Dr. Manuel de Jesús Linares Jiménez

Obras
Completas

Tomo
24

***Explorando el camino de la economía matemática*. Investigación realizada en el 2002.** (Descargar PDF).

EXPLORANDO EL CAMINO DE LA ECONOMÍA MATEMÁTICA

Autor: Manuel Linares
829-637-9303

1ra. Edición, forma física:
Julio, 2002

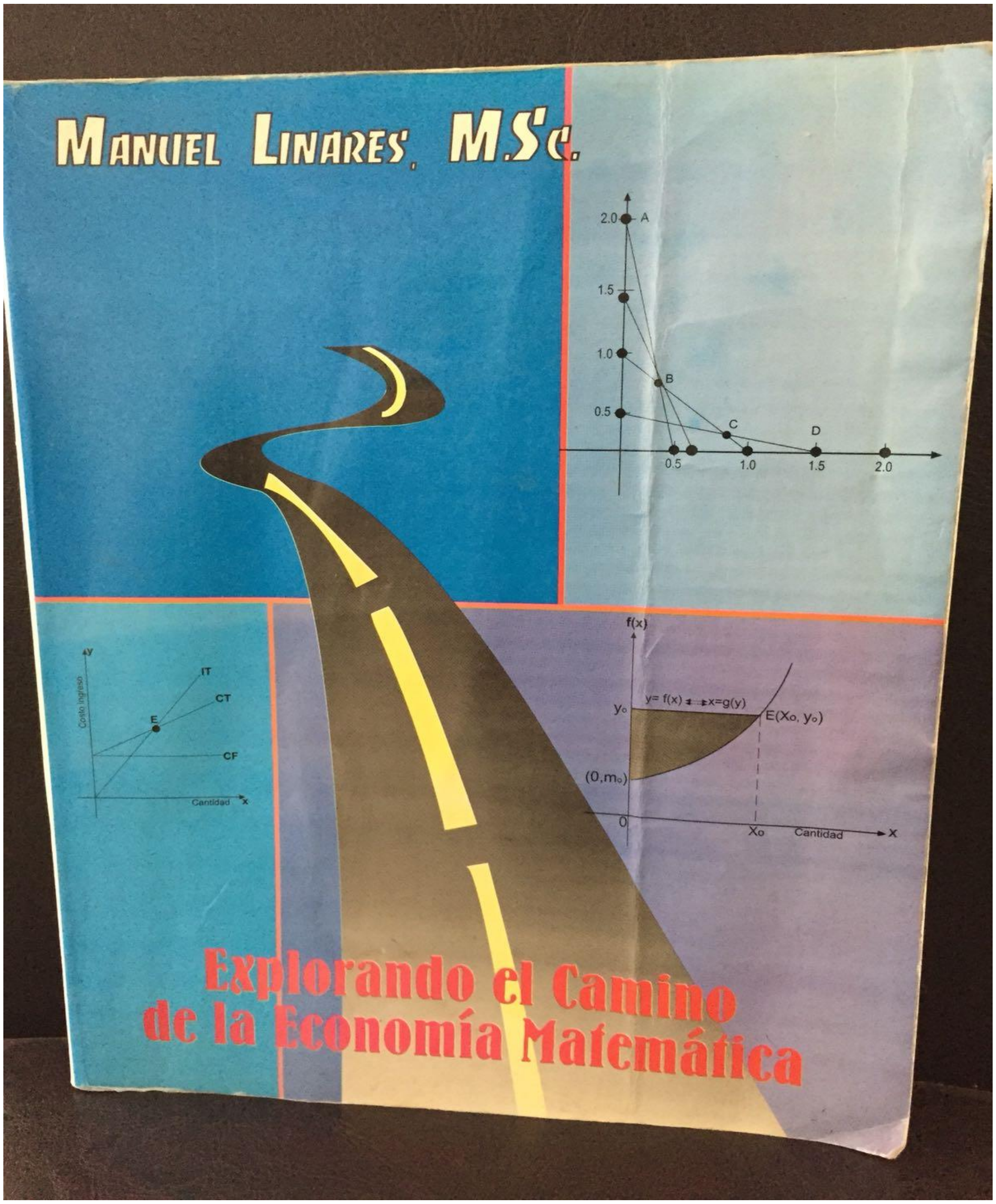
SOMOS ARTES GRAFICAS, S. A, calle 8 No. 84, Ensanche Las Américas, Santo Domingo, RD, enero del año 2002.

Preparación y difusión edición digital:
Septiembre 2017/marzo 2018

Nueva preparación y difusión edición digital:
2023.

Manuel Linares es el único responsable de las enmiendas introducidas para la edición digital.

PORTADA DE LA EDICIÓN EN FORMATO FÍSICO



DEDICATORIA:

A los economistas dominicanos con vocación matemática

ÍNDICE

PREFACIO AL TOMO 24 9

CAPÍTULO I
LA ECONOMÍA MATEMÁTICA 11

Breve explicación. Nacimiento de la economía matemática. Economía discursiva versus economía matemática. Cournot y la función de demanda. Aportes ulteriores. Instrumentos de la economía matemática. Reparos de autores de la desaparecida URSS. Reparos a los reparos expuestos.

CAPÍTULO II
PRIMER CAMINO EXPLORADO: ELEMENTOS ANALÍTICOS 15

Concepto de geometría analítica plana. Sistema de coordenadas rectangulares. Distancia entre dos puntos dados. División de un segmento en una razón dada. Pendiente de una recta. Paralelismo y perpendicularidad de dos rectas. El problema fundamental. Tratamiento del 1er. problema: gráfica de una ecuación. Tratamiento del 2do. problema: la ecuación de un lugar geométrico. La línea recta. Forma punto-pendiente. Forma pendiente-ordenada en el origen. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos. Abscisa y ordenada en el origen. Ecuaciones de líneas rectas paralelas y perpendiculares. Ecuación de demanda lineal. Ecuación de oferta lineal. Equilibrio de mercado. Punto de equilibrio. La función consumo. Curvas no lineales. La circunferencia. La parábola. La elipse. La hipérbola. Función exponencial. Reglas de los logaritmos. Uso de las curvas no lineales por la ciencia económica. Funciones de oferta y demanda. Curvas de transformación de producto. Interés compuesto.

CAPÍTULO III
SEGUNDO CAMINO EXPLORADO: CÁLCULO DIFERENCIAL 65

Introducción. Concepto de Límite. Teoremas sobre límites. Evaluación de límites. Funciones continuas y funciones discontinuas. Concepto de infinito. Infinitésimos. Teoremas relativos a infinitésimos y límites. Derivada. Regla general para la derivación. Reglas para derivar funciones de una variable. Regla de la función constante. Regla de la función potencial. Generalización de la regla de la función potencial. Reglas para derivar dos o más funciones de la misma variable. Regla de suma y diferencia. Regla del producto. Regla del cociente. Reglas para derivar funciones de variables diferentes. Regla de la cadena. Regla de la función inversa. Reglas de la diferenciación parcial. Reglas de las derivadas totales de funciones compuestas. Derivadas implícitas. Derivadas de orden superior. Reglas para derivar funciones exponenciales. Reglas para derivar funciones logarítmicas. Reglas para derivar funciones trigonométricas. Ejemplos adicionales. Aplicaciones de la derivada. Identificación de funciones. Máximos y mínimos. Punto de inflexión. La derivada en el contexto del análisis estático-comparativo. Aplicaciones de la derivada en la economía y en los negocios. Costos de producción. Ingresos de la empresa. Renta nacional, consumo y ahorro. A nivel de superficie de demanda. Elasticidades parciales de la demanda. A nivel de funciones de producción. A nivel de funciones de utilidad.

CAPÍTULO IV
TERCER CAMINO EXPLORADO: CÁLCULO INTEGRAL 101

Concepto. Constante de integración. Integral Indefinida. Reglas básicas de integración. Resolución de ejercicios de integración indefinida. Aplicación de la integración indefinida en la administración y la economía. Integral definida. Formas típicas de integración. .Aplicaciones de la integral definida en la economía.

CAPÍTULO V
CUARTO CAMINO EXPLORADO: ECUACIONES DIFERENCIALES 117

Generalidades. Identificación de ecuaciones diferenciales. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficiente y término constantes. Propuesta de solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficiente y término constantes de naturaleza homogénea. Propuesta de solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficiente y término constantes de naturaleza no homogénea. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficiente y término variables. Ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden y de primer grado. Ecuaciones diferenciales de orden superior 160. Resumen procedimental para resolver ecuaciones diferenciales.

CAPÍTULO VI
QUINTO CAMINO EXPLORADO: ECUACIONES EN DIFERENCIA 153

Introducción. Ecuaciones en diferencia 181. Ecuación en diferencia de primer orden: método de cálculo. Ecuaciones en diferencia de segundo orden con coeficientes y término constantes. Cálculo de la ecuación característica y las raíces características de ecuaciones en diferencia de segundo orden lineales con coeficientes y término constantes. Cálculo de las soluciones particulares de ecuaciones en diferencia de segundo orden lineales con coeficientes y término constantes. Solución general y solución definida.

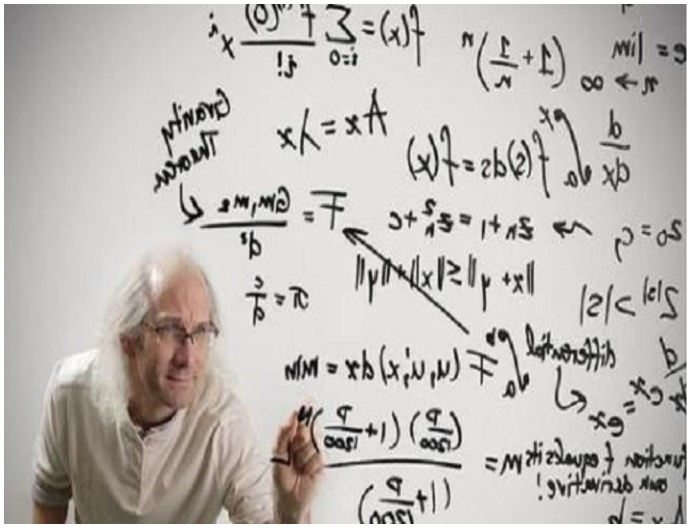
CAPÍTULO VII
SEXTO CAMINO EXPLORADO: ÁLGEBRA MATRICIAL 163

Introducción. Significados de matriz y de vector. Condiciones para que dos matrices sean iguales. Suma y resta de matrices. Escalar, matrices y la multiplicación. Tipos de matrices. Matriz transpuesta. El determinante de una matriz. La inversa de una matriz. Ecuaciones lineales simultáneas. Aplicaciones del Algebra matricial. Mínimos y máximos de funciones de dos variables. Reglas para hallar valores máximos y mínimos de una función f(x,y). Máximos y mínimos de funciones de más de dos variables. Ejemplos en el campo económico. Optimización restringida. Análisis de insumo-producto.

CAPÍTULO VIII
SÉPTIMO CAMINO EXPLORADO: PROGRAMACIÓN LINEAL 187

Programación lineal. Minimización. Maximización. El método símplex. El dual.

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA 207



PREFACIO AL TOMO 24

El tomo 24 de nuestras Obras Completas para el período 1976-2023, está constituido exclusivamente por la investigación *Explorando el camino de la economía matemática.*

Respecto a la presentación que habíamos escrito relacionada con *Explorando el camino de la economía matemática*, en el año 2002, en ocasión de su publicación en formato físico, y que ahora también la acogemos, decíamos:

"En la Academia de Platón estaba prohibida la entrada al ignorante de la Geometría. Con respecto a las Matemáticas igual prohibición ha empezado a figurar en las escuelas de Economía". (Espinoza B., Héctor M.: Programación lineal. Editorial Pax-México, sexta edición, 1975, p. 9). (Comillas y cursiva son nuestras).

"Pletórico de alegría, presento ante la comunidad académica dominicana, particularmente del área económica, mi libro que lleva por título "EXPLORANDO EL CAMINO DE LA ECONOMÍA MATEMÁTICA". En éste, no encontrará el lector un libro de texto de economía matemática, como los de Allen, Draper o Chiang. No. Simplemente es un ensayo, basado en la consulta de varias obras relacionadas con la temática enunciada.

"Así, los límites de los resultados de este estudio están muy claros: su propósito esencial, exclusivo, consiste en afirmar los conocimientos del suscrito en el campo del análisis matemático, para conjugarlos con la ciencia económica y de este modo proporcionarle una mayor exactitud al análisis económico que desde la perspectiva académica frecuentemente efectuamos. En nuestro caso particular, al elaborar y publicar este ensayo, lo hacemos bajo el convencimiento de que un acceso a los métodos matemáticos nos hace mejor economista.

"EXPLORANDO EL CAMINO DE LA ECONOMÍA MATEMÁTICA", constituye el libro de mayor interés, para el autor, en comparación con los otros publicados desde el año 1997, toda vez que pone a prueba la sentencia, ciertamente fundamentada, de que los egresados de la Escuela de Economía de la UASD, poseen una sustentación matemática un tanto frágil. Me siento feliz de haber intentado rebasar semejante fragilidad.

"Agradezco mucho al profesor Jaime Moreno, quien desde las aulas de la PUCMM, maestría en Economía Aplicada, nos inspiró en la adopción del camino elegido, al obligarnos a trabajar prácticamente completa, la brillante obra de Alpha Chiang: "MÉTODOS FUNDAMENTALES DE ECONOMÍA MATEMÁTICA", un libro tan pedagógico y didáctico, que resulta fácil estudiarlo y comprenderlo sin instructor alguno.

"Este ensayo, tiene su origen en el año 1987, cuando adjunto a mi amigo, el distinguido economista Fernando Pellerano, nos trazamos un plan de estudio de economía matemática. Programa que prontamente fue interrumpido, debido a que mi colega había contraído nuevas responsabilidades profesionales que le consumían mucho tiempo. Por tanto, me vi obligado a continuar estudiando de manera intensiva el citado libro de Alpha Chiang, hasta agotarlo totalmente.

“Hemos emprendido un viaje exploratorio, por el vasto campo de la economía matemática, consciente de que, (como diría Danke, 1986) los *“(...) estudios exploratorios sirven para familiarizarnos con fenómenos relativamente desconocidos, obtener información sobre la posibilidad de llevar a cabo una investigación más completa sobre un contexto particular de la vida real, investigar problemas del comportamiento humano que consideren cruciales los profesionales de determinada área, identificar conceptos o variables promisorias, establecer prioridades para investigaciones posteriores o sugerir afirmaciones verificables”.* (Sampieri, Collado y Lucio: Metodología de la investigación. McGraw Hill, segunda edición, 1998, p. 59). (Comillas, cursiva y el punto suspensivo son nuestros).

“La pertinencia de “EXPLORANDO EL CAMINO DE LA ECONOMÍA MATEMÁTICA”, encaja en la necesidad que tiene el economista dominicano, de ir pasando del enfoque económico esencialmente discursivo, al enfoque económico con sustancia matemática, a fin de imprimirle una mayor rigurosidad a la definición de políticas económicas; y darle mayor fortaleza a la descripción, explicación y predicción del fenómeno económico.

“Cuando los economistas matemáticos del país observen mi libro, inmediatamente notarán que su plataforma matemática es introductoria. No podía ser de otra manera. Si gozo de salud, profundizaré en el camino del análisis matemático, para de este modo apresurar el paso por el sendero de la economía matemática y por consiguiente solidificar el contenido del libro que estoy poniendo en sus manos”. (FIN).

Dr. Manuel de Jesús Linares Jiménez
Enero 2023.

1

CAPÍTULO I
LA ECONOMÍA MATEMÁTICA

Breve explicación

La economía matemática, como enfoque del análisis económico, se caracteriza por utilizar ecuaciones, símbolos y teoremas matemáticos, para representar relaciones entre variables, y de este modo, mediante un proceso de razonamiento, extraer conclusiones bien próximas a la realidad estudiada.

La economía discursiva no deja de tener vigencia respecto a la economía matemática. Simplemente son enfoques distintos del análisis económico. La última tiene las siguientes ventajas: *" 1) el lenguaje empleado es más conciso y preciso; 2) tenemos a nuestra disposición un gran número de teoremas matemáticos; 3) al obligamos a formular explícitamente todos los supuestos, como prerrequisitos para aplicar los teoremas, nos pone a cubierto del riesgo que significa adoptar supuestos implícitos indeseables aun en contra de nuestra voluntad, y 4) nos permite resolver el caso general de n- variables".* (Chiang, Alpha: Métodos fundamentales de economía matemática. Amorrortu editores, Buenos Aires, 1976, p. 16). (Comillas y cursiva son nuestras).

Nacimiento de la economía matemática

Los cimientos de la economía, como ciencia, se van sentando con la emergencia de la escuela físiocrática en el siglo XVIII, denominada así porque sus integrantes postulaban la supremacía de la ley natural y, en particular, de la agricultura. Su líder fue el francés Francois Quesnay. Mas, adquiere su propia fisonomía científica con Adam Smith, expuesta en su formidable obra Investigación Sobre la Naturaleza y Causas de la Riqueza de las Naciones.

El método usado allí, por Smith, no es matemático, es discursivo.

Con el transcurrir del tiempo, la ciencia económica se fue apropiando de métodos matemáticos. El francés Cournot (1801-1877), con sus aportes en el campo microeconómico, funda la economía matemática. (Ver obra de Ekelund y Hébert: Historia de la teoría económica y de su método. McGraw Hill, México, 1998).

"Los textos de Cournot sobre matemáticas atrajeron la atención del gran físico y estadístico Poisson, que le ayudó a asegurarse una posición como profesor de matemáticas en Lyon, en 1834. Aquí, Cournot enseño cálculo diferencial y completó el trabajo inicial sobre su libro de probabilidades (...). Al año siguiente, Cournot fue designado superintendente escolar de Grenoble, y en el curso de unos pocos meses asumió las responsabilidades adicionales de inspector general de Educación (sucediendo a Ampere, que todos los estudiantes de la ciencia

eléctrica conocen). En 1838, Cournot se casó y también publicó su trabajo seminal sobre microeconomía, (Investigaciones acerca de los principios matemáticos de la teoría de las riquezas)”. (Ibid., p. 306). (Comillas, cursiva y el punto suspensivo son nuestros).

Karataev y Ryndina, opinan que la escuela matemática de la economía se fue forjando al calor no sólo de las obras de Cournot, sino también de otros economistas de la época. Afirman: *“Casi a la vez que la obra de K. Menger, fundador de la escuela austríaca, apareció la del economista burgués inglés W. Jewons (1935-1882) Teoría de la Economía Política (...) en la que fundamentaba los puntos principales de la escuela matemática. Ideas semejantes fueron expuestas en 1874 por el economista suizo y profesor de la universidad de Lausana L. Walras (1834-1910) en su trabajo Elementos de Economía Política Pura. Un notable representante de la escuela matemática es también el economista italiano V. Pareto (1848-1923), autor de Curso de Economía Política (1896), Los Sistemas Socialistas (1903) y Tratados de Sociología (1917). También se adhirieron a la escuela matemática otros conocidos economistas de distintos países. Entre ellos figuran Laungardt en Alemania, I. Fischer en Estados Unidos, Cassel en Suecia y Schumpeter en Austria”.* (Karataev, Ryndina y otros: Historia de las doctrinas económicas. Editor Juan Grijalvo, S. A., México, 1964, p. 579). (Comillas, cursiva y el punto suspensivo son nuestros).

Economía discursiva versus economía matemática

Cournot, va forjando el enfoque matemático del análisis económico, diferenciándose del discurso puramente teórico de los economistas clásicos (Smith, Say y Ricardo).

En su obra, arriba indicada, escribió: *“Hay autores, como Smith y Say, que han escrito sobre economía política conservando en su estilo todos los atractivos de la forma puramente literaria; pero hay otros, como Ricardo, que por abordar cuestiones más abstractas o buscando una mayor precisión, no han podido evitar el álgebra y se han limitado a disfrazarla en forma de cálculos aritméticos de una prolijidad fatigosa (...)”* (Ekelund y Hébert: Obra citada, p. 307). (Comillas, cursiva y el punto suspensivo son nuestros).

Insistía Cournot, criticando a la economía discursiva, en que el verdadero objeto del análisis matemático, no es conducir a cálculos numéricos, sino explicitar relaciones entre magnitudes cuya evaluación numérica es inviable.

Cournot y la función de demanda

Robert B. Ekelund y Robert F. Hébert, atribuyen a Cournot haber descubierto la ley de la demanda. Cournot enfatizaba que la ley de la demanda descansa esencialmente sobre la población, la distribución de la riqueza, el bienestar general, los gustos, los hábitos de consumo de la población, la multiplicación de los mercados, la extensión del mercado resultante de las mejoras del transporte. Todas estas condiciones relativas a la demanda, decía Cournot, permanecen iguales; si suponemos que cambian las condiciones de la producción (...), los precios variarán, y las correspondientes variaciones en la demanda, suponiendo que los precios de hecho hayan subido, servirán para la construcción de nuestras tablas empíricas. Si, por el contrario, los precios cambian porque ha cambiado la propia ley de la demanda, debido a un cambio en las causas que ya no tienen influencia en la producción, sino en el consumo, la construcción de nuestras tablas será imposible, porque ellas tienen que mostrar cómo cambia la demanda en virtud de un cambio en el precio y no en virtud de otras causas.

Se advierte, además, en la concepción de Cournot, una aproximación a lo que es una visión empírica de la demanda, en la medida que identificaba la demanda con la venta de la empresa, postulando que la venta o demanda crecía cuando el precio descendía.
En la definición del enfoque matemático de la economía, por Cournot, estuvo también presente la utilización del elemento gráfico (geometría euclidiana), para representar sus ideas referidas a los modelos de monopolio y duopolio, de amplia difusión en el campo microeconómico.

Aportes ulteriores

Después de Cournot, se fueron desarrollando un conjunto de cientistas que aportaron a la economía matemática. Entre éstos podemos mencionar a Francis Edgeworth, el cual aplicó el cálculo a temas económicos: monopolio, discriminación de precios, número índices e impuestos.

Ya entrado el siglo XX, surgieron dos brillantes economistas que han hecho notables aportes a la economía matemática: Sir Jhon R. Hicks (1904-1989), Paul A. Samuelson (1915) y R. G. D. Allen (1906-1983), los cuales reinterpretaron la teoría del valor en función del cálculo matemático.

Instrumentos de la economía matemática

La economía matemática usa preferentemente como instrumento de trabajo e investigación el cálculo diferencial e integral.

El cálculo diferencial, principalmente para indagar magnitudes marginales que pueden alcanzar las variables económicas (coste marginal e ingreso marginal, por ejemplo); mientras que el integral, permite penetrar en los campos, por ejemplo de los excedentes del consumidor y del productor.

También tiene a su disposición, la economía matemática, la denominada álgebra matricial, la cual permite estructurar múltiples ecuaciones lineales, y calcular los valores críticos de las variables implicadas, tarea esta casi imposible desde el punto de vista del álgebra simple. Igualmente se auxilia de la técnica matemática, denominada el análisis input-output, que destaca la interdependencia general entre los factores y productos de las economías.

Reparos de autores de la desaparecida URSS

En la obra citada de Ryndina y Karataev, se leen los siguientes reparos a la escuela matemática de la economía:

a) Los procedimientos matemáticos no pueden constituir el método principal, y mucho menos único, de la investigación de los procesos económicos.

b) El problema de la conmensurabilidad de los hechos aislados no pueden resolverlo las matemáticas, es necesario recurrir al análisis teórico.

c) Los representantes de la escuela matemática ignoran de hecho el análisis cualitativo de los fenómenos y reducen toda la Economía política a relaciones cuantitativas.

d) Está ausente el análisis de las relaciones sociales de producción entre las personas.

e) Dicha escuela es contraria a la teoría valor trabajo de Marx.

Reparos a los reparos expuestos

En las obras fundamentales de Marx, no se nota un tratamiento detallado del enfoque matemático en el campo del análisis económico.

Que las obras de Marx, no revistan un peso matemático considerable es comprensible a partir de la época que vivió. Es la época de la estructuración de la escuela matemática de la economía.

Ahora lo que no se entiende es que en el siglo XX, 100 años después, Ryndina y Karataev, estuviesen presentando la economía matemática como una "economía política vulgar".

La emergencia de la economía matemática, no es un retroceso del análisis económico. Al contrario, lo jalona, en tanto permite la extensión de la interpretación cuantitativa de la realidad económica. El análisis cualitativo es esencial en el campo de la economía política, pero el análisis cuantitativo no debe ser subestimado. Nuestros autores afirman: *"Las teorías de la escuela matemática alcanzan su máximo desarrollo entre 1880 y 1890. Después de la segunda guerra mundial adquieren más pujanza todavía entre los economistas burgueses. Las ideas de la escuela matemática han resurgido en la llamada Econometría (...)*

"El favor que la Econometría goza entre los economistas burgueses se debe a la necesidad de la burguesía de disponer de nuevos métodos para la apología del capitalismo (...)" (Ryndina, Karataev y otros: obra citada, p. 589). (Comillas, cursiva y el punto suspensivo son nuestros).

Realmente semejantes argumentaciones son cuestionables, puesto que problemas científicos, como es el caso del enfoque matemático en la economía, es despachado rápidamente con una salida típicamente ideológica. Sustentar que la econometría surge para apologetizar el capitalismo, nos parece que es una explicación simplista del proceso evolutivo de la Economía política, que ignora el significado de la econometría. *"(...) la econometría puede ser definida como el análisis cuantitativo de fenómenos económicos reales basados en los desarrollos simultáneos de la observación y la teoría, relacionados mediante métodos apropiados de inferencia"; "La econometría se refiere a la determinación empírica de las leyes económicas"; "La econometría, que es el resultado de cierta posición sobre el papel de la economía, consiste en la aplicación de la estadística matemática a datos económicos, para dar apoyo empírico a los modelos construidos por la economía matemática, y para obtener resultados numéricos".* (Gujarati, Damodar: Econometría básica. McGraw Hill, México, 1981, p. xvii). (Comillas, cursiva y el punto suspensivo son nuestros). Así escriben Samuelson, Theil y Tinther, en obras diferentes, del significado de la Econometría. Pensamos que la econometría puede ser utilizada por los marxistas, en la aplicación de modelos para el estudio del capitalismo, como lo demostraré en investigaciones que realizaré en el futuro.

2

CAPÍTULO II
PRIMER CAMINO EXPLORADO: ELEMENTOS ANALÍTICOS

Concepto de geometría analítica plana

La geometría analítica que combina el álgebra y el cálculo con la geometría, se utiliza en dos tipos de problemas: a) para estudiar las propiedades geométricas de una curva de la que se da su ecuación; b) para hallar la ecuación de una curva de la que se conocen sus propiedades geométricas. (Thomas, George B. Cálculo infinitesimal y geometría analítica. Sexta edición, 1980, p. 466).

Dicha conceptualización de geometría analítica, por Thomas, permite inferir dos juicios: sirve para que el economista, al estudiar el mundo económico, diseñe ecuaciones que expresen relaciones de variables económicas, con las que pueden definir curvas geométricas, en primer lugar; pero también, facilita edificar ecuaciones en función de las propiedades geométricas de determinadas curvas previamente conocidas.

Charles H. Lehmann, dice: *"El concepto de sistema coordenado, que caracteriza a la Geometría analítica, fue introducido por primera vez en 1637 por el matemático francés René Descartes (1596-1650). Por esta razón, la Geometría analítica se conoce también con el nombre de Geometría cartesiana. Por la parte que toma en la unificación de las diversas ramas de las matemáticas, la introducción de la Geometría analítica representa uno de los adelantos más importantes en el desarrollo de las matemáticas".* (Lehmann, Charles: Geometría analítica. Editora LIMUSA. México, 1999, p. 10). (Comillas y cursiva son nuestras).

Por otra parte: *"La idea subyacente básica de la geometría analítica -dicen Haaser, Lasalley Sullivan- es muy antigua. Tanto Arquímedes (250 años A.C.) y Apolomo (210 años A.C.), usaron representaciones coordenadas en su estudio de las secciones cónicas. Pero los matemáticos griegos recorrían un callejón sin salida y no fue sino hasta el siglo XVII que el matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650) explotó la idea y dio ímpetu al desarrollo de un enfoque algebraico sistemático y consistente para el estudio de la geometría. El papel de la geometría analítica en el desarrollo de las matemáticas es tan grande que a menudo se dice que las matemáticas modernas comenzaron con Descartes".* (Haaser: Análisis matemático. Editorial F. TRILLAS, S.A., México, 1970, p. 52). (Comillas y cursiva son nuestras).

Haaser, Lasalle y Sullivan, como se puede advertir en el pasaje citado de su obra, ven rudimentos de geometría analítica, en los aportes de algunos sabios griegos; mas, reservan su auténtica fundamentación a René Descartes, en la medida que él la elevó a un peldaño enteramente nuevo: geometría analítica basada en la conjunción del álgebra y el cálculo.

Sistema de coordenadas rectangulares

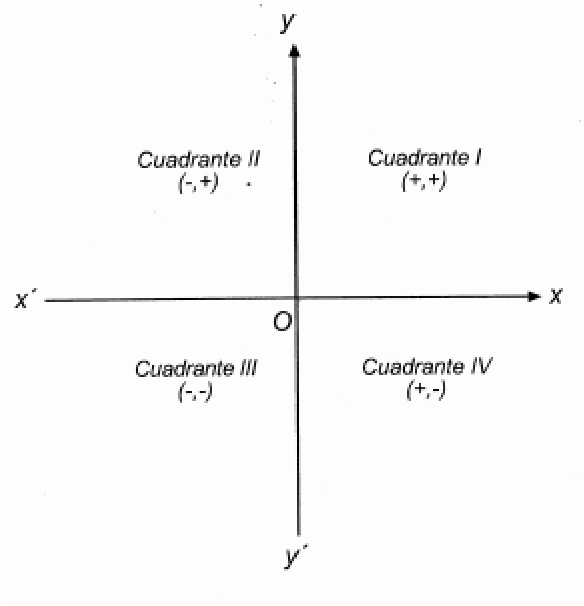


Figura 1.

En el proceso de investigación que hemos llevado a cabo, al consultar algunas obras referidas al campo de la geometría analítica, observamos que tratan inicialmente el sistema de coordenadas. Esto lo pudimos comprobar en las obras de Lehmann (Geometría Analítica) (Lehmann: Geometría analítica. LUMUSA, México, 1999) y de Kindle (Geometría Analítica). (Kindle, Joseph: Geometría Analítica. Serie Schaum. McGraw-Hill, Bogotá Colombia, 1981.)

Todo parece indicar, a juzgar por las opiniones de los autores citados, que el sistema coordenado cartesiano, constituye la zapata de la geometría analítica Charles H. Lehmann, dice: *"El concepto de sistema coordenado, que caracteriza a la Geometría analítica, fue introducido por primera vez en 1637, por el matemático francés René Descartes (1596-1650). Por esta razón, la Geometría analítica se conoce también con el nombre de Geometría cartesiana (,..)".* (Lehmann: obra citada, p. 10). (Comillas, cursiva y el punto suspensivo son nuestros). Dicen Larson, Hostetler y Edwards (Larson, Hostetler y Edwards: Cálculo. McGraw Hill, Volumen I, Sexta edición, México, 1999, p. 4), que en 1637, Descartes revolucionó las matemáticas al unir sus dos ramas principales: álgebra y geometría. Con ayuda del plano coordenado de Descartes, los conceptos geométricos pudieron formularse analíticamente y los conceptos algebraicos visualizarse gráficamente. Este pasaje del libro "Cálculo", cuyos autores mencionamos más arriba, constituye una reiteración respecto a la grandeza científica de René Descartes.

Mediante la gráfica 1, se puede entender el sistema coordenado usado en la geometría analítica plana, específicamente el sistema coordenado rectangular.

En efecto, el sistema de coordenada, consta de dos rectas dirigidas X'X y Y'Y, llamadas ejes de coordenadas, perpendiculares entre sí. La recta X'X se llama eje X; Y'Y es el eje Y; y su punto de intersección O, el origen. Estos ejes coordenados dividen al plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes; numeradas tal como se indica en la figura 1. La dirección positiva de X es hacia la derecha, hacia la izquierda es negativa; la dirección positiva del eje Y, es hacia arriba, hacia abajo es negativa.

