario, pura y simplemente.

Las personas que accedan a esta publicación, sin costo alguno, se lo agradeceremos; pero es mucho mejor que adquieran el libro de Chiang y Wainwright, y lo estudien como lo hago yo. Aparte de que las soluciones de los ejercicios, que exponemos aquí, podrían contener errores.

Deseo, igualmente, aprovechar este prefacio para externar algunas consideraciones sobre la situación que hoy caracteriza a la universidad pública, es decir, a la Universidad Autónoma de Santo Domingo (UASD).

La UASD evidentemente se encuentra empantanada. No puede progresar en el plano científico, gracias al predominio, en su seno, de la politiquería y el clientelismo.

Si un académico o una académica deseara ocupar un cargo en el tren académico uasdiano, tiene ineludiblemente que contar con el respaldo de grupos partidistas que nada tienen que ver con la ciencia.

No importa que ese académico o académica se encuentre dotado de las mejores características científicas. Éstas no valen nada. La politiquería y el clientelismo son los que deciden.

Los profesores que se destacan en el estudio y la investigación, son objetos de burlas, calumnias y mentiras. Los acusan de las peores barbaridades.

Incluso, si ese profesor o profesora combate con firmeza la politiquería y el clientelismo, es víctima de descuentos antojadizos en el sueldo o en la pensión, violándole sus derechos constitucionales.

El debate de las ideas ha sido sustituido por la calumnia y el ataque propiamente personal. La degeneración de la UASD se manifiesta en todos los terrenos. El sistema de elección de las autoridades universitarias, concentra con mayor relevancia la degeneración de la institución.

El paso de la universidad autocrática a la universidad liberal, inicialmente fue una solución. Sin embargo, con el correr de los años y con el desarrollo del capitalismo dominicano, tal solución devino en politiquería y clientelismo. Los procesos electorales de la UASD no son más que una caricatura siniestra de los procesos electorales que se verifican en la República Dominicana y en toda la sociedad burguesa liberal mundial.

En tales sociedades lo que vemos en los procesos electorales es el uso de la nómina administrativa, asesinatos de ciudadanos, fraudes, uso ilegal de los recursos públicos, etc., etc. Parte de esto, de hecho, impacta el proceso de elección de nuestras autoridades universitarias, pues usamos la misma plataforma burguesa liberal de elección: campañas electorales, ofrecer cargos a miembros de partidos políticos, ampliar la nómina administrativa a costa de la investigación y de la mejoría del personal docente, etc.

Ahora estamos advirtiendo una nueva faceta en el proceso de deterioro de la UASD. ¿En qué consiste? Consiste en una mudez total frente a cuestiones fundamentales que afectan tanto a la sociedad local, como a la sociedad del resto del mundo.

Si frente a nuestros propios ojos se desarrollan procesos conectados con el racismo, el militarismo y el fascismo, y nos hacemos los desentendidos, entonces de hecho los estamos respaldando. Ya esto no tiene parangón en la historia de la UASD.

Dr. Manuel de Jesús Linares Jiménez,
Profesor Titular jubilado y Ex-Presidente del Consejo Superior de Doctores de la UASD (2019-2022)

17/4/2024

7.4

EJERCICIO 7.4

Los problemas que debemos resolver en el ejercicio 7.4, están referidos a la diferenciación parcial.

Alpha Chiang y Kevin Wainwright, en el libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, página 166, dicen: *"La diferenciación parcial difiere de la diferenciación descrita antes, sobre todo, en que se deben mantener constantes (n-1) variables independientes mientras se permite que cambie una variable…"* (Comillas, cursiva y el punto suspensivo son nuestros). Comencemos:

1. Encuentre $\partial y/\partial x_1$ y $\partial y/\partial x_2$ para cada una de las siguientes funciones:

a) $y= 2x_1^3-11x_1^2x_2+3x_2^2$

Mi respuesta:

Alpha Chiang y Kevin Wainwright, en el libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, página 166, nos indican que cuando vamos a utilizar la técnica de la derivada parcial y tenemos un término como $11x_1^2x_2$, y cuando derivamos respecto a la primera variable, la segunda, como estaría constante, se conserva e igualmente cuando derivamos respecto a la segunda variable, la primera, como estaría constante, se conserva; no así cuando la constante desempeña un rol aditivo, la misma quedaría eliminada, por tanto, en el caso de a) $y= 2x_1^3-11x_1^2x_2+3x_2^2$, tendríamos:

$\partial y/\partial x_1= 6x_1^2-22x_1x_2+0$

$= 6x_1^2-22x_1x_2$. Primera respuesta.

$\partial y/\partial x_2= 0-11x_1^2+6x_2$

$= -11x_1^2+6x_2$. Segunda Respuesta.

b) $y= 7x_1+6x_1x_2^2-9x_2^3$

Mi respuesta:

$\partial y/\partial x_1= 7+6x_2^2-0$

$= 7+6x_2^2$. Primera respuesta.

$\partial y/\partial x_2= 0+12x_1x_2-27x_2^2$

$= 12x_1x_2-27x_2^2$. Segunda respuesta.

c) $y= (2x_1+3)(x_2-2)$

Mi respuesta:

Aquí tenemos la derivada parcial del producto de dos funciones; sobre este particular Alpha Chiang y Kevin Wainwright, en el libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, página 155, dicen que la regla del producto, en sentido general, *"...es igual a la primera función por la derivada parcial de la segunda función más la segunda función por la derivada de la primera función..."* (Comillas, cursiva y puntos suspensivos son nuestros). Procedamos:

$\partial y/\partial x_1= (2x_1+3)(0)+(x_2-2)(2+0)$

$= 0+ 2x_2-4$

$= 2x_2-4$. Primera respuesta.

$\partial y/\partial x_2= (2x_1+3)(1-0)+(x_2-2)(0+0)$

$= 2x_1+3+0$

$= 2x_1+3$. Segunda respuesta.

d) $y= (5x_1+3)/(x_2-2)$

Mi respuesta:

Aquí tenemos la derivada parcial del cociente de dos funciones; sobre este particular Alpha Chiang y Kevin Wainwright, en el libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, página 158, nos dicen *que la regla del cociente de dos funciones, en sentido general, es igual a la derivada de la función que se encuentra en el numerador por la función que se encuentra en el denominador, menos la función que se encuentra en el numerador por la derivada de la función que se encuentra en el denominador, dividido por la función que se encuentra en el denominador al cuadrado*. (Comillas y cursiva son nuestras). Procedamos:

d) $y= (5x_1+3)/(x_2-2)$

$\partial y/\partial x_1= [(5+0)(x_2-2)-(5x_1+3)(0)]/(x_2-2)^2$

$= [5(x_2-2)-0])/(x_2-2)^2$

$= 5(x_2-2)/(x_2-2)^2$; después de simplificar, queda:

$= 5/(x_2-2)$. Primera respuesta.

$\partial y/\partial x_2= [0(x_2-2)-(5x_1+3)(1)]/(x_2-2)^2$

$= [0-(5x_1+3)]/(x_2-2)^2$

$= (-5x_1-3)/(x_2-2)^2$. Segunda respuesta.

2. Determine f_x y f_y a partir de las siguientes funciones:

a) $f(x, y)= x^2+5xy-y^3$

Mi respuesta:

$f_x= 2x+5y-0$

$= 2x+5y$. Primera respuesta.

$f_y= 0+5x-3y^2$

$= 5x-3y^2$. Segunda respuesta.

b) $f(x,y)= (x^2-3y)(x-2)$

Mi respuesta:

Aquí tenemos la derivada parcial del producto de dos funciones; sobre este particular Alpha Chiang y Kevin Wainwright, en el libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, página 155, dicen que la regla del producto, en sentido general, *"…es igual a la primera función por la derivada parcial de la segunda función más la segunda función por la derivada de la primera función…"* (Comillas, cursiva y puntos suspensivos son nuestros). Procedamos:

b) $f(x,y)= (x^2-3y)(x-2)$

$f_x= (x^2-3y)(1-0)+(x-2)(2x-0)$

$= x^2-3y+2x^2-4x$

$= 3x^2-4x-3y$. Primera respuesta.