Distancia entre dos puntos dados

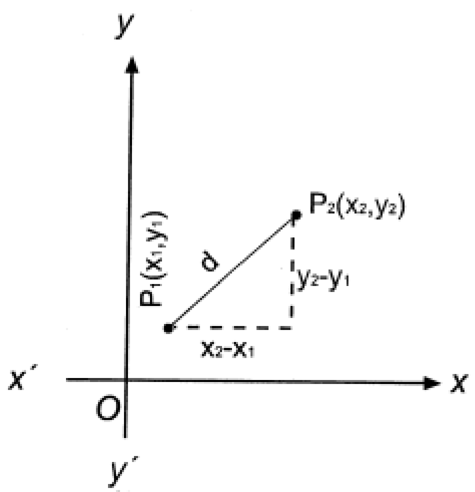


Figura 2.

En el marco del sistema de coordenadas, es conveniente fijar el concepto y el procedimiento de cálculo de la distancia entre dos puntos dados. En efecto, la distancia d entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es d= $\sqrt{}(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$.

Ejemplos:

1. Determinar la distancia entre

a) P_1 (5, -2) y P_2 (8, 4)
b) P_1 (-1, 2) y P_2(4, 1)
c) P_1 (5, -1) y P_2(-3,-2)

Solución:

a) $\sqrt{}(8-5)^2+(4+2)^2=\sqrt{}45$
b) $\sqrt{}(4+l)^2+(l-2)^2= \sqrt{}26$
c) $\sqrt{}(-3-5)^2+(-2+l)^2=\sqrt{}65$

División de un segmento en una razón dada

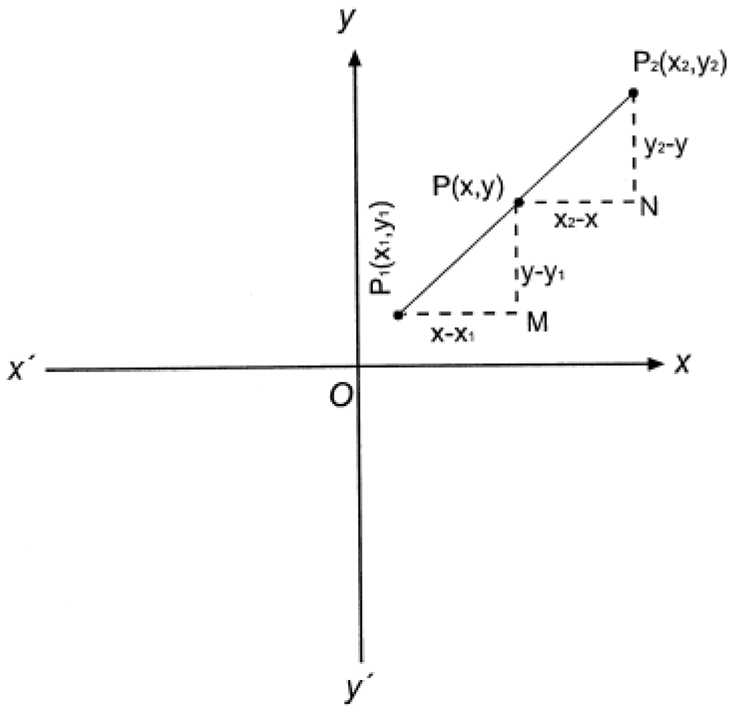


Figura 3.

Dada la existencia de $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ como extremos del segmento P_1P_2, las coordenadas (x, y) del punto P que divide a dicho segmento en la relación $P_1P/PP_2 = r$, resultan en $x= (x_1+rx_2)/1+r$, $y= (y_1+ry_2)/1+r$, donde $r \neq -1$.

En el caso particular -dice Lehmann- en que P es el punto medio del segmento dirigido P_1P_2, r equivale a 1, de manera que los resultados anteriores se reducen a $x= (x_1+x_2)/2$, $y= y_1+y_2)/2$, puesto que

$x= [x_1+(l)x_2]/1+1= (x_1+x_2)/2$

$y= [y_1+(1)y_2]/1+1= (y_1+y_2)/2$

Ejemplos:

1. Hallar las coordenadas de un punto P(x,y) que divida al segmento determinado por $P_1(l,6)$ y $P_2(5, -2)$ en la relación r= 1/4.

I. Debido a que la relación (r) es positiva, P_1P y PP_2 han de ser del mismo sentido, por lo que el punto P(x,y) estará situado entre los puntos dados extremos del segmento.

II. Fórmulas y su aplicación:

$x=(x_1+rx_2)/1+r= [l+(l/4)(5)]/(l+l/4)= 9/5$

y= $(y_1+ry_2)/1+r$= [6+(l/4)(-2)]/(1+1/4)= 22/5.

Por tanto tenemos P(9/5, 22/5) que es el punto buscado.

1. Hallar las coordenadas de un punto P(x,y) que divida al segmento determinado por $P_1(0,3)$ y $P_2(7, 4)$ en la relación r= -2/7.

I. Debido a que la relación (r) es negativa, P_1P y PP_2 han de ser de sentido opuesto, por lo que el punto P(x,y) será exterior al segmento P_1P y PP_2.

II. Fórmulas y su aplicación:

x= $x_1+rx_2/l+r$= 0+(-2/7)(7)/l+(-2/7)= -14/5.
y= $y_1+ry_2/l+r$= 3+(-2/7)(4)/l+(-2/7)= 13/5.

El punto buscado es (-14/5, 13/5).

Pendiente de una recta

El tema de la pendiente de una recta, es muy importante para los economistas, puesto que es de uso frecuente en el tratamiento de las curvas y ecuaciones de oferta y de demanda.

La inclinación de una recta, está relacionada con su pendiente. Kindle, dice: *"La inclinación de una recta (...) (que no sea paralela al eje X) es el menor de los ángulos que dicha recta forma con el semieje X positivo y se mide, desde el eje X a la recta (...), en el sentido contrario al de las agujas del reloj. (...)Si (...) fuera paralela al eje X, su inclinación sería cero".* (Kindle: obra citada, p. 2). (Comillas, cursiva y el punto suspensivo son nuestros).

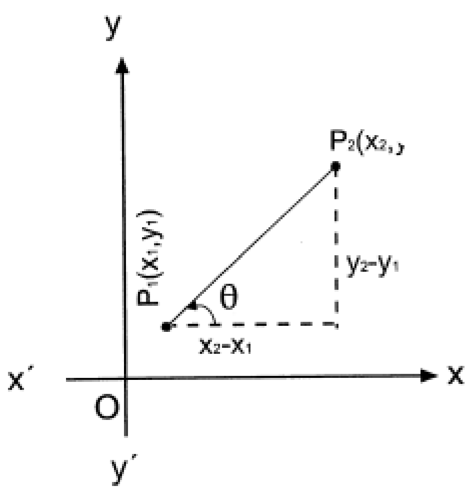


Figura 4.

Por su parte, Lehmann, afirma: *"Se llama ángulo de inclinación de una recta el formado por la parte positiva del eje X y la recta, cuando ésta se considera dirigida hacia arriba".* (Lehmann: obra citada, p. 17). (Comillas y cursiva son nuestras).

Desde el punto de vista trigonométrico, la pendiente de una recta es la tangente del ángulo de inclinación, es decir, m= tg θ, siendo θ el ángulo de inclinación y m la pendiente. De manera que la pendiente de la recta que pasa por los puntos (x_1,y_1) y (x_2, y_2) es $m=y_2-y_1/x_2-x_1= \Delta y/\Delta x$, donde Ay que se lee delta y, representa el cambio en y; **AX** que se lee delta x, representa el cambio en x. (Observe la gráfica 4).

Es importante recalcar que si la recta es paralela al eje X, su inclinación es cero; segunda, si la recta es perpendicular al eje X, su ángulo de inclinación será de 90° y como la tg de 90° no está definida, se comprende entonces que tal recta carece de pendiente.

Allen, en su obra "ANALISIS MATEMATICO PARA ECONOMISTAS", analiza el asunto de la pendiente, enfatizando y conceptualizando el denominado coeficiente angular de una recta. (Allen: Análisis matemático para economistas. Editora Aguilar, España, octava edición-tercera reimpresión-1978, págs. 62-65).

Allen, aclara, que una característica muy importante de la recta es su dirección, relativa a un par de ejes dados 0X y 0Y, definida por medio del ángulo (...) que forma con el sentido positivo del eje horizontal 0X. Si α es agudo, la recta presentará una inclinación, de izquierda a derecha, hacia arriba, cuando α es obtuso, la inclinación de la recta, de izquierda a derecha, será hacia abajo.

En efecto, el coeficiente angular, identificado como α, es la inclinación de la recta. Si α es el ángulo que la recta forma con el eje OX, el coeficiente angular será entonces la tangente trigonométrica de α, es decir, coeficiente angular= tg α.

Ejemplos.

Hallar la pendiente m y el ángulo de inclinación de las rectas que unen los pares de puntos siguientes:

a. (-10,-5) y (6, 11)

I. Fórmula: $m=y_2-y_1/x_2-x_1= \Delta y/\Delta x$

II. Sustitución:

m= 11-(-5)/6-(-10)= 1 Pendiente buscada.

III. Inclinación de la recta

$\theta= tg^{-1}= 45°$.

Donde:

θ= ángulo teta (letra griega).
$= tg^{-1}1=$ inversa de la tangente de 1.

Luego,

$tg^{-1}1$— 45°, por lo que θ= 45°.

b. (2,3) y (1,4).

I. Fórmula: $m=y_2-y_1/x_2-x_1= \Delta y/\Delta x$

II. Sustitución:

m= (4-3)/(1 -2)= -1 Pendiente buscada.

III. Inclinación de la recta

$\theta= tg^{-1}= - 45°$,

-45+180= 135°.

c. (1,6) y (5, -2)

I. Fórmula: $m=y_2-y_l/x_2-x_l= \Delta y/\Delta x$

II. Sustitución:

m= -2-6)/5-1)= -2 Pendiente buscada.

III. Inclinación de la recta

$\theta=tg^{-1}-2=-63°.43'$,

-63.43+180=116°.34'

Paralelismo y perpendicularidad de dos rectas

Si dos rectas no verticales y distintas, son paralelas, sus pendientes son iguales; en cambio si son perpendiculares, la pendiente de una de ellas es igual al recíproco de la pendiente de la otra con signo contrario.

Si son paralelas, $m_1= m_2$.

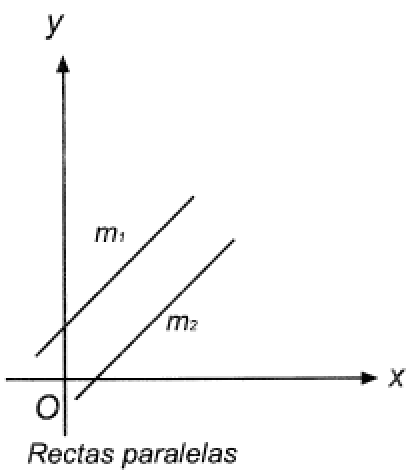


Figura 5.

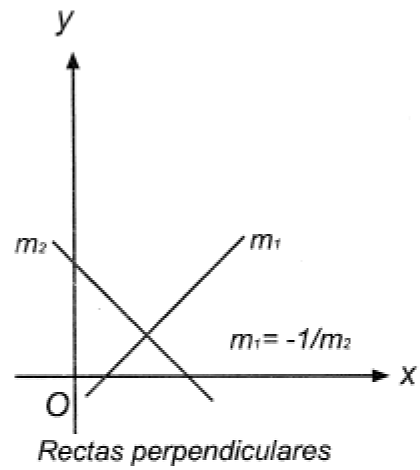


Figura 6.

Si son perpendiculares, m_1= -l/m_2.

El problema fundamental

La mayoría de los autores de obras que versan sobre temas relacionados con la Geometría analítica, coinciden en incluir dos aspectos esenciales en la conformación de su problema fundamental: ecuación matemática versus lugar geométrico.

Thomas, dice: *"La geometría analítica, que combina el álgebra y el cálculo con la geometría, se utiliza en dos tipos de problemas, a) Para estudiar las propiedades geométricas de una curva de la que se da su ecuación; b) para hallar la ecuación de una curva de la que se conocen sus propiedades geométricas".* (Thomas, George: Cálculo infinitesimal Geometría analítica. Editora AGUILAR, España, 1980, p. 466). (Comillas y cursiva son nuestras).

Charles H. Lehmann, clasifica los dos problemas fundamentales, así: *"I. Dada una ecuación interpretarla geométricamente, es decir, construir la gráfica correspondiente. II. Dada una figura geométrica, o la condición que deben cumplir los puntos de la misma, determinar su ecuación".* (Lehmann, Charles: ob. cit., p. 32). (Comillas y cursiva son nuestras).

Por su parte, Joseph H. Kindle, observa: *"Los dos problemas fundamentales de la geometría analítica son: 1. Dada una ecuación, hallar el lugar geométrico que representa. 2. Dado un lugar geométrico definido por determinadas condiciones, hallar su ecuación matemática".* (Kindle, Joseph H.: ob. cit., p. 12). (Comillas y cursiva son nuestras).

Allen, postula*: "Se tiene, pues un método analítico para estudiar las propiedades geométricas de las curvas y, recíprocamente, un método gráfico para representar las propiedades analíticas de las funciones".* (Allen: obra citada, p. 60). (Comillas y cursiva son nuestras).

Tratamiento del 1° problema: gráfica de una ecuación

Una gráfica o lugar geométrico, se edifica tomando como base el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación. Lehmann sugiere seis (6) pasos para construirla.

Primer paso: determinación de las intercepciones con los ejes coordenados.

Aquí podríamos tener dos opciones. Primera: que la curva intercepte al eje x. Segunda: que la curva intercepte al eje y. En el primer caso tenemos, entonces, una abscisa de un punto que está sobre el eje X. En el segundo caso tenemos, entonces, una ordenada de un punto que está sobre el eje Y. Por tanto, haciendo y=0 en la ecuación dada, nos dará las intercepciones con el eje X. Igualmente haciendo x=0, obtenemos las intercepciones con el eje Y.

Ejemplo: 5x+4y-20=0, determine las intercepciones con los ejes.

I. Hacemos y=0
5x+4(0)-20=0
5x+0-20=0
5x=20
x= 20/5=4, hemos obtenido la abscisa del punto P(x,y)=(4,0) que está ubicada en el eje X.

II. Hacemos x=0
5(0)+4y-20=0
0-4y-20=0
y=20/4=5, hemos obtenido la ordenada del punto P(x,y)=(0,5) que está ubicado sobre el eje Y.

Segundo paso: determinación de la simetría de la curva con respecto a los ejes coordenados y al origen.

"Dos puntos son simétricos con respecto a una recta si ésta es la mediatriz del segmento que los une. Dos puntos son simétricos con respecto a otro punto, si éste es el punto medio del segmento que los une (...)". (Kindle: obra citada, p. 12). (Comillas, cursiva y el punto suspensivo son nuestros).

Larson (Larson: ob. cit., p. 8), sobre simetría, apunta:

1. La gráfica de una ecuación en X e Y es simétrica respecto al eje Y si al sustituir x por -x en la ecuación se obtiene una ecuación equivalente.
2. La gráfica de una ecuación en X e Y es simétrica respecto al eje X si al sustituir y por -y en la ecuación resulta una ecuación equivalente.
3. La gráfica de una ecuación en X e Y es simétrica respecto al origen, si sustituir x por -x e y por -y en la ecuación, resulta una ecuación equivalente.

Ejemplos 1.

y= $4x^4$-x^2+8, determine las simetrías,

a) Con respecto al eje Y.

I. Procedemos a sustituir a x por -x en la ecuación dada,

$y= 4(-x)^4-(-x)^2+8.$
$y= 4(-x.-x.-x.-x)^{1+1+1+1}-(-x.-x)^{1+I}+8$

II. Simplificamos

$y=4x^4-x^2+8,$
por tanto la ecuación no se altera. La curva es simétrica respecto al eje Y.

b) Con respecto al eje X.

I. Procedemos a sustituir a y por -y en la ecuación dada,
$-y= 4(x)^4-(x)^2+8$, por lo que
$y= -4(x)^4+(x)^2-8$

Obviamente la ecuación se alteró. Por tanto la curva no es simétrica con respecto al eje X.

c) Con respecto al origen.

I. Procedemos a sustituir a x por -x, y por -y en la ecuación dada,
$-y= 4(-x)^4-(-x)^2+8.$
$-y= 4(-x.-x.-x.-x)^{,+1+1+l}-(-x.-x)^{l+1}+8$

II. Simplificamos

$-y=4(-x)^4-(-x)^2+8$
$-y= 4x^4-x^2+8$
$y= -4x^4+x^2-8,$
la ecuación se alteró. La curva no es simétrica respecto al origen.

Ejemplo 2.

$y= 5x^3-2x$, determine las simetrías con respecto al origen.
I. Procedemos a sustituir a x por -x, y por -y en la ecuación dada,
$y= 5x^3-2x$, por lo que
$-y= 5(-x)^3-2(-x)$

II. Simplificamos.

$-y= 5(-x.-x.-x)^{1+1+,}-2(-x)$
$-y= -5x^3+2x,$

Multiplicamos ambos miembros de la ecuación por -1 y obtenemos:

$y= 5x^3-2x$, la ecuación no se alteró, por tanto la curva es simétrica con respecto al origen.

Tercer paso: extensión o campo de variación de la curva.

En este caso, se tiene una idea de los intervalos de variación para los cuales los valores que adoptan x e y son valores reales. Dice Kindle (Kindlé, Joseph: ob., cit., p. 12), que los valores de una de las variables para los cuales la otra se hace imaginaria, carecen de sentido, por consiguiente su campo de variación es el de valores reales.

El procedimiento que se utiliza para determinar el campo de variación de la curva, consiste en resolver la ecuación original para y en términos de x, y de x en términos de y.

Ejemplo 1.

$5x+4y-20= 0$, determine la extensión de la curva.

I. Despejamos ay
$y= (20-5x)/4$

Cualquier valor real que asuma x determinará valores reales de y.

II. Despejamos a x
$x= (20-4y)/5$.

Cualquier valor real que asuma y determinará valores reales de x

Ejemplo 2:

$2x^2+2y^2-8= 0$, determine la extensión de la curva.

I. Despejamos a y

$2y^2= 8-2x^2$
$y^2= (8-2x^2)/2$
$y^2= 4-x^2$
$y= \pm\sqrt{4-x^2}$.

Si x es, en valor absoluto, mayor que 2, la expresión incluida en el radical es negativa e y es imaginario. Luego x no puede tomar valores mayores que 2 ni menores que -2, es decir,
$2 \leq x \geq -2$.

II. Despejamos a x

$2x^2= 8-2y^2$
$x^2= (8-2y^2)/2$
$x= \pm/ (4-y^2)$

Si y es, en valor absoluto, mayor que 2, la expresión dentro del radical es negativo y x es imaginario. Luego y no puede tomar valores mayores que 2 ni menores que -2, es decir,
$2 \geq y \geq -2$.

Cuarto paso: ecuaciones de las asíntotas verticales u horizontales.

La asíntota es una línea recta, que si es paralela al eje x, es una asíntota horizontal, si es paralela al eje y es una asíntota vertical.

El procedimiento que se utiliza para obtener las asíntotas, es el siguiente: usamos las ecuaciones definidas en la temática de la extensión de la curva y luego procedemos a hipotetizar, si es posible, la igualación a cero del denominador.

Ejemplo.

$xy= 6$, determine las asíntotas de la curva.

I. Despejamos a y.

$y= 6/x$,
haciendo $x= 0$, y es infinito, pues $y= 6/0= \infty$.

II. Despejamos a x.
$x= 6/y$,
haciendo $y= 0$, x es infinito, pues $x= 6/0= \infty$.

Por tanto, cuando $y= 0$ tenemos una asíntota horizontal, cuando $x= 0$ tenemos una asíntota vertical.

Quinto paso: cálculo de las coordenadas.

Las coordenadas se van a expresar en los valores que asumirán (x,y) dentro del campo de variación de la curva previamente definido y determinado, a fin de obtener una gráfica apropiada.

Ejemplo.

En el ejemplo 1, cuya ecuación es $5x+4y-20= 0$, del punto 3, el campo de variación de la curva sugiere que los valores reales que asumiría x, determinan en y valores reales, por tanto podemos construir la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4
y	5	3.75	2.5	1.25	0

Sexto paso: trazado de la curva.

El último paso consiste en plasmar, en el plano, las coordenadas de los puntos especificados en la tabla construida en el paso quinto..

Veamos ahora algunos ejemplos adicionales.

A) $18x^2+32y^2 = 288$, construya la curva.

Primer paso: intersecciones con los ejes.

Para $x= 0$,
$18(0)^2+32y^2 = 288$
$y=\pm\sqrt{9}-\pm 3$.

Para $y= 0$,
$1\,8x^2+32(0)^2 = 288$,
$x= \pm\sqrt{16}= \pm 4$.

Por tanto, la curva corta al eje x en los puntos de abscisas +4 y -4, y al eje y en los puntos de ordenadas+3 y-3.

Segundo paso: simetrías.

a) Con respecto al eje Y
$18x^2+32y^2 = 288$ Ecuación original
$18(-x)^2+32y^2 = 288$ Sustituir x por -x

$-x-x= x^{1+1}=x^2$
$18x^2+32y^2 = 288$ Ecuación equivalente
Como la ecuación no se alteró la curva es simétrica respecto al eje y.

b) Respecto al eje X
$18x^2+3\,2y^2 = 288$ Ecuación original
$18x^2+32(-y)^2 = 288$ Sustituir y por -y
$-y.-y= y^{1+1}=y^2$
$18x^2+3\,2y^2 = 288$ Ecuación equivalente

Como la ecuación no se alteró la curva es simétrica respecto al eje X.

Tercer paso: extensión o campo de variación de la curva.

I. Despejamos a y de la ecuación original
$y= (288-1\,8x^2)/32$
$y=\pm\sqrt{(9-0.5625x^2)}$

Si x es, en valor absoluto, mayor que 4, la expresión dentro del radical es negativa e y es imaginario. De donde x no puede tomar valores mayores que 4 ni menores que -4, es decir,
$4 \geq x \geq -4$.

Despejamos a x de la ecuación original

$x^2= (288-32y^2)/18$
$x=\pm\sqrt{(288-32y^2/18)}$

Si y es en valor absoluto, mayor que 3, la expresión subradical se hace negativa y x es imaginario.

Por tanto su campo de variación ha de ser:

$3 \geq y \geq -3$.

Cuarto paso: asíntotas.

Al despejar a y de la ecuación original, obtuvimos
$y^2 = (288-18x^2)/32$
Si x= 0 y no es infinito, por tanto no hay asíntota vertical.
Al despejar a x de la ecuación original obtuvimos
$x = \sqrt{(288-32y^2/18)}$
Si y= 0, x no es infinito, por tanto no hay asíntota horizontal.

Quinto paso: cálculo de las coordenadas.

Las coordenadas de los puntos pueden obtenerse a partir de
$y = \pm\sqrt{9-0.5625x^2}$, asignando a x valores comprendidos en el intervalo definido en el tercer paso.
Edifiquemos una tabla con los pares ordenados.

x	0	±1	±2	±3	±4
y	±3	±2.8	±2.6	±1.98	0

Sexto paso: trazado de la curva.

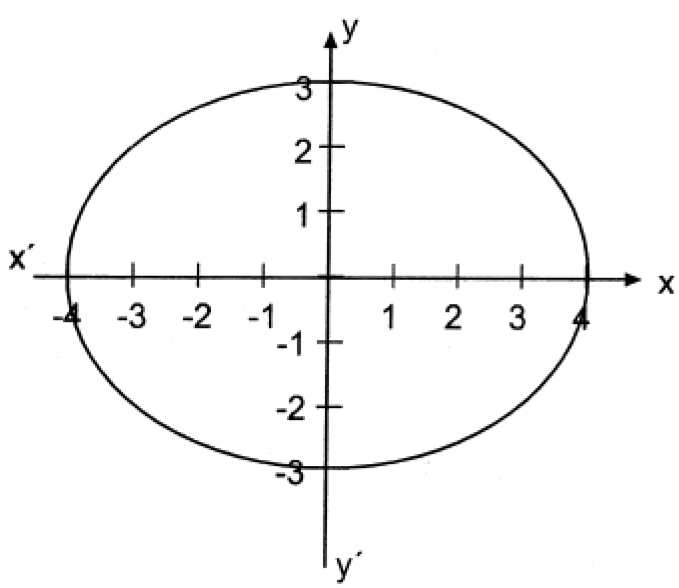


Figura 7.

B) 2xy-4y-2x= 0, construya la curva.

Primer paso: intersecciones con los ejes.

Para $x= 0$,

$2xy-4y-2x= 0$	Ecuación original
$2(0)y-4y-2(0)= 0$	Sustitución
$y= 0$	Despejando a y

Para $y= 0$

$2xy-4y-2x= 0$	Ecuación original
$2x(0)-4(0)-2x= 0$	Sustitución
$x= 0$	Despejando a x

Segundo paso: simetrías.

a) Con respecto al eje Y.

$2xy-4y-2x= 0$	Ecuación original
$2(-x)y-4y-2(-x)= 0$	Sustituir x por -x
$-2xy-4y+2x= 0$	Simplificando

Como la ecuación original se alteró, la curva no es simétrica respecto al eje Y.

b) Respecto al eje X.

$2xy-4y-2x= 0$	Ecuación original
$2x(-y)-4(-y)-2x= 0$	Sustituir y por -y
$-2xy+4y-2x= 0$	Simplificando

Como la ecuación original se alteró la curva no es simétrica respecto al eje X.

c) Simetría respecto al origen

$2xy-4y-2x= 0$	Ecuación original
$2(-x)(-y)-4(-y)-2(-x)= 0$	Sustituir x por -x, y por -y
$2xy+4y+2x= 0$	Simplificando

La ecuación original se alteró, por tanto, no hay simetría respecto al origen. Tercer paso: extensión o campo de variación de la curva.

$2xy-4y-2x= 0$	Ecuación original
$y= x/x-2$	Despeje de y

Para valores reales de x, *y* no se hace imaginario.

$2xy-4y-2x= 0$	Ecuación original
$x=2y/y-l$	Despeje de x

Para valores reales de y, x no se hace imaginario.

Cuarto paso: asíntotas.

Al despejar a y de la ecuación original, obtuvimos y= x/x-2. Para x=2, y es infinito, pues 2/2-2= 2/0= ∞.

Despejando a x, obtuvimos x= 2y/y-l. Para y= 1, x es infinito, pues 2(1)/1-1= 2/0= °°. Se infiere, entonces, que x-2= 0 es una ecuación que representa una asíntota vertical; y-l= 0 es una ecuación que representa una asíntota horizontal..

Quinto paso: cálculo de las coordenadas.

Tomamos la ecuación original y le asignamos a x, valores conforme al campo de variación de la curva; de donde surge la siguiente tabla:

X	0	i	2	3	4	5	-1	-2	-3	-4
y	0	-i	oo	3	2	1.7	0.3	0.5	0.6	0.7

Sexto paso: trazado de la curva.

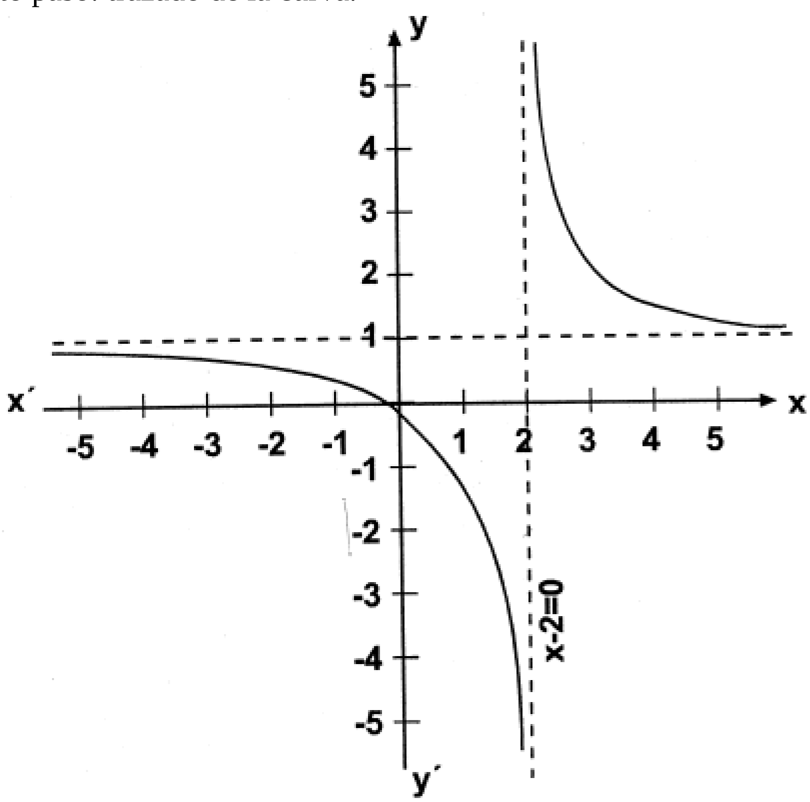


Figura 8

Tratamiento del segundo problema: la ecuación de un lugar geométrico

Al investigar el procedimiento que se utiliza para obtener una ecuación, de un lugar geométrico dado, consultamos varios textos. En la “Geometría analítica” de Lehmann, la metodología aparece suficientemente desmenuzada.

Para comprender cabalmente dicho procedimiento, Lehmann, parte de la siguiente definición: *“Se llama ecuación de un lugar geométrico plano a una ecuación de la forma f(x,y)= 0, cuyas soluciones reales para valores correspondientes de x e y son todas las coordenadas de aquellos puntos, y solamente de aquellos puntos, que satisfacen la condición o condiciones geométricas dadas que definen el lugar geométrico”.* (Lehmann: ob., cit., págs. 50 y 51**)**. (Comillas y cursiva son nuestras).

Resumidamente los pasos que se deben dar para determinar la ecuación de un lugar geométrico, son los siguientes:

1) El punto P, es un punto del lugar geométrico.

2) Se expresa analíticamente las condiciones geométricas dadas a través de una ecuación, cuyas variables son x e y.

3) se procede a simplificar los términos de la ecuación.

Ejemplos

A. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que se conserva siempre equidistante de los dos puntos A (1, -2) y B (5, 4).

Solución

Sea P(x, y) un punto del lugar geométrico, luego P debe satisfacer la condición geométrica de que los segmentos PA y PB son iguales en longitud, es decir:

$|PA| = |PB|$

Para expresar analíticamente el problema, partimos del teorema de la distancia entre dos puntos, que es igual a

$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
$|PA| = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$
$|PA| = \sqrt{(x-l)^2+(y+2)^2}$ Sustitución
$|PB| = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$
$|PB| = \sqrt{(x-5)^2+(y-4)^2}$, Sustitución
$\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2} = \sqrt{(x-5)^2+(y-4)^2}$ Igualación

La expresión anterior constituye la condición analítica de la condición geométrica. Desarrollamos, trasponemos términos y simplificamos, del modo siguiente:

$(x-l)^2 = x^2-2(x)(l)+l^2 = x^2-2x+l$
$(y+2)^2 = y^2+2(y)(2)+2^2 = y^2+4y+4$

sumando los resultados y reordenando
$x^2-2x+l + y^2+4y+4 = x^2+ y^2-2x+4y+5$,

luego,

$\sqrt{(x2+y2-2x+4y+5)}$ Primer miembro de la expresión matemática descompuesta.

$(x-5)^2= x^2-2(x)(5)+5^2= x^2-10x+25$
$(y-2)^2= y^2-2(y)(2)+2^2= y^2-4y+4$

sumando los resultados y reordenando

$x^2-10x+25+y2-4y+4= x^2+y^2-10x-4y+29$

luego

$\sqrt{(x^2+y^2-10x-4y+29)}$ Segundo miembro de la citada expresión matemática.

$\sqrt{(x^2+y^2-2x+4y+5)}= /(x^2+y^2-10x-4y+29)$ Igualación
$x^2+y^2-2x+4y+5= x^2+y^2-10x-4y+29$ Eliminación del radical

$8x+8y-34= 0$ Simplificando
$2x+2y-8.5= 0$ Dividiendo todos los términos por 4, hemos obtenido la ecuación matemática buscada.

B. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto P(x, y) que equidiste de los dos puntos (-3, y (7, 5).

Primer paso: sea P(x, y) un punto del lugar geométrico, luego P debe satisfacer la condición geométrica de que los segmentos PP_1 y PP_2 son iguales en longitud, es decir:
$|PP_1|= |PP_2|$.