$f_y= (x^2-3y)(0)+(x-2)(-3)$

= 0-3x+6

= 6-3x. Segunda respuesta.

c) f(x,y)= (2x-3y)/(x+y)

Mi respuesta:

Para este tipo de función, recordemos la orientación de Alpha Chiang y Kevin Wainwright, en el libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, página 158, nos dicen que la regla del cociente de dos funciones, en sentido general, *es igual a la derivada de la función que se encuentra en el numerador por la función que se encuentra en el denominador, menos la función que se encuentra en el numerador por la derivada de la función que se encuentra en el denominador, dividido por la función que se encuentra en el denominador al cuadrado*. (Comillas y cursiva son nuestras). Procedamos:

c) f(x,y)= (2x-3y)/(x+y)

f_x= [(2-0)(x+y)-(2x-3y)(1+0)]/$(x+y)^2$

= [(2x+2y)-(2x-3y)]/$(x+y)^2$

= (2x+2y-2x+3y)/$(x+y)^2$

= 5y/$(x+y)^2$. Primera respuesta.

f_y= [(0-3)(x+y)-(2x-3y)(0+1)]/$(x+y)^2$

= [(-3x-3y)-(2x-3y)]/$(x+y)^2$

= (-3x-3y-2x+3y)/$(x+y)^2$

= (-5x/$(x+y)^2$. Segunda respuesta.

d) f (x, y)= (x^2-1)/xy

Para este tipo de función, nuevamente debemos recordar la orientación de Alpha Chiang y Kevin Wainwright, en el libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, página 158, nos dicen que la regla del cociente de dos funciones, en sentido general, *es igual a la derivada de la función que se encuentra en el numerador por la función que se encuentra en el denominador, menos la función que se encuentra en el numerador por la derivada de la función que se encuentra en el denominador*, *dividido por la función que se encuentra en el denominador al cuadrado*. (Comillas y cursiva son nuestras). Procedamos:

Mis respuestas:

d) $f(x, y)= (x^2-1)/xy$

$f_x= [(2x-0)(xy)-(y)(x^2-1)]/(xy)^2$

$= (2x^2y-x^2y+y)/(xy)^2$

$= (x^2y+y)/(xy)^2$. Primera respuesta.

$f_y= [(0-0)(xy)-(x^2-1)(x)]/(xy)^2$

$= (0-x^3+x)/(xy)^2$

$= (x-x^3)/(xy)^2$. Segunda respuesta.

3. De las respuestas al problema 2, determine f_x (1,2), el valor de la derivada parcial f_x, cuando x= 1 y y= 2, para cada función.

Mis respuestas:

$f_x= 2x+5y$

$f_x= 2(1)+5(2)= 2+10= 12.$

$f_x=3x^2-4x-3y$

$f_x=3(1)^2-4(1)-3(2)= 3-4-6= -7$

$f_x= 5y/(x+y)^2=$

$f_x= 5(2)/(1+2)^2= 10/9.$

$(x^2y+y)/(xy)^2$

$f_x= [(1)^2(2)+2]/[(1)(2)]^2= 4/4= 1$

4. Dada la función de producción $Q= 96K^{0.3}L^{0.7}$**,** encuentre las funciones MPP_K y MPP_L. ¿MPP_K es una función de K solamente, o de K y L? ¿Qué se puede decir acerca de MPP_L?

Mis respuestas:

Para resolver el problema (4) es conveniente que primero acudamos a la página 167 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática* de Chiang y Wainwright: *"Consideremos una función de producción Q= Q(K, L), donde Q, K y L denotan producción, aportación de capital y de mano de obra, respectivamente. Esta función es una versión* *particular de dos variables de (7.12), con n= 2. Por tanto, podemos definir dos derivadas parciales ∂Q/∂K (o bien, Q_K) y ∂Q/∂L (o Q_L). La derivada parcial Q_K se relaciona con la razón de cambio de la producción respecto a cambios infinitesimales de capital, mientras se mantiene constante la mano de obra. Por consiguiente, Q_K simboliza la función de producto físico marginal de capital (MPP_K). De manera similar, la derivada parcial Q_L es la representación matemática de la función MPP_L".* (Comillas y cursiva son nuestras).

Comprendida esa orientación, procedemos:

$MPP_K = \partial Q/\partial K = (96)(0.3)K^{0.3-1}L^{0.7} = 28.8K^{-0.7}L^{0.7}$. Primera respuesta.

$MPP_L = \partial Q/\partial L = (96)(0.7)K^{0.3}L^{0.7-1} = 67.2K^{0.3}L^{-0.3}$. Segunda respuesta.

¿MPP_K es una función de K solamente, o de K y L? Evidentemente es una función de K y L.

¿Qué se puede decir acerca de MPP_L? Que igualmente es una función de K y L.

5. Si la función de utilidad de un individuo toma la forma $U = U(x_1, x_2) = (x_1+2)^2(x_2+3)^3$. Donde U es la utilidad total, y x_1 y x_2 son las cantidades de dos artículos consumidos.

a) Halle la función de utilidad marginal de cada uno de los dos artículos.

Mis respuestas:

$U = U(x_1, x_2) = (x_1+2)^2(x_2+3)^3$

$Ux_1 = (x_1+2)^2(0)+(x_2+3)^3 2(x_1+2)$

$= 2(x_1+2)(x_2+3)^3$. Primera respuesta.

$Ux_2 = (x_1+2)^2 3(x_2+3)^2+(x_2+3)^3(0)$

$= 3(x_1+2)^2(x_2+3)^2$. Segunda respuesta.

b) Encuentre el valor de la utilidad marginal del primer artículo cuando se han consumido tres unidades de cada artículo.

Mi respuesta:

$Ux_1 = 2(x_1+2)(x_2+3)^3$

$Ux_1 = 2(3+2)(3+3)^3$

$Ux_1 = 2(5)(6)^3$

$Ux_1 = 10(216) = 2,160$

6. La oferta de dinero total M tiene dos componentes: depósitos bancarios D y tenencias de efectivo C, que se supone que exhiben una relación constante C/D= c, 0<c<1. El dinero de alto poder expansivo o base monetaria H se define como la suma de tenencias de efectivo que mantiene el público y las reservas que tienen los bancos. Las reservas de los bancos son una fracción de depósitos bancarios, determinados por el coeficiente de reservas r, 0<r<1.

a) Exprese la oferta de dinero M como una función de la base monetaria H.

b) ¿Un incremento en la relación de reservas r aumenta o disminuye la oferta de dinero?

c) ¿Cómo afectaría un incremento en el cociente de efectivo sobre depósito c a la oferta monetaria?

Mis respuestas:

Trabajemos la respuesta a):

M= f(H), es decir, la oferta monetaria es una función de la base monetaria H.

H= f(C+ reservas que tienen los bancos), por consiguiente, H se ve influida por la relación constante que surge de C/D= c y también se ve influida por el coeficiente de reservas r.

Y como la oferta monetaria (M) es una función del dinero de alto poder expansivo (H), se verá igualmente influida por c y r.

Trabajemos la respuesta b):

Naturalmente, la incrementa debido a que r si bien es menor que 1, es mayor que 0, es decir, es una fracción positiva.

Trabajemos la respuesta c):

Es obvio que también aumentaría la oferta monetaria, puesto que c, si bien es menor que 1, es mayor que cero, es decir, es una fracción positiva.

7. Escriba los gradientes de las funciones siguientes:

a) f(x, y, z)= $x^2+y^3+z^4$

b) f(x, y, z)= xyz

Mis respuestas:

El libro que estamos estudiando, Métodos fundamentales de economía matemática, de la autoría de Chiang y Wainwright, en la página 168, dice: *"Las derivadas parciales de una función y= (x_1, x_2,…x_n) se pueden reunir bajo una sola entidad matemática llamada… gradiente de la función f: grad f(x_1, x_2,…x_n)= (f_1, f_2,… f_n)"* (Comillas y parte de la cursiva son nuestras).

En la página 169, el libro indica que f_i representa la derivada parcial que debemos extraer a la función que nos han planteado. Procedamos:

Respuesta a):

Gradiente f(x, y, z)= (∂f/∂x, ∂f/∂y, ∂f/∂z)= 2x+0+0, 0+3y^2+0, 0+0+4z^3= (2x, 3y^2, 4z^3)

Respuesta b):

Gradiente f(xyz)= (∂f/∂x, ∂f/∂y, ∂f/∂z)= (x)(0)+(yz)(1)= 0+yz= yz

Gradiente f(xyz)= (∂f/∂x, ∂f/∂y, ∂f/∂z)= (y)(0)+xz(1)= xz

Gradiente f(xyz)= (∂f/∂x, ∂f/∂y, ∂f/∂z)=z(0)+xy(1)= xy.

Por tanto,

= (yz, xz, xy).

7.5

EJERCICIO 7.5

1. Examine las propiedades estáticas comparativas de la cantidad de equilibrio de (7.15) y compruebe los resultados mediante análisis gráfico.