Segundo paso: partimos del teorema de la distancia entre dos puntos, que es igual a
$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2+(y_2 - y_1)^2}$, de donde,

$| PP_1 | = \sqrt{(x+3)^2+(y-l)^2}$ Sustitución
$| PP_2 |= \sqrt{(x -7)^2+(y -5)^2}$ Sustitución
$\sqrt{(x -1)^2+(y +2)^2}= / (x -5)^2+(y -4)^2$ Igualación

La expresión anterior constituye la condición analítica de la condición geométrica. Desarrollamos, trasponemos términos y simplificamos, del modo siguiente:

$(x+3)^2= x^2+6x+9$ $(y -1)^{2==}$ y^2-2y+l $x^2+6x+9+ y^2-2y+l$

$\sqrt{(x^2+y^{2+}6x-2y+10)}$ Primer miembro de la expresión matemática descompuesta.

$(x-7)^2= x^2-14x+49$
$(y -5)^2= y^2-10y+25$

x^2-14x+49+y^2-1y+25

√(x^2+y^2-14x-10y+74) Segundo miembro de la expresión matemática descompuesta.

√(x^2+y^2+6x-2y+10)= V (x^2+y^2-14x-10y+74) Igualación
x^2+y^2+6x-2y+10= x^2+y^2-14x-10 y+74 Eliminación del radical
20x+8y-64= 0 Simplificando
5x+2y-16= 0 Dividiendo todos los términos por 4, hemos obtenido la ecuación matemática buscada.

C. Hallar la ecuación de la recta:

a) Situada 2 unidades por debajo del eje X.

y+2= 0 Esto indica que la recta es paralela al eje X, luego Solución

b) Paralela al eje Y y a 4 unidades del punto (-1,1).

x= -1, luego x= -1+4= 3 x-3= 0,

a) Paralela al eje Y y que corte al eje X 6 unidades a la izquierda, del origen.
x= -6, es decir, x+6= 0 Ecuación de la recta.

b) Paralela al eje X y que corte al eje Y 5 unidades por encima del origen.
y= 5, es decir, y-5= 0 Ecuación de la recta

c) Paralela y a la derecha de la recta x+6= 0 y que diste de ella 8 unidades.

x= -6+8= 2
x= 2 Ecuación de la recta.
Paralela y por debajo de la recta y= 3 y que diste de ella 7 unidades.

y= 3-7= -4
y= -4 Ecuación de la recta.

i) Hallar la ecuación de la recta que pase por el punto (2, 4) y cuya pendiente es 1/4.

m= y_2-y_1/x_2-x_1
1/4= y-4/x-2
y-4= l/4(x-2)
4(y-4)=(l)(x-2)
4y-16= x-2
-4y+16=-x+2
x-2-4y+16= 0
x-4y+14= 0.

j) La pendiente de la recta que pasa por los puntos (3, 4) y (1, 5) es igual a la pendiente de la recta que pasa por los puntos (1, 5) y (x, y). Encuentre la ecuación de la recta.
$m_1=m_2$
m_1= 5-4/l-3= 1/-2
m_2=y-5/x-l

luego,

l/-2=(y-5)/(x-l)
(x-l)(l)=-2(y-5)
x+2y-11= 0

k) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (2,2) y es perpendicular a la recta que une los puntos (4, 3) y (2, 4).

Si dos rectas son perpendiculares, la pendiente de una de ellas es igual al recíproco, con signo contrario, de la pendiente de la otra.

La pendiente de la recta que pasa por (4,3) y (2,4) es, m= 4-3/2-4= -1/2.

La pendiente de la recta, cuya ecuación es buscada, es entonces, m= 2.

Sea (x, y) un punto genérico de la recta cuya ecuación buscamos. Sustituyendo en la fórmula de la pendiente, tenemos:

2= (y-2)/(x-2)
2(x-2)= y-2
2x-y-2= 0.

l) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (-3, 5) y es paralela a la recta que une los puntos (-1, 4) y (4, 6).

Si dos rectas son paralelas, la pendiente de una de ellas es igual a la pendiente de la otra.

6-4/4+1 = y-5/x+3
(x+3)(6-4)=(y-5)(4+l),

después de simplificar,

2x-5y+31= 0.

m) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos P(x,y) cuya distancia al punto fijo A(3, -2) sea igual a 7.

Distancia PC= 7, luego d= $/(x-3)^2+(y+2)^2=7$

Procedemos a elevar al cuadrado y a simplificar.

$\sqrt{(x-3)^2} = \sqrt{(x^2-6x+9)}$
$\sqrt{(y+2)^2} = \sqrt{(y^2+4y+4)}$
$\sqrt{(x^2-6x+9+y^2+4y+4)} = 7$
$(x^2-6x+9+y^2+4y+4) = 7^2$,

después de simplificar,

$x^2+y^2-6x+4y= 36$ Ecuación del lugar geométrico definido.

Este lugar geométrico es una circunferencia de centro el punto P(3, -2) y cuyo radio es 7.

La línea recta

El significado de una línea recta se asocia frecuentemente a la distancia más corta que une dos puntos, sin embargo, una conceptualización más rigurosa la relaciona con el lugar geométrico de los puntos coordenados, tales que seleccionados dos puntos diferentes P,(x, y) y P_2(x, y) en el plano, la magnitud de la pendiente m se mantiene constante.

Las líneas rectas más conocidas son: verticales, horizontales, perpendiculares y paralelas. La ecuación Ax+By+C=0 se conoce con el nombre de ecuación general de primer grado con dos variables (el grado de una variable es el valor de la potencia entera positiva a que está elevada la variable). (Draper y Klingman. Matemáticas para administración y economía. Impreso en México, CEPSA, 1980, p. 23). A, B, y C son constantes, en cambio, x e y son variables.

Discutamos las distintas formas que puede adoptar la ecuación de la recta:

Forma punto-pendiente

Si una recta pasa por un punto dado P(x, y) y tiene una pendiente dada m, su ecuación ha de ser: $y-y_1= m(x-x_1)$. Esta ecuación no aplica para el caso de una recta que sea paralela al eje y en el sistema coordenado rectangular, debido a que carece de pendiente.

Ejemplo 1.

Dados $(x_1, y_1)= (-1,4)$ y pendiente m= -3, calcule la ecuación de la recta.

I. $y-y_1= m(x-x_1)$ que es la ecuación de la forma punto-pendiente de una línea recta.

II. Sustitución y simplificación

y-4= -3(x-(-l)
y-4= -3x-3
3x+y-4+3= 0
3x+y-1 = 0 Ecuación buscada.

Ejemplo 2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por (2, 3) y tiene un ángulo de inclinación de 45°.

l° paso: planteamos la ecuación punto-pendiente.
$y-y_1= m(x-x_1)$

2° paso: calculamos la pendiente con esta fórmula
$m= tg\ \theta$
$\theta= 45°$
$m= tg\ 45°= 1.$

3º paso: sustituimos a x_1, y_1 por sus valores.

$y-3= l(x-2)$
$y-3= x-2$
$x-2-y+3= 0$

$x-y+l= 0$ Ecuación buscada.

Forma pendiente-ordenada en el origen

Kindle, define esta modalidad de la ecuación de la recta en forma muy precisa: *"La ecuación de la recta de pendiente m y que corta al eje y en el punto (o, b) -siendo b la ordenada en el origen es, y= mx+b"*. (Kindle, Joseph: ob. cit., p. 22). (Comillas y cursiva son nuestras).

Ejemplo. Hallar la ecuación de la recta que pasa por (0,4) y tiene pendiente -1.

Primer paso: postulamos la fórmula

$y= mx+b$

Segundo paso: sustituimos

$y= -x+4$

Tercer paso: reordenamos

$x+y-4= 0$ Ecuación buscada.

Ejemplo. Hallar la ecuación de la recta que pasa por (0, 3) y m= 2

$y= mx+b$
$y= 2x+3$
$2x+3-y= 0$

$2x-y+3=0$ Ecuación buscada.

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Cuando tenemos una recta o un lugar geométrico definido por dos puntos coordenados, la ecuación adquiere la forma $y-y_1= (y_2-y_1/x_2-x_1)(x-x_l)$.

Ejemplo. Dados los puntos $(x_1, y,)= (-3, 2)$ y $(x_2, y_2)= (2, 1)$, determine la ecuación lineal.

I. Planteamos la ecuación de la forma de dos puntos para la línea recta

$y-y_1=(y_2-y_1/x_2-x_1)(x-x_1)$.

II. Especificación de los datos dados

$y_1=2$
$y_2= i$
$x_1= -3$
$x_2= 2$

III. Sustitución en la ecuación de la forma de dos puntos

y-2= l-2/2-(-3) y-2= -l/5(x+3)
5(y-2)= -x-3 5y-10= -x-3
x+5y-7= 0 Ecuación buscada.

Abscisa y ordenada en el origen

Larson, dice*: "Dos tipos de puntos solución especialmente útiles son aquellos cuya coordenada x o y se anula. Tales puntos se denominan intersecciones con los ejes porque son los puntos en los que la gráfica corta (...) el eje X o el eje Y. Un punto del tipo (a, 0) es una x-intersección de la gráfica de una ecuación si es un punto solución de ésta. Para determinar las x-intersecciones de una gráfica, igualamos y a cero y resolvemos la ecuación en x resultante. Análogamente, un punto del tipo (0, b) es una y-intersección de la gráfica de una ecuación si es un punto solución de la misma. Para hallar las y-intersecciones de una gráfica, igualamos x a cero y resolvemos la ecuación en y resultante".* (Larson: obra citada, p. 7). (Comillas, cursiva y el punto suspensivo son nuestros).

Kindle, afirma: *"La ecuación de la recta que corta a los ejes coordenados x e y en los puntos (a, 0) -siendo a la abscisa en el origen -y (0, b)- siendo b la ordenada en el origen-, respectivamente, es x/a+y/b=l".* (Kindle: obra citada, p. 22). (Comillas y cursiva son nuestras).

Ejemplos:

a) 2x+y-3=0

I. En la ecuación 2x+y-3=0 hacemos x igual a cero y despejamos a y

2(0)+y-3=0
0+y-3=0
y=3,

dando lugar a la intersección con el eje Y, expresada en (0, 3).

II. En la ecuación 2x+y-3=0 hacemos y igual a cero y despejamos a x

2x+(0)-3=0
x=3/2=1.5,

dando lugar a la intersección con el eje X, expresada en (1.5, 0).

III. Procedemos a graficar las intersecciones con los ejes coordenados y la recta que los une.

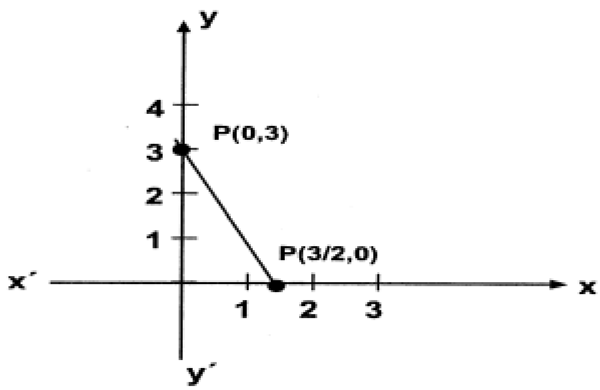


Figura 9.

b) Dados $(x_{1,}\ y_1)$= (0, -4) y (x_2, y_2)= (6, 0) calcule la ecuación de la línea recta.

I. El punto (x_1, y_1) es la intersección con el eje Y. Se expresa como (0,b), siendo b distinta de cero (0). El punto (x_2, y_2) es la intersección con el eje X. Se expresa como (a, 0), siendo a distinta de cero (0); por tanto:

Fórmula: x/a+y/b= 1
II. Sustitución en la ecuación x/a+y/b= 1

donde a= 6 y b= -4
(x/6)+(y/-4)=l Ecuación buscada.

Ecuaciones de líneas rectas paralelas y perpendiculares

Dos rectas no verticales distintas son paralelas, si sus pendientes m son iguales, es decir, m_1= m_2. En cambio, dos rectas no verticales son perpendiculares si sus pendientes son una opuesta de la inversa de la otra, es decir, m_1= -l/m_2.

Ejemplos:

Hallar las ecuaciones generales de las rectas que pasan por el punto (x_l, y_1)=(1, -2) y son

a) paralela a la línea recta que se corresponde con la ecuación $3x+y-4= 0$

b) perpendicular a la línea recta que se corresponde con la ecuación $3x+y-4= 0$

I. De la ecuación $3x+y-4= 0$, despejamos a y, para transformarla en una ecuación de forma punto-pendiente
$y= -3x+4$

II. Es evidente que en la ecuación anterior, la pendiente $m= -3$.

III. Si las líneas rectas son paralelas, sus pendientes son iguales, es decir, $m_1= m_2$.

IV. Si $m_1= m_2$ es obvio que m_2 es igual a -3.

V. Planteamos la ecuación punto-pendiente $y-y_1= m(x_1-x_2)$, donde

$y_1 = -2$
$x_1 = 1$
$m= -3$

VI, Sustitución

$y-(-2)=-3(x-l)$

VII. Simplificación

$y+2= -3x+3$
$y+2= -3x+3$
$3x+y+2-3= 0$

$3x+y-1=0$ Forma general

Trabajemos ahora con el punto (b)

I. $y= -3x+4$

II. $m= -3$

III. $m_2=-l/m_1= -l/3= 1/3$

IV. Ecuación punto-pendiente

$y-y_1= m(x-x_1)$

V. Sustitución

$y-(-2)= l/3(x-l)$

VI. Simplificación

3(y+2)= x-1
x-l= 3(y+2)
x-l-3y-6= 0
x-3y-7= 0   Forma general

Uso de las líneas rectas por la ciencia económica

Curvas de demanda lineal

La representación gráfica, en el primer cuadrante del sistema coordenado, de la relación entre el precio y la cantidad comprada de un artículo es a lo que se llama tabla o curva de demanda. (Consultar a Samuelson, Paul: Curso de economía moderna. Editora Aguilar, Madrid, decimosexta edición- quinta reimpresión 1972, p. 65).

La curva de demanda se puede representar de manera gráfica en un diagrama, midiendo los precios en el eje Y y la cantidad demandada del bien, en el eje X.

"(...) A causa de la relación inversa entre la cantidad y el precio, la curva se inclina hacia abajo...por lo que podríamos hablar de una ley de la demanda descendente a medida que aumenta el precio. Esta ley se verifica en casi todos los artículos: trigo, máquinas eléctricas de afeitar, algodón y gasolina". (Ibid., p. 66). (Comillas, cursiva y el punto suspensivo son nuestros).

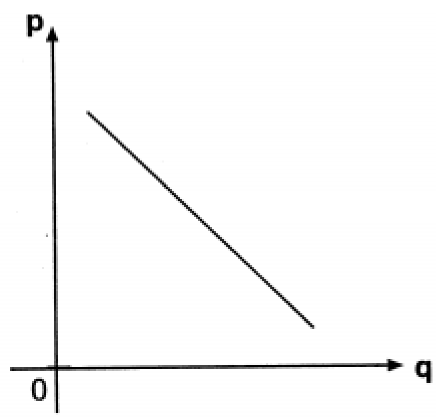


Figura 10.

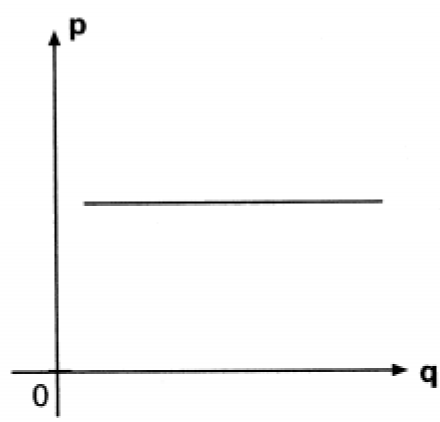


Figura 11.

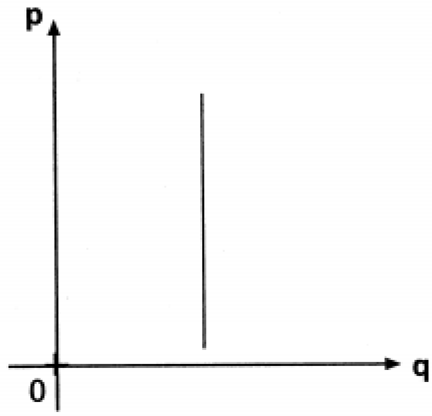


Figura 12.

Esta ley de la demanda descendente, da lugar a que la pendiente m de la curva de demanda, sea negativa. Ahora cuando la pendiente m de la curva es cero, el precio es constante y en cambio cuando la pendiente m no está definida la demanda es constante. Estos tres casos se pueden observar en los gráficos expuestos arriba.

Ecuación de demanda lineal

Ahora nos interesa determinar una ecuación matemática, dada una curva de demanda o las condiciones que reúnen los puntos que la integran. Estamos frente al segundo problema fundamental de la Geometría analítica.

Una forma de problematizar esta temática es planteando distintos niveles de demanda, frente a distintos niveles de precios.

Ejemplos:

a) Si el precio es $50 se venden 5 sillas, aumentando a 10 cuando el precio desciende a $40. ¿Cuál es la ecuación de la demanda?

Primer paso: clasificación de datos (el precio es representado por y, mientras que la cantidad demandada es representada por x).
$P(x_1, y_1)= (5, 50)$
$P(x_2,y_2)=(10,40)$.

Segundo paso: determinamos la forma de la ecuación de la recta que se ajuste a los datos dados. En este caso es la forma cartesiana (la ecuación de la recta que pasa por dos puntos), cuya fórmula es $y-y_1= (y_2-y_1/x_2-x_1)(x-x_1)$

Tercer paso: sustitución $y-50= (40-50/10-5)(x-5)$

Cuarto paso: simplificación y reordenamiento

$y-50= (-10/5)(x-5)$

y-50= -2(x-5)

y-50= -2x+10

2x-10+y-50= 0

2x+y-60= 0 Ecuación de demanda lineal

b) Cuando el precio es $70 no se vende silla alguna. Cuando la silla es gratis, la demanda es 40. ¿Cuál es la ecuación de la demanda?

Primer paso: clasificación de datos. P(0, b)= (0, 70)

P(a, 0)= (40, 0)

Segundo paso: forma apropiada de la ecuación de la recta (en este ejemplo, abscisa y ordenada en el origen).

Tercer paso: fórmula y sustitución.
x/a+y/b=l
x/40+y/70=l
x/40+y/70= 1 Ecuación de demanda lineal.

c) Se compran anualmente 13 millones de barriles de petróleo, insumo vital para la industria nacional, sin importar el precio.

Primer paso: clasificación de datos

x= 13
y= una constante

Segundo paso: ecuación

x= 13

Ecuación de oferta lineal

La representación gráfica, en el primer cuadrante del sistema coordenado, de la relación entre el precio y la cantidad ofrecida de un artículo, es una tabla o curva de oferta.

La curva de oferta se gráfica de manera similar a la curva de demanda.

La pendiente m de la curva de oferta es positiva, lo que quiere decir que al aumentar el precio aumenta la cantidad ofrecida, pero éste disminuye cuando el precio baja. Si la pendiente es cero, el precio es constante; si la pendiente no está definida, la cantidad ofertada es constante.

Nos interesa determinar la ecuación matemática de la curva de oferta, dada dicha curva o las condiciones que reúnen los puntos que la integran. Al igual que en el caso de la demanda, estamos frente al segundo problema fundamental de la Geometría analítica.

Ejemplos:

a) Cuando el precio es \$20, se ofertan 25 pizarrones. Cuando el precio aumenta a \$30, se ofertan 50. Determine la ecuación de la oferta lineal.

Primer paso: ecuación de la forma de dos puntos de la recta

$y-y_1= (y_2-y_1/x_2-x_1)(x-x_1)$

Segundo paso: clasificación de los datos.

Precio (y,)= \$20

Cantidad ofrecida (x,)= 25

Precio (y_2)= \$30

Cantidad ofrecida (x_2)= 50

Tercer paso: sustitución.

$y-20= (30-20/50-25)(x-25)$
$y-20= (10/25)(x-25)$
$(25)(y-20)= 10(x-25)$
$25y-500= 10x-250$
$10x-250-25y+500= 0$
$10x-25y+250= 0$

$2x-5y+50= 0$ Ecuación de oferta lineal.

b) Cuando el precio es \$10, se oferta cero (0) cuaderno, por cada aumento de \$2 en el precio, se ofertan 5 cuadernos adicionales para el mercado. Determine la ecuación de la oferta lineal.

Primer paso: en virtud de estos datos

$y_1= \$10= b$
$x_1= 0$
$y_2-y_1= \$2$
$x_2-x_1= 5.$

Usaremos la ecuación pendiente-intersección de la recta

$y=mx+b$

Segundo paso: sustitución

y= 2/5(x+10)
y-10= 2/5x 5 (y-10)= 2x
2x-5y+50= 0 Ecuación de oferta lineal

c) De acuerdo al contrato entre COPY, S.A., y CENTROMATICA, S.A., la primera le pagará a la segunda $1,000 mensuales, por el servicio de mantenimiento, sin tomar en cuenta el número de equipos atendidos. Determine la ecuación de la oferta lineal.

I. Estamos frente a una curva de oferta lineal, cuya pendiente m es cero (0), por tanto el precio es constante.

II. La ecuación es
$y=y_1$= 1000.

Equilibrio de mercado

El equilibrio de mercado se verifica en el punto en que la cantidad de un artículo demandado es igual a la cantidad en oferta. Algebraicamente la cantidad y el precio de equilibrio se hallan resolviendo simultáneamente las ecuaciones de oferta y demanda.

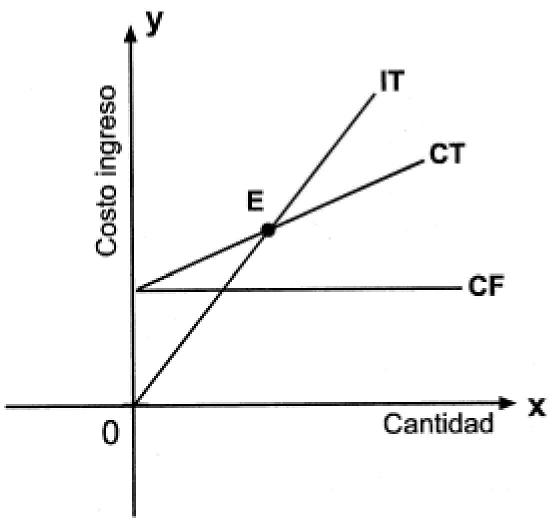


Figura 13.

Ejemplo. Hallar el punto de equilibrio de las siguientes ecuaciones de oferta y demanda.
y= 60-2x ecuación de demanda y= 10+0.4x ecuación de oferta.

Primer paso: igualación

60-2x= 10+0.4x 60-10= 0.4x+2x 50= 2.4x
x= 50/2.4= 20.833333

Segundo paso: sustituyendo en la ecuación de demanda

60-2(20.833333)= 18.33333

respuestas

18.33 Precio de equilibrio

20.83 Cantidad de equilibrio.

Punto de equilibrio

Para llevar a cabo este análisis, los costos se dividen en fijos y variables. Los fijos permanecen constantes a todos los niveles de producción. Los variables aumentan o disminuyen, según aumente o disminuya el nivel de producción. El costo total es la suma de los costos fijos más los costos variables.

El costo fijo es una recta cuya intersección con (Y), representa un costo constante y expresa una pendiente equivalente a cero. El costo total es una recta cuya intersección con (Y) es igual al costo fijo y su pendiente es igual al aumento en costo variable, por unidad de aumento en la producción. El ingreso total, derivado de las ventas, su intersección con (Y) se ubica en el origen de coordenadas y su pendiente es igual al precio, hipotetizando que éste sea constante. El punto de equilibrio (E) es aquel definido por la intersección de las rectas del costo total e ingreso total, donde la empresa ni gana ni pierde.

Ejemplo.

Una empresa vende su producto a $500 por unidad.

a) Calcule el ingreso por venta de 1000 unidades.
b) Calcule la ecuación de ingreso.
c) Los costos fijos son iguales a $5,000.
d) Costos variables: 40% del ingreso total. ¿Cuál es el costo total?
e) Determine el nivel de producción de equilibrio.
f) Cantidad para la que se cubre el costo fijo.

Respuesta (a)

IT= PQ
500(1000)= $500,000

Respuesta (b)

IT= PQ
IT= 500Q

Respuesta (d)
CV= (0.40)(IT)
= 0.40(500,000)= $200,000 CT= CF+CV

CT= 5,000+200,000= $205,000

Respuesta (e)

Punto de equilibrio: IT= CT 500,000= 5000+0.40(500Q)
Q= (500,000-5,000)/200
Q= 2,475

Respuesta (f)

5000= 500Q
Q= 5000/500= 10

La función consumo

En el análisis de la renta nacional, también se usa con mucha frecuencia todo el instrumental de las líneas rectas, bajo el supuesto de una función consumo lineal. Dicho análisis se fundamenta en las siguientes hipótesis:

a) Existencia de un consumo autónomo, en ausencia de renta alguna.
b) El consumo es una función de la renta disponible, C= f(Yd).
c) Cuando la renta disponible crece, aumenta el consumo pero en una proporción menor.
d) La proporción de un incremento en renta disponible, que será consumido es constante. Dicha proporción se conoce como la propensión marginal al consumo.

Las hipótesis enunciadas se pueden expresar en la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta C= a+bYd

donde:

C= consumo.
a= consumo autónomo.
b= propensión marginal a consumir.
Yd= renta disponible.

Ejemplo. A cada nivel de renta disponible, el consumo es igual a $5,000 más 75% de renta disponible.

a) Cuál es la ecuación que expresa esta relación?
b) Cuál es el consumo total cuando la renta disponible es $100,000?

Respuesta (a)
C= 5,000+0.75Yd

Respuesta (b)
C= 5,000+0.75(100,000)= $80,000

Curvas no lineales

Las curvas no lineales que discutiremos son: la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola equilátera, las cuales son de aplicación vasta en la economía, particularmente para determinar funciones de oferta y demanda.

La circunferencia

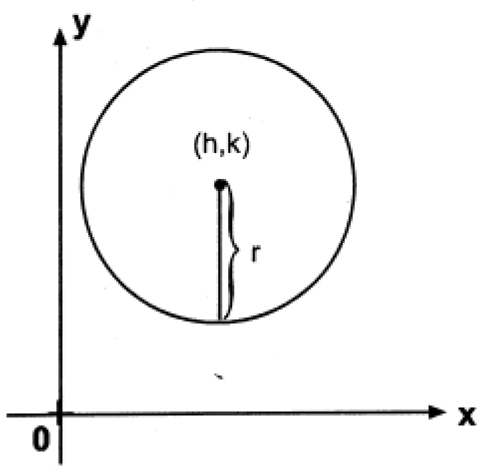


Figura 14

Lehmann, dice: *"(...) la circunferencia es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo de ese plano".* (Lehmann: obra citada, p. 99). (Comillas, cursiva y el punto suspensivo son nuestros). Igualmente, Haaser, dice: *"Una circunferencia es el conjunto de todos los puntos a una distancia dada de un punto dado, el centro. La distancia dada desde el centro a los puntos del conjunto se llama radio de la circunferencia".* (Haaser: ob. cit., p. 229). (Comillas y cursiva son nuestras).

Kindle, en cambio, asevera: *"Una circunferencia, analíticamente, es una ecuación de segundo grado con dos variables".* (Kindle: obra citada, p. 35). (Comillas y cursiva son nuestras).Y añade: *"Una circunferencia queda completamente determinada si se conocen su centro y su radio".* (Ibid., p. 35). (Comillas y cursiva son nuestras). Alien, remacha el concepto de este modo: *"La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano situados a la misma distancia de un punto fijo. El punto fijo se denomina centro, y la distancia constante, radio de la circunferencia".* (Allen: obra citada, p. 73). (Comillas y cursiva son nuestras).

De estas conceptualizaciones inferimos las siguientes verdades: 1) es un lugar geométrico que tiene varios puntos; 2) existe un punto fijo llamado centro; 3) los puntos están situados a una distancia constante del centro; 4) a esa distancia se le llama radio.

Cuando la circunferencia tiene por centro el punto (h, k) y por radio la constante r, su ecuación es $(x-h)^2+(y-k)^2= r^2$.

Ejemplo 1. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro (-3,4) y radio 2.

Primer paso: postulamos la ecuación de la circunferencia.

$(x-h)^2+(y-k)^2= r^2$.

Segundo paso : sustitución.

$(x+3)^2+(y-4)^2 =(2)^2$
$(x+3)^2+(y-4)^2 =4$ Ecuación de la circunferencia.

También se puede expresar así:

Tercer paso: desarrollamos los cuadrados

$(x+3)^2= x^2+6x+9$
$(y-4)^2= y^2-8y+16$

Cuarto paso: suma algebraica de ambos resultados y reordenando

$x^2+y^2+6x-8y+25= 0$ Ecuación de la circunferencia.

Ejemplo 2. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro (-1, 2) y radio 5.

Primer paso: datos

h= -1, k= 2, r.= 5

Segundo paso: fórmula $(x-h)^2+(y-k)^2= r^2$

Tercer paso: sustitución

$(x+l)^2+(y-2)^2= 5^2$

Cuarto paso: ecuación de la circunferencia

$(x+l)^2+(y-2)^2= 25$ Ecuación de la circunferencia.

Si el centro es el origen de coordenadas, la ecuación toma la forma $x^2+y^2= r^2$, mientras que su ecuación general es $x^2+y^2+Dx+Ey+F= 0$.

Dice Joseph H. Kindle (Obra citada, p. 35), que la circunferencia se puede expresar por medio de una ecuación del tipo $x^2+y^2+Dx+Ey+F= 0$.

Si escribimos esta ecuación en la forma $x^2+Dx+y^2+Ey+F= 0$

sometiéndola a un conjunto de operaciones (empleando el método de completar cuadrado), con el objeto de recuperar la ecuación ordinaria de la circunferencia, se obtiene

$x^2+Dx+D^2/4+y^2+Ey+E^2/4= D^2/4+E^2/4-F$
o bien
$(x+D/2)^2+(y+E/2)^2= D^2+E^2-4F/4.$

El centro es el punto (-D/2, -E/2) y el radio r= $1/2/D^2+E^2-4F$.
Si $D^2+E^2-4F= 0$, el radio es cero. Es un círculo nulo.
Si $D^2+E^2-4FZ\_ 0$, la circunferencia es imaginaria.

Ejemplo 3.

Hallar las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia $x^2+y^2-2x+4y-10=$ 0.
Primer paso: aplicamos el procedimiento de sumar y restar los términos adecuados para completar cuadrados, a partir de

$x^2+Dx+D^2/4+y^2+Ey+E^2/4= D^2/4+E^2/4-F$
o bien
$(x+D/2)^2+(y+E/2)^2= D^2+E^2-4F/4.$

Segundo paso: identificación

D= -2
E=4
F= -10

Tercer paso: fórmula a utilizar y sustitución

$(x+D/2)^2+(y+E/2)^2= D^2+E^2-4F/4,$
$(x+(-2)/2)^2+(y+4/2)^2= (-2)^2+(4)^2-4(-10)/4$
$(x-l)^2+(y+2)^2= 4+16+40/4.$
$(x-l)^2+(y+2)^2=15$ Ecuación de la circunferencia.

Cuarto paso: aplicación de la fórmula del centro.

(-D/2, -E/2),
sustituyendo:
-(2)/2, -4/2)
(1, -2), es decir, h= 1, h= -2 Centro de la circunferencia.

Sexto paso: aplicación de la fórmula del radio.

r= $1/2\sqrt{}D^2+E^2-4F$,
sustituyendo
r= $1/2\sqrt{}(-2)^2+4^2-4(-10)=l/2\sqrt{60}$ Radio de la circunferencia.

En virtud de que D^2+E^2-4F es distinto de cero, la circunferencia es real.

La parábola

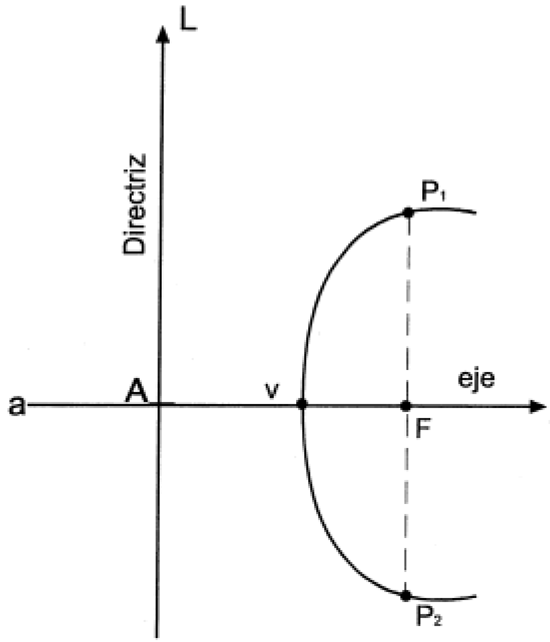
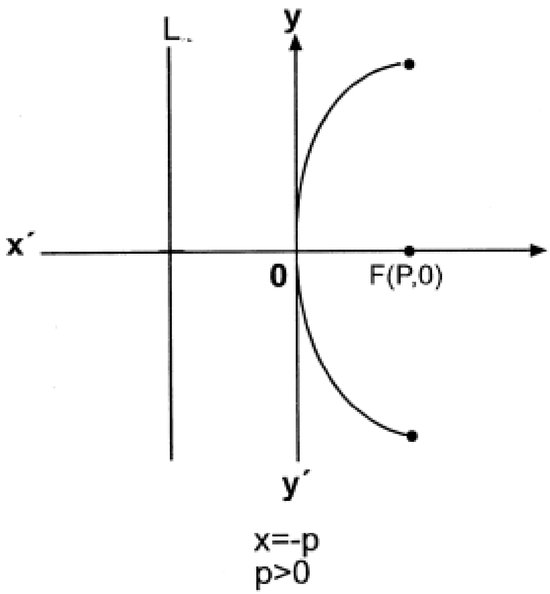


Figura 15.

Sea F un punto fijo y L una recta fija. El lugar equidistante de F y de L es, por definición, una parábola con foco F y directriz L. El punto v, punto medio, del segmento AF, se llama vértice de la parábola. La recta que pasa por F y es perpendicular a L se llama el eje de la parábola. El segmento P_1P_2 perpendicular al eje se llama (lado recto) o latus rectum de la parábola.

La ecuación $y^2= 4px$, es la primera ecuación ordinaria de la parábola. Se verifica cuando la parábola tiene su vértice en el origen de coordenada y su eje en el eje X, el foco es el punto (p, 0) y la ecuación de la directriz es x= -p. Si p es mayor que cero, la parábola se abre hacia la derecha, si p es menor que cero, se abre hacia la izquierda.



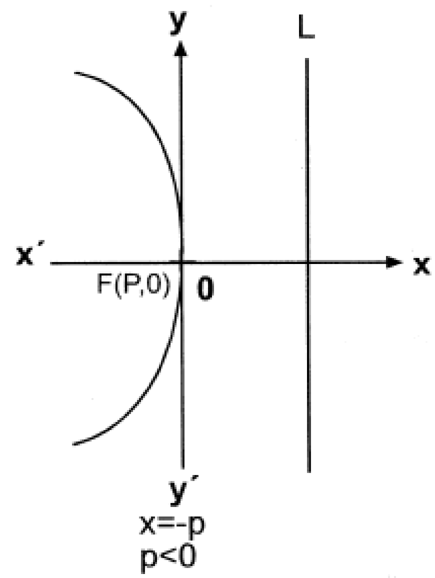
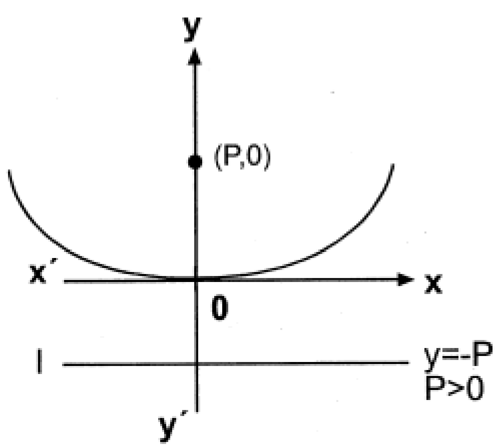


Figura 16. Figura 17.

La ecuación $x^2 = 4py$, es también la primera ecuación ordinaria de la parábola. Se verifica cuando la parábola tiene su vértice en el origen de coordenada y su eje en el eje Y, el foco es el putno (0, p) y la ecuación de la directriz es y= -p. Si p es mayor que cero la parábola se abre hacia arriba, si p es menor que cero, se abre hacia abajo. La longitud del lado recto, en ambos casos de las ecuaciones ordinarias, se calcula como el valor absoluto de 4p.



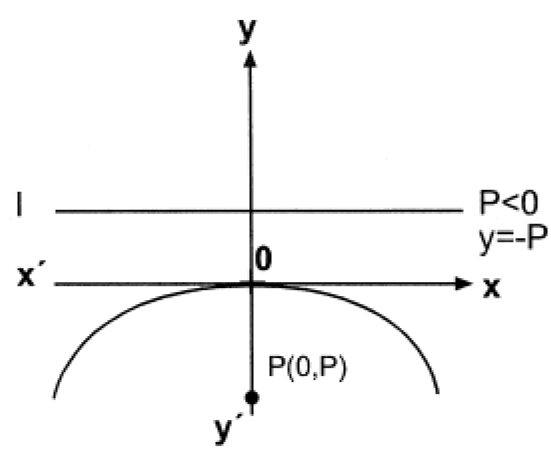


Figura 18. Figura 19.

Ejemplo. Hallar la ecuación de la parábola con vértice en el origen, y cuyo eje coincide con el eje X, y que pase por el punto (-3, 6).

Primer paso: ecuación ordinaria de la parábola $y^2= 4px$.

Segundo paso: como la parábola pasa por el punto (-3,6), las coordenadas de este punto deben satisfacer la ecuación $y^2= 4px$, por tanto, siendo P(x, y)= (-3, 6), tendremos:

Tercer paso: cálculo de p.

$y^2= 4px$.
$(6)^2= 4p(-3)$
$36= -12p$ $\qquad p= -36/12= -3$

Cuarto paso: definición de la ecuación

$y^2= 4px$ $y^2= 4(-3)x$
$y^2= -12x$ $\qquad$ Ecuación buscada.

Quinto paso: foco, directriz y lado recto.
Foco= (p,0)= (-3, 0)

Ecuación de la directriz x= -p= -(-3)= 3.
Lado recto: 4p=(4)(-3)= -12(-1)= 12

Es necesario, además, estudiar la ecuación de una parábola de vértice (h,k) y eje paralelo a un eje coordenado, es decir, estamos frente a un tipo de parábola cuyo vértice no está en el origen de coordenada y su eje no es coincidente con ninguno de los ejes coordenados, más bien es paralelo a uno de ellos.

En efecto, la ecuación ordinaria de una parábola de vértice (h, k) y eje paralelo al eje X (figura a) es de la forma $(y-k)^2= 4p(x-h)$, siendo p la longitud del segmento del eje comprendido entre el foco y el vértice. Si $p>0$, la parábola se abre hacia la derecha; si $p<0$ la parábola se abre hacia la izquierda. Si el vértice es el punto (h, k) y el eje de la parábola es paralelo al eje Y, la ecuación ordinaria de la parábola es de la forma $(x-h)^2= 4p(y-k)$.

Si $p>0$ la parábola se abre hacia arriba, si $p<0$, la parábola se abre hacia abajo.
Ejemplo. Hallar la ecuación de la parábola cuyos vértice y foco son los puntos (3, 3) y (3, 1) respectivamente.

Primer paso: como el vértice V y el foco F de una parábola están sobre su eje, y como en este caso cada uno de estos puntos tiene la misma abscisa 3, se colige que el eje a es paralelo al eje Y, por tanto, la ecuación de la parábola es de la forma $(x-h)^2= 4p(y-k)$.

Segundo paso: como el vértice V es el punto (3, 3), la ecuación puede reescribirse así,
$(x-3)^2= 4p(y-3)$.

Tercer paso: el valor absoluto de p= 3-1= 2. Pero como el foco F está abajo del vértice V, la parábola se abre hacia abajo y p es negativo, es decir, p=-2.

Cuarto paso: la ecuación ahora será
$(x-3)^2= 4(-2)(y-3)$
$(x-3)^2= -8(y-3)$.

Quinto paso: otros cálculos,

Latus retum= 4p en valor absoluto: 4(2)= 8; ecuación de la directriz y= 5

La elipse

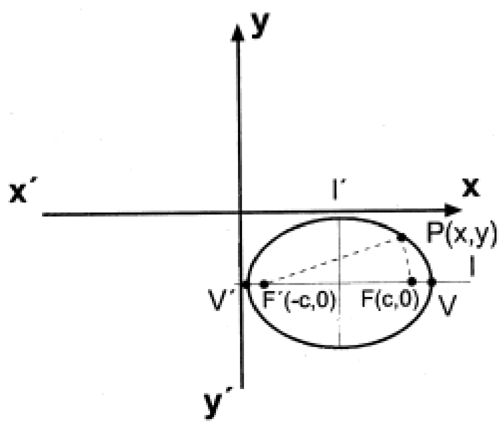


Figura 20.

"(...) Es el lugar geométrico de los puntos de un plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es constante. Una elipse tiene dos ejes, el más largo se denomina eje mayor y el más corto eje menor; el punto en que se *cortan los ejes se llama centro de la elipse".* (Draper: obra citada, p. 76). (Comillas, cursiva y el punto suspensivo son nuestros).

En la figura de la elipse advertimos que F' y F son los dos focos. La recta 1 es el eje focal, en cambio el eje Fes el eje normal; los puntos V y V' son vértices de la elipse. El segmento VV' se llama eje mayor. El punto c se llama centro. Los segmentos FP y F'P se llaman radios vectores del punto P. Por definición F'P+PF= 2a.

La ecuación ordinaria de la elipse tiene dos versiones que de inmediato transcribimos.

La expresión $x^2/a^2+y^2/b^2= 1$ es la ecuación de una elipse de centro en origen, eje focal el eje X, distancia focal igual a 2c y cantidad constante igual a 2a.

Si el eje focal -dice Lehmann-[1] (Lehmann: obra citada, p. 177) de la elipse coincide con el eje Y, de manera que las coordenadas de los focos sean (0, c) y (0, -c), la ecuación de la elipse es $x^2/b^2+y^2/a^2= 1$.

Para cada elipse, a es la longitud del semieje mayor, b la del semieje menor, y a, b y c están ligadas por la relación $a^2= b^2+c^2$.

La longitud de cada lado recto es $2ß^2/a$ y la excentricidad e está dada por la fórmula e= c/a= $/a^2-b^2/a<l$.

La ecuación de la elipse de centro el punto (h, k) y eje focal paralelo el eje X, está dada por la segunda forma ordinaria $(x-h)^2/a^2+(y-k)^2/b^2= 1$.

Si el eje focal es paralelo al eje Y, su ecuación está dada por la segunda forma ordinaria $(x-b)^2/b^2+(y- k)^2/a^2= 1$.

Para cada elipse, a es la longitud del semieje mayor, b es la del semieje menor, c es la distancia del centro a cada foco, y a, b y c están ligadas por la relación $a^2=b^2+c^2$.

La longitud de cada uno de sus lados rectos es $2ß^2/a$ y la excentricidad e está dada por la relación e= c/a= $\sqrt{}a^2-b^2+/a<l$.

Cuando a es mayor que b, el eje mayor de la elipse es paralelo al eje X, cuando a es menor que b el eje mayor de la elipse es paralelo al eje Y.

La longitud del eje paralelo al eje X es 2a y la del eje paralelo al eje Y es 2ß. Cuando a= b, la elipse se convierte en un círculo de radio r= a= b.

Cuando una ecuación toma la forma canónica de una elipse, el lugar geométrico es una elipse, pero cuando $(x-h)^2/a^2+(y-k)^2/b^2= c$ (siendo $c< 0$) no hay lugar geométrico real.

El procedimiento para la solución de ejercicios elípticos, es el siguiente:

Ejemplo. Una elipse tiene su centro en el origen y su eje mayor coincide con el eje Y. Uno de los focos es el punto (0,2) y la excentricidad es igual a 1/2. Encontrar las coordenadas del otro foco, las longitudes de los ejes mayor y menor, la ecuación de la elipse y la longitud de cada uno de sus lados rectos.

Primer paso: si el eje mayor de la elipse coincide con el eje Y, su ecuación se debe relacionar con la ecuación ordinaria de la elipse, en la expresión $x^2/b^2+y^2/a^2= 1$.

Segundo paso: sabemos que las coordenadas de los focos son (0, c) y (0, -c). Si tenemos como dato del problema F(0,2), luego c= 2, por lo que el otro foco es F(0, -c)= (0, -2).

Tercer paso: tenemos como dato que la excentricidad e es 1/2. Su fórmula es e= c/a,
Sustituyendo

1/2= 2/a,
a= 2/0.5= 4.

Cuarto paso: el cálculo del valor de a, nos permite determinar la longitud del eje mayor: 2a=

2(4)=8.

Quinto paso: también podemos proceder a calcular la longitud del eje menor

$b^2= a^2-c^2$
$b= \sqrt{(a^2-c^2)}$
$b= \sqrt{(4^2-2^2)}$
$b=\sqrt{l2}$,

luego, 2ß= 2(vT2), que es la longitud del eje menor.

Sexto paso: ecuación ordinaria de la elipse
Si $b= \sqrt{12}$, luego $b^2= 12$
Si a= 4, luego,
$a^2=4^2= 16$, por tanto,
$(x^2/12)+(y^2/16)= 1$ Ecuación buscada.

Séptimo paso: longitud de cada lado recto.
$2ß^2/a= 2(12)/4= 6$.

Octavo paso: procedemos a edificar la gráfica

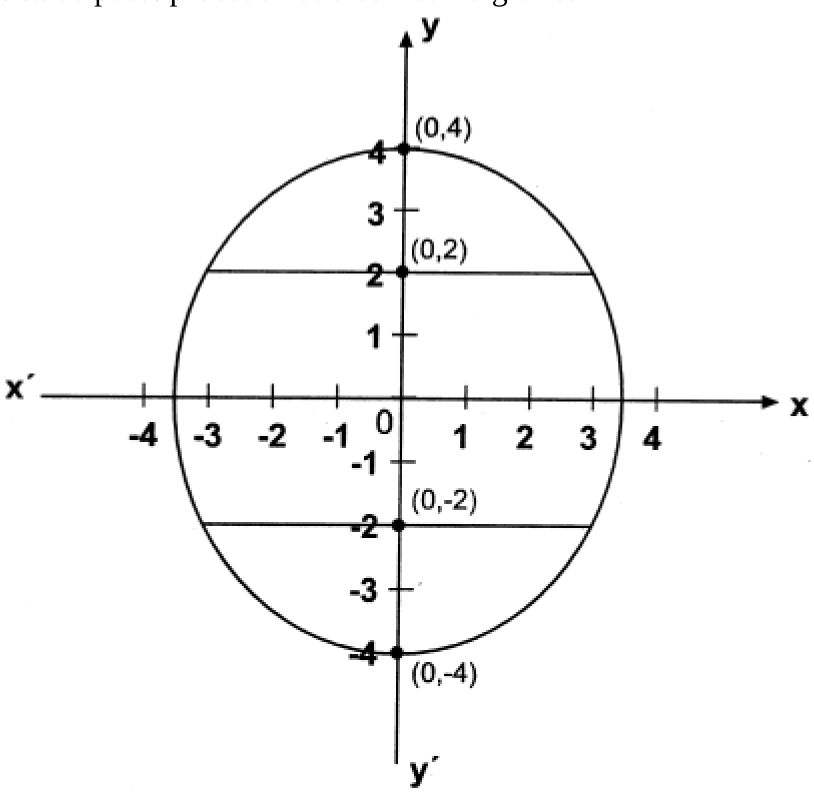


Figura 21

La hipérbola

Una hipérbola, es el lugar geométrico de los puntos del plano, tales que el producto de sus distancias a dos rectas perpendiculares dadas es una constante positiva. Consta de dos ramas diferentes, cada una de longitud infinita.
La recta que pasa por los dos focos de la elipse se llama eje focal. Los dos puntos en que el eje focal intersecta a la hipérbola se llaman vértices. La parte del eje focal comprendido entre los vértices se llama eje transverso. El punto medio c del eje transverso se llama centro. El eje normal es perpendicular al eje focal. A una parte de este eje se le llama eje conjugado.

La ecuación ordinaria de la hipérbola de centro en el origen, eje focal coincidente con el eje X, y de focos los puntos (c, 0) y -c, 0) es $x^2/a^2/- y^2/b^2 =1$.

Si el eje focal coincide con el eje Y, de manera que las coordenadas de los focos sean (0, c) y (o, -c), la ecuación es $y^2/a^2/-x^2/b^2 =1$.

Para cada hipérbola, a es la longitud del semieje transverso, b la del semieje conjugado, c la distancia del centro a cada foco, y a, b, c están ligadas por la relación $c^2=a^2+b^2$.

La longitud de cada uno de los lados rectos es $2ß^2/a$. La excentricidad e= c/a.

La longitud del eje transverso se calcula con 2a. La del eje conjugado 2ß.

Las ecuaciones de las asíntotas son:

y= ±b/a(x), cuando el eje real o transversal es el eje X.
y= ±a/b(x) cuando el eje real o transversal es el eje Y.
Si el centro de la hipérbola es el punto de coordenadas (h,k) y el eje real es paralelo al eje X, la ecuación de la hipérbola es $(x-h)^2/a^2-(y-k)^2/b^{2=:}$ 1.

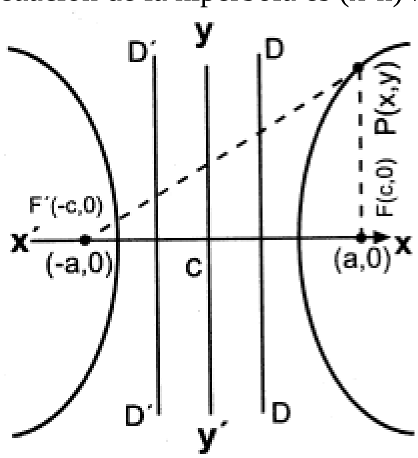


Figura 22.

Si el eje real es paralelo al eje Y, la ecuación es $(y-k)^2/a^2-(x-h)^2/b^2 =1$.

Las ecuaciones de las asíntotas son y-k= ±b/a(x-h) si el eje real es paralelo al eje X e y-k- ±a/b(x-h) si el eje real es paralelo al eje Y.

Ahora bien, dada $(x-h)^2/a^2-(y-k)^2/b^2= 1$ ó $(y-k)^2/a^2-(x-h)^2/b^2 =1$, si *a*= b, las asíntotas de la hipérbola son perpendiculares y la hipérbola se llama equilátera.

La ecuación de una hipérbola equilátera cuyas asíntotas sean paralelas a los ejes coordenados se puede expresar en la forma canónica (x-h)(y-k)= c, en donde (h,k) es el centro de la hipérbola, respecto al cual es simétrica, y x= h y y= k son las asíntotas.

Así, si su centro está ubicado en el origen, respecto al cual es simétrica, como ya fue establecido, sus ramas están en el primer y tercer cuadrantes siempre y cuando c sea mayor que cero, y en el segundo y cuarto cuadrante si c es menor que cero. Dicha hipérbola no poseé intersecciones con los ejes coordenados.

Ejemplo.

a) Los vértices de una hipérbola son los puntos V(2, 0) y V'(-2, 0), y sus focos los puntos F(3,0) y F'(-3,0). Hallar la ecuación de la hipérbola, las longitudes de sus ejes transverso y conjugado, su excentricidad y la longitud de cada lado recto.

Primer paso: los vértices y focos están sobre el eje X, el eje focal coincide con el eje X, luego la ecuación es de la forma $(x^2/a^2)-(y^2/b^2)= 1$.

Segundo paso: la distancia entre los vértices es 2a= 4, luego a= 4/2= 2 y $a^2=2^2=4$; siendo 2a= 4, la longitud del eje transverso.

Tercer paso: la distancia entre los focos es 2c= 6, luego c= 6/2= 3; por tanto, $b^2=c^2-a^2=(3)^2-(2)^2=$ 9-4= 5.

Cuarto paso: la ecuación pedida es $(x^2/4)-(y^2/5)= 1$.

Quinto paso: excentricidad e= c/a= 3/2.

Sexto paso: longitud de cada lado recto $2ß^2/a$= 2(5)/2= 5.

Séptimo paso: longitud del eje conjugado 2ß= 2(√5).

Función exponencial

Una función cuya variable independiente aparece como exponente se llama función exponencial, dice Chiang. (Chiang, Alpha: obra citada, p. 273).

Apunta Chiang que toda función expresada en términos de polinomio y/o raíces de polinomios es una función algebraica (...) Sin embargo, funciones exponenciales tales como y= b^xdonde la variable independiente aparece en el exponente, son no algebraicas. Las funciones logarítmicas, íntimamente relacionadas con la anterior, tales como y= $\log_{bx}$ también son no algebraicas.(Ibid, p.

40).

En las funciones exponenciales, es conveniente tomar en cuenta las siguientes reglas de exponentes.

Las reglas de exponentes, son las siguientes:

Regla 1:

$x^m x^n = x^{m+n}$

$(5^2)(5)^4 = 5^6$

Regla 2:

$(x^m)^n = x^{mn}$

$(7^5)^6 = 7^{30}$

Regla 3:

$(xyz)^m = x^m\ y^m\ z^m$

$(2)(3)(4)^3 = 2^3.\ 3^3.\ 4^3$

Regla 4:

$(x/y)^m = x^m/y^m$

$(l/2)^2 = l^2/2^2$

Regla 5:

$x^{-m} = l/x^m$

$3^{-7} = l/3^7$

Regla 6:

$x^m/x^n = x^{m-n} = l/x^{n-m}$

$8^5/8^3 = 8^{5-3} = 1/8^{-2}$

Regla 7:

$x^{1/n} = {}^n\sqrt{x}$

$3^{1/3}=3\sqrt{3}$

Regla 8:

$x^{m/n}= {}^{n}\sqrt{x^{m}}=({}^{n}\sqrt{x})^{m}$

$5^{2/3}= {}^{3}\sqrt{5^{2}}=({}^{3}\sqrt{5})^{2}$

Reglas de los logaritmos

Las reglas de los logaritmos, son las siguientes:

Regla 1:

$\log_b(xy)= \log_b x+\log_b y$

Regla 2:

$\log_b(x/y)= \log_b x-\log_b y$

Regla 3:

$\log_b x^n= n\log_b x$

Regla 4:

$\log_b{}^{n}\sqrt{x^n}=l/n\log_b x$

Regla 5:

$\log_a x=\log_a bx= (l/\log_b a)\log_b x$

Uso de las curvas no lineales por la ciencia económica

Funciones de oferta y demanda

En la determinación del precio y la cantidad de equilibrio en el mercado, si una de las ecuaciones es lineal y la otra es parabólica o hiperbólica, o bien si ambas ecuaciones son parabólicas, se requieren soluciones de ecuaciones de segundo grado, que bien pueden resolverse mediante la fórmula cuadrática $x= -b\pm V"b^{2}-4ac/2a$.

Ejemplo 1.

Hallar el precio y la cantidad de equilibrio para las ecuaciones de oferta y demanda, donde x es cantidad demandada y el precio está representada por la y:

Ecuación de demanda $3x+2y-5= 0$

Ecuación de oferta y^2-2x-3= 0

I. Despejamos a x

3x= -2y+5
x= (-2y+5)/3
2x= y^2-3
x= (y^2-3)/2

II. Igualación

(-2y+5)/3= (y^2-3)/2
2(-2y+5)= 3(y^2-3)
-4y+10= 3y^2-9
3y^2-9+4y-10=0
3y^2+4y-19= 0

III. Aplicación de la fórmula cuadrática
y= [-4±√ 4^2-4(3)(-19)]/2(3)= [-4±√(16+228)]/6
y_1= 1.9367
y_2=-3.27

IV. Sustitución
Cuando y= 1.9367
3x+2(1.9367)-5= 0
x_1= 0.3755.

Cuando y= -3.27
3x+2(-3.27)-5= 0
x_2= 3.8466

V. Soluciones
(0.3755, 1.9367)) y (3.8466, -3.27)

VI. Punto de equilibrio
(0.3755, 1.93)

Ejemplo 2.

Hallar el precio y la cantidad de equilibrio para las ecuaciones de oferta y demanda Ecuación de demanda x^2+4x-y+2= 0
Ecuación de oferta 2x^2+y-3= 0

I. Despejamos a y de ambas ecuaciones

y= x^2+4x+2
y= -2x^2+3

II. Igualación
$x^2+4x+2= -2x^2+3$
$3x^2+4x-l= 0$

III. Aplicación de la fórmula cuadrática
$x=[-4\pm\sqrt{4^2-4(3)(-1)}]/2(3)$
$x_1= 0.2$
$x_2=-1.5$

IV. Sustitución
Cuando x= 0.2
$(0.2)^2+4(0.2)-y+2= 0$
y= 2.84

Cuando x= -1.5
$(-1.5)^2+4(-1.5)-y+2= 0$
y= -1.75

V. Soluciones

(0.2, 2.84) y (-1.5,-1.75)

VI. Punto de equilibrio

(0.2, 2.84)

Ejemplo 3.

Hallar el precio y la cantidad de equilibrio para las ecuaciones de oferta y demanda

Ecuación de demanda (x+1 l)(y+7)= 172
Ecuación de oferta x-y+8= 0

I. Despejamos a y en la ecuación de la oferta

y= x+8

II. Sustituyendo en la ecuación de demanda

(x+11)(x+8+7)= 172

(x+11)(x+15)-172= 0

multiplicando las expresiones entre paréntesis y simplificando, tendremos

$x^2+26x-7= 0$

III. Aplicación de la fórmula cuadrática
$x= [-26+/26^2-4(1)(-7)]/2(1)$
$x_1= 0.26$
$x_2= -26.2$

IV. Sustitución

Cuando $x= 0.26$
$0.26-y+8= 0$
$y_1=8.26$

Cuando $x= -26.2$
$-26.2-y+8= 0$
$y_2= -18.2$

V. Soluciones
(0.26, 8.26) y (-26.2,-18.2)

VI. Punto de equilibrio

(0.26, 8.26)

Curvas de transformación de producto

Dicen Draper y Klingman, que una curva de transformación de productos expresa la relación entre las cantidades de dos artículos diferentes, producidos por la misma compañía utilizando la misma mano de obra y materia prima. Usualmente son cóncavas hacia abajo, de tipos circular, elípticas, parabólicas e hiperbólicas.

Ejemplos.

1. Dada $y^2+x+6y-25= 0$, ¿cuáles son las mayores cantidades de x e y que se pueden producir?

I. Determinamos los puntos de abscisa y de ordenada

Si $y= 0$
$(0)^2+x+6(0)-25= 0$
$x= 25.$
Si $x=0$
$y^2+0+6y-25= 0$ $y^2+6y-25- 0.$

II. Aplicación de la fórmula cuadrática
$y=[-6\pm\sqrt{6}^2-4(l)(-25)]/2(l)$
$y_1= 2.83$
$y_2= -8.83$

III. Soluciones
La mayor cantidad de x= 25. La mayor cantidad de y= 2.83.

IV. Intersecciones para la gráfica
(25,0) y (0,2.83).

2. Dada $6x^2+3y^2 = 100$, ¿cuáles son las mayores cantidades de x e y que se pueden producir?
I. Determinamos los puntos de abscisa y de ordenada

Si y= 0

$x^2= 100/6$

x=/l 00/6= 4.08.

Si x= 0

$y^2= 100/3$

y=√l 00/3= 5.77

III. Soluciones

La mayor cantidad de x= 4.08.

La mayor cantidad de y= 5.77.

IV. Intersecciones para la gráfica

(4.08, 0) y (0,5.77).

Interés compuesto

Ejemplo.

Una persona deposita en un banco $ 1,000,000 a una tasa de interés anual de 16%. ¿Qué cantidad de dinero tendrá al cabo de 15 años si el interés se paga anualmente o si se pagara trimestralmente?

I. Fórmula

$y=x(l+i\%)^n$

II. Sustitución

$y= 1,000,000(1+0.16)^{15}$

III. Aplicación de logaritmos

$\log y = \log 1{,}000{,}000 + (15)\log(1+0.16)$
$\log y = 6 + 15(0.064457989) = 6.966869838$

aplicamos anti-logaritmo

y= \$9,265,520.86 anual.

IV. Cálculo trimestral
$y = x(l+i/k)^{nk}$
donde k= trimestres
$y = 1{,}000{,}000(1+0.16/4)^{15(4)} = l\ {,}000{,}000(1{,}04)^{60}$
$\log y = \log 1{,}000{,}000 + 60 \log 1.04 = 6 + 60(0.017) = 7.022$
aplicando anti-logaritmo
y= \$10,519,618.74

3

CAPÍTULO III
SEGUNDO CAMINO EXPLORADO: CÁLCULO DIFERENCIAL

Introducción

El cálculo está relacionado con el análisis matemático del movimiento y el cambio. La derivación y la integración son las operaciones del cálculo, apunta Draper.

"En vista de que el análisis en la economía y en la administración trata frecuentemente con cambios, el cálculo es para los directores de empresas y economistas una herramienta en extremo valiosa. El análisis marginal es quizá la aplicación más directa del cálculo a la economía y a la administración; la razón marginal de cambio o variación en el margen se expresa analíticamente como la primera derivada de la función pertinente. El cálculo diferencial es también el método mediante el cual se obtienen máximos y mínimos de funciones. Por consiguiente utilizando el cálculo se pueden resolver problemas relativos a maximizar ganancias o minimizar costos, bajo ciertas suposiciones. La programación matemática, la cual tiene como finalidad maximizar o minimizar funciones sujetas a restricciones, es utilizada cada vez más en la economía y la administración; los métodos utilizados en programación matemática, por ejemplo, en programación lineal, son aplicaciones del cálculo diferencial". (Draper, ob. cit., p. 146.). (Comillas y cursiva son nuestras).

El cálculo trata con cambios infinitesimalmente pequeños de las variables dependiente e independiente. Tales cambios, en el plano matemático, se definen utilizando los conceptos de límite y continuidad.

Por eso Larson dice: *"(,..) Así pues, una forma de responder a la pregunta "¿Qué es el Cálculo?", es decir que el Cálculo es una "máquina de límites" que conlleva tres estadios. El primero lo constituyen las matemáticas previas al Cálculo, con nociones como la pendiente de una recta o el área de un rectángulo. El segundo es el proceso de límite, y el tercero es la nueva formulación propia del Cálculo, en términos de derivadas e integrales".* (Larson: ob. cit., págs. 48 y 49). (Comillas, cursiva y el punto suspensivo son nuestros).

Concepto de límite

Respecto al concepto de límite "se dice que la variable v tiende a la constante como límite, cuando los valores sucesivos de v son tales que el valor numérico de la diferencia v-1 puede llegar a ser, finalmente, menor que cualquier número positivo predeterminado tan pequeño como se quiera", (Granville: Cálculo diferencial e integral. Editorial UTEHA, México, 1970, p. 16.), precisa Granville. (Comillas y cursiva son nuestras).

"(...) E1 concepto de límite es esencialmente relativo, significando siempre el valor a que se

aproxima la sucesión de valores de y cuando la variable independiente x varía de un modo definido (,..)" (Granville: Cálculo diferencial e integral. Editorial UTEHA, México, 1970, p. 16.), (Comillas, cursiva y puntos suspensivos son nuestros), dice Allen.

El límite, entonces, de una función hace alusión a lo relativo, a la aproximación de una variable a una constante, sin lograr alcanzarla, cuando cambia la variable independiente.

Ejemplo. Si f(x)= 3x+3, lim f(x)= 3, debido a que

f(l)=6	f(-l)=0
f(l/2)= 4.5	f(-l/2)= 1.5
f(l/4)= 3.75	f(-l/4)= 2.25
f(l/100)= 3.03	f(-l/100)= 2.97
f(1/1000)= 3.003	f(-1/1000)= 2.997
y así sucesivamente.	y así sucesivamente.

$x \to 0$

∞

¿Qué es lo que hemos advertido en ese ejemplo? Simplemente que la función f(x)= 3x+3, tiene como límite 3, cuando la variable independiente x tiende a cero. Claro f(x) tiende a 3, pero sin alcanzarlo nunca.

Teoremas sobre límites

Los teoremas sobre límites, constituyen una guía muy .importante para evaluarlos, sobre todo cuando enfrentamos funciones un tanto complicadas.