Mi respuesta:

En ese punto 1, nos piden, en primer lugar, que examinemos las propiedades estáticas comparativas de la cantidad de equilibrio de (7.15).

La indicación (7.15) se encuentra en la página 170 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de Alpha Chiang y Kevin Wainwright, la cual se expresa de este modo:

Q*= (ad-bc)/(b+d).

Para cumplir con la primera parte del punto 1, simplemente lo que tenemos que hacer es orientarnos con las instrucciones que se encuentran en el párrafo cuarto de la página 170, pero refiriéndolas al caso no de P*, sino de Q*. Adaptemos las instrucciones del citado párrafo a nuestro objeto:

Si deseamos *"…determinar cómo afectará al valor de [Q*]* –dicen Alpha Chiang y Kevin Wainwright en la página 170- *un cambio infinitesimal [es decir, un cambio extremadamente pequeño] en uno de los parámetros, solo se tiene que diferenciar parcialmente la ecuación [7.15] respecto a cada uno de los parámetros. Si se puede determinar el signo de una derivada parcial, por ejemplo, [∂Q*/∂a], a partir de la información dada acerca de los parámetros, se sabrá la dirección en la cual se moverá [Q*] cuando cambia el parámetro a; esto constituye una conclusión cualitativa. Si se puede determinar la magnitud de [∂Q*/∂a], esto constituirá una conclusión cuantitativa"*. (Comillas, cursiva y corchetes son nuestros).

Procedamos de inmediato:

Q*= (ad-bc)/(b+d)

Es obvio que tendremos que aplicar la técnica de la derivación parcial a una función, que dada su estructura matemática, tendremos que tomar en consideración la regla del cociente, Para este tipo de función, recordemos la orientación de Alpha Chiang y Kevin Wainwright, en el libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, página 158, nos dicen que la regla del cociente de dos funciones, en sentido general, es igual a la derivada de la función que se encuentra en el numerador por la función que se encuentra en el denominador, menos la función que se encuentra en el numerador por la derivada de la función que se encuentra en el denominador, dividido por la función que se encuentra en el denominador al cuadrado.

$Q^*= (ad-bc)/(b+d)$

$\partial Q^*/\partial a= [(d)(b+d)-(ad-bc)(0)]/(b+d)^2= d(b+d)/(b+d)^2= [d/b+d]>0;$

$\partial Q^*/\partial b= [(0-c)(b+d)-(ad-bc)(1+0)]/(b+d)^2= (-bc-cd-ad+bc)/(b+d)^2=$
$(-cd-ad)/(b+d)^2= -d(a+c)/(b+d)^2< 0;$

$\partial Q^*/\partial c= [(0-b)(b+d)-(ad-bc)(0)]/(b+d)^2= (-b)(b+d)/(b+d)^2= -b/(b+d)< 0;$

$\partial Q^*/\partial d= [(a-0)(b+d)-(ad-bc)(0+1)]/(b+d)^2= (ab+ad-ad+bc)/(b+d)^2= (ab+bc)/(b+d)^2= b(a+c)/(b+d)^2>0$

Puesto que todos los parámetros están restringidos a ser positivos en el modelo actual, se concluye que:

$\partial Q^*/\partial a= \partial Q^*/\partial d > 0$

$\partial Q^*/\partial b= \partial Q^*/\partial c < 0$

2. Con base en (7.18), halle las derivadas parciales $\partial Y^*/\partial I_0$, $\partial Y^*/\partial \alpha$ y $\partial Y^*/\partial \beta$. Interprete el significado de cada una y determine sus signos.

Mi respuesta:

Lo primero que debemos hacer es presentar la expresión (7.18), que se encuentra en la página 173 del libro que estamos estudiando, es decir, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Alpha Chiang y Kevin Wainwright. Hela aquí:

$\partial Y^*= (\alpha-\beta\gamma+I_0+G_0)/(1-\beta+\beta\delta)$

Es obvio que tendremos que aplicar la técnica de la derivación parcial a una función, que dada su estructura matemática, tendremos que tomar en consideración la regla del cociente, Para este tipo de función, recordemos la orientación de Alpha Chiang y Kevin Wainwright, en el libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, página 158, nos dicen que la regla del cociente de dos funciones, en sentido general, es igual a la derivada de la función que se encuentra en el numerador por la función que se encuentra en el denominador, menos la función que se encuentra en el numerador por la derivada de la función que se encuentra en el denominador, dividido por la función que se encuentra en el denominador al cuadrado.

Procedamos:

$\partial Y^*= (\alpha-\beta\gamma+I_0+G_0)/(1-\beta+\beta\delta)$

$\partial Y^*/\partial I_0= [(1)(1-\beta+\beta\delta)-(\alpha-\beta\gamma+I_0+G_0)(0)]/(1-\beta+\beta\delta)^2= (1-\beta+\beta\delta)-(0)/(1-\beta+\beta\delta)^2= (1-\beta+\beta\delta)/(1-\beta+\beta\delta)^2= 1/(1-\beta+\beta\delta)>0.$

Ahora calcularemos, con base en (7.18), $\partial Y^*/\partial\alpha$.

$\partial Y^*= (\alpha-\beta\gamma+I_0+G_0)/(1-\beta+\beta\delta)$

Es obvio que tendremos que aplicar la técnica de la derivación parcial a una función, que dada su estructura matemática, tendremos que tomar en consideración la regla del cociente, Para este tipo de función, recordemos la orientación de Alpha Chiang y Kevin Wainwright, en el libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, página 158, nos dicen que la regla del cociente de dos funciones, en sentido general, es igual a la derivada de la función que se encuentra en el numerador por la función que se encuentra en el denominador, menos la función que se encuentra en el numerador por la derivada de la función que se encuentra en el denominador, dividido por la función que se encuentra en el denominador al cuadrado.

$\partial Y^*/\partial\alpha= [(1)(1-\beta+\beta\delta)-(\alpha-\beta\gamma+I_0+G_0)(0)]/(1-\beta+\beta\delta)^2= (1-\beta+\beta\delta)-(0)/(1-\beta+\beta\delta)^2= (1-\beta+\beta\delta)/(1-\beta+\beta\delta)^2= 1/(1-\beta+\beta\delta)>0.$

Ahora calcularemos, con base en (7.18), $\partial Y^*/\partial\beta$.

$\partial Y^*= (\alpha-\beta\gamma+I_0+G_0)/(1-\beta+\beta\delta)$

Es obvio que tendremos que aplicar la técnica de la derivación parcial a una función, que dada su estructura matemática, tendremos que tomar en consideración la regla del cociente, Para este tipo de función, recordemos la orientación de Alpha Chiang y Kevin Wainwright, en el libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, página 158, nos dicen que la regla del cociente de dos funciones, en sentido general, es igual a la derivada de la función que se encuentra en el numerador por la función que se encuentra en el denominador, menos la función que se encuentra en el numerador por la derivada de la función que se encuentra en el denominador, dividido por la función que se encuentra en el denominador al cuadrado.

Procedamos:

$\partial Y^*= (\alpha-\beta\gamma+I_0+G_0)/(1-\beta+\beta\delta)$

$\partial Y^*/\partial\beta= [(0-\gamma+0+0)(1-\beta+\beta\delta)-(\alpha-\beta\gamma+I_0+G_0)(0-1+\delta)]/(1-\beta+\beta\delta)^2= [-\gamma(1-\beta+\beta\delta)-(\alpha-\beta\gamma+I_0+G_0)(-1+\delta)]/(1-\beta+\beta\delta)^2= -\gamma-(\alpha-\beta\gamma+I_0+G_0)(-1+\delta)/(1-\beta+\beta\delta)>0.$

Pasemos, ahora, a interpretar el significado de cada una de estas derivadas parciales: $\partial Y^*/\partial I_0$, $\partial Y^*/\partial\alpha$ y $\partial Y^*/\partial\beta$.

$\partial Y^*/\partial I_0= 1/(1-\beta+\beta\delta)>0$, esta derivada parcial proporciona el multiplicador del gasto de inversión, que tiene un significado positivo debido a que β es mayor que 0, aunque menor que 1, es decir, es una fracción positiva. Así mismo, δ es mayor que 0, aunque menor que 1, es decir, es una fracción positiva. Todo esto hace que el denominador, $(1-\beta+\beta\delta)$, arroje un valor positivo, que combinado con un numerador, claramente positivo, den lugar a un cociente positivo. Y como I_0 representa la inversión, su reducción provocaría, la disminución del ingreso de equilibrio, mientras que su aumento, daría lugar a un incremento del ingreso de equilibrio.