Si K es una constante
(1) (1) lim K= K
$x \to a$

(2) lim (u+v+w)= lim u+lim v- lim w.
$x \to a$

El límite de una suma (resta) de varias funciones es la suma (resta) de sus límites respectivos.
(3) lim (u.v.w)= lim u.lim.v. lim w.

El límite del producto de dos funciones es el producto de sus límites.
(4) lim u/v= lim u/lim v, si lim v no es cero.

El límite del cociente de dos funciones es el cociente de sus límites.

Si c es una constante (independiente de x) y el lim v no es cero, de lo anterior se deduce que:

(5) $\lim_{x\to a} (u+c)= \lim_{x\to a} u+c$, $\lim_{x\to a} cu= c.\lim_{x\to a} u$, $\lim_{x\to a} c/v= c/\lim_{x\to a} v$

(6) $\text{lím}_{x\to a}\, u''= (\lim u)^n$

El límite de una función elevada a la enésima potencia es equivalente a elevar a la enésima potencia el límite de la función.

(7) $\text{Lim}_{x\to a}\, \sqrt[n]{u}= \sqrt[n]{\lim_{x\to a} u}= \sqrt[n]{u}$.

El límite de la enésima raíz principal de una función positiva es igual a la enésima raíz principal del límite de esa función.

Evaluación de límites

Para calcular límites, Larson propone seguir metódicamente la siguiente estrategia que consta de cuatro (4) pasos:

1 ° Reconocer qué límites pueden evaluarse por sustitución directa.

2° Si el límite de f(x) cuando x tiende a c no puede evaluarse por sustitución directa, intentamos encontrar una función g que coincida con f para todo x distinto de x=c. Elegimos g tal que el límite de g(x) pueda evaluarse por sustitución directa.

3° Aplicamos el teorema de las “funciones que coinciden salvo en un punto”, con el objeto de concluir analíticamente en:

$$\lim_{x\to a} f(x)= \lim_{x\to a} g(x)= g(c)$$

4° Usamos una gráfica o una tabla para reforzar las conclusiones pertinentes.

Ejemplo 1. Demostrar que el $\lim_{x\to 3} (x^2+2x)= 15$

Primer paso: la función dada es la suma de x^2 y 2x, por tanto tenemos que buscar los límites de los dos componentes de la suma.

Segundo paso: aplicación de los teoremas sobre límites.

Según (6) $\lim_{x\to 3} x^2=(3)^2= 9$

Según (5) $\lim\limits_{x \to 3} 2x = 2 (\lim\limits_{x \to 3} x) = 2(3) = 6$

Según (2) el límite buscado es 9+6= 15.

Ejemplo 2. Determinar $\lim\limits_{v \to 1} (v^2-4)/(v+l)$

I. Trabajamos sobre el numerador. En éste tenemos que determinar el límite de una resta entre una función y un escalar (teorema 4), igualmente tenemos el límite de una función elevada a la enésima potencia (teorema 5), por tanto:

Según (5) y (6) $\lim\limits_{v \to 1} (v^2-4) = \lim\limits_{v \to 1} v^2-4 = (l)^2-4 = 1-4 = -3$

II. Trabajamos sobre el denominador.

Según (1) y (5) $\lim\limits_{v \to 1} (v+l) = \lim\limits_{v \to 1} v + \lim 1 = 1+1 = 2$

III. Finalmente

Según (4) $\lim (v^2-4)/v+l = -3/2$

Ejemplo 1. $\lim\limits_{x \to 1} (x3+4x+l)$

Según (2) $\lim\limits_{x \to 1} (x3+4x+1) = \lim\limits_{x \to 1} x3 + \lim\limits_{x \to 1} 4x + \lim\limits_{x \to 1} 1$

Según (6) y (5) $= (\lim\limits_{x \to 1} x)3 + 4(\lim\limits_{x \to 1} x) + l$

Según (2) $= (1)^3+4(1)+1 = 6$

Ejemplo 3. $\lim\limits_{x \to 2} (x^3/x+l/x^3+l)$

Según (3) y (4) $\lim\limits_{x \to 2} (x^3\sqrt{}x+l/x^3+l) = \lim\limits_{x \to 2} x^3 \sqrt{}\lim(x+l)/\lim\limits_{x \to 2} (x^3+l)$

Según (6) y (5) $= (\lim\limits_{x \to 2} x)^3 \sqrt{}\lim\limits_{x \to 2} x+l/(\lim x)^3+l$

$= (2)^3 \sqrt{}2+l/(2)^3+l = (8)(\sqrt{}3)/8+l = (8)(\sqrt{}3)/9$

Ejemplo 4. Hallar el lim x^2+x-6/x+3 x→3

I. En este caso no procede usar la sustitución directa, debido a que tanto el numerador como el denominador equivalen a cero, arrojando una respuesta indeterminada. Por consiguiente, procedemos a descomponer el polinomio que aparece en el numerador.
x^2+x-6/x+3= (x+3)(x-2)/x+3,
después de cancelar los términos semejantes, nos queda,
= x-2.
II. Aplicamos teoremas sobre límites.

lim x^2+x-6/x+3= lim (x-2) x→-3 x→-3
Según (5) = lim x-2
x→-3
= -3-2= -5.

Ejemplo 5. Hallar el lim (1+1/x^2)
x→0

Según (1, 2, 4, 6) lim (l+l/x^2)= lim 1+ lim(l/x^2)= lim l+(lim 1/lim x^2)= 1 +(l/$(0)^2$)=l+°°= °°
x→0 x→0 x→0 x→0 x→0 x→0
Demostrar cada una de las siguientes igualdades:
1. lim (5-2x^2)/(3x+5x^2)= -2/5
x→ °°

lim (5-2x^2)/(3x+5x^2)= (0-2)/(0+5)= -2/5
x→°°

2. lim (4x+5)/(2x+3)= 2
x→°°

lim [4+(5/x)]/[2+(3/x)]= (4+0)/(2+0)= 4/2= 2
x→ °°

Funciones continuas y funciones discontinuas

Esta función es continua en x= a cuando no hay interrupción de la gráfica de f en c, es decir, la gratifica no tiene en c agujeros, saltos ni aberturas.

La continuidad de una función requiere estas condiciones:
1. f(a) existe.

2. lim f(x) existe.
x→ a

3. lim f(x)= f(a)
x→ a

Una función es continua en un intervalo abierto (a, b) si es continua en cada punto del intervalo. Una función que es continua en toda la recta real (-°°,°°) se llama continua en todas partes. Respecto a la discontinuidad de la función podemos expresar lo siguiente:

Se dice que una función f(x) tiene una discontinuidad infinita en x= a, cuando:

1. f(a) no existe.

2. lim f(x) no existe.
x→a

3. lim f(x)≠ f(a)
x→a

Abundando sobre la discontinuidad, B. Demidovich, afirma: *"Se dice que una función f(x) es discontinua en el punto x, que pertenece al campo de existencia de la función o que es punto frontera de dicho campo, si en este punto no se verifica la condición de continuidad de la función".* (Demidovich, B.: Problemas y ejercicios de análisis matemático. Editorial MIR, Moscú, novena edición, 1977, p. 35). (Comillas y cursiva son nuestras).

La discontinuidad puede ser evitable o inevitable. La primera se manifiesta cuando la discontinuidad de f en a se puede remediar redefiniendo f(c). Y es inevitable cuando no se puede redefinir adecuadamente.

Discutamos la continuidad en cada una de las siguientes funciones f(x)= 2/x

v(x)= x+2 x menor o igual que 0.

x^2+2, x mayor que 0.

Sobre la primera, podemos decir que f(x) es continua en todos los valores de x de su dominio; sin embargo, en x=0 f(x) manifiesta una discontinuidad inevitable ya que 2/0= °°, en tal virtud no hay modo de redefinir f(a), para que f(x) sea continua en x= 0.

Sobre la segunda, podemos decir que la función v(x) es continua en (-°°, 0) y en (0, °°) y puesto que lim v(x)= 2, v(x) es continua en toda la recta real. x→0

En cuanto a los límites laterales, hemos de decir que el límite por la derecha significa que x tiende a a por valores superiores a a.
lim f(x)= L. $x \to a^+$

El límite por la izquierda significa que x tiende a a por valores inferiores a a.
lim f(x)= L.

$x \to a^-$

El concepto de límite lateral va asociado con el concepto de continuidad de una función en un intervalo cerrado. En efecto, una función f es continua en el intervalo cerrado (a, b) si es continua en el intervalo abierto (a, b) y

lim f(x)= f(a) y lim f(x)= f(b) $x \to a^+$ $x \to b^-$

Una función así, es continua por la derecha en a y continua por la izquierda en b.

Una función discreta está definida solamente por un número finito de valores de x en cualquier intervalo y es por consiguiente discontinua en todos los otros valores de x en el intervalo. En vista de que x asume únicamente valores discretos, el concepto del límite no es apropiado para funciones discretas. (Draper: ob. cit., p. 158).

Concepto de infinito

Cuando el valor numérico de una variable determinada, digamos u, llega a ser y permanece mayor que cualquier número positivo asignado de antemano, por grande que éste sea, se dice que u se toma infinita. De donde:

lim u= ∞ significa que el límite de u es igual a infinito.
lim u= +∞ el límite de u es igual a infinito positivamente.
lim u= -∞ el límite de u es igual a infinito negativamente.

De la conceptualización de infinito tendremos:

(A) lim c/v= ∞
$v \to 0$

(B) lim cv= ∞
$v \to \infty$

(C) lim v/c= ∞
$v \to \infty$

(D) lim c/v= 0
$v \to \infty$

Ejemplo.

Determinar lim $(4x^5+2x^4+3)/(6x^3-x^4-8x^5)$
$v \to \infty$

I. Dividimos el numerador y el denominador, por la mayor potencia de la variable que existe en la fracción.

Numerador:

$(4x^5+2x^4+3)/x^5= (4)+(2/x)+(3/x^5)$

Denominador: $(6x^3-x^4-8x^5)/x^5= (6/x^2)-(1 /x)-(8)$.

Luego

lim $(4)+(2/x)+(3/x^5)/ (6/x^2)-(l/x)-(8)$.
II. El límite de cada término que contiene a x, tanto en el numerador como en el denominador, es cero, de acuerdo a la regla (D), es decir lim c/v= 0, luego

v→ °°
4+0+0/0-0-8= -4/8= -1/2.

Infinitésimos

Una variable m que tiende a cero se llama infinitésimo.
lim m= 0
m→ 0

Si lim m= 1, entonces lim (m-l)= 0, es decir, la diferencia entre una variable y su límite es un infinitésimo. Si la diferencia, en cambio, entre una variable y una constante es un infinitésimo, entonces la constante es el límite de la variable.

Teoremas relativos a infinitésimos y límites

I. La suma algebraica de n infinitésimos, siendo n un número finito, es otro infinitésimo.

II. El producto de una constante c por un infinitésimo es otro infinitésimo.

III. El producto de un número finito n de infinitésimos es otro infinitésimo.

IV. Si el lim m= 1 y 1 no es cero, entonces el cociente de un infinitésimo i dividido por v es también un infinitésimo.

Derivada

La derivada de una función es el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando ésta tiende a cero.

y=f(x)

El incremento, por su parte, de una variable, que pasa de un valor numérico a otro es la diferencia que se obtiene restando el valor inicial del valor final. El símbolo de incremento es la letra griega Δ(delta). De modo que

Δx significa incremento de x

Δy significa incremento de y

Los símbolos que representan la derivada son:

dy/dx “la derivada de y con respecto a x”

d f(x)/dx(f(x) “la derivada de f(x) con respecto a x.
y’ es la forma abreviada de dy/dx.

Regla general para la derivación

(I) Se sustituye en la función x por x +Δx, y se calcula el nuevo valor de la función y+Δy.

(II) Se resta el valor dado de la función del nuevo valor y se obtiene Ay (incremento de la función).

(III) Se divide Δy (incremento de la función) por Δx (incremento de la variable independiente).

(IV) Se calcula el límite de este cociente cuando Δx (incremento de la variable independiente) tiende a cero. El límite así hallado es la derivada buscada.

Ejemplo 1.

Hallar la derivada de la función $y= 2x^2+4$ Aplicamos la regla general

Primer paso:

$y= 2x^2+4$
$y+\Delta y= 2(x+\Delta x)^2+4$
$y+\Delta y= 2[x^2+2x.\ \Delta x+\Delta x^2]+4$
$y+\Delta y= 2x^2+4x.\ \Delta x+2\Delta x^2+4.$

Segundo paso:

$y+\Delta y= 2x^2+4x\Delta x+2\Delta x^2+4$
$-y \quad = -2x^2 \qquad\qquad -4$
$\Delta y= 4x.\ \Delta x+2\Delta x^2$

Tercer paso:

$\Delta y/\Delta x= 4x.\ \Delta x+2\Delta x^2/\Delta x$

simplificamos,

$\Delta y/\Delta x= 4x+2\Delta x$

Cuarto paso:

En el segundo miembro hacemos $\Delta x \rightarrow 0$

$dy/dx= 4x+2(0)= 4x$

Ejemplo 2.

Hallar la derivada de la función $y= 2-3x$.

Aplicamos la regla general

Primer paso:

$y= 2-3x$
$y+\Delta y= 2-3(x+\Delta x)$
$y+\Delta y= 2-3x-3.\ \Delta x$

Segundo paso:

$y+\Delta y= 2-3x-3.ax$
$-y = \quad -2+3x$
$\Delta y= -3ax$

Tercer paso:

$\Delta y/\Delta x= -3\Delta x/\Delta x$

simplificamos,

$dy/dx= -3$

Cuarto paso:

En el segundo miembro hacemos $\Delta x \rightarrow 0$.
(Como Δx desapareció, no es necesario el cuarto paso).

Ejemplo 3.

Hallar la derivada de la función $y= 3x-x^3$

Aplicamos la regla general

Primer paso:

$y= 3x-x^3$
$y+\Delta y= 3(x+\Delta x)-(x+\Delta x)^3$
$y+\Delta y= (3x+3\Delta x)-(x^3+3x^2.\ \Delta x+3x.(\ \Delta x)^2+(\Delta x)^3)=3x+3\Delta x\ -x^3-3x^2.\ \Delta x-3x.(\ \Delta x)^2-(\Delta x)^3$
$y+\Delta y= 3x+3\Delta x\ -x^3-3x^2.\ \Delta x-3x.(\ \Delta x)^2-(\Delta x)^3.$

Segundo paso:

$y+\Delta y= 3x+3\Delta x -x^3-3x^2. \Delta x-3x.(\Delta x)^2-(\Delta x)^3$
$-y = \quad -3x \qquad +x^3$
$\Delta y= 3\Delta x-3x^{2.} \Delta x-3x.(\Delta x)^2-(\Delta x)^3$
Tercer paso:

$\Delta y/\Delta x= 3 \Delta x-3x^2. \Delta x-3x.(\Delta x)^2-(\Delta x)^3/\Delta x$

simplificamos,

$\Delta y/\Delta x= 3-3x^2-3x.(\Delta x)-(\Delta x)^2$

Cuarto paso:

En el segundo miembro hacemos $\Delta x\rightarrow 0$
$dy/dx= 3-3x^2-3x.(\Delta 0)-(0)^2= 3-3x^2-3x(0)-0=3-3x^2$

Ejemplo 4

Hallar la derivada de la función $y= ax^2$

Aplicamos la regla general

Primer paso:

$y= ax^2$
$y+\Delta y= a(x+\Delta x)^2$
$y+\Delta y= a[x^2+2x. \Delta x+\Delta x^2]$
$y+\Delta y= ax^2+2ax. \Delta x+a(\Delta x)^2$

Segundo paso:

$y+\Delta y= ax^2+2ax. \Delta x+a(\Delta x)^2$
$-y = \quad -ax^2$
$\Delta y= 2ax. \Delta x+a(\Delta x)^2.$

Tercer paso:

$\Delta y/\Delta x=2ax. \Delta x+a(\Delta x)^2 /ax$

simplificamos,

$\Delta y/\Delta x=2ax.+a(\Delta x)$

Cuarto paso:

En el segundo miembro hacemos $\Delta x \rightarrow 0$
$dy/dx=2ax.+a(0) = 2ax+0= 2ax$
Ejemplo 5

Hallar la derivada de la función $y= 2x^3-3x^2$
Aplicamos la regla general

Primer paso:

$y= 2x^3-3x^2$
$y+\Delta y= 2(x+\Delta x)^3-3(x+\Delta x)^2$
$y+\Delta y= 2(x^3+3x^2. \Delta x+3x. \Delta x^2 +\Delta x^3)-3(x^2+2x. \Delta x+(\Delta x)^2=2x^3+6x^2. \Delta x+6x. \Delta x^2 +2. \Delta x^3-3x^2-6x .\Delta x-3(\Delta x)^2$

Segundo paso:

$y+\Delta y= 2x^3+6x^2. \Delta x+6x. \Delta x^2 +2\Delta x^3)-3x^2-6x. \Delta x-3(\Delta x)^2$
$-y = -2x^3 +3x^2$
$\Delta y = 9x^2. \Delta x+6x. \Delta x^2 +2\Delta x^3-3x^2-6x. \Delta x-3(\Delta x)^2$

Tercer paso:

$\Delta y/\Delta x= [9x^2. \Delta x+6x. \Delta x^2 +2\Delta x^3-3x^2-6x. \Delta x-3(\Delta x)^2]/ \Delta x$

simplificamos,

$\Delta y/\Delta x= 9x^2+6x. \Delta x +2\Delta x^2-3x^2-6x-3(\Delta x)$

Cuarto paso:

En el segundo miembro hacemos $ax\rightarrow 0$

$dy/dx= 9x^2+6x(0) +2(0)^2-3x^2-6x-3(0)= 9x^2-3x^2-6x= 6x^2-6x$

Reglas para derivar funciones de una variable

De acuerdo a Allen: *“La técnica sistematizada de la derivación supone dos grados o pasos diferentes. El primero consiste en el cálculo (a partir de la definición) de las derivadas de funciones sencillas, cuyos resultados, denominados formas tipo (...) se aprenden de memoria (...).*

“El segundo paso tendrá por objeto elaborar una serie de reglas de derivación de funciones complicadas (...)”[2]. (Allen: ob. cit., p. 155). (Comillas, cursiva y puntos suspensivos son nuestros).

---

[2]Allen: Ob. cit., p. 155.

En el cálculo elemental de las derivadas, la función potencial es muy utilizada; así tenemos que a^n es una función potencial, en la que n es el exponente y a la base. La función potencial a^n se interpreta así:

1) Si n es entero y positivo, dicha potencia expresará el resultado de multiplicar el número a, n veces, por sí mismo. Ejemplo: $a^n = a.a.a$
2) Si n es fraccionario y positivo, a^n expresará el valor de una determinada raíz. Ejemplo: $a^{3/4}= \sqrt[4]{a^3}$

3) Si n es negativo, entero o fraccionario, a expresará el recíproco de la potencia de exponente positivo correspondiente.

Ejemplo:

$a^{-2/3}= 1/(\sqrt[3]{a^2})$

4) Si n es nulo, a^n expresará la unidad. Ejemplo: $a^0= 1$.

5) Si n es irracional, la potencia a^n se definirá, entonces, como el límite de a^{nr} cuando $r\rightarrow\infty$.

Precisemos ahora algunas reglas de derivación.

Regla de la función constante

La derivada de una constante es cero.

Ejemplo 1: si y= c, donde c es una constante, tendremos: $dy/dx= 0$.

Ejemplo 2: si y= 5, tendremos: $dy/dx= 0$.

Regla de la función potencial

La derivada de una potencia de la variable independiente con un exponente racional, es igual al exponente multiplicado por la variable independiente elevada a la potencia original menos 1.

Ejemplo.

Si $y= x^n$, donde n es un entero positivo, tendremos: $dy/dx= nx^{n-1}$.

Ejemplo.

$dy/dx= x^{l/2}=l/2x^{1/2-1}= l/2x^{-1/2}$

Generalización de la regla de la función potencial

Cuando aparece una constante c como coeficiente en una función potencial, tal que $f(x)= cx^n$ su derivada es $d/dx=cnx^{n-1}$

Este resultado, dice Chiang, demuestra que al diferenciar cx^n podemos conservar intacta la constante c y diferenciar el término x^n conforme a la regla de la función potencial.

Ejemplo.

y= 5x.
$dy/dx=5(l)x^{1-1}= 5x^0.= 5(1)=5$

Reglas para derivar dos o más funciones de la misma variable. Regla de suma y diferencia

La derivada de la suma (diferencia) de funciones, es la suma (o diferencia) de sus derivadas respectivas. Ejemplos:

dy/dx= du/dx+dv/dx

d/dx(u-v)= du/dx-dv/dx

Regla del producto

La derivada de un producto de funciones, es igual a la primera por la derivada de la segunda, más la segunda por la derivada de la primera. Ejemplo:

d/dx= (uv)= u(dv/dx)+v(du/dx)

Regla del cociente

La derivada de un cociente de funciones, es igual al denominador por la derivada del numerador, menos el numerador por la derivada del denominador, dividida la diferencia obtenida por el cuadrado del denominador. Ejemplo:

$d/dx\ (u/v)= \{v(du/dx)-u(dv/dx)\}/v^2$

Reglas para derivar funciones de variables diferentes. Regla de la cadena

Dadas

z= f(y)
y= g(x),

luego dz/dx= dz/dy(dy/dx)= f (x)g'(x)

Ejemplo.
z= 5y,
y=3x,
calcular dz/dx.
dz/dx= dz/dy(dy/dx)= 5(3)= 15.

Regla de la función inversa

La derivada de la función inversa es la recíproca de la derivada de la función original. Su regla es: $dx/dy= l/(dy/dx)$.

Ejemplo.

Dada $y= x^4+2x$, determine la derivada de dx/dy.
si $dy/dx= 4x^3+2$, entonces,
$dx/dy=l/4x^3+2$

Reglas de la diferenciación parcial

Derivamos parcialmente una función, cuando la variable dependiente se encuentra determinada por varias variables independientes.

Su regla esencial, consiste en verificar cómo cambia la variable dependiente, cuando cambia una de las variables independientes, pero manteniendo constante las otras.

Ejemplo.

Dada $y= f(x_1, x_2)= 5x_1+x_1x_2+8x^2{}_2$, hallar las derivadas parciales.
$\partial y/\partial x_1= 5+x_2$
$\partial y/\partial x_2= x_1+16x_2$.

Reglas de las derivadas totales de funciones compuestas

La regla de la derivación total de una función compuesta, se traduce en las fórmulas que a continuación exponemos:

1) $dy/dx_1=(\partial y/\partial x_1)+(\partial y/\partial x_2)(dx_2/dx_1)$

2) $dy/dw=(\partial y/\partial x_1)(\partial x_1/dw)=(\partial y/\partial x_2)(dx_2/dw)$

3) $\partial y/\partial u= (\partial y/\partial x_1)(\partial x_1/\partial v)(\partial y/\partial x_2)(\partial x_2/\partial v)$

Ejemplo.

Halle la derivada total dz/dy, mediante la regla de la cadena.

$z= f(x,y)= 2x+xy-y^2$, donde $x= g(y)= 5y$.
$dz/dy= (x-2y)+(2+y)(5)=x-2y+10+5y= x+3y+10$.
Sustituyendo a x por su igual, tenemos:

$dz/dy= 5y+3y+10= 8y+10$

Derivadas implícitas

Cuando las variables que constituyen una función están agrupadas en uno de los dos miembros de la ecuación, la función es implícita y su derivación, por consiguiente es también implícita.

Ejemplo. Derivar xy= 2
I. Función en forma implícita.

$xy= 2$

II. Función en forma explícita.

$y= 2/x= 2x^{-1}$

III. Cálculo de la derivada

$2(-l)x^{-1-1}= -2x^{-2}= -2/x^{2}$

Derivadas de orden superior

La derivada de la primera derivada es la segunda derivada; la derivada de la segunda derivada es la tercera derivada y así sucesivamente. A esto se le denomina derivadas de orden superior.

Las derivadas de orden superior se denotan del modo siguiente:

Primera derivada:	y'	dy/dx
Segunda derivada	y''	d^2y/dx^2
Tercera derivada	y'''	d^3y/dx^3
n-ésima	y^n	d^ny/dx^n

Ejemplo.

$y= x^3-4x^2+8$

$y'= 3x^2-8x$
$y''=6x-8$
$y'''= 6$
$y''''= 0$

Reglas para derivar funciones exponenciales

“Uno de los rasgos más intrigantes, y más útiles, de la función exponencial natural es que su derivada es ella misma (.,.)” (Larson: obra citada, p. 388).
$d/dx[e^x]= e^x$

Si u es una función derivable de x, la derivada e^u se deduce de la regla de la cadena.

Reglas para derivar funciones logarítmicas

La derivada del logaritmo natural de una función es igual a la derivada de la función dividida por la función (o a la derivada de la función multiplicada por su recíproca).

d/dt(ln f(t)= f (t)/f(t)

Reglas para derivar funciones trigonométricas

Si y= sen u, en donde u= f(x) es una función derivable con respecto a x. dy/dx= (cos u)(du/dx).
Si y= cos u, en donde u= f(x) es una función derivable con respecto a x. dy/dx= (-sen u)(du/dx).
Si y= tg u, en donde u= f(x) es una función derivable con respecto a x. dy/dx= (sec^2 u)(du/dx).
Si y= ctg u, en donde u= f(x) es una función derivable con rescpecto a x. dy/dx= (1/tg u)(du/dx).
Si y= sec u, en donde u= f(x) es una función derivable con rescpecto a x. dy/dx= (1/cos u)(du/dx).
Si y= esc u, en donde u= f(x) es una función derivable con rescpecto a x. dy/dx= (1/sen u)(du/dx).

Ejemplos adicionales

1. $y=x^2$
$dy/dx= 2x^{2-l}= 2x$

2. $y= x^4$
$dy/dx= 4x^{4-1}=4x^3$

3. $y= 1/x$
$dy/dx= x^{-1}= -x^{-1-1}= -x^{-2}= -1/x^2$

4. $y= 1/x^2$
$dy/dx= x^{-2}= -2x^{-2-1}=-2x^{-3}= -2/x^3$

5. $y= (\sqrt{x})$
$dy/dx= x^{1/2}= l/2x^{1/2-1}= l/2x^{-1/2}$

6. $y= {}^3\sqrt{x^2}$
$dy/dx= ({}^3\sqrt{x^2})= x^{2/3}= 2/3x^{2/3-1}= 2/3x^{-1/3}= (2/3)/{}^3\sqrt{x}$

7. $y= 3x$
$dy/dx= 3(l)(x^{1-1})= 3x^0= 3(1)= 3$

8. $y=7/x$

Reordenando $7/x= 7x^{-1}$
$dy/dx= -7x^{-1-l}= -7x^{-2}= -7/x^2$

9. $y= 2x+3+l/x$

Reordenando $y= 2x+3+x^{-1}$

$dy/dx(2x+3+x^{-1})=2(1)+0-x^{-2}=2-1/x^2$

10. $y= 1/ \sqrt{}(a^2-x^2)$

Reordenando,

$y= l/(a^2-x^2)^{1/2}$
$y= (a^2-x^2)^{-1/2}$
$dy/dx= -1/2\ (a^2-x^2)^{-3/2}(-2x)= (a^2-x^2)^{-3/2}(x)= x/(a^2-x^2)^{3/2}$

11. $y= x\sqrt{}(a+bx)$

Reordenando,

$y=(x)(a+bx)^{1/2}$
$dy/dx= (x)l/2(a+bx)^{-1/2}(x)+(a+bx)^{l/2}(l)= bx/(2\sqrt{}a+bx)+(\sqrt{}a+bx)/l= (2a+3bx)/2\sqrt{}a+bx.$

12. $z= y^6$, $y= 1+2\sqrt{}x.$

Reordenando,

$y= l+2(x)^{1/2}$
$dz/dx= (dz/dy)(dy/dx)$
$dz/dx= (6y^5)(2)(l/2)(x)^{-1/2}= 6y^5/\sqrt{}x.$

13. $z= (\sqrt{}2y)-y^2$ $y= x^3-x.$

Reordenando,

$z= (2y)^{l/2}-y^2$
$dz/dx= (dz/dy)(dy/dx)$
$dz/dx= [2(\ 1\ /2y^{-1/2})(2)-2y]\ (3x2)(-1)= (2y^{-1/2}-2y)(3x2)-l= [(l/\sqrt{}2y)-2y\}(3x^2-l).$

14. $x^4+4x^3y+y^4= 20$

$d(x^4)+d(4x^3y)+d(y^4)= d(20)$

$4x^3dx+4x^3dy+12x^2ydx+4y^3dy= 0$

dividimos entre dx

$4x^3+4x^3dy/dx+12x^2y+4y^3dy/dx= 0$
$4x^3+4x^2y+ (4x^3+12y^3)dy/dx= 0$

$dy/dx= (-4x^3-12x^2y)/(4x^3+4y^3)$. OJO

15. $x^3-2x^2y+3xy^2-9= 0$.
$d(x^3)-d(2x^2y)+d(3xy^2)-d(9)= d(0)$
$3x^2dx-2x^2dy-4xydx+3y^2dx+6xydy-0= 0$,

dividimos por dx

$3x^2-2x^2(dy/dx)-4xy+3y^2+6xy(dy/dx)-0= 0$
$3x^2-4xy+3y2+(-2x^2+6xy)\ dy/dx=0$
$dy/dx= (-3x^2+4xy-3y^2)/(-2x^2+6xy)$

16. $x^2+4xy^2-3y^4+16= 0$.
$d(x^2)+d(4xy^2)-d(3y4)+d(16)= d(0)$
$2xdx+4y2dx+8xydy-12y3dy+0= 0$,

dividimos por dx

$2x+4y^2+8xy(dy/dx)-12y^3(dy/dx)= 0$,
$2x+4y^2+(8xy-12y^3)\ dy/dx= 0\ dy/dx= (-2x-4y^2)/(12y^3-8xy)$,
simplificamos
$dy/dx= (-x-2y^2)/(6y^3-4xy)$.

17. $ax^3+bx^2y+cxy^2+d= 0$.

$d(ax^3)+d(bx^2y)+d(cxy^2)+d(d)= d(0)$

$(3ax^2)dx+(bx^2)dy+(2ßxy)dx+(cy2)dx+(2cxy)dy+d(0)= d(0)$

dividimos por dx

$(3ax^2)+(bx^2)dy/dy+(2ßxy)+(cy2)+(2cxy)dy/dx= d(0)$
$3ax^2+2ßxy+cy^2+(2cxy+ bx^2)dy/dx= 0$
$dy/dx= (-3ax^2-2ßxy-cy^2)/(bx^2+2cxy)$.

simplificamos

$dy/dx= (x+2y^2)/(6y^3-4xy)$.
18. $(16x^2-2)(4x+l)$
$d/dx= [(16x^2-2)(4x+l)]= (16x^2-2)(4)+(4x+l)(32x)= 64x^2-8+128x^2+32x= 192x^2+32x-8$

19. $x^2(4x+6)$.

$d/dx= x^2(4x+6)= x^2(4)+(4x+6)(2x)= 4x^2+8x^2+12x= 12x^2+12x$

20. y= 3x+6, encuentre la función inversa.

$dx/dy=l/(dy/dx)$

$dy/dx= 3$

$dx/dy= 1/3.$

21. $y= 5e^{4t}.$

Digamos que $4t= w$,

$dy/dt= (dy/dw)(dw/dt)= 5e^{w}(4)= 20e^{4t}.$

22. $y= 5x_1^3-2x_1^2x_2^2+7x_2^2.$

$\partial y/\partial x_1= 15x_1^2-4x_1x_2^2$
$\partial y/\partial x_2= -4x_1^2x_2+14x_2$

23. $y= 7x_1+16x_1x_2^2+4x_2^3.$

$\partial y/\partial x_1= 7+16x_2^2$

$\partial y/\partial x_2= 32x_1x_2+12x_2^2.$

24. $y= (2x_1+3)(x_2-2).$

$\partial y/\partial x_1= (2x_1+3)(0)+(2)(x_2-2)= (2)(x_1-2)= 2x_2-4).$
$\partial y/\partial x_2=(2x_l+3)(1)+(0)(x_2-2)= (2x_1+3).$

25. $y= (2x_1+3)/(x_2-2).$

$\partial y/\partial x_1= [(2)(x_2-2) - (0)(2x_1+3)]/(x_2-2)^2= 2(x_2-2)^{1-2}= 2(x_2-2)^{-1}= 2/(x_2-2).$
$\partial y/\partial x_2= [(0)(x_2-2) - (2x_1+3)(1)]/(x_2-2)^2= -(2x_1+3)/(x_2-2)^2.$

26. $z= 5x_2-3xy+2y^2$, donde $x- 1/y$.