$\partial Y^*/\partial\alpha= 1/(1-\beta+\beta\delta)>0$, esta derivada parcial proporciona el multiplicador del consumo, que tiene un significado positivo debido a que β es mayor que 0, aunque menor que 1, es decir, es una fracción positiva. Así mismo, δ es mayor que 0, aunque menor que 1, es decir, es una fracción positiva. Todo esto hace que el denominador, $(1-\beta+\beta\delta)$, arroje un valor positivo, que combinado con un numerador, claramente positivo, den lugar a un cociente positivo. De modo, que un incremento de α, la cual se relaciona con el consumo, provocaría un aumento en el ingreso de equilibrio; igualmente, una reducción de α, provocaría una disminución en el ingreso de equilibrio.

$\partial Y^*/\partial\beta= -\gamma-(\alpha-\beta\gamma+I_0+G_0)(-1+\delta)/(1-\beta+\beta\delta)>0$, esta derivada parcial proporciona un resultado positivo, debido a que el denominador es positivo y el numerador también resulta positivo, ya que entre sus términos, los que tienen signos positivos, sin duda, en la realidad representan una mayor cuantía. Por tanto, un aumento en la propensión marginal al consumo, representado por β, produce un aumento en el ingreso de equilibrio; e igualmente una reducción de la propensión marginal al consumo, reduce el ingreso de equilibrio.

8.1

Ejercicio 8.1

Un juicio crítico

Indiscutiblemente el capítulo 8 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Alpha Chiang y Kevin Wainwright, reviste una importancia singular, debido a que el concepto de derivada parcial, visto en el capítulo 7, a nuestro entender posee una limitación. ¿Cuál? Que cuando nos enfrentamos a una función que tiene varias variables independientes, una vez se le aplica la derivada parcial, hay que enarbolar el supuesto referido a la ausencia de nexos entre dichas variables independientes. Si hubiese alguna relación de dependencia entre estas variables independientes, no se puede aplicar la derivación parcial. He aquí una limitación muy seria de dicha técnica.

Sin embargo, Chiang y Wainwright, nos traen las buenas nuevas relativas al uso de la diferenciación total para eludir la dificultad a la que se enfrenta la derivación parcial. En la página 179 dicen: *"¿Cómo* –preguntan nuestros autores- *enfrentamos esta situación?"* Responden: *"La respuesta es que debemos recurrir a la diferenciación total (en oposición a la diferenciación parcial). Con base en el concepto de diferenciales totales, el proceso de diferenciación total puede conducir al concepto relacionado de derivada total, lo cual significa la tasa de cambio de una función tal como $C(Y^*, T_0)$ respecto al argumento T_0, cuando T_0 afecta también al otro argumento, Y^*..."* (Comillas, cursiva y el punto suspensivo son nuestros).

Iniciemos la solución de algunos ejercicios:

1. Determine la diferencial dy, dada:

a) $y= -x(x^2+3)$

Mi respuesta:

$y= -x^3-3x$

$dy/dx= -3x^2-3$

$dy/dx= -3(x^2+1)$

$dy= -3(x^2+1)dx$. Respuesta.

b) $y= (x-8)(7x+5)$

Mi respuesta:

dy/dx= (x-8)(7)+(7x+5)(1)

= (7x-56)+(7x+5)

= 7x-56+7x+5

= 14x-51

dy= (14x-51)dx. Respuesta.

c) y= x/(x^2+1)

Mi respuesta:

dy/dx= [(1)(x^2+1) -(x)(2x+0)]/$(x^2+1)^2$

= [(x^2+1) -(2x^2)]/$(x^2+1)^2$

= [(x^2+1-2x^2)]/$(x^2+1)^2$

dy= [(1-x^2)/$(x^2+1)^2$]dx. Respuesta.

2. Dada la función de importación M= f(Y), donde M es importaciones y Y es ingreso nacional, exprese la elasticidad del ingreso de importaciones εMY en términos de las propensiones a importar.

Mi respuesta:

εMY= (dM/dY)/M/Y= función marginal/función promedio.

3. Dada la función de consumo C= a+bY (con a>0); 0<b<1;
a) Encuentre su función marginal y su función promedio.
b) Halle la elasticidad del ingreso de consumo εCY, y determine su signo, suponiendo que Y>0.
c) Demuestre que esta función de consumo es inelástica en todos los niveles de ingreso positivo.

Mi respuesta:

a) Función marginal

dC/dY= 0+b= b

Función promedio:

C/Y= (a+bY)/Y

b) Elasticidad del ingreso de consumo εCY

εCY= función marginal/función promedio

= (b)/[(a+bY)/Y]

= bY/a+bY>0, puesto que a>0 y 0<b<1, e igualmente Y>0

4. Encuentre la elasticidad puntual de demanda, dada Q= k/P^n, donde k y n son constantes positivas.

a) En este caso, ¿la elasticidad depende del precio?

Mi respuesta:

En primer lugar, debemos tener en cuenta la regla del cociente para derivar la función Q= k/P^n, la cual indica que derivamos la expresión que se encuentra en el numerador y su resultado es multiplicado por la expresión que se encuentra en el denominador, menos la expresión del numerador por la derivada de la expresión del denominador, todo esto dividido por la expresión del denominador elevada al cuadrado.

En segundo lugar, la fórmula para calcular la elasticidad puntual de demanda, se encuentra en la página 181 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de Alpha Chiang y Kevin Wainwright:

ε_d= (dQ/Q)/(dP/P)= (dQ/dP)/(Q/P)

Encontramos dQ/dP aplicando la regla del cociente:

$dQ/dP= 0(P^n)-k(nP^{n-1})/(P^n)^2= 0-k(nP^{n-1})/(P^n)^2=$

$= -k(nP^{n-1})/(P^n)^2$

Ahora encontraremos Q/P:

$Q/P= k/P^n/P$

Por tanto:

ε_d= (dQ/Q)/(dP/P)= (dQ/dP)/(Q/P)

$\varepsilon_d= [-k(nP^{n-1})/(P^n)^2]/k/P^n/P$. Respuesta.

En cuanto a la interrogante, la respuesta es afirmativa debido a que se ve claro en la ecuación de arriba que la única variable que hay en su seno es el precio (P), las demás son constantes, en consecuencia, la elasticidad depende del precio.

6. Dada Q= 100-2P+0.02Y, donde Q es la cantidad demandada, P es el precio y Y el ingreso, y dada P= 20 y Y= 5,000, determine:

a) La elasticidad de demanda en los precios.

b) La elasticidad de demanda en el ingreso.

Mi respuesta a):

Es conveniente que nos guiemos por los ejemplos que desarrolla el libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de Alpha Chiang y Kevin Wainwright, en la página 182.

Calculamos la función marginal de la demanda:

dQ/dP= (0-2+0)= -2

Calculamos la función promedio de la demanda:

Q/P= (100-2P+0.02Y)/P

Calculamos la relación entre las dos funciones arriba calculadas, sustituyendo a P y Y por sus valores:

ε_d= -2/(100-2P+0.02Y)/P

ε_d= -2/(100-2(20)+0.02(5,000)/20

ε_d= -2/(100-40+100/20= -2/8= -0.25. Respuesta.

Mi respuesta b):

Q= 100-2P+0.02Y

Calculamos la función marginal de la demanda:

dQ/dY= 0-0+0.02= 0.02

Calculamos la función promedio de la demanda:

Q/Y= (100-2P+0.02Y)/Y

Calculamos la relación entre las dos funciones arriba calculadas, sustituyendo a P y Y por sus valores::

ε_d= 0.02/(100-2P+0.02Y)/Y

ε_d= 0.02/(100-2(20)+0.02(5,000)/5000

ε_d= 0.02/(100-40+100/5000)= 0.02/0.032= 0.625. Respuesta.

La respuesta b) indica que el bien en cuestión es normal, pues el coeficiente dio positivo, pero al ser menor que 1, el bien no es de lujo.

LA UASD NO HABLA, PERO TAMPOCO ESCRIBE SOBRE LOS GRANDES PROBLEMAS QUE ACOSAN AL PUEBLO DOMINICANO. LA POLITIQUERÍA Y EL CLIENTELISMO MUTILARON SU LENGUA Y SUS MANOS. ¡QUÉ HORROR!