$dz/dy= (\partial z/\partial y)+(\partial z/\partial x)(dx/dy)$
$dz/dy= (-3x+4y)+(10x-3y)(-y^{-2})= -3x+4y-10xy‘2+3y^{-1}$
sustituyendo

$dz/dy= -3(l/y)+4y-10(l/y)y^{-2}+3y^{-1}= -3y^{-1}+4y-10y^{-1}y^{-2}+3y^{-1} = 4y-10y^{-3}$

27. $z= (x+y)(x-2y)$, donde $x= 3y$.

$dz/dy= (\partial z/\partial y)+(\partial z/\partial x)(dx/dy)$
$dz/dy= (-2)(x+y)+(x-2y)+[(x+y)+(x-2y)](3)= -2x-2y+x-2y+3x+3y+3x-6y= 5x-7y,$

sustituyendo a x por su valor

dz/dy= 5(3y)-7y= 15y-7y= 8y.

28. z= $x^2+5xy+y^3$, donde x= 4w e y= w+5.

dz/dw= (∂z/∂x)(∂x/dw)+(∂z/∂y)(dy/dw).
dy/dw= $(2x+5y)(4)+(5x+3y^2)(l)= 8x+20y+5x+3y^2= 13x+20y+3y^2$,

sustituyendo a x e y por sus valores,

=13(4w)+20(w+5)+3(w+5)2= 52w+20w+100+3(w^2+10w+25)= 52w+20w+100+3w^2+30w+75= 3w^2+102w+175.

29.z= 6xy, donde x= 2w^2, y= w+3.

dz/dw= (∂z/∂x)(∂x/d w)+(∂z/∂y)(dy/d w).
dz/dw- (6y)(4w)+(6x)(l)= 24wy+6x,

sustituyendo a x e y por sus valores,

dz/dw= 24w(w+3)+6(2w^2)= 24w^2+72w+12w^2= 36w^2+72w= 36w(w+2)

30. y- e^{2t+3}

dy/dt= 2e^{2t+3}

31. y=e^{1-5t}

dy/dt= -5e^{1-5t}

32. y= 3e^{2-t2}

dy/dt= 6e^{2-t2}

33. y= xe^x

dy/dx= (x) d/dx(e^x)+e^x d/dx (x)=(xe^x)+e^x=e^x(x+l).

34. y= ln at
dy/dt= d/dt ln at= d/dt(ln a+ln t)= 0+d/dt ln t= 1/t.

35. y= ln 3 t^5.

f(t)= 3 t^5.

f(t)=15t^4

$d/dt \ln 3\, t^5 = f\ (t)/f(t) = 15\, t^4/3\, t^5 = 5\, t^{4-5} = 5\, t^{-1} = 5/t.$

36. y= ln (t+2)

f(t)= (t+2)

f (t)= 1

dy/dt= f (t)/f’ (t)= 1 /(t+2)

37.y= 51n $(t+1)^2$

f(t)=$(t+l)^2$

f(t)=2(t+l)

dy/dt= f (t)/f(t)= $5[2(t+l)/(t+l)^2] = 5[2(t+l)^{1-2}] = 5[2(t+l)^{-1}] = 10/(t+l)$

Aplicaciones de la derivada. Identificación de funciones

La primera derivada nos permite identificar funciones crecientes y funciones decrecientes. Si la primera derivada de una función del tipo y = f(x) es positiva, es una función creciente, es decir, y =f(x) aumenta cuando x se incrementa pasando, digamos, por x=a; si la primera derivada es negativa, y =f(x) es una función decreciente de x, en x=a, es decir y=f(x) decrece a medida que x se incrementa pasando por x=a.

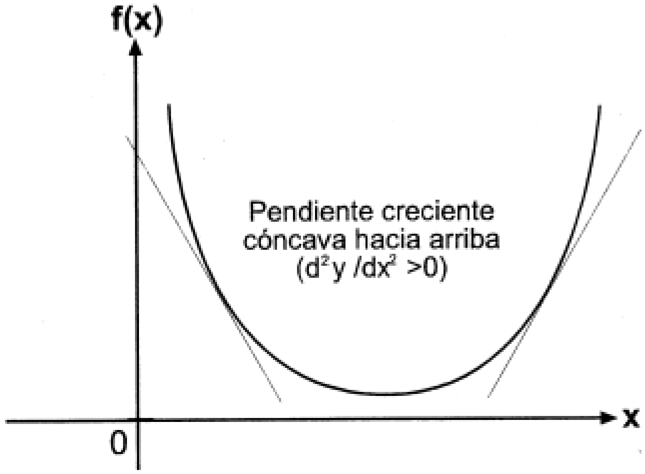


Figura 23.

La segunda derivada se puede utilizar para determinar dónde una función es cóncava hacia arriba y dónde es cóncava hacia abajo y para localizar sus puntos de inflexión si existieran.

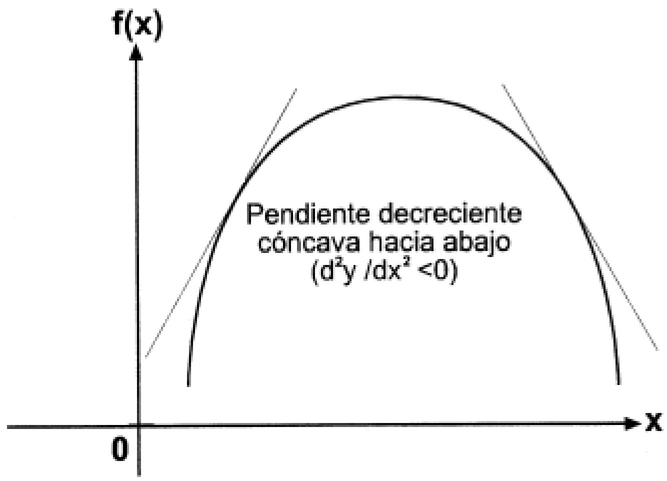


Figura 24.

Ejemplo.

$f(x)= 5x^2+3$

$f'(x)=10x$

f (x) es mayor que 0, para x mayor que 0
f (x) ∠0, para x ∠0,

por tanto f(x) es una función creciente de x para x positiva y una función decreciente de x para x negativa.

Ejemplo.
$f(x)= 4x^3$

$f'(x)= 12x^2$,
como f’ (x) nunca es negativa para cualquier valor de x, f(x) es una función creciente.

Máximos y mínimos

Un valor de una función es un máximo si es mayor que cualquiera de los valores que le anteceden 0 le siguen inmediatamente. Un valor de una función es un mínimo si es menor que uno cualquiera de los valores que le anteceden o le siguen inmediatamente.
1
Primer método de Cálculo:

Sobre el procedimiento de cálculo de los máximos y mínimos Granville, aconseja los siguientes pasos:

1º Se halla la primera derivada de la función.
2º Se iguala la primera derivada a cero, y se hallan las raíces reales de la ecuación resultante. Estas raíces son los valores críticos de la variable.
3º Se consideran los valores críticos uno por uno, y se calculan los signos de la primera derivada, en primer lugar para un valor un poco menor que el valor crítico y después para un valor un poco mayor que 0. Si el signo de la derivada es primeramente + y después - la función tiene un máximo para este valor crítico de la variable; en el caso contrario, tiene un mínimo. Si el signo no cambia, la función no tiene ni máximo ni mínimo para el valor crítico considerado.

Segundo método de cálculo:

1º Hallar la primera derivada de la función.
2º Igualar a cero la primera derivada y resolver la ecuación; las raíces reales son los valores críticos de la variable.
3º Hallar la segunda derivada.
4º Sustituir en la segunda derivada, en lugar de la variable, cada uno de los valores críticos obtenidos. Si el resultado es negativo, la función tiene un máximo para este valor crítico, si el resultado es positivo, la función tiene un mínimo.

Ejemplo: dada la función x^3-6x^2+9x, determinar los máximos o mínimos de la función aplicando los dos métodos de cálculo explicados.

Primer método.

Primer paso. Primera derivada de la función
$y'= 3x^2-12x+9$

Segundo paso. Igualamos la primera derivada a cero y aplicamos la fórmula cuadrática.
$3x^2-12x+9= 0$
$x_1, x_2= -(-12)\pm\sqrt{}(12)^2-4(3)(9)/2(3)$
$x_1,=3$
$x_2= 1$

Tercer paso. Consideramos los valores críticos.
Examinemos primero el valor crítico x= 3
Cuando x<3, f (x)= $3(+)^2$-12(+)+9= -
Cuando x>3, f (x)= 3 $(+)^2$-12(+)+9= +
Luego cuando x= 3, la función presenta un mínimo,
f(3)= $(3)^3$-6$(3)^3$+9(3)= 27-54+27- 0.
Examinemos ahora el valor crítico x= 1.

Cuando x< 1, f (x)= $3(+)^2$-12(+)+9= +
Cuando x>l, f (x)= $3(+)^2$-12(+)+9= -
Luego cuando x= 1, la función presenta un máximo,
f(l)= $(1)^3$-6$(1)^3$+9(1)= 1-6+9= 4.

Segundo método.

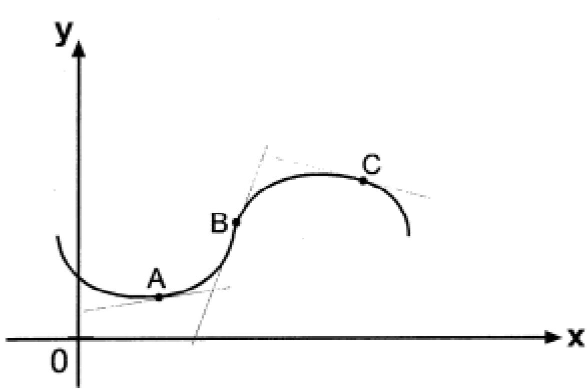
Primer paso. Primera derivada de la función
y'= $3x^2$-12x+9

Segundo paso. Igualamos la primera derivada a cero y aplicamos la fórmula cuadrática.
$3x^2$-12x+9= 0
x_1,x_2=-(-12)±√$(12)^2$-4(3)(9)/2(3)
x_1, = 3
x_2= 1

Tercer paso. Calculamos la segunda derivada.
y"= 6x-12

Cuarto paso. Sustituimos a x por sus valores críticos.
y"= 6(3)-12= 18-12- 6,
en virtud de que el valor es positivo, la función presenta un mínimo cuando x- 3, es decir,
f(3)= 0
y''- 6(1)-12- -6,
en virtud de que el valor es negativo, la función presenta un máximo cuando x= 1, es decir, f(l)=4.

Punto de inflexión



"Un punto de inflexión en una curva es el que separa arcos que tienen su concavidad en sentidos opuestos".[3] (Granville: obra citada, p. 96.). (Comillas y cursiva son nuestras). El procedimiento para calcular un punto de inflexión, es como sigue:

Primer paso. Calculamos la segunda derivada de la función.

Segundo paso. La segunda deriva se iguala a cero, resolvemos la ecuación resultante y se consideran las raíces reales de la ecuación.

Tercer paso. Se calcula la segunda derivada, primero para valores de x un poco menores y después un poco mayores, respecto a las raíces obtenidas en el segundo paso. Si la segunda derivada cambia de signo, tenemos un punto de inflexión. Cuando la segunda derivada arroja un valor positivo, la curva es cóncava hacia arriba. Cuando la segunda derivada arroja un valor negativo, la curva es cóncava hacia abajo.

Ejemplo. Calcule el punto de inflexión, a partir de esta ecuación x^3-6x^2+9x.

Primer paso. Calculamos la segunda derivada de la función.

$y' = 3x^2-12x+9$.
$y'' = 6x-12$.

Segundo paso. La segunda deriva se iguala a cero, resolvemos la ecuación resultante y se consideran las raíces reales de la ecuación.

$6x-12 = 0$
$x = 12/6 = 2$.

Tercer paso. Se calcula la segunda derivada, primero para valores de x un poco menores y después un poco mayores, respecto a las raíces obtenidas en el segundo paso. Si la segunda derivada cambia de signo, tenemos un punto de inflexión. Cuando la segunda derivada arroja un valor positivo, la curva es cóncava hacia arriba. Cuando la segunda derivada arroja un valor negativo, la curva es cóncava hacia abajo.

$6x-12$
$6\mathbf{(+)}-12 = \mathbf{(-)}$
$6\mathbf{(+)}-12 = \mathbf{(+)}$.

Como el signo de la segunda derivada cambió, existe el punto de inflexión. La curva es cóncava hacia arriba a la izquierda de x= 2; y cóncava hacia abajo a la derecha de x= 2.

La derivada en el contexto del análisis estático-comparativo

Las distintas reglas de diferenciación que hasta este momento hemos desmenuzado, nos capacitan para entender y operar la problemática económica en el esquema estático-comparativo.

---

[3]Granville: Obra citada, p. 96.

En dicho esquema se percibe el estado de equilibrio en que reposan determinadas variables económicas. Luego, si cambia otra variable o parámetro cómo se afecta el estado de equilibrio alcanzado. El instrumental de la diferenciación, facilita proporcionar una respuesta adecuada.

Específicamente la derivada parcial desempeña un papel muy importante en la estática comparativa, pues con la misma podemos cuantificar la magnitud o la dirección del cambio de una variable económica, concebida como dependiente en un modelo previamente estructurado, frente al cambio infinitesimal de varias variables económicas independientes. Mas, supone la ausencia de relación entre las variables independientes. Supuesto este un poco irreal, toda vez que el contexto económico, más bien anuncia una continua interrelación de las variables.

De modo que cuando las variables independientes aparecen asociados e interrelacionadas, la técnica de la diferenciación parcial queda desbordada y es necesario entonces recurrir al concepto de derivada total de funciones compuestas.

Este concepto refleja con mayor objetividad la realidad, puesto que reconoce los nexos que existen entre las variables independientes, cuya verificación conjunta arroja o predetermina los cambios de la variable dependiente.

A pesar del uso profuso del cálculo diferencial, que supone la estática comparativa, tiene ante ella serias limitaciones.

Escuchemos lo que al respecto postula Alpha Chiang: *"La estática comparativa es un útil campo de estudio debido a que en economía nos interesa, a menudo, descubrir cómo un cambio desequilibrador en un parámetro afectará el estado de equilibrio en un modelo. Es importante advertir, sin embargo, que por su propia naturaleza la estática comparativa ignora los procesos de ajuste del equilibrio anterior hacia el nuevo, y también desprecia el elemento temporal, propio de ese proceso de ajuste. Como consecuencia de ello, será necesario descartar también la posibilidad de que el nuevo equilibrio no sea alcanzado jamás, a causa de la inestabilidad propia del modelo (...)".* (Chiang: obra citada, p. 233). (Comillas, cursiva y el punto suspensivo son nuestros).

Aplicaciones de la derivada en la economía y en los negocios

La derivada tiene su campo de aplicación principalmente a nivel microeconómico (costos de producción, ingreso de la empresa, elasticidad, etc.) Y a nivel macroeconómico (renta nacional, consumo global, ahorro, etc.).

Costos de producción

Si el costo total de producción para fabricar un artículo determinado, en una empresa, es representado por

$y= f(x)$

donde:

y= costo total de producción.
x= cantidad producida del bien,
el costo promedio por unidad de producto (costo total de producción entre la cantidad de producto fabricada), es igual a
$y/x= f(x)/x$
También si

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y/\Delta x = dy/dx = f'(x)$$

no es más que el costo marginal definido como la razón del incremento en el costo total con respecto al incremento en la producción total.

Ejemplos.

1) Dada la función de costo total $y= 15+3x+0.8x^2$, determine el costo promedio y el costo marginal.

I. Explicación.
En la función dada
y= costo total de producción
x= cantidad producida del producto
15= costo fijo (CF),
el resto de los términos del segundo miembro de la ecuación representan el costo variable..

II. Costo total promedio.

$y/x= f(x)/x$
$y/x= (15+3x+0.8x^2)/x= (15/x)+3+0.8x$
III. Costo marginal
$dy/dx= 0+3(l)+2(0.8)x^{2-1}= 3+1.6x$

2) Dada la función de costo total $C= Q^3-4Q^2+10Q+75$, desarrolle una función de coste variable (CV) e interprete la significación económica de esa derivada.

$CV= Q^3-4Q^2+10Q$ Función de coste variable obtenida de la función de costo total, incluyendo aquellos términos que tienen nexos directos con el nivel de producción.

$dCV/dQ= 3Q^2-8Q+10$ La derivada del CV representa una función marginal: la del coste marginal Cm. Es obvio, pues dCV/dQ indica cómo cambia el costo variable, cuando de manera infínitésimal cambia el nivel de producción. Y esto no es sino la definición del coste marginal Cm.

Ingresos de la empresa

En toda empresa su ingreso total (R) viene dado por la multiplicación del precio unitario de venta (y) por la cantidad de producto vendida (x), es decir, R= x.y.

Si y= f(x), luego R= (x)(y)= x.f(x).

El ingreso marginal es la razón de cambio en el ingreso con respecto al cambio en la demanda, es decir, dy/dx= R'(x).

El ingreso marginal puede ser positivo o negativo, debido a que el ingreso total puede aumentar o disminuir en la medida que cambia la cantidad demandada.

Ejemplos.

1) La función de demanda es 2x+4y= 8, determine el ingreso total, el ingreso promedio y el marginal.

I. Despejamos el precio (y)

y= (8-2x)/4
y= 2-0.5x

II. Ingreso total

R=(x)(y)
R= (x)(2-0.5x)
R= $2x-0.5x^2$

III. Ingreso marginal.
dR/dx= 2-x

IV. Ingreso promedio
R/x= (y)(x)/x= $(2x-0.5x^2)/x$= 2-0.5x

2) La función de ingreso medio es IM= 68-2Q, determine el ingreso total, el ingreso promedio y el marginal.

I. Ingreso total
R= IM (Q)
R= (68-2Q)(Q)= $68Q-2Q^2$

II. Ingreso marginal.
dR/dQ= 68-4Q

IV. Ingreso promedio
R/Q=$68Q-2Q^2$ /Q= 68-2Q

Renta nacional, consumo y ahorro

La función consumo es la relación que se verifica entre la renta nacional disponible y el consumo global.

Se parte de la hipótesis de que en la medida que el ingreso aumenta o disminuye el consumo aumenta o disminuye en menor proporción, por consiguiente la propensión marginal al consumo es mayor que cero, pero menor que uno.

En efecto, la propensión marginal al consumo se expresa como la razón de cambio en el consumo a medida que el ingreso disponible cambia.

Función consumo c= f(x)
Propensión marginal a consumir (PMC)
dc/dx= f (x)

Si se verifica la hipótesis de OJO quería renta disponible es igual al consumo más el ahorro, tendremos
x= c+s,
si la PMC es dc/dx= f (x),
la propensión marginal al ahorro (PMS) será
ds/dx= 1-dc/dx.

Respecto al multiplicador de inversión, que liga el efecto expansivo de la inversión agregada sobre la renta nacional, relaciónase con la PMC mediante la expresión,

k= l/(l-dc/dx)= l/(ds/dx)

Ejemplo:

Función consumo c= 8+0.5x+0.2/x
c= consumo total
x= renta total disponible
Determinar la función de ahorro, la PMC y la PMS.
s= x-c
s= x-(8+0.5x+0.2√x)
s= x-8-0.5x-0.2√x Función de ahorro

Si c= 8+0.5x+0.2√x= 8+0.5x+0.2$(x)^{1/2}$
PMC=dc/dx= 0.5+0.10$x^{1/2}$= 0.5+0.10/√x
PMS= 1-PMC= 1 -(0.5+0.10/√x)= 0.5-0.10/√x

A nivel de superficie de demanda

Una superficie de demanda, se presenta cuando una función de demanda de dos variables independientes es continua.

Así, si hay dos productos vinculados para los cuales las cantidades demandadas son x e y siendo los respectivos precios p y q, las funciones de demanda pueden representarse por

f= f(p, q) e y= g(p, q)

bajo el supuesto de que las cantidades demandadas, x e y, dependen solamente de los precios, p y q, de los dos productos.

De aquél razonamiento se desprende, que al aplicarles derivadas parciales a las funciones descriptas, obtenemos las denominadas funciones de demanda marginales. Veamos:

$\partial x/\partial p=$ a la demanda marginal o parcial de x con respecto a p.
$5x/3q=$ a la demanda marginal o parcial de x con respecto a q.
$\partial y/\partial p=$ a la demanda marginal o parcial de y con respecto a p.
$\partial y/\partial q=$ a la demanda marginal o parcial de y con respecto a q.

En virtud de la relación inversa entre precio y cantidad demandada, los valores de $\partial x/\partial p$ y $\partial y/\partial q$, son negativos *"para todos los valores económicamente significativos de p y de q"*. (Draper: obra citada, p. 348). (Comillas y cursiva son nuestras).

Draper, agrega: *"Si* $\partial x/\partial q$ *y* $\partial y/\partial p$ *son ambos negativos para determinados (p, q) los artículos son complementarios, puesto que una disminución en cada precio corresponde a aumentos en ambas demandas. Si ∂x/∂q y ∂y/∂p son ambas positivas para determinados (p, q), las mercancías son competitivas puesto que una disminución en cada precio corresponde a un aumento en una demanda y a una disminución en la otra. Si ∂x/∂q y ∂y/∂p tienen signos opuestos, los artículos no son ni competitivos ni complementarios; en este caso, una disminución en precio de uno de los artículos corresponde a aumentos en ambas demandas, mientras una disminución en el precio del otro artículo corresponde a un incremento en una demanda y una disminución en la otra (...)"*. (Ibid, p. 348). (Comillas, cursiva y el punto suspensivo son nuestros).

Elasticidades parciales de la demanda

La elasticidad parcial de la demanda de un artículo, representa el grado de sensibilidad de la cantidad demanda de dicho artículo, ante el cambio de la variable precio, manteniendo constante el precio del otro artículo.

Luego, si tenemos las funciones de demanda de dos productos, representadas en

$x= f(p,q)$
$y= g(p> q)$

tendremos las siguientes elasticidades parciales de la demanda:

$Edx= (p/x)(dx/3p)=$ a la elasticidad parcial de la demanda x con respecto al precio p, siendo constante el precio q.

$Edx= (q/x)(Sx/dq)=$ a la elasticidad parcial de la demanda x con respecto al precio q, siendo constante el precio p.

$Edy= (p/y)(\partial y/\partial p)=$ la elasticidad parcial de la demanda y con respecto al precio p, siendo constante el precio q.

Edy= (q/y)(5∂/∂q)= a la elasticidad parcial de la demanda y con respecto al precio q, siendo constante el precio p.

Ejemplo.

1. Determine las cuatro demandas marginales parciales, la naturaleza de la relación entre los dos artículos y las cuatro elasticidades parciales de la demanda.

x= 20-2p-q
y= 9-p-2q

Respuestas:

a) Demandas marginales.

∂x/∂p= -2, demanda marginal o parcial de x con respecto a p.
∂x/∂q= -1, demanda marginal o parcial de x con respecto a q.
∂y/∂p=. -1, demanda marginal o parcial de y con respecto a p.
∂y/∂q= -2, demanda marginal o parcial de y con respecto a q.

b) Tipo de bien.
Como ∂x/∂q y ∂y/∂p, son ambos negativos, los artículos x e y son complementarios.

c) elasticidad parcial de la demanda.
Edx= (p/x)(dx/dp)= (p/20-2p-q)(-2)
Edx= (q/x)(dx/dq)= (q/20-2p-q)(-l)
Edy= (p/y)(dy/dp)= (p/9-p-2q)(-l)
Edy= (q/y)(dy/0q)=(q/9-p-2q)(-2)

A nivel de funciones de producción

Una función de producción relaciona la cantidad de producto que se puede obtener, con el empleo de cantidades determinadas de los factores de producción.

Así, si la cantidad z de un producto se genera utilizando las cantidades k (capital) y L (trabajo), la función de producción adquiere la siguiente expresión: z= (k, L).

Ahora, si derivamos parcialmente dicha función de producción, tendremos
∂z/∂k)= a la productividad marginal de k o el producto marginal de k.
∂z/∂L)= a la productividad marginal de L o el producto marginal de L.

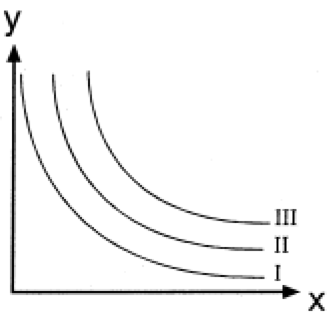
La productividad marginal del capital, supone un incremento del producto total, en la medida que crece la cantidad utilizada del factor capital. La productividad marginal del trabajo, supone un incremento del producto total, en la medida que crece la cantidad utilizada del factor trabajo.

Es conveniente precisar que en la medida que la cantidad utilizada, de un factor, aumenta, la producción también crece. Mas, en la medida que persiste el crecimiento del factor de producción variable, el aumento de la producción se concretiza a una tasa decreciente, hasta alcanzar un punto en el cual no hay incremento adicional, sino un descenso en la producción Estamos frente a la ley de la productividad marginal decreciente.

Por otra parte, si la función de producción es lineal homogénea, es decir, donde el exponente de su constante es igual a 1, de conformidad con el Teorema de Euler, tenemos que:

(k)(0z/0k)+(L)(0z/01)= f(k, L),

esta expresión indica que la producción total es igual al producto de la cantidad del factor capital por su productividad marginal, más el producto de la cantidad del factor trabajo por su productividad marginal. A este respecto, Draper, dice: *"(…) Así el producto total es asignado a los dos factores con base en sus productividades marginales.*



"El Teorema de Euler constituye una parte importante en el desarrollo de la teoría de la distribución de la productividad marginal. Las hipótesis básicas de esta teoría son (1) cada insumo se paga al valor de sus productividad marginal, y (2) el producto total se agota por completo". (Ibid, p. 357). (Comillas, cursiva y el punto suspensivo son nuestros).

Ejemplo.

1. Hallar las productividades marginales, para la función de producción siguiente:

$z= 5xy-2x^2-2y^2$,
x= 1, y= 1.

Respuesta:

$\partial z/\partial x= 5y-4x$,
sustituyendo,

$\partial z/\partial x= 5(1)-4(1)= 1$, que es la productividad marginal de x o el producto marginal de x.
$\partial z/\partial y$- 5x-4y,
sustituyendo,
$\partial z/\partial x)$ = 5(1)-4(1)= 1, que es la productividad marginal de y o el producto marginal de y.

A nivel de funciones de utilidad

La función de utilidad asocia ciertas cifras (utilidad) con varias cantidades de mercancías consumidas, pero estas cifras representan sólo una clasificación u ordenamiento de preferencia.

Ferguson, nos dice: *"El análisis de la conducta del consumidor se facilita grandemente por el empleo de una función de utilidad que asigne un valor numérico o un nivel de utilidad a los conjuntos de bienes (...) Sin embargo, para la mayoría de nuestros propósitos no tienen* *importancia en sí mismos los valores numéricos particulares asignados a los conjuntos de bienes. Sólo se pide a la función de utilidad que refleje los mismos ordenamientos que el consumidor asigna a los conjuntos de bienes alternativos (...)".* (Ferguson y Gould: Teoría microeconómica. Fondo de Cultura Económica, México, 1975, p. 19). (Comillas, cursiva y puntos suspensivos son nuestros).

(Ver Figura 26, en la versión formato físico, p. 113).

Dada una función de utilidad U= f(x, y), donde x e y representan las cantidades de dos productos distintos que el consumidor adquiere. Tras la satisfacción, el consumidor combinará cantidades diferentes de ambos productos, conformándose la curva de indiferencia. "*(...) Ahora podemos definir la curva de indiferencia como el lugar de los puntos cada uno de los cuales representa una colección de mercancías tales que el consumidor se siente indiferente entre cualesquiera de estas combinaciones (...)".* (Baumol, William J.: Teoría económica y análisis de operaciones. Herrero Hermanos, S. A., Editores, México, 1974, p. 179). (Comillas, cursiva y puntos suspensivos son nuestros).

Un conjunto de curvas de indiferencia, constituye un mapa de indiferencia.

El diferencial total de la función de utilidad es
$dU= (\partial U/\partial x)dx+(\partial U/\partial y)dy= 0$,
en virtud de que a lo largo de cualquier curva de indiferencia el nivel de utilidad es constante, por lo que,

$dU= 0$

por tanto,

$-(dx/dy)= (\partial U/\partial x)/(\partial U/\partial y)$
la cual se infiere lo siguiente:

a) La pendiente dx/dy de una curva de indiferencia es la tasa a la cual un consumidor estaría deseando sustituir x por y o y por x para mantener un determinado nivel de utilidad;

b) La expresión negativa -(dx/dy) es la tasa de sustitución de bienes de x por y o y por x, y es igual a la razón entre las derivadas parciales de la función de utilidad.
Ejemplos.

1) Dada la función de utilidad de un individuo
$U= (x,+2)^2 (X_2+3)^3$,

donde U representa la utilidad total y x,y x_2+ son las cantidades de dos bienes consumidos. Determinemos la función de utilidad marginal de cada uno de los dos bienes y su valor cuando el consumo es de tres unidades de cada bien.

$U,= \partial U/\partial x_1= (x_1+2)^2 (0)+2(x_1+2)(x_2+3)^3= 2(x_1+2)(x_2+3)^3$
$U,= \partial U/\partial x_2= (x_1+2)^2 3(x_2+3)^2+(0)(x_2+3)^3= 3(x_1+2/)2(x_2+3)^2$

2) Si la función de utilidad del consumidor está dada por

$U=Q_1Q^2_2$

y el consumidor compra 4 unidades de Q, y 5 unidades de Q_2. a) ¿Qué cantidad de Q, debe comprar para mantener el mismo nivel de utilidad si su compra de Q_2 se aumentara a 6 unidades? (b) ¿Qué cantidad de Q_2 debe comprar para mantener el mismo nivel de utilidad si su compra de Q, se incrementara a 6 unidades? (c) ¿Qué cantidad de Q, debe comprar para mantener el mismo nivel de utilidad si su compra de Q_2 decrece a 4 unidades? (d) ¿Qué cantidad de Q_2 debe comprar para mantener el mismo nivel de utilidad si su compra de Q, decrece a 2 unidades?

$U= 4(5)^2= 100$
$100= Q_1(6)^2$

$Q_1=100/36= 50/18= 25/9$	Respuesta (a)
$Q_2=\sqrt{l00/6}= \sqrt{50/3}$	Respuesta (b)
$Q_1=100/16= 50/8= 25/4$	Respuesta (c)
$Q_2=\sqrt{100/2}= \sqrt{50}$	Respuesta (d)

EL CÁLCULO DIFERENCIAL DESCOMPONE; EL CÁLCULO INTEGRAL, REINTEGRA PROBABLEMENTE CON REGLAS DISTINTAS.

4

CAPITULO IV
TERCER CAMINO EXPLORADO: CÁLCULO INTEGRAL

Concepto

"El concepto de integral presenta dos aspectos característicos muy diferentes, que corresponden a dos distintas aplicaciones. Desde un punto de vista, la integral es el límite de una determinada expresión aditiva, que aparece frecuentemente en el análisis matemático y que, geométricamente, corresponde al área comprendida entre una o varias curvas planas. La integral, concebida de este modo, se denomina integral definida. Desde el otro punto de vista, la integral es el resultado del proceso inverso al de la diferenciación. La derivada de una función de una variable es también una función de la misma variable, y el problema inverso consiste en obtener, partiendo de una función dada, una nueva función que tenga por derivada aquélla. La segunda función, en el caso de que exista y sea posible hallarla, se denomina integral indefinida de la primera". (Allen: ob. cit., p. 376.). (Comillas y cursiva son nuestras).

De hecho, la integral es una operación mediante la cual a partir del diferencial de una función, se obtiene la función original. En realidad, la diferenciación y la integración son operaciones inversas.