8.2

Ejercicio 8.2

2. Encuentre la diferencial total, dada:

a) $z= 3x^2+xy-2y^3$

b) $U= 2x_1+9x_1x_2+x_2^2$

Mi respuesta a):

$\partial Z/\partial X= Z_x= [6x+(x)(0)+(y)(1)-0]$

$= [6x+y]dx$

$\partial Z/\partial Y= Z_y= [0+(x)(1)+(y)(0)-6y^2]$

$= [x-6y^2]dy$

Por tanto, tendremos:

$[6x+y]dx+[x-6y^2]dy$. Respuesta.

Mi respuesta b):

$U= 2x_1+9x_1x_2+x_2^2$

$\partial U/\partial X_1= 2+9X_2+0$

$= [2+9X_2]dx_1$

$\partial U/\partial X_2= 0+9x_1+2x_2$

$= [9x_1+2x_2]dx_2$

Por tanto, tendremos:

$[2+9X_2]dx_1+[9x_1+2x_2]dx_2$. Respuesta.

3. Determine la diferencial total, dada:

a) $y= x_1/(x_1+x_2)$

Mi respuesta:

Aquí debemos aplicar la regla del cociente, que es igual a la derivada de la función que se encuentra en el numerador por la función del denominador, menos la función del numerador por la derivada del denominador, dividido por la función del denominador al cuadrado.

a) $y= x_1/(x_1+x_2)$

$\partial y/\partial x_1= [1(x_1+x_2)-x_1(1+0)]/(x_1+x_2)^2$

$\partial y/\partial x_1= [x_1+x_2-x_1]/(x_1+x_2)^2$

$\partial y/\partial x_1= [x_2/(x_1+x_2)^2]dx_1$

$\partial y/\partial x_2= 0(x_1+x_2)-(x_1)(0+1)/(x_1+x_2)^2$

$\partial y/\partial x_2= -x_1/(x_1+x_2)^2$

$\partial y/\partial x_2= [-x_1/(x_1+x_2)^2]dx_2$

Por tanto, tendremos:

$dy= [x_2/(x_1+x_2)^2]dx_{1+}[-x_1/(x_1+x_2)^2]dx_2=$

$[x_2/(x_1+x_2)^2]dx_{1-}[x_1/(x_1+x_2)^2]dx_{2.}$ Respuesta.

b) $y= 2x_1x_2/x_1+x_2$

Mi respuesta:

También aquí debemos aplicar la regla del cociente, que es igual a la derivada de la función que se encuentra en el numerador por la función del denominador, menos la función del numerador por la derivada del denominador, dividido por la función del denominador al cuadrado. Por otra parte, en la función que se encuentra en el numerador, para diferenciarla debemos aplicar la regla del producto que en la página 155, del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright, es descripta así: *"La derivada del producto de dos funciones es igual a la primera función por la derivada de la segunda función más la segunda función por la derivada de la primera función".* (Comillas y cursiva son nuestras). Procedamos:

$\partial y/\partial x_1= (2x_2)(x_1+x_2)-(2x_1x_2)(1+0)/(x_1+x_2)^2$

$\partial y/\partial x_1= (2x_2)(x_1+x_2)-2x_1x_2)/(x_1+x_2)^2$

$\partial y/\partial x_1= (2x_1x_2+2x^2{}_2-2x_1x_2)/(x_1+x_2)^2$

$dy= [2x^2{}_2/(x_1+x_2)^2]dx_1$

b) $y= 2x_1x_2/x_1+x_2$

$\partial y/\partial x_2= (2x_1)(x_1+x_2)-(2x_1x_2)(0+1)/(x_1+x_2)^2$

$\partial y/\partial x_2= (2x_1)(x_1+x_2)-2x_1x_2)/(x_1+x_2)^2$

$\partial y/\partial x_2= [2x_1x_2+2x^2{}_1-2x_1x_2]/(x_1+x_2)^2$

$dy= [2x^2{}_1/(x_1+x_2)^2]dx_2$. Respuesta.

4. La función de oferta de cierto artículo es:

$Q= a+bP^2+R^{1/2}$ $(a<0, b>0)$ [R: lluvia]

Determine la elasticidad de la oferta con relación a los precios ε_{QP}, y la elasticidad de la oferta con relación a la lluvia ε_{QR}.

Mi primera respuesta:

Acudiré a la elasticidad puntual de la oferta, calculando primero la elasticidad parcial de Q con respecto a P, suponiendo que R se mantiene constante; ésta sería la función marginal. Luego procedo a calcular la función promedio de la oferta, dividiendo a Q entre P. Procedamos:

$\partial Q/\partial P= 0+2bP^{2-1}+0= 2bP$. Función marginal.

$Q/P= [a+bP^2+R^{1/2}]/P$. Función promedio.

Por tanto,

$\varepsilon_{QP}=[2bP]/[a+bP^2+R^{1/2}]/P$

$\varepsilon_{QP}=(2bP)(P)/(a+bP^2+R^{1/2})$

$\varepsilon_{QP}=2bP^2/(a+bP^2+R^{1/2})$. Coeficiente de la elasticidad de la oferta con respecto al precio.

Mi segunda respuesta:

Acudiré a la elasticidad puntual de la oferta, calculando primero la elasticidad parcial de Q con respecto a R, suponiendo que P se mantiene constante; ésta sería la función marginal. Luego procedo a calcular la función promedio de la oferta, dividiendo a Q entre R. Procedamos:

$Q= a+bP^2+R^{1/2}$

$\partial Q/\partial R= 0+0+1/2R^{1/2-1}= 1/2R^{-1/2}$. Función marginal.

$Q/R= [a+bP^2+R^{1/2}]/R$. Función promedio.

Por tanto,

$\varepsilon_{QR}=[1/2R^{-1/2}]/[a+bP^2+R^{1/2}]/R$

$\varepsilon_{QR}=(1/2R^{-1/2})(R)/(a+bP^2+R^{1/2})$

$\varepsilon_{QR}=(1/2R^{1/2})/(a+bP^2+R^{1/2})$. Coeficiente de la elasticidad de la oferta con respecto a la lluvia.

6. La demanda exterior para nuestras exportaciones X depende del ingreso exterior Y_f y de nuestro nivel de precios P: $X= Y_f^{1/2}+P^{-2}$. Encuentre la elasticidad parcial de la demanda exterior para nuestras exportaciones respecto a nuestro nivel de precios.

Mi respuesta:

Acudiré a la elasticidad puntual de la demanda exterior, calculando primero la elasticidad parcial de X con respecto a P, suponiendo que Y se mantiene constante; ésta sería la función marginal. Luego procedo a calcular la función promedio de la demanda exterior, dividiendo a X entre P.

Procedamos:

$X= Y_f^{1/2}+P^{-2}$

$\partial X/\partial P= 0-2P^{-2-1}= -2P^{-3}$.Función marginal.

$X/P= [Y_f^{1/2}+P^{-2}]/P$. Función promedio.

Por tanto, tendremos:

$\varepsilon_{XP}= [-2P^{-3}]/[Y_f^{1/2}+P^{-2}]/P$

$\varepsilon_{XP}= (-2P^{-3})(P)/[Y_f^{1/2}+P^{-2}]$

$\varepsilon_{XP}= (-2P^{-3+1})/[Y_f^{1/2}+P^{-2}]$

$\varepsilon_{XP}= (-2P^{-2})/[Y_f^{1/2}+P^{-2}]$. Coeficiente de la elasticidad parcial de la demanda exterior para nuestras exportaciones respecto al nivel de precios.

7. Determine la diferencial total para cada una de las siguientes funciones:

a) $U= -5x^3-12xy-6y^5$

Mi respuesta:

$\partial U/\partial x= -15x^2-12y-0= -15x^2-12y$

$\partial U/\partial y= 0-12x-30y^4= -12x-30y^4$

Luego tendremos:

$dU= (-15x^2-12y)dx+(-12x-30y^4)dy$. Respuesta.

b) $U= 7x^2y^3$

Mi respuesta:

$\partial U/\partial x= 14xy^3$

$\partial U/\partial y= 21x^2y^2$

Luego tendremos:

$dU= (14xy^3)dx+(21x^2y^2)dy$

c) $U= 3x^3(8x-7y)$

Mi respuesta:

$U= 3x^3(8x-7y)= 24x^4-21x^3y$

$\partial U/\partial x= 96x^3-63x^2y$

$\partial U/\partial y= 0-21x^3= -21x^3$

Luego tendremos:

$dU= (96x^3-63x^2y)dx+(-21x^3)dy$

d) $U= (5x^2+7y)(2x-4y^3)$

Mi respuesta:

$\partial U/\partial x= (5x^2+7y)(2-0)+ (2x-4y^3)(10x+0)$

$\partial U/\partial x= (10x^2+14y)+(20x^2-40xy^3)$

$\partial U/\partial x = 10x^2+14y+20x^2-40xy^3 = 30x^2+14y-40xy^3$

$\partial U/\partial y = (5x^2+7y)(0-12y^2)+(2x-4y^3)(0+7)$

$\partial U/\partial y = -60x^2y^2-84y^3+14x-28y^3 = 14x-60x^2y^2-112y^3$

Luego tendremos:

$dU = (30x^2+14y-40xy^3)dx+(14x-60x^2y^2-112y^3)dy$

e) $U = 9Y^3/X-Y$

$\partial U/\partial X = [(0)(X-Y)-(9Y^3)(1-0)]/(X-Y)^2$

$\partial U/\partial X = (0-9Y^3)/(X-Y)^2$

$\partial U/\partial X = -9Y^3/(X-Y)^2$

$\partial U/\partial Y = [(27Y^{3-1})(X-Y)- (-1)(9Y^3)]/(X-Y)^2$

$\partial U/\partial Y = [(27Y^2)(X-Y)+(9Y^3)(-1)]/(X-Y)^2$

$\partial U/\partial Y = [(27Y^2X-27Y^3)-(9Y^3)]/(X-Y)^2$

$\partial U/\partial Y = (27XY^2-36Y^3)/(X-Y)^2$

Luego tendremos:

$dU = [(-9Y^3/(X-Y)^2]dx+[(27XY^2-36Y^3)]/(X-Y)^2]dy$

f) $U = (X-3Y)^3$

Mi respuesta:

$\partial U/\partial X = 3(X-3Y)^{3-1}$

$\partial U/\partial X = 3(X-3Y)^2$

$\partial U/\partial Y = (2)(3)(X-3Y)$

$= 6(X-3Y) = 6X-18Y$

Luego tendremos: $dU = [3(X-3Y)^2]dx+[6X-18Y]dy$.

8.3

Ejercicio 8.3

1. Use las reglas de diferenciales para hallar a) dz a partir de $z= 3x^2+xy-2y^3$ y b) dU a partir de $U= 2x_1+9x_1x_2+x_2^2$. Compruebe las respuestas contra las obtenidas en el ejercicio 8.2-2.

Mi respuesta:

Para solucionar este ejercicio acudimos a las reglas de diferenciales, que se encuentran en la página 187 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright:

a) $z= 3x^2+xy-2y^3$

$dz= d(3x^2)+d(xy)-d(2y^3)$ [aquí hemos aplicado la regla III referida a la suma-diferencia].

$dz= 6xdx+[(x)(0)+(y)(1)]dx-(6y^2)dy= 6xdx+ydx-6y^2dy$ [aquí hemos aplicado la regla II referida a la función potencia; e igualmente la regla IV referida a la regla del producto].

$[6x+y]dx+[x-6y^2]dy= 6xdx+ydx+xdy-6y^2dy$. Respuesta.

EL CONFLICTO CON HAITÍ NO TIENE SOLUCIÓN EN BASE AL MILITARISMO, EL RACISMO Y EL FASCISMO. LA VÍA CORRECTA ES EL DIÁLOGO

8.4

Ejercicio 8.4

El ejercicio 8.4 está relacionado con el concepto de derivadas totales; sobre este particular el libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright, en la página 189 dice: *“Ahora abordaremos la pregunta planteada al comienzo del capítulo: ¿cómo podemos hallar la tasa de cambio de la función $C(Y^*, T_0)$ respecto a T_0, cuando Y^* y T_0 están relacionadas? Como se mencionó, la respuesta radica en el concepto de derivada total. A diferencia de una derivada parcial, una derivada total no requiere que el argumento Y^* permanezca constante cuando T_0 varía y, por lo tanto, puede tomar en consideración la relación postulada entre los dos argumentos”*. (Comillas y cursiva son nuestras).

Chiang y Wainwright, en la página 190 de su libro, nos aportan una fórmula para calcular la derivada total, cuando tratamos con funciones compuestas por dos variables independientes:

$dy/dw= (\partial y/\partial x)(dx/dw)+\partial y/\partial w$

1. Encuentre la derivada total dz/dy, a partir de
a) $z= f(x, y)= 5x+xy-y^2$, donde $x= g(y)= 3y^2$

Mi respuesta:

Primero, la fórmula $dz/dy= (\partial z/\partial x)(dx/dy)+\partial z/\partial y$

Segundo, calculamos los componentes de la fórmula

$\partial z/\partial x= 5+y-0= 5+y$

$dx/dy= 6y$

$\partial z/\partial y= 0+x-2y= x-2y$

Sustitución en la fórmula

$dz/dy= (5+y)(6y)+(x-2y)$

$= 30y+6y^2+x-2y$

$dz/dy= x+28y+6y^2$

En ese resultado sustituimos a x por el dato dado en el problema: $x= g(y)= 3y^2$

$dz/dy= 3y^2+28y+6y^2= 28y+9y^2$. Respuesta.

b) $z= 4x^2-3xy+2y^2$, donde $x= 1/y$

Mi respuesta:

Primero, la fórmula $dz/dy= (\partial z/\partial x)(dx/dy)+\partial z/\partial y$

Segundo, calculamos los componentes de la fórmula

$\partial z/\partial x= 8x-3y+0= 8x-3y$

$dx/dy= [0(y)-x(1)]/y^2= -x/y^2$

$\partial z/\partial y= 0-3x+4y= 4y-3x$

Sustitución en la fórmula

$dz/dy= 8x-3y-x/y^2+4y-3x= 5x+y-x/y^2$

En ese resultado obtenido sustituimos a x por el dato dado en el problema: $x= 1/y$

$dz/dy= 5x+y-x/y^2= 5(1/y)+y-[1/y]/y^2= 5/y+y-y= 5/y$

c) $z= (x+y)(x-2y)$, donde $x= 2-7y$

Mi respuesta:

Primero, la fórmula $dz/dy= (\partial z/\partial x)(dx/dy)+\partial z/\partial y$

Segundo, calculamos los componentes de la fórmula

$\partial z/\partial x= (x+y)(1-0)+(x-2y)(1+0)=$

$(x+y)+(x-2y)=$

$x+y+x-2y= 2x-y$

$dx/dy= -7$

$\partial z/\partial y= (x+y)(0-2)+(x-2y)(0+1)$

$= (-2x-2y)+(x-2y)$

= -2x-2y+x-2y= -x-4y

Tercero, sustitución

dz/dy= (2x-y)(-7) -x-4y=

-14x+7y-x-4y= -15x+3y

Cuarto, sustituimos x= 2-7y en x

dz/dy= -15(2-7y)+3y= -30+105y+3y= 108y-30. Respuesta.

2. Determine la derivada total dz/dt, a partir de

a) z= x^2-8xy-y^3, donde x= 3t, y= 1-t

Ahora tenemos una función del tipo z= f(x, y, t), en la que x= g(t), y= h(t). Chiang y Wainwright, en la página 191, del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, recomiendan el uso de la siguiente fórmula para el cálculo de la derivada total: dz/dt= (∂z/∂x)(dx/dt)+(∂z/∂y)(dy/dt)+(∂z/∂t).

Mi respuesta:

Primero, la fórmula dz/dt= (∂z/∂x)(dx/dt)+(∂z/∂y)(dy/dt)+(∂z/∂t).

Segundo, calculamos los componentes de la fórmula (∂z/∂x)(dx/dt)+(∂z/∂y)(dy/dt)+(∂z/∂t).

(∂z/∂x)= 2x-8y-0= 2x-8y

dx/dt= 3

(∂z/∂y)= 0-8x-3y^2= -8x-3y^2

(dy/dt)= 0-1= -1

(∂z/∂t)= 0

Tercero, sustitución

dz/dy= (2x-8y)(3)+(-8x-3y^2)(-1)+0= (6x-24y)+(8x+3y^2)= 6x+8x-24y+3y^2= 14x-24y+3y^2

Cuarto, sustituimos x= 3t en x y y= 1-t en y.

dz/dy= 14(3t)-24(1-t)+3$(1-t)^2$= 42t-24+24t+3[1-2t+t^2]= 42t-24+24t+3-6t+3t^2= 3t^2+60t-21. Respuesta.