Ejemplo:

Si $f(x)= 2\ x^3$,
entonces $f\ (x)dx= 6x^2dx$,
de modo que
$\int 6x^2dx= 2\ x^3$

Constante de integración

Si tenemos que $d(2x^3)= 6x^2dx$, tendremos que $\int 6x^2dx= 2\ x^3$. Si le agregamos a la función original una constante cualquiera, digamos $f(x)= 2\ x^3+8$, entonces $d\ (\ 2\ x^3+8)= 6x^2dx$, por lo que $\int 6x^2dx= 2\ x^3+8$, e igualmente si $f(x)= 2\ x^3-5$, entonces $d\ (2\ x^3-5)= 6x^2dx$, por lo que $\int\ 6x^2dx= 2\ x^3-5$. De modo, que en sentido general, $d(2x^3+c)= 6x^2dx$, siendo c una constante cualquiera, tendremos $\int 6x^2dx= 2\ x^3+c$.

La constante arbitraria c, dice Granville, se llama constante de integración, siendo además una cantidad independiente de la variable de integración.

En virtud de que $f(x)+c$, supone que c puede adoptar múltiples valores, se supone que si una expresión diferencial dada tiene una integral, ha de poseer una infinidad de integrales cuya diferencia no es sino la constante citada (c). De donde,

$\int f(x)dx = f(x)+c$,

su segundo miembro f(x)+c se denomina integral indefinida, precisamente porque c es desconocida e indefinida.

Reglas básicas de integración

Regla I (regla de potencia)

$\int x^n dx = x^{n+1}/n+l+c$.

Ejemplo 1. Hallar $\int x^4 dx$.
n= 4, por tanto,
$\int x^4 dx = x^{4+1}/4+l+c = x^5/5+c$.

Ejemplo 2. Hallar $\int \surd x^5 dx$.

Debido a que $\surd x^5 = x^{5/2}$
entonces n= 5/2; por lo que,
$\int \surd\, x^5 dx = x^{(5/2)+1}/(5/2)+l+c = x^{7/2}/(7/2)+c = \surd x^7/(7/2)+c$.

Ejemplo 3. $\int 1/x^6 dx$.

Debido a que $l/x^6 = x^{-6}$, tenemos que n= -6. De donde la integral es,
$\int l/x^6 dx = x^{-6+l}/-6+l+c = x''^5/-5+c = -l/5x'^5+c$.

Regla II (regla exponencial)

$\int e^x dx = e^x+c$.

Regla III (regla logarítmica)

$\int l/x dx = \ln x+c \ (x>0)$.

Respecto a estas tres reglas de integración, Chiang, apunta: *“Las tres reglas expuestas anteriormente ilustran con amplitud el espíritu de todas estas reglas de integración. Cada una corresponde siempre a una fórmula determinada de derivación también se agrega siempre una constante al final (...) para indicar que una familia entera de funciones primarias puede dar origen a la forma dada del integrando”.* (Chiang: Obra citada, p. 400). (Comillas, cursiva y el punto suspensivo son nuestros).

Regla IV (integral de una suma)

La integral de una suma de un número finito de funciones es la suma de las integrales de esas funciones.

$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Ejemplo 1. Hallar $\int (x^7+x+l)dx$.
$\int (x^7+x+l)dx = \int x^7dx + \int xdx + \int ldx = (x^8/8+c_l)+(x^2/2+c_2)+x+c_3 = (x^8/8)+(x^2/2)+x+c$

Regla V (integral de un múltiplo)

La integral de multiplicar por un coeficiente k una función (donde k es una constante) es k multiplicado por la integral de aquella función.

$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$.

Ejemplo 1. Hallar $\int 4x^3dx$.
$\int 4x^3dx = 4 \int x^3dx = 4(x^{3+l}/3+l+c) = 4(x^4/4+c) =^{:} x^4+c$.

Regla VI (regla de la sustitución)

$\int u^n du = u^{n+1}/n+l+c$, $n \neq -1$, en la cual $u = f(x)$ es una función diferenciable de x.

Chiang, advierte: *"En realidad, no existe una fórmula general que dé la integral de un producto de dos funciones en términos de las integrales separadas de esas funciones; ni tampoco tenemos una fórmula general que nos dé la integral de un cociente de dos funciones en términos de sus integrales separadas. Esta es la razón de por qué la integración en conjunto es más difícil que la diferenciación, y por qué cuando tenemos que integrar funciones complicadas es más conveniente buscar las soluciones en tablas de fórmulas de integración ya existentes, más bien que emprender la tarea de la integración uno mismo".* (Chiang: ob. cit., p. 404). (Comillas y cursiva son nuestras).

Resolución de ejercicios de integración indefinida

1) $f\ 16x^{-3}dx$

$\int 16x^{-3}dx = 16\int x^{-3}dx = 16x^{-3+1}/-3+l+c = 16x^{-2}/-2+c = -8x^{-2}+c$

2) $\int 16x^{15}dx$

$\int 16x^{15}dx = 16\int x^{15}dx = 16x^{15+1}/15+l+c = 16x^{16}/16+c = x^{16}+c$

3) $\int (x^5-3x)dx$

$\int (x^5-3x)dx = \int x^5dx - \int 3xdx = x^{5+1}/5+l+c_1 - 3x^{1+1}/l+l+c_2 = x^6/6+c_1-3x^2/2+c_2 = x^6/6-3x^2/2+c$

4) $\int (2x^5-3x^2+2)dx$

$\int (2x^5-3x^2+2)dx = \int 2x^5dx - \int 3x^2dx + \int 2dx = 2 \int x^5dx - 3 \int x^2dx + 2 \int dx = 2x^{5+1}/5+l+c_1 3x^{2+1}/2+l$ $c_2+2x+c_3 = 2x^6/6 - 3x^3/3+2x+c = x^6/3-x^3+2x+c$

5) $\int 3e^x dx$

$\int 13e^x dx = 13\int e^x dx = 13e^x + c$

6) $\int (e^x + 4/x)dx$
$\int (e^x + 4/x)dx = \int e^x dx 4\int 1/x dx = e^x + c_1 + 4\ln|x| + c_2 = e^x + 4\ \ln|x| + c$ (VER A CHIANG)

7) $\int (5e^x + 3/x^2)dx$

$\int (5e^x + 3/x^2)dx = \int 5e^x dx + \int 3/x^2 dx = 5\int e^x dx + 3\int x^{-2} dx = 5e^x + c_1 + 3x^{-2+1}/{-2}+l + c_2 = 5e^x + 3x^{-1}/{-l} + c =$
$= 5e^x - 3x^{-1} + c$ (VER A CHIANG)

8) $\int 3e^{-(2x+7)}dx$

u= -(2x+7)

du/dx= -2

du= -2(dx)

$\int 3e^{-(2x+7)}dx = -1/2 \int (3\ e^{-(2x+7)}(-2)dx = -3/2 \int e^u du = -3/2e^{-(2x+7)} + c.$

9) $4xe^{(x2+3)}dx$

$u = x^2 + 3$

du/dx= 2x

du= 2xdx

$\int 4xe^{(x2+3)}dx = (l/2)/4xe^{<x2+3)}(2)dx = 2je^u du = 2e^{(x2+3)} + c.$

10) $\int xe^{(x2+9)}dx$

$u = x^2 + 9$

du/dx= 2x

du= 2xdx

$\int xe^{(x2+9)}dx = 1/2 \int xe^{(x2+9)}(2)dx = 1/2 \int e^u du = l/2e^{(x2+9)} + c$

11) $\int 3dx/x$

$\int 3dx/x = 3 \int dx/x = 3\ \ln|x| + c$

12) $\int dx/x+3$

u= x+3
du/dx= 1
du= dx

$\int dx/x+3 = (l/l) \int (l/x+3)(l)dx= \int l/udu= \ln|u|+c= \ln|x+3|+c$

13) $\int (2x/x^2+3)dx$

$u= x^2+3$
du/dx= 2x
du= 2xdx

$\int (2x/x^2+3\ )dx= {}_{X}1\ /2\ J\ (2x/x^2+3\ )(2)dx= \int (1\ /u)du= \ln|\ u|\ +c= \ln\ |\ x+31\ +c$

14) $\int (x/3x^2+5)dx$

$u= 3x^2+5$
du/dx= 6x
du= 6xdx

$\int (x/3x^2+5)dx= l/6 \int (x/3x^2+5)(6)dx= l/6 \int (l/u)du= (l/6)\ln|u|+c= 1/6 \ln (3x^2+5)+c.$

Aplicación de la integración indefinida en la administración y la economía.

A nivel de costos

Ejemplos.

1. Si el costo marginal de una empresa es la siguiente función de producto $C'(q)= 2q^2-3q+8$, ¿cuál es su función de costo total?
A través de la integración de C'(q) con respecto a q vemos que:
Luego aplicamos la regla de potencia:
$=2q^{2+l}/2+l-(3q^{l+1}/l+l)+8q^{0+1}/0+l+C=$
$C(q)=2/3q^3-3/2q^2+8q+C,$
siendo C= costo fijo (CF), tendremos,
$C(q)=2/3q^3-3/2q^2+8q+CF$

2. Si el costo marginal de una empresa es la siguiente función de producto $C'(q)=3q^2-4q+5$, ¿cuál es su función de costo total?

A través de la integración de C'(q) con respecto a q vemos que:

$\int (3q^2-4q+5)dq= 3 \int q^2dq-4 \int qdq+5 \int dq.$
$= 3q^{2+1}/2+l -4q^{l+l} /1+1+5q^{0+1}/0+l + C$

$CT= 3/3\ q^3-4/2q^2+5q+C = q^3-2q^2+5q+C$,

siendo CT= CV+CF,

Cuando q = 0

CT=CF, luego

C=CF, por tanto

$CT=q^3-2q^2+5\ q+CF$

3. El costo marginal como una función de las unidades producidas q, está dado por C'(q)= 1.123-0.008q. Si el costo fijo es 15, hallar las funciones de costo total y costo promedio.

$CT \quad = \int (1.123-0.008q)dq$
$= \int 1.123dq- J0.008qdq$
$= 1.123\ Jdq-0.008\ Jqdq$
$= 1.123q-0.008q^{1+1}/l+l+C$
$=1.123q-0.008\ q^2/2+C$
$=1.123q-0.004\ q^2+C$
Si q=0, y CT=15. Siendo C=CF= 15, cuando q=0 el CT=15, luego:
$CT=15+1.123q-0.004q^2$.
El costo promedio que es CT/q, tendremos
$CTP= CT/q = (15+1.123q-0.004q^2)/q$
Simplificando:
$CTP =15/q+1.123-0.004q$
4. El costo marginal como una función de las unidades producidas q, está dado por
$C'(q)^{=}\ 4+70q-10q^2$. Si el costo fijo es 80, hallar las funciones de costo total y costo promedio.

$C'(q) = 4+70q-10q^2$
CF = 80
CT = ?, CTP = ?

$CT \quad = \int (4+70q-10q^2)dq$
$= \int 4dq + \int 70qdq - \int 10q^2dq$
$= 4 \int dq+70 \int qdq-10 \int q^2dq$
$= 4q +70q^2 /2 -10q^3/3 + C$
$= 4q +35q^2 -10q^3/3 + C$

Siendo C=CF=80, cuando q=0, entonces CT=80, luego:

$CT = 80+4q+35q^2-10q^3/3$
$CTP = (80+4q+35q^2-10q^3/3)/q$
$CTP = 80/q+4+3\ 5q-10q^2/3$

A niveles de ingresos

Ejemplos.

1. Si la función de ingreso marginal es $R'(q)=6-4q-3q^2$, determinar la función de ingreso total y la función de demanda.

$R(q) \quad = \int (6-4q-3q^2)dq$
$= \int 6dq - \int 4qdq - \int 3q^2dq$
$= 6 \int dq-4 \int qdq-3 \int q^2dq$
$= 6q -4q^2/2-3q^3/3+C$
$= 6q -2q^2 -q^3+C$
Si q=0, R=0, se deduce C=0, por tanto,
$R=6q-2q^2-q^3$ Es la función de ingreso total
$y = R/q= 6q/q-2q^2/q-q^3/q =6-2q-q^2$ Es la función de demanda

2. Si la función de ingreso marginal es $R'(q)= 15-10q+q^2$ determinar las funciones de ingreso y de demanda.
3.

$R(q) \quad = f(15-10q+q^2)dq$
$= \int 15dq- \int 1 Oqdq+ \int q^2dq$
$=15 \int dq-10 \int qdq+ \int q^2dq$
$= 15q-10q^2/2+q^3/3+C$
$= 15q-5q^2+l/3q^3+C$

Si q=0, C=0, por tanto,

$R(q) = 15q-5q^2+l/3q^3$ Función de ingreso total,
$y = R/q = 15-5q+l/3q^2$ Función de demanda.

A nivel de la renta nacional, el consumo y el ahorro

1. La propensión marginal a consumir es dc/dx = 0.10+0.4//q. Cuando la renta es cero, el consumo es $20. Hallar la función consumo.

$dc/dq = 0.10+0.4/(q)^{1/2} = 0.10+0.4^{-1/2}$
$c \qquad = \int (0.10+0.4/q^{-1/2})dq$
$= \int 0.10dq+ \int 0.4q^{-1/2}dq$
$= 0.10 \int dq+0.4 \int q^{-1/2}dq$
$= 0.10q+(0.4q^{1/2}/l/2)+C= 0.10q+(0.8q^{-1/2}+C$
Si q=0, c=20, y siendo C=20, tendremos
$c = 20+ 0.10q+0.4q^{,/2}/l/2= 20+ 0.10q+0.8q^{l/2}$ Función consumo.

Integral definida

Interpretación

La integral definida tiene por simbología: $\int_a^b$ y dx, la cual se puede leer como *“la integral desde a hasta b de y dx”. Esta operación se denomina integración entre límites, siendo* a el límite inferior *y b el superior. Cuando estamos evaluando este tipo de integrales, la constante de integración desaparece, por lo que la integral tiene un valor definido. Es en tal virtud que se denomina integral definida de f(x) desde a hasta b".* (Draper: ob. cit., p. 412). (Comillas y cursiva son nuestras).

Chiang, define de este modo la integral definida: *"(...) Ahora bien, para una integral indefinida dada de la función continua f(x): c = ∫f(x) dx= F(x)+c. Si elegimos dos valores de x en el dominio, por ejemplo, a y b (a<b), los sustituimos sucesivamente en el segundo miembro de la ecuación y formamos la diferencia: [f(b)+c]-[F(a)+c]= F(b)-F(a) obtenemos un valor numérico que es independiente de la constante arbitraria c. Este valor se llama integral definida de f(x) desde a hasta b. Nos referimos a como el límite inferior de integración y a b como el límite superior de integración".* (Chiang, ob. cit., págs. 405 y 406). (Comillas, cursiva y el punto suspensivo son nuestros).

Propiedades de la integral definida

Las integrales definidas tienen estas propiedades:

I. El intercambio de los límites de integración cambia el signo de la integral definida, es decir, $\int_b^a f(x)dx= -\int_a^b f(x)dx$.

II. Una integral definida tiene valor cero cuando los dos límites de integración son idénticos: $\int_a^b f(x)\, dx= F(a)- F(a)= 0$.

III. Una integral definida es expresable como la suma de un número finito de sub-integrales definidas, así:

$\int_a^d f(x)\, dx= \int_a^b f(x)\, dx+ \int_b^c f(x)\, dx+ \int_c^d f(x)\, dx$, donde (a<b<c<d). Esta propiedad se denomina también propiedad aditiva.

IV. $\int_a^b - f(x)\, dx= - \int_a^b f(x)\, dx$.

V. $\int_a^b kf(x)\, dx= k \int_a^b f(x)\, dx$.

VI. $\int_a^h [f(x)+g(x)]dx= \int_a^b f(x)\, dx+ \int_a^b g(x)\, dx$.

Mecanismo de evaluación

Para evaluar una integral definida, tenemos que dar los siguientes pasos:
Primer paso: integramos la expresión diferencial dada.

Segundo paso: Reemplazamos la variable en esta integral indefinida en primer lugar por el límite superior, después por el inferior, y luego restamos el segundo resultado del primero.

Evaluemos las siguientes integrales definidas:

1) $\int_1^2 x^2dx$

$= x^3/3]_1^2 = (l/3)(2^3-l^3) = (l/3)(8-l) = (l/3)(7) = 7/3$
2) $\int_1^3 l/2x^2dx$
$l/2x^3/3]_1^3 = (1 / 6)x^3]_1^3 - l/6(3^3-l^3) - (l/6)(27-l) = (l/6)(26) = 26/6 = 13/3.$

3) $\int_2^4(x^3-3x^2)dx$
$(x^4/4-3x^3/3)]_2^4 = (1/4x^4-x^3]_2^4 = (l/4(4^4-4^3) - (l/4(2^4-2^3) = (64-64)-(4-8) = 0+4 = 4$
4) $\int_1^4 x(x^2+6)dx$
$\int_0^1 (x^3+6x)dx = x^4/4+6x^2/2]_0^1 = [(x^4/4+3x^2]_0^1 = (l^4/4+3)-0 = 13/4$

5) $\int_1^4/xdx$
$\int_1^4 (x)^{1/2}dx = x^{3/2}/3/2]_1^4 = 2/3x^{3/2}]_1^4 = 2/3(4)^{3/2}-2/3(1\ )^{3/2} = 14/3.$

6) $\int_4^2 x^2(l/3x^3+l)dx$

$\int_4^2(l/3x^5+x^2)dx = (l/3x^6/6+x^3/3]_4^2 = l/18x^6+l/3x^3]_4^2 = 1/18(2)^6+l/3(2)^3-[1/18(4)^6-l/3(4)^3] = 32/9+8/3-$
$2048/9-64/3 = -242.66.$

7) $\int_1^2 e^{-2x}dx$

u= -2x
du/dx= -2
du= -2dx

$\int_1^2 e^{-2x}dx = -1/2\int_1^2 e^udu = -1/2\ e^u]_1^2 = -1/2\ e^{-2x}]_1^2 = -l/2_e{}^{-2(2)}+l/2\ e^{2(l)} = -1/2\ e^{-4} + l/2e^{-2} = l/2(e^{-2} - e^{-4})$

8) $\int_{-1}^{e-2} dx/x+2$

u=x+2
du/dx= 1
du= dx

$\int_{-1}^{e-2}dx/x+2 = \int_{-1}^{e-2}du/u = \ln u]_{-1}^{e-2} = \ln x+2]_{-1}^{e-2} = \ln e-2+2-\ln -1+2 = \ln e^1-\ln 1^0 = 1 -0 = 1.$

9) $\int_2^3 (e^{2x}+e^x)dx = \int_2^3 e^{2x}dx + \int_2^3 e^xdx = 1/2\ e^{2x}]_2^3 + e^x]_2^3 = 1/2\ e^{2(3)} -1/2\ e^{2(2)} + e^3-e^2 = 1/2\ e^6 -1/2\ e^4 +$
$e^3-e^2 = (l/2e^6 +e^3) - (l/2e^4+-e^2) = e^2(l/2\ e^4 - l/2e^2 + e-1)$

10) $\int_e^6 [(1/x + l/(l+x)]dx = \ln|x|+\ln|\ l+x|]_e^6 = \ln|x(l+x)|]_e^6 = \ln|6(l+6)| -\ln|e(l+e)| =$
$\ln 42 -\ln 42/[e(l+e)].$

Formas típicas de integración

Draper, recomienda la siguiente tabla de fórmulas estándar de integración:

1. $\int dx = x+c.$
2. $\int kdx = k\int dx$, en la cual k es cualquier constante.
3. $\int [du+dv] = \int du+\int dv$, donde u= f(x) y v= g(x) son funciones de x derivables.

4. $\int x^n dx = (x^{n+1} x/n+l)+c$.
5. $\int u^n du = (u^{n+1}/n+l)+c$, $n \neq -1$, en que $u= f(x)$ es una función de x derivable.
6. $\int l/udu = \ln u+c$, donde $u= f(x)$ es una función de x derivable.
7. $\int e^u du = e^u+c$, en que $u= f(x)$ es una función de x derivable.
8. $\int a^u du = (a^u/\ln a)+c$ c, en que $u= f(x)$ es una función de x derivable.
9. $\int \text{sen } u\, du = -\cos u\, du + c$.
10. $\int \cos u\, du = \text{sen } u\, du$.
11. $\int \text{sen}^2 u\, du = \text{tg } n\, u + c$
12. $\int \csc^2 u\, du = -\cot u+c$.
13. $\int \sec u \text{ tg } u\, du = \sec u+c$.
14. $\int \text{esc } u \cot u\, du = -\text{esc } u+c$.
15. $\int \text{tg } u\, du = -\ln \cos u+c= \ln \sec u +$
16. $\int \cot u\, du = \ln \text{sen } u+c$.
17. $\int \sec u\, du = \ln (\sec u + \text{tg } u) + c$.
18. $\int \csc u\, du = \ln (\text{esc } u - \cot u) + c$.
19. $\int du/a^2-u^2==l/2a\ \ln a+u/a-u+c$, $u^2<a^2$
20. $\int du/u^2-a^2=l/2a \ln u-a/u+a+c$, $u^2>a^2$.
21. $\int du/\sqrt{u}^2+a^2= \ln(u+\sqrt{u}^2+a^2)+c$.
22. $\int \sqrt{u}^2+a^2 du= u/2\ \sqrt{u}^2+a^2)+a^2/2 \ln(u+\sqrt{u}^2+a^2)+c$.
23. $\int ue^u du= e^u(u-l)+c$.
24. $\int \ln u\, du= u \ln u - u + c$.
25. $\int u^n \ln u\, du = u^{n+l}= [\ln u/n+l-l/(n+l)^2]+c$.
26. $\int du/u \ln u= \ln (\ln u) + c$.

¿Para qué nos sirve la tabla arriba transcripta? Nos permite, cuando vamos a solucionar una integral, compararla con una de esas formas típicas. Si es idéntica la podemos resolver rápidamente, en caso contrario tenemos que aplicar otros métodos, con los cuales se puede reducir, la integral, a una de las formas típicas conocidas.

Aplicaciones de la integral definida en la economía

Excedente del consumidor

"Para lo que se ha convertido en un estudio clásico de la relación entre valor y utilidad, Alfred Marshall propuso el concepto de excedente del consumidor. La idea central consiste en que toda persona tiene en mente un precio que está dispuesto a pagar para no quedarse sin una cierta mercancía, y que el grado de satisfacción medido por el precio que el consumidor esté dispuesto a pagar es generalmente mayor que el precio que de hecho paga en el mercado. La diferencia entre el precio que estaría dispuesto a pagar para no quedarse sin la mercancía y el precio real que paga es la "medida económica" de su excedente de satisfacción. Dicho exceso de satisfacción sobre el precio de mercado se conoce como excedente del consumidor". (Huang, David: Introducción al uso de la matemática en el análisis económico. Siglo XXI, editores, s.a., quinta edición en español, México, 1978, p. 165). (Comillas y cursiva son nuestras).

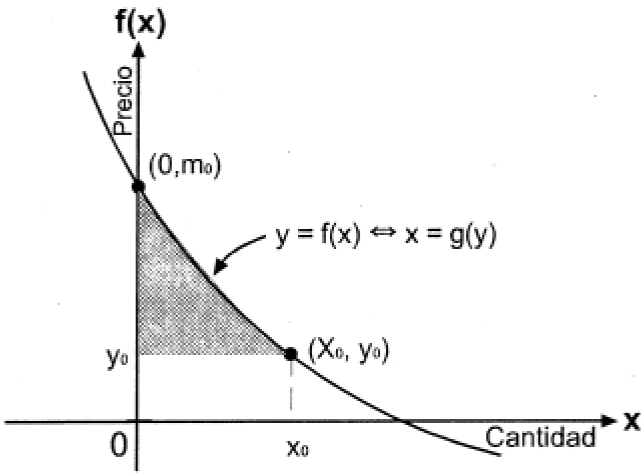


Figura 27

En esta gráfica, y_0 representa el precio de mercado, mientras que x_0, representa la demanda en el mercado. De modo que los consumidores que inicialmente estuviesen dispuestos a pagar un precio superior al prevaleciente en el mercado, ganan por el solo hecho de que dicho precio de mercado es y_0. Luego, la ganancia total del consumidor se representa por el área situada debajo de la curva de demanda y por encima de la recta $y= y_0$. Es a dicha área que se denomina el excedente del consumidor.

El área del excedente del consumidor se evalúa así:

$\int_0^{x0} f(x)dx-x_0y_0$,

donde la función de demanda es $y= f(x)$.

También el excedente del consumidor se puede evaluar con esta expresión:

$\int_{y0}^{m0} f(y)dy$,

donde la función de demanda es $x= g(y)$ y m_0 es el valor de y cuando $x= 0$, es decir, m_0, es la ordenada del intercepto con el eje Y, de la función de demanda.

Ejemplos.

1. Si la función de demanda es $y= 40-2x-x^2$ hallar el excedente del consumidor:

a) $x_0 = 2$; b) si $y_0 = 30$
Respuesta a)

Excedente del consumidor = $\int_0^2 (40-2x-x^2)dx- (2)(y_0)$,

procedemos a calcular y_0, sustituyendo en la ecuación de demanda x por su valor 2,

$y= 40-2x-x^2$

$y= 40-2(2)-(2)^2= 40-4-4= 32$,

luego,

Excedente del consumidor = $\int_0^2 (40-2x-x^2)dx- (2)(32)$
$= [40x-x^2-l/3\ x^3]_0^2-64$
$=[(40)(2)-(2)^2-l/3(2)^3]-64$
$=73.33-64=9.33$

Para calcular la respuesta b, tenemos que determinar el valor de x a partir de la ecuación de demanda, sabiendo que y= 30.

procedemos a calcular x_0,

$y= 40-2x-x^2$
$30 = 40-2x-x^2$
$-40+2x+x^2 = -30$
$x^2+2x+30-40 = 0$
$x^2+2x-10 = 0$
$x_1, x_2 = [-2\pm\sqrt{2^2-4(l)(-10)}]/2(l) = [-2\pm\sqrt{4+40}]/2 = (-2\pm 6.63)/2$
$x_1 = (-2+6.63)/2=2.31$
$x_2 = (-2-6.63)/2= -4.31$,

luego,

Excedente del consumidora = $\int_0^{2\ 31}(40-2x-x^2)dx-(2.31)(30)$,

$= [40x-x^2-l/3x^3]_0^{2.3I}-69.3$,

sustituyendo a x por 2.31 y simplificando

= 82.95-69.3

= 13.65.

b) Aplicación en el monopolio

Función de demanda $y = 32-2x^2$
El costo marginal es igual a $c'=12+2x$.
a) determinar ganancia máxima; b) excedente del consumidor.
1º Paso: Determinamos ingreso total
$IT = yx = (32-2x^2)(x) = 32x-2x^3$

2º Paso: Determinamos el ingreso marginal
$IT' = dIT/dx = 32-6x^2$

3º Paso: Igualamos el ingreso y costo marginales, con lo que se determina la ganancia máxima.

$IT' = y'$

$32-6x^2 = 12+2x$
$0 = -32+6x^2+12+2x$
$6x^2+2x-20 = 0$
$x_1, x_2 = [-2\pm\sqrt{2^2-4(6)(-20)}]/2(6) = (-2\pm\sqrt{484})/12 = (-2\pm 22)/12$
$x_1 = (-2+22)/12 = 1.67$
$x_2 = (-2-22)/12 = -2.$

Ahora procedemos a calcular y_0
$y = 32-2(1.67)^2 = 26.42$

Excedente para el consumidor $= \int_0^{1.67}(32-2x^2)dx-(1.67)(26.42)$,

$= [32x-2x^3/3]_0^{1.67}-44.12$
$= 50.34-44.12=6.22$

Excedente para el productor

Draper, afirma: *"Una función de oferta representa las respectivas cantidades de un artículo que podrían verderse a varios precios. Si el precio en el mercado es y_0, y la correspondiente oferta en dicho mercado es x_0, entonces aquellos productores que estuviesen dispuestos a vender el artículo a un precio inferior al de este mercado, ganan, por el hecho de que el precio es y_0".* (Draper, obra citada, p. 430). (Comillas y cursiva son nuestras).

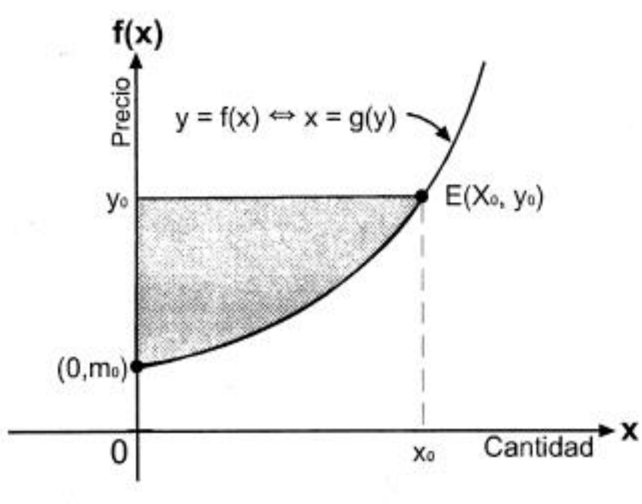


Figura 28

En esta gráfica, la ganancia total del productor se representa, por el área situada encima de la curva de oferta y debajo de la recta $y= y_0$, conocida bajo el nombre del excedente del productor.

El área del excedente del productor se evalúa así:
$x_0y_0- \int_0^{x0} f(x)dx$,

donde la función de oferta es y= f(x).

También el excedente del productor se puede evaluar con esta expresión:

$\int_{M0}^{y0} g(y)dy$,

donde la función de oferta es x= g(y) y M_0 es el valor de y cuando x= 0, (es decir, M_0, es el intercepto -y de la función de oferta).

Ejemplo:

Función de oferta es $y= (x+3)^2$, $y_0 = 24$. Determinemos el excedente del productor.

Primero: Postulamos nuestra fórmula, $x_0y_0- \int_0^{x0} f(x)dx$.

Segundo: Resolvemos para el segundo miembro de la función dé oferta

$y= (x+3)^2$

$= x^2+2(x)(3)+3^2$
$= x^2+6x+9$

Tercero: Calculamos x_0.

$24 = x^2+6x+9$
$x^2+6x+9-24 = 0$
$x^2+6x-15 = 0$
$x_1, x_2 = [-6\pm\sqrt{}6-4(l)(-15)]/2(l) = (-6\pm\sqrt{}96)/2$
$x_1 = 1.89895$
$x_2 = -7.89$

Cuarto: Excedente del productor

$= (1.89895)(24)- \int_0^{1.89895}(x+3)^2dx$
$= 45.5748 - [(x+3)^3/3]_0^{1.89895}$
$= 45.5748 -(39.19-9)$
$= 15.38$

Otros ejemplos

1) Hallar la cantidad producida que maximice la utilidad y determine la utilidad total en dicho punto si las funciones de ingreso marginal y de costo marginal están dadas por

$R'= 44-9x$
$c'= 20-7x+2x^2$

"La integración puede utilizarse en la economía para determinar la utilidad total o las ganancias

netas totales en varios contextos. En general, la utilidad se maximiza (suponiendo competencia pura) cuando el ingreso marginal se iguala con el costo marginal y la ganancia total es la integral de la diferencia entre el ingreso marginal y el costo marginal desde una cantidad cero hasta la cantidad para la cual la utilidad se maximiza". (Draper: ob. cit., p. 433). (Comillas y cursiva son nuestras).

Primero: hacemos R'-c'= 0

$44-9x-20+7x-2x^2= 0$,
simplificamos,

$24-2x-2x^2= 0$,

empleando la fórmula cuadrática, encontramos los valores críticos de la ecuación,

$x=[-2\pm/2^2-4(2)(-24)]/4$
$x= 3, -4$

Segundo paso: Calculamos la segunda derivada, pues la primera derivada de R'-c' es la segunda derivada de la utilidad total y por lo tanto, su signo indica si la utilidad se maximiza o se minimiza para un valor particular de x, por tanto,

$d/dx(R'-c')= -2-4x$.
Sustituyendo,
$-2-4(3)= -14$,
en consecuencia, la utilidad se maximiza para x= 3.

Tercer paso: calculamos la utilidad total como la integral de la diferencia entre el ingreso marginal y el costo marginal desde una cantidad cero hasta la cantidad para la cual la utilidad se maximiza, que en este ejemplo es 3.

Utilidad total= $\int_0^3(24-2x-2x^2)dx= 24x-x^2-(2/3)x^3]_0^3$
$= 24(3)-(3)^2-(2/3)(3)^3= 72-9-18= 45$.

2) Dadas las funciones de ingreso marginal que se dan a continuación, calcule la función de ingreso total.

a) $I'(Q)= 75-1.6Q$

$I(Q)= \int(75-1.6Q)dQ= 75Q-1.6Q^2/2= 75Q-0.8Q^2+c$.