2b) z= 7u+vt, donde u= $2t^2$ y v= t+1

Aquí tenemos también una función del tipo z= f(u, v, t), en la que u= g(t), v= h(t). Chiang y Wainwright, en la página 191, del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, recomiendan el uso de la siguiente fórmula para el cálculo de la derivada total: dz/dt= (∂z/∂u)(du/dt)+(∂z/∂v)(dv/dt)+(∂z/∂t).

Mi respuesta:

Primero, la fórmula dz/dt= (∂z/∂u)(du/dt)+(∂z/∂v)(dv/dt)+(∂z/∂t).

Segundo, calculamos los componentes de la fórmula dz/dt= (∂z/∂u)(du/dt)+(∂z/∂v)(dv/dt)+(∂z/∂t).

(∂z/∂u)= 7+0= 7

du/dt= 4t

(∂z/∂v)= t

(dv/dt)= 1

(∂z/∂t)= v

Tercero, sustitución

dz/dy= 7(4t)+t(1)+v= 28t+t+v= 29t+v

Cuarto, sustituimos u= $2t^2$ en u y v= t+1 en v.

dz/dy= 29t+v= 29t+(t+1)= 29t+t+1= 30t+1. Respuesta.

Quinto, comprobación:

z= 7u+vt, donde u= $2t^2$ y v= t+1

dz/dt= $7(2t^2)+t(t+1)$

= $14t^2+t^2+t$

= $15t^2+t$

Derivamos:

dz/dt= 30t+1. Obtuvimos la misma respuesta.

3. Halle la tasa de cambio de producción respecto al tiempo, si la función de producción es $Q= A(t)K^{\alpha}L^{\beta}$, donde A(t) es una función creciente de t, y $K= k_0+at$, y $L= L_0+bt$.

Mi respuesta:

Primero, la fórmula $dQ/dt= (\partial Q/\partial K)(dK/dt)+(\partial Q/\partial L)(dL/dt)+(\partial Q/\partial t)$.

Segundo, calculamos los componentes de la fórmula $dQ/dt= (\partial Q/\partial K)(dK/dt)+(\partial Q/\partial L)(dL/dt)+(\partial Q/\partial t)$.

$(\partial Q/\partial K)= A(t)[(K^{\alpha})(0)+(L^{\beta})(\alpha K^{\alpha-1})]= A(t)[(0)+(L^{\beta})(\alpha K^{\alpha-1})]= A(t)L^{\beta}\alpha K^{\alpha-1}$

$dK/dt= 0+a= a$.

$(\partial Q/\partial L)= A(t)[(K^{\alpha})(\beta L^{\beta-1})+(L^{\beta})(0)]= A(t)[(K^{\alpha})(\beta L^{\beta-1})+0]= A(t)K^{\alpha}\beta L^{\beta-1}$

$(dL/dt)= 0+b= b$.

$(\partial Q/\partial t)= A'(t)K^{\alpha}L^{\beta}$

Tercero, sustitución

$dQ/dt= (A(t)L^{\beta}\alpha K^{\alpha-1})(a)+(A(t)K^{\alpha}\beta L^{\beta-1})(b)+(A'(t)K^{\alpha}L^{\beta})$. Respuesta.

4. Obtenga las derivadas parciales totales $\delta W/\delta u$ y $\delta W/\delta v$, si
a) $W= ax^2+bxy+cu$, donde $x= \alpha u+\beta v$ y $y= \gamma u$
b) $W= f(x_1, x_2)$, donde $x_1= 5u^2+3v$ y $x_2= u-4v^3$

Primero, establecemos la fórmula:

$\delta W/\delta u= (\partial W/\partial x)(\partial x/\partial u)+(\partial W/\partial y)(\partial y/\partial u)+(\partial W/\partial u)$

Segundo, calculamos componentes de la fórmula:

$(\partial W/\partial x)= 2ax+by+0= 2ax+by$

$(\partial x/\partial u)= \alpha$

$(\partial W/\partial y)= 0+bx+0= bx$

$(\partial y/\partial u)= \gamma$

$(\partial W/\partial u)= c$

Tercero, sustituimos en la fórmula los componentes calculados:

$\delta W/\delta u= (2ax+by)(\alpha)+(bx)(\gamma)+(c)$. Respuesta.

b) $W= f(x_1, x_2)$, donde $x_1= 5u^2+3v$ y $x_2= u-4v^3$

Mi respuesta:

Simplemente derivamos las funciones x_1 y x_2:

Sabemos que $x_1= 5u^2+3v$ y $x_2= u-4v^3$ y que, por tanto,

$\delta W/\delta u= (10u+0)f_1+1f_2$ $\delta W/\delta v= 3f_1-12v^2f_{2.}$ Respuesta.

8.5

Ejercicio 8.5

1. Para cada F(x, y)= 0, encuentre dy/dx para cada una de las siguientes ecuaciones:

a) y-6x+7= 0

Mi respuesta:

Chiang y Wainwright, en la página 197, del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, dicen: *"En el caso sencillo donde la ecuación dada es F(y, x)= 0, la regla produce dy/dx= -(F_x/F_y)"*. (Comillas y cursiva son nuestras).

Aplicando esa orientación tenemos:

dy/dx= -(F_x/F_y)= -(0-6+0)/1-0+0

= -(-6)/1= 6. Respuesta.

b) 3y+12x+17= 0

dy/dx= -(F_x/F_y)= -(0+12+0)

= -(12)/(3+0+0)= -[(12)/(3+0+0)]

= -[12/3]= -4. Respuesta.

c) x^2+6x-13-y= 0

dy/dx= -(F_x/F_y)= -[(2x+6-0-0)/(0+0-0-1)]

= -[(2x+6)/(-1)]= -[(-2x-6)]= 2x+6. Respuesta.

2. Para cada F(x, y)= 0 use la regla de la función implícita para hallar dy/dx.

a) F(x,y)= $3x^2$+2xy+$4y^3$= 0

Mi respuesta:

dy/dx= -(F_x/F_y)= -[(6x+2y+0)/(0+2x+$12y^2$)]

$= -[(6x+2y)/(2x+12y^2)] = (-6x-2y)/(-2x-12y^2)$. Respuesta.

b) $F(x,y)= 12x^5-2y= 0$

$dy/dx= -(F_x/F_y)= -[(60x^4-0)/(0-2)]$

$= -[(60x^4)/(-2)]= -60x^4/2= -30x^4$. Respuesta.

c) $F(x,y)= 7x^2+2xy^2+9y^4= 0$

$dy/dx= -(F_x/F_y)= -[(14x+2y^2+0)/(0+(2)(x)(2y)+(y^2)(0)+(36y^3)]$

$= -[(14x+2y^2)/(4xy+36y^3)]$

$= (-14x-2y^2)/(-4xy-36y^3)$. Respuesta.

d) $F(x,y)= 6x^3-3y= 0$

$dy/dx= -(F_x/F_y)= -(18x^2-0)/(0-3)$

$= -18x^2/3= -6x^2$. Respuesta.

3. Para cada F(x, y, z)= 0 use la regla de la función implícita para hallar $\partial y/\partial x$ y $\partial y/\partial z$.

Mi respuesta:

a) $F(x, y, z)= x^2y^3+z^2+xyz= 0$

$\partial x/\partial y= -F_y/F_x= -[(x^2)(3y^2)+(y^3)(0)+(xz)]/(x^2)(0)+(y^3)(2x)+(yz)$

$= -[(3x^2y^2)+(0)+(xz)]/(0)+(2xy^3)+(yz)$

$= -[(3x^2y^2)+(xz)]/(2xy^3)+(yz)= (-3x^2y^2-xz)]/(-2xy^3-yz)$.

$\partial x/\partial z= -F_z/F_x= -[(0+2z+(xy)(1)+(z)(0)/(x^2)(0)+(y^3)(2x)+(0)+(x)(0)+(yz)(1)]= (-2z-xy)/(-2xy^3-yz)$. Respuesta.

b) $F(x, y, z)= x^3z^2+y^3+4xyz= 0$

$\partial y/\partial x= -(F_x/F_y)= -[(x^3)(0)+(z^2)(3x^2)+(0)+4[(x)(0)+(yz)(1)]/(0)+(3y^2)+4[(y)(0)+(xz)(1)]=$
$-[(3x^2z^2)+4yz)]/(3y^2)+(xz)]= (-3x^2z^2-4yz)/(-3y^2-xz)$. Respuesta.

$\partial y/\partial z= -(F_z/F_y)= -[(x^3)(2z)+(z^2)(0)+(0)+(4xy)(1)+(z)(0)]/[(0)+(3y^2)+4xz(1)+(y)(0)]=$
$-[(2x^3z)+(4xy)]/[(3y^2)+4xz]= (-2x^3z-4xy)/(-3y^2-4xz)$. Respuesta.

c) $F(x, y, z)= 3x^2y^3+xz^2y^2+y^3zx^4+y^2z= 0$

$\partial y/\partial x$=-(F_x/F_y)= -[($3x^2$)(0)+(y^3)(6x)+(xz^2)(0)+(y^2)(z^2)+(y^3z)($4x^3$)+(x^4)(0)+(0)]/($3x^2$)($3y^2$)+(y^3)(0)+(xz^2)(2y)+(y^2)(0)+(y^2)(0)+(z)(2y)=
-[($6xy^3$)+(y^2z^2)+($4x^3y^3z$)]/($9x^2y^2$)+($2yxz^2$)+(2yz)=
($-6xy^3-y^2z^2-4x^3y^3z$)/($-9x^2y^2$)-($2yxz^2$)-(2yz). Respuesta.

4. Suponiendo que la ecuación F(U, x_1, x_2, …, x_n)= 0 define de forma implícita una función de utilidad U= (x_1, x_2, …, x_n):

a) Encuentre las expresiones para $\partial U/\partial x_2$, $\partial U/\partial x_n$, $\partial x_3/\partial x_2$ y $\partial x_4/\partial x_n$.

Mi respuesta:

$\partial U/\partial x_2$= -Fx_2/F_U= -(0, 1, …, 0)/F(U',…). Respuesta.

$\partial U/\partial x_n$= -Fx_n/F_U= -(0+0,…, 1)/F(U',…). Respuesta.

$\partial x_3/\partial x_2$= -$Fx_2/Fx_3$= -(0, 1, …, 0)/F(U, 0, 0, 1, …, 0). Respuesta.

$\partial x_4/\partial x_n$= -$Fx_n/Fx_4$= -(0, 0, 0, …, 1)/(0, 0, 0, 0, 1). Respuesta.

b) Interprete sus respectivos significados económicos.

$\partial U/\partial x_2$, este término, desde el punto de vista económico, significa el cambio de la utilidad marginal del artículo x_2, como resultado del cambio en el consumo de dicho artículo.

$\partial U/\partial x_n$, este término, desde el punto de vista económico, significa el cambio de la utilidad marginal del artículo x_n, como resultado del cambio en el consumo de dicho artículo.

$\partial x_3/\partial x_2$, este término, desde el punto de vista económico, significa el cambio de la utilidad marginal del artículo x_3, como resultado del cambio en el consumo del artículo x_2.

$\partial x_4/\partial x_n$, este término, desde el punto de vista económico, significa el cambio de la utilidad marginal del artículo x_4, como resultado del cambio en el consumo del artículo x_n.

5. ¿Para cada una de las ecuaciones dadas F(y, x)= 0, es una función implícita y= f(x) definida alrededor del punto (y=3, x=1)?

a) $x^3-2x^2y+3xy^2-22= 0$

b) $2x^2+4xy-y^4+67= 0$

Si su respuesta es afirmativa, determine dy/dx mediante la regla de la función implícita, y evalúela en el punto mencionado.

Mi respuesta:

Primero, indagaremos si las ecuaciones dadas pueden ser concebidas como funciones implícitas; con este fin tomaremos en cuenta el teorema de la función implícita, descripto por el libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright, en la página 195; aquí nos dicen que si la función F tiene derivadas parciales continuas y si en un punto que satisface la ecuación dada, Fy no es cero, entonces existe una vecindad N.

En la ecuación a) determinemos F_y= 0+ [(-2)(x^2)+](3)(x)(2y-0)= -2x^2+6xy= -2x^2+6xy. Respuesta.

En la ecuación a) determinemos F_x= 3x^2-2x^2(0)+(y)(2x)+(3)(x)(0)+(y^2)(1)]= 3x^2-4xy+3y^2. Respuesta.

Si en el resultado a) sustituimos a y, x, por los datos dados, tendremos:

F_y= -2x^2+6xy

F_y= -2$(1)^2$+6(1)(3)

F_y= -2+18=16

E igualmente debemos sustituir en 3x^2-4xy+3y^2
F_x= 3x^2-4xy+3y^2

F_x= (3)$(1)^2$-4(1)(3)+(3)$(3)^2$

F_x= 3-12+27= 18

Si en el resultado b) sustituimos a y, x, por los datos dados, tendremos:

F_x= 3$(1)^2$-4(1)(3)xy+3$(3)^2$

F_x= 3-12+27

F_x= 18

Procedemos ahora a satisfacer el último requerimiento: Si su respuesta es afirmativa, determine dy/dx mediante la regla de la función implícita, y evalúela en el punto mencionado.

dy/dx= -F_x/F_y= -(3x^2-4xy+3y^2)/(-2x2+6xy)= 18/16= 9/8

Sustitución, x= 1, y= 3:

6. Dada x^2+3xy+2yz+y^2+z^2-11= 0, ¿es una función implícita z= f(x,y) definida alrededor del punto (x= 1, y=2, z= 0)? En caso afirmativo, determine z∂/∂x y ∂z/∂y mediante la regla de la función implícita, y evalúelas en ese punto.

Mi respuesta:

Primero, indagaremos si la ecuación dada puede ser concebida como función implícita; con este fin tomaremos en cuenta el teorema de la función implícita, descripto por el libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright, en la página 195; aquí nos dicen que si la función F tiene derivadas parciales continuas y si en un punto que satisface la ecuación dada, Fy no es cero, entonces existe una vecindad N.

Determinemos F_y dada $x^2+3xy+2yz+y^2+z^2-11= 0$

$F_y= 0+3[(x)(1)+(y)(0)+2[(y)(0)+(z)(1)]+2y-0$

$F_y= 3x+2z+2y$. Respuesta.

Determinemos F_x dada $x^2+3xy+2yz+y^2+z^2-11= 0$

$F_x= 2x+3[(x)(0)+(y)(1)]+2[(y)(0)+(z(0)+0-0$

$F_x= 2x+3y$. Respuesta.

En los dos resultados obtenidos, sustituyamos x= 1, y= 2, z= 0:

$F_y= 3x+2z+2y$

$F_y= 3(1)+2(0)+2(2)$

$F_y= 3+0+4= 7$

$F_x= 2x+3y$

$F_x= 2(1)+3(2)$

$F_x= 2+6= 8$

Es evidente estamos ante la presencia de una función implícita definida alrededor del punto x= 1, y= 2, z= 0.

Ahora pasamos a determinar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ mediante la regla de la función implícita, y las evaluaremos en el punto dado; de modo, que si tenemos $x^2+3xy+2yz+y^2+z^2-11= 0$, tendremos:

$dz/dx= -F_x/F_z= -(2x+3[(x)(0)+(y)(1)]+2[(y)(0)+(z)(0)]+(0+0-0)/(0+0+2[(y)(1)+(z)(0)+)+2z-0$
$= -[(2x+3y)/(2y+2z)]$

dz/dy= $-F_y/F_z$= -[0+3(x)(1)+(y)(0)+2[(y)(0)+(z)(1)+2y+0-0]/0+0+2[(y)(1)+(z)(0)+0+2z-0]

dz/dy= $-F_y/F_z$= -(3x+2z+2y)/(2y+2z)

Evaluación:

dz/dy= $-F_y/F_z$= -[(3x+2z+2y)/(2y+2z)]

dz/dy= $-F_y/F_z$= -[(3(1)+2(0)+2(2))/(2(2)+2(0)]

dz/dy= $-F_y/F_z$= -(7/4)

dz/dx= $-F_x/F_z$= -(2x+3y)/(2y+2z)

dz/dx= $-F_x/F_z$= -[(2)(1)+3(2)/2(2)+2(0)]

dz/dx= $-F_x/F_z$= -[2+6/4]= -(8/4)= 2

CONCLUSIÓN

1. La diferenciación parcial, es útil cuando trabajamos funciones en las que coexisten varias variables independientes; en estos casos la técnica a aplicar consiste en concebir que solamente una de las variables independientes cambia, mientras que las demás permanecen constantes.

2. Una condición básica para el uso de la diferenciación parcial, en adición, consiste en que no debe haber nexos entre las distintas variables independientes. Esta condición es sumamente severa, puesto que en la realidad es poco probable que se pueda verificar. Generalmente se verifican nexos entre las variables independientes.

3. Por tanto, cuando el modelo, objeto de estudio, viola la conclusión 2), es necesario entonces acudir no a la técnica de la diferenciación parcial, sino a la técnica de la diferenciación total, que se asocia con la derivada total.