Si el nivel de producción es 0, en la condición inicial, luego I(0)=0, de donde c= 0, en consecuencia $I(Q)=75Q-0.8Q^2$.

b) $=10(l+Q)^{-2}$
$u= 1+Q$
$du/dx= 1$

du= dx
$I(Q)= \int 10(l+Q)^{-2}dQ= 10 \int u^{-2}du= u^{-2+1}/-2+l+c= 10\ u^{-1}/-l+c= [-10/(l+Q)]+c.$

En virtud de que cuando I(0)= 0, resulta entonces que

0= (-10/1)+c
c= 10,
en consecuencia
I(Q)= [-10/(1+Q)]+10

3) Dada una propensión marginal a importar M’(Y)= 0.1 y la importación M(Y)= 20, cuando el ingreso nacional Y= 0, hallar la función de importación M(Y).

$M(Y)= \int 0.1dY= O.lY+c.$

Si en la condición inicial tenemos la siguiente situación:

M(Y)= 0.1Y+c

Sustituyendo

20= 0.1(0)+c
c= 20-0= 20,

en consecuencia

M(Y)= 0.1Y+20.

4) Dada la propensión marginal a consumir $C’(Y)= 0.7+0.1Y^{-1/2}$ y la información de que C= Y cuando Y= 121, hallar la función consumo C(Y).

$C(Y)= \int 0.7+0.1Y^{-1/2}dY= \int 0.7dY+ \int 0.1Y^{-1/2}dY= 0.7Y+0.1Y^{l/2}/l/2+c= 0.7Y+0.2Y^{1/2}+c.$

Ahora hacemos las sustituciones de lugar,

$121= 0.7(121)+0.2(121)^{1/2}+c$
212= 86.9+c
c= 121-86.9=34.1,

de donde

$C(Y)= 0.7Y+0.2Y^{I/2}+34.1$

5

CAPITULO V

CUARTO CAMINO EXPLORADO: ECUACIONES DIFERENCIALES

Generalidades

Una ecuación diferencial es una ecuación que contiene derivadas.

Si la ecuación diferencial contiene solamente una variable independiente, es ordinaria. Si posee dos o más variables independientes, las derivadas son parciales y la ecuación se llama ecuación diferencial entre derivadas parciales.

El orden de una ecuación diferencial es el orden de la derivada superior que se encuentre en la ecuación. El grado de una ecuación está subordinado al grado de la derivada de mayor orden.

Las ecuaciones diferenciales provienen de las ecuaciones primitivas. Estas últimas expresan una relación entre variables que contienen constantes arbitrarias.

Cuando la ecuación diferencial es muy sencilla, su solución se puede obtener mediante la integración directa, pero cuando son complicadas es menester recurrir a procedimientos claramente definidos, pero obviamente en el marco de la técnica integral.

A ese efecto, Frank Ayres, dice: *"El problema en las ecuaciones diferenciales elementales consiste esencialmente en encontrar la primitiva que dio origen a la ecuación. En otras palabras, resolver una ecuación diferencial de orden n es, en realidad, hallar una relación entre las variables conteniendo n constantes arbitrarias independientes, que junto con las derivadas obtenidas de ella, satisfaga la ecuación diferencial".* (Ayres, Frank: Ecuaciones diferenciales. Schaum. McGraw Hill, México, 2000, p. 7). (Comillas y cursiva son nuestras).

Identificación de ecuaciones diferenciales

Identifiquemos algunas ecuaciones diferenciales:

a) $dy/dx= 5x$

Es una ecuación diferencial ordinaria, debido a que solamente tiene una variable independiente (x). Además es de primer orden, a causa de que la derivada de mayor orden que contiene es la primera. Finalmente es de primer grado, ya que el grado de la derivada de mayor orden (y') es 1 (es decir, está elevada a la primera potencia).

b) $d^2y/dx^2+7y=0$

Es una ecuación diferencial ordinaria, debido a que solamente tiene una variable independiente (x). Además es de segundo orden, a causa de que la derivada de mayor orden que contiene es la segunda. Finalmente es de primer grado, ya que el grado de la derivada de mayor orden (y’’) es 1 (es decir, está elevada a la primera potencia).

c) xy’+y= 2

Es una ecuación diferencial ordinaria, debido a que solamente tiene una variable independiente (x). Además es de primer orden, a causa de que la derivada que contiene es la primera. Finalmente es de primer grado, ya que el grado de la derivada de mayor orden (y’) es 1 (es decir, está elevada a la primera potencia).

d) y’’’+2(y”)2+y’= cos x

Es una ecuación diferencial ordinaria, debido a que solamente tiene una variable independiente (x). Además es de tercer orden, a causa de que la derivada de mayor orden que contiene es la tercera. Finalmente es de primer grado, ya que el grado de la derivada de mayor orden (y”’) es 1 (es decir, está elevada a la primera potencia).

e) $(y'')^2+(y')^3+4y=x^2$

Es una ecuación diferencial ordinaria, debido a que solamente tiene una variable independiente (x). Además es de segundo orden, a causa de que la derivada de mayor orden que contiene es la segunda. Finalmente es de segundo grado, ya que el grado de la derivada de mayor orden (y”) es 2 (es decir, está elevada a la segunda potencia).

g) (∂z/∂x)+(∂z/∂y= z

Es una ecuación diferencial parcial, debido a que tiene varias variables independientes (x, y). Además es de primer orden, a causa de que la derivada de mayor orden que contiene es la primera. Finalmente es de primer grado, ya que el grado de la derivada de mayor orden es 1 (es decir, está elevada a la primera potencia).

h) $(\partial^2 z/\partial x^2)+ \partial^2 z/\partial y^2= z$

Es una ecuación diferencial parcial, debido a que tiene varias variables independientes (x, y). Además es de segundo orden, a causa de que la derivada de mayor orden que contiene es la segunda. Finalmente es de primer grado, ya que el grado de la derivada de mayor orden es 1 (es decir, está elevada a la primera potencia).

i) dy/dx= x+3

Es una ecuación diferencial ordinaria, debido a que solamente tiene una variable independiente (x). Además es de primer orden, a causa de que la derivada de mayor orden que contiene es la primera. Finalmente es de primer grado, ya que el grado de la derivada de mayor orden (y’) es 1 (es decir, está elevada a la primera potencia).

j) dy= 4x(dx)

Es una ecuación diferencial ordinaria, debido a que solamente tiene una variable independiente (x). Además es de primer orden, a causa de que la derivada de mayor orden que contiene es la primera. Finalmente es de primer grado, ya que el grado de la derivada de mayor orden (y') es 1 (es decir, está elevada a la primera potencia).

k) $(dy/dx)^3= 3-y-5y^2$

Es una ecuación diferencial ordinaria, debido a que solamente tiene una variable independiente (x). Además es de primer orden, a causa de que la derivada de mayor orden que contiene es la primera. Finalmente es de segundo grado, ya que el grado de la derivada de mayor orden (y'') es 2 (es decir, está elevada a la segunda potencia).

l) $(dy^2/dx^2)^2+3(dy/dx)^2+2y= 0$

Es una ecuación diferencial ordinaria, debido a que solamente tiene una variable independiente (x). Además es de segundo orden, a causa de que la derivada de mayor orden que contiene es la segunda. Finalmente es de segundo grado, ya que el grado de la derivada de mayor orden (y") es 2 (es decir, está elevada a la segunda potencia).

Por otra parte, que una ecuación diferencial sea lineal o no lineal, depende del siguiente criterio: Una *"ecuación diferencial (...) es lineal si Y y todas sus derivadas están ligadas por una combinación lineal, si no están elevadas al cuadrado ni a ninguna potencia superior (...)"* (Allen: Economía Matemática. Editorial Aguilar, Madrid, 1967, p. 158). (Comillas, cursiva y el punto suspensivo son nuestros). De modo que en los ejemplos vistos más arriba, las ecuaciones (a), (b), (c), (d), (g), (h), (i) y (j) son lineales. Las restantes son no lineales.

Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficiente y término constantes

En este tipo de ecuación diferencial solamente encontramos la primera derivada, en virtud de que es de primer orden. También el coeficiente de la variable dependiente es constante y la ecuación, en adición, es de primer grado, por tanto lineal.

En la ecuación

dy/dt+uy= w,

si u (coeficiente de la variable dependiente y) es una constante, e igualmente la función w es un término aditivo constante, se presenta como una ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficiente y término constantes

En el tipo de ecuaciones que estamos tratando, se presentan dos tipos de casos: 1º) ecuaciones homogéneas; 2º) ecuaciones no homogéneas. Las primeras tienen por característica distintiva que u y w son funciones constantes, y además, w equivale a cero, transformándose en

$dy/dt+ay= 0$

y donde a es alguna constante. Las segundas se caracterizan, por el hecho de que una constante diferente de cero ocupa el lugar del cero, en dicha ecuación, es decir,

$dy/dt+ay= b$.

Propuesta de solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficiente y término constantes de naturaleza homogénea

Si la ecuación es homogénea, la solución general de la ecuación diferencial es $y(t)=Ae^{-at}$, donde A es una constante arbitraria.

La solución definida es
$y(t)=y(0)e\text{-}^{at}$,
donde y(0) define y sustituye a la constante arbitraria A.

Propuesta de solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficiente y término constantes de naturaleza no homogénea

Si la ecuación es no homogénea, la solución general de la ecuación diferencial es
$y(t)= y_c+y_P =Ae^{at}+b/a$

donde:

$y_c= Ae^{-at}$, función complementaria

$y_p= b/a$, integración particular. Esta proviene del supuesto de que y= k, es decir y es igual a una constante, por lo que dy/dt= 0, en consecuencia,

$dy/dt+ay= b$
$0+ay=b$
$y= b/a$.

La presencia de la constante A, es lo que nos permite tipificar como solución general la etapa resolutiva en que estamos.

Eliminar dicha constante A, es lo que nos hará arribar a la solución definida.

La solución definida es
$y(t)= (y(0)-b/a)e^{-at}+b/a$.

¿De dónde proviene esta última expresión? Deviene bajo el supuesto de que y(t)= y(0), es decir, la variable dependiente y(t) toma el valor y(0) cuando t= 0, por tanto,

$y(t)= y_c+y_p{}^{=} Ae^{-at}+b/a$,

experimentará ciertas transformaciones debido a que el exponente de e se convierte en cero (0), quedando

$y(0)= A+b/a$,
despejando a A,
$A= y(0)-(b/a)$,

la ecuación de la solución general, ahora será,
$y(t)= [y(0)-b/a)e^{-at}]+b/a$, que es la solución definida.

Ejemplos:

1. Dada $dy/dt+4y= 8$; $y(0)= 2$; encuentre la función complementaria, la integral particular, la solución general y la solución definida.

Primer paso: función complementaria.

Partimos de la ecuación diferencial no homogénea $dy/dt+ay= b$, por tanto $a= 4$, $b= 8$.

$y_c= Ae^{-at}$

sustituimos a por su igual, que es 4, para obtener

$y_c= Ae^{-4t}$ Función complementaria.

Segundo paso: integral particular.

$y_p= b/a= 8/4= 2$ Integral particular.

Tercer paso: solución general.

$y(t)=yc+y_P=Ae-^{4t}+2$ Solución general.

Cuarto paso: solución definida.

Cuando $t=0$

$y(t)= Ae^{-4(0)}+2= Ae^{(0)}+2= A(l)+2= A+2$

Cuando $y(0)= 2$

$y(0)= A+2$

sustituyendo

$2= A+2$
$A= 2-2=0$

sustituyendo en la solución general

$y(t)= (0)e^{-4t}+2= 0+2= 2$ Solución definida.

2. Dada $dy/dt+10y= 15$; $y(0)= 0$; encuentre la función complementaria, la integral particular, la solución general y la solución definida.
Primer paso: función complementaria.

Partimos de la ecuación diferencial no homogénea $dy/dt+ay= b$, por tanto $a= 10$, $b= 15$.

sustituimos a por su igual, que es 10, para obtener

$y_{c=}Ae^{-10t}$ Función complementaria.

Segundo paso: integral particular.

$y_p= b/a= 15/10= 1.5$ Integral particular.

Tercer paso: solución general.

$y(t)= y_c+ y_p= Ae^{-10t}+1.5$ Solución general.

Cuarto paso: solución definida.

Cuando $t= 0$

$y(t)= Ae^{-10(0)}+1.5= A+1.5.$

Cuando $y(0)= 0$

$y(0)= A+1.5$

$0= A+1.5$

$A= -1.5$

$y(t)= -1.5e^{-10t}+l .5$ Solución definida.

3. Dada $dy/dt-2y= 0$; $y(0)= 3$; encuentre la función complementaria, la integral particular, la solución general y la solución definida.

Primer paso: función complementaria

Partimos de la ecuación diferencial no homogénea $dy/dt+ay= b$, por tanto $a= -2$, $b= 0$. La ecuación dada es no homogénea, pero vamos a continuar con el mismo procedimiento de solución.

$y(t)= Ae^{-at}$

sustituimos a por su igual, que es -2, para obtener

$y(t)= Ae^{-(-2)t}=Ae^{2t}$ Función complementaria.
Segundo paso: integral particular

$y_p= b/a= 0/-2= 0$

Tercer paso: solución general

$y(t)= y_c+y_p= Ae^{2t}+0= Ae^{2t}$ Solución general

Cuarto paso: solución definida

Cuando t= 0

$y(t)= Ae^{2(0)}=A$

Cuando y(0)= 3

A= 3

sustituyendo

$y(t)= 3e^{2t}$ Solución definida

4. Dada 2dy/dt+4y= 6; y(0)= 1; encuentre la función complementaria, la integral particular, la solución general y la solución definida.

Primer paso: función complementaria.

Antes de calcular la función complementaria, debemos normalizar la ecuación diferencial dada, dividiendo por 2, quedando: dy/dt+2y= 3.

En la ecuación diferencial no homogénea dy/dt+ay= b, a= 2, b= 3.

$y_c=Ae^{-at}$

sustituimos a por su igual, que es 2, para obtener

$y_c=Ae^{-2t}$ Función complementaria.

Segundo paso: integral particular.

y_p=b/a=3/2 Integral particular.

Tercer paso: solución general.

$y(t)=y_c+y_p-Ae^{-2t}+3/2$ Solución general.

Cuarto paso: solución definida.

En este último paso podemos usar también la siguiente opción:

$y(t)= [y(0)-b/a]e^{at}+b/a$
$y(t)=[l-(3/2)]e^{2t}+(3/2)$
$y(t)= (-l/2)e^{2t}+(3/2)$,

reorganizando

$y(t)= 3/2-(l/2)e^{2t}$ Solución definida.

5. Dada dy/dt+y= 4; y(0)= 0; encuentre la función complementaria, la integral particular, la solución general y la solución definida.

Primer paso: función complementaria.

En la ecuación diferencial homogénea dy/dt+ay= b, a= 1, b= 4.

$y_c=Ae^{-at}$

sustituimos a por su igual, que es 1, para obtener

$y_c= Ae^{-1t}=Ae^{-t}$ Función complementaria.

Segundo paso: integral particular.

y_p= b/a= 4/1=4 Integral particular.

Tercer paso: solución general.

$y(t)= y_c+ y_p= Ae^{-t}+4$ Solución general.

Cuarto paso: solución definida.

$y(t)= [y(0)-b/a]e^{-at}+b/a$

sustituyendo

$y(t)= [(0)-4/l]e^{-t}+4/l$

$y(t)= (0-4)e^{-t}+4= 4(l-e^{-t})$ Solución definida.

6. Dada $dy/dt= 15$; $y(0)= 1$; encuentre la función complementaria, la integral particular, la solución general y la solución definida.

Primer paso: función complementaria.
En la ecuación diferencial no homogénea $dy/dt= b$, el coeficiente a que es igual a cero.

Luego, $b= 15$, $a= 0$. Por tanto,

$y = Ae^{-at} =Ae^{-0t}= Ae^{0}=A(l)= A$ Función complementaria

Segundo paso: integral particular.

Por la característica de la ecuación dada, la fórmula ahora será:

$yp=bt= 15t$ Integral particular.

Tercer paso: solución general.

$y(t)= y_c+ y_p= A+15t$ Solución general.

Cuarto paso: solución definida.

$y(t)= y(0)+bt= 1+15t$ Solución definida.

7. Dada $dy/dt-y= 0$; $y(0)= 10$; encuentre la función complementaria, la integral particular, la solución general y la solución definida.

Primer paso: función complementaria.

En la ecuación diferencial homogénea $dy/dt+ay= b$, $a= -1$, $b= 0$.
$y_c= Ae^{-at}$

sustituimos a por su igual, que es -1, para obtener

$yc= Ae^{-(-1)t}=Ae^{t}$ Función complementaria

Segundo paso: integral particular.

$y_p=0/-1=0$ Integral particular.

Tercer paso: solución general.

$y(t)= y_c+ y_p= Ae^{t}+0= Ae^{t}$ Solución general.

Cuarto paso: solución definida.

$y(t)= [y(0)-b/a]e^{-at}+b/a$

sustituyendo

$y(t)= [(10)-0/-l]e^{t}+(0/-l)$
$y(t)= 10e^{t}$ Solución definida.

8. Dada $dy/dt+4y= 2$; $y(0)= 1$; encuentre la función complementaria, la integral particular, la solución general y la solución definida.

Primer paso: función complementaria.

Partimos de la ecuación diferencial no homogénea $dy/dt+ay= b$, por tanto $a= 4$, $b= 2$.

$y_c= Ae^{-at}$

sustituimos a por su igual, que es 4, para obtener

$y = Ae^{-4t}$ Función complementaria.

Segundo paso: integral particular.

$y_p= b/a= 2/4= 1/2$ Integral particular.

Tercer paso: solución general.

$y(t)= y_c+ y_p= Ae^{-4t}+l/2$ Solución general.

Cuarto paso: solución definida.

$y(t)= [y(0)-b/a]e^{-at}+b/a$

$y(t)= (l-2/4)e^{-4t}+(2/4)$

$y(t)^{=} (l/2)e^{-4t}+(1/2)$

$y(t)= l/2(e^{-4t}+l)$ Solución definida.

9. Dada $dy/dt-7y= 7$; $y(0)= 7$; encuentre la función complementaria, la integral particular, la solución general y la solución definida.

Primer paso: función complementaria.

Partimos de la ecuación diferencial no homogénea $dy/dt+ay= b$, por tanto $a= -7$, $b= 7$.

$y = Ae-^{at}$

sustituimos a por su igual, que es -7, para obtener

$y_c = Ae^{-(-7)t} = Ae^{7t}$ Función complementaria

Segundo paso: integral particular.

$y_p = b/a = 7/-7 = -1$ Integral particular.

Tercer paso: solución general.

$y(t) = y_c + y_p = Ae^{7t} - 1$ Solución general.

Cuarto paso: solución definida.

$y(t) = [y(0) - b/a]e^{-at} + b/a$

$y(t) = [7 - (7/-7)]e^{7t} + (7/-7)$

$y(t) = 8e^{7t} - l$ Solución definida.

10. Dada 3dy/dt+6y= 5; y(0)= 0; encuentre la función complementaria, la integral particular, la solución general y la solución definida.

Primer paso: función complementaria.

Antes de calcular la función complementaria, debemos normalizar la ecuación diferencial dada, dividiendo por 3, quedando: dy/dt+2y= 5/3.

En la ecuación diferencial no homogénea dy/dt+ay= b, a= 2, b= 5/3.

$y_c = Ae^{-at}$

sustituimos a por su igual, que es 2, para obtener

$y_c = Ae^{-2t}$ Función complementaria.

Segundo paso: integral particular.

$y_p = (5/3)/2 = 5/6$ Integral particular.

Tercer paso: solución general.

$y(t) = y_c + y_P = Ae^{-2t} + 5/6$ Solución general.

Cuarto paso: solución definida.

$y(t) = [y(0) - b/a]e^{-at} + b/a$

$y(t)= [0-(5/6)]e^{-2t}+(5/6)$

$y(t)=(-5/6)e^{-2t}+(5/6)$,

$y(t)= 5/6(1 -e^{-2t})$ Solución definida

Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficiente y término variables

Estas ecuaciones en su expresión más general (lineal y de primer orden), quedan representadas en la ecuación

$dy/dt+uy= w$,

donde u y w representan un coeficiente variable (u) y un término variable (w). Obviamente ambas (también y) son funciones de t, que es la variable independiente.

Si la ecuación es homogénea se reduce a $dy/dt+uy= 0$, es decir, $w=0$; y su solución general corresponde a

$y(t)= Ae^{-\int u dt}$

En el caso de ecuaciones no homogéneas, Chiang recomienda recurrir a las llamadas ecuaciones diferenciales exactas, para lograr su solución.

Respecto a las ecuaciones diferenciales exactas, dice Chiang que si tenemos una función de dos variables $F(y,t)$, su diferencial total es:

$dF(y, t)= \partial F/\partial y(dy)+ \partial F/\partial t(dt)$.

Cuando esta diferencial es igualada a cero, la ecuación resultante,

$\partial F/\partial y(dy)+ \partial F/\partial t(dt)= 0$,

es conocida como ecuación diferencial exacta, porque su primer miembro es exactamente la diferencial de la función $F(y, t)$.

Y añade: en general la ecuación diferencial

$M\,dy+N\,dt= 0$ es exacta en la medida que $\partial M/\partial t= \partial N/\partial y$.

La ecuación diferencial exacta tiene por solución general, una expresión de la forma

$\int Mdy+\int Ndt-\int(\partial/\partial t\int Mdy)dt= c$

Ejemplo 1. Resuelva la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficiente y término variables: $2yt^3dy+3y^2t^2dt= 0$

Primer paso: identificamos la equivalencia de M y de N, en la ecuación diferencial dada.

$M= 2yt^3$
$N= 3y^2t^2$

Segundo paso: comprobamos que la ecuación diferencial dada, es una ecuación diferencial exacta. En virtud de que $\partial M/\partial t= 6yt^2= \partial N/\partial y= 6yt^2$, prueba que la ecuación es exacta.

Tercer paso: aplicamos la fórmula de la solución general.

$\int M\, dy+\int N\, dt-\int (\partial/\partial t \int M\, dy)dt= c$,

tratemos de enfrentar la fórmula, resolviendo cada uno de los términos del primer miembro.
$\int M dy= \int 2yt^3 dy= (2y^{1+1}t^3)/(l+l)= 2y^2t^3/2= y^2t^3$
$\int N\, dt= \int 3y^2t^2\, dt= (3y^2t^{2+1})/2+l= 3y^3t^2/3= y^2t^3$
$\int (\partial/\partial t \int M\, dy)dt= \int (3y^2t^2)dt= 3y^2t^{2+1}/(2+l)= 3y^2t^3/3= y^2t^3$

Cuarto paso: de hecho con el proceso de integración las constantes han desaparecido, por lo que podemos inferir esta solución:

$y^2t^3= c$

$y^2 = c/t^3$

$y(t)^{=}(c/t^3)^{1/2}$

Ejemplo 2. Resuelva la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficiente y término variables: $3y^2tdy+(y^3+2t)dt= 0$.

Primer paso: identificamos la equivalencia de M y de N, en la ecuación diferencial dada.

$M= 3y^2t$
$N= y^3+2t$

Segundo paso: comprobamos que la ecuación diferencial dada, es una ecuación diferencial exacta. En virtud de que $\partial M/\partial t= 3y^2= \partial N l \partial y= 3y^2$, prueba que la ecuación es exacta.

Tercer paso: aplicamos la fórmula de la solución general.
$\int M\, dy+ \int N\, dt- \int (\partial/\partial t \int M\, dy)dt= c$,
tratemos de enfrentar la fórmula, resolviendo cada uno de los términos del primer miembro.
$\int M\, dy= \int 3y^2t\, dy= y^3t$
$\int N\, dt= \int (y^3+2t)\, dt= \int y^3dt+2 \int tdt= y^3t+2t^2/2= y^3t+t^2 \int (d/dt \int M\, dy)dt= \int y^3dt=y^3t$.

Cuarto paso: de hecho con el proceso de integración las constantes han desaparecido, por lo que podemos inferir esta solución:
$y^3t+t^2 = c$,
despejando
$y(t)^{=} (c-t^2)/t)^{l/3}$

Ejemplo 3. Resuelva la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficiente y término variables: t(l+2y)dy+y(l+y)dt= 0.

Primer paso: identificamos la equivalencia de M y de N, en la ecuación diferencial dada.

M= t(1 +2y)= t+2yt
N= y(l+y)= $y+y^2$

Segundo paso: comprobamos que la ecuación diferencial dada, es una ecuación diferencial exacta. En virtud de que ∂M/∂t= l+2y= ∂N∂3y= l+2y, prueba que la ecuación es exacta.

Tercer paso: aplicamos la fórmula de la solución general.
∫M dy+∫N dt-∫(∂/∂t∫M dy)dt= c,
tratemos de enfrentar la fórmula, resolviendo cada uno de los términos del primer miembro.

∫M dy=∫(t+2yt)dy=∫tdy+2∫ytdy= yt+2 $y^2t/2$= $yt+y^2t$
∫N dt=∫($y+y^2$)dt=∫ydt+∫y^2dt= $yt+y^2t$
∫(∂l∂t∫M dy)dt=∫y+∫y^2= $yt+y^2t$

Cuarto paso: de hecho con el proceso de integración las constantes han desaparecido, por lo que podemos inferir esta solución:
$yt+y^2t$= c,
despejando
y(t)=[(c-yt)/t]$^{1/2}$

Ejemplo 4. Resuelva la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficiente y término variables: (dy/dt)+y(l+2t)/t(l+t)= 0.

Primer paso: transformamos la ecuación diferencial dada, en otra de la forma Mdy+Ndt= 0

(dy/dt)+y(1 +2t)/t(1 +t)= 0
(dy/dt)= -y(l+2t)/t(l+t)
t(l+t)dy= -y(l+2t)dt
t(1 +t)dy+y(1 +2t)dt= 0

Segundo paso: identificamos la equivalencia de M y de N, en la ecuación diferencial transformada

M= t(l+t)= $t+t^2$
N= y(l+2t)= y+2yt

Tercer paso: comprobamos que la ecuación diferencial dada, es una ecuación diferencial exacta. En virtud de que ∂M/∂t= l+2f= ∂N/∂y= l+2t, prueba que la ecuación es exacta.

Cuarto paso: aplicamos la fórmula de la solución general.

∫M dy+∫N dt-∫∂/∂t∫M dy)dt= c,

tratemos de enfrentar la fórmula, resolviendo cada uno de los términos del primer miembro.

$\int M\, dy= \int (t+t^2)dy= (t+t^2)y$
$\int N\, dt= \int (y+2yt)dt= yt+yt^2 \int$
$\int (\partial/\partial t \int M\, dy)dt= \int (y+2yt)dt= yt+yt^2$
De hecho con el proceso de integración las constantes han desaparecido, por lo que podemos inferir esta solución:

$yt+yt^2= c.$

Factor de integración

Si en el proceso de integración de ecuaciones diferenciales, nos encontramos con ecuaciones inexactas, éstas pueden ser transformadas en exactas multiplicando cada uno de sus términos por un factor llamado de integración.

Tal es el caso de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, de la forma $dy/dt+uy= w$, la que se puede expresar como $dy+(uy-w)dt= 0$, a la cual se le aplica $\int udt$, como factor de integración.

La solución general, en efecto, de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, pasa por la aplicación de la siguiente fórmula:

$y(t)= e^{-\int udt}(c+ \int we^{\int udt}dt).$

Resulta conveniente precisar, como veremos más adelante, que a partir de la fórmula arriba establecida, se puede obtener la solución definida suponiendo una condición inicial.

Ejemplo 1. resuelva la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficiente y término variables: $dy+(5y-10)dt= 0$. Otro dato: $y(0)= 7$.
Primer paso: trabajaremos con una ecuación diferencial de esta forma $dy+(uy-w)dt= 0$.

Segundo paso: identificamos los equivalentes de u y w.

$u= 5$
$w= -(-10)= 10$

Tercer paso: calculamos el factor de integración, que es la integral de u.
$\int udt= \int 5dt= 5 \int dt= 5t.$

Cuarto paso: establecemos la ecuación que representa la solución general de la ecuación diferencial de primer orden $y(t)= e^{-\int udt}(c+ \int we^{\int udt}dt)$

Sustitución $y(t)= e^{''5t}(c+ \int 10e^{5t}dt)$

Quinto paso: pasamos a trabajar el término $\int 10e^{5t}dt$.
Suponemos $u= 5t$

du/dt= 5
du= 5dt
$\int 1\ Oe^{-5t}dt= 2\int 5e^{5t}dt= 2\int e^{u}du=2e^{u}= 2e^{5t}$,

sustitución
$y(t)= e^{-5t}(c+2e^{5t})= ce^{-5t}+2\ e^{-5t+5t}= ce^{-5t}+2e^{0} = ce^{-5t}+2(l)= ce^{-5t}+2$ Solución general.

Sexto paso: solución definida.
Hacemos t= 0 y tendremos que
$y(0)= ce^{-5(0)}+2= ce^{0}+2= c(l)+2= c+2$, es decir,
y(0)= c+2,
despejamos,
c=y(0)-2
sustituyendo y(0), por 7 (ver datos del problema),
c= 7-2= 5,

en la solución general sustituimos a c por su igual 5, y tendremos:
$y(t)= 5e^{-5t}+2$ Solución definida.

Ejemplo 2. resuelva la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficiente y término variables: dy+(2ty-t)dt= 0. Otro dato: y(0)= 3/2.
Primer paso: trabajaremos con una ecuación diferencial de esta forma dy+(uy-w)dt= 0.
Segundo paso: identificamos los equivalentes de u y w.

u= 2t
w= -(-t)= t.
Tercer paso: calculamos el factor de integración, que es la integral de u.
$\int udt=\int 2tdt= 2\int tdtt=2t^{2}/2= t^{2}$.

Cuarto paso: establecemos la ecuación que representa la solución general de la ecuación diferencial de primer orden

$y(t)= e^{-\int udt}(c+\int we^{\int udt}dt)$
Sustitución
$y(t)= e^{-t2}(c+fte^{t2}dt)$

Quinto paso: pasamos a trabajar el término $\int te^{t2}dt$.
Suponemos $u= t^{2}$
du/dt= 2t
du= 2tdt
$\int te^{t2}dt= 1/2\int 2te^{t2}dt= 1/2\int e^{u}du= 1/2\ e^{u}= l/2e^{t2}$
sustitución
$y(t)= e^{-t2}(c+l/2e^{t2})= ce^{-t2}+l/2\ e^{-t2+t2}= ce^{-t2}+l/2e^{0} = ce^{-t2}+1/2(1)= ce^{-t2}+l/2$ Solución general.

Sexto paso: solución definida.
Hacemos t= 0 y tendremos que

$y(0)= ce^{-(0)2}+l/2= ce^{0}+l/2= c(l)+l/2= c+1/2$, es decir,
$y(0)= c+1/2$,
despejamos,
$c=y(0)-l/2$
sustituyendo $y(0)$, por 3/2 (ver datos del problema),
$c= 3/2-1/2= 1$,
en la solución general sustituimos a c por su igual 1, y tendremos:
$y(t)= ce^{-t2}+l/2$
$y(t)= e^{-t2}+l/2$ Solución definida.

Ejemplo 4. Resuelva la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficiente y término variables: $dy+(3t^{2}y-e^{'t3})dt= 0$. Otro dato: $y(0)= 2$.

Primer paso: trabajaremos con una ecuación diferencial de esta forma $dy+(uy-w)dt= 0$.

Segundo paso: identificamos los equivalentes de u y w.

$u= 3t^{2}$
$w= -(-e^{-t3})= e^{-t3}$

Tercer paso: calculamos el factor de integración, que es la integral de u.
$\int udt- \int 3t^{2}dt= 3 \int t^{2}dt= 3t^{3}/3= t^{3}$

Cuarto paso: establecemos la ecuación que representa la solución general de la ecuación diferencial de primer orden
$y(t)= e^{-\int udt}(c+\int we^{\int udt}dt)$
Sustitución
$y(t)= e^{-t3}(c+\int e^{-t3}e^{t3}dt)$

Quinto paso: pasamos a trabajar el término $\int e^{-t3}e^{t3}dt$.
$\int e^{-t3}e^{t3}dt= \int e^{-t3+t3}dt= \int e^{0}dt= \int dt= t$
sustitución
$y(t)= e^{-t3}(c+\int e^{-t3}e^{t3}dt)= e^{-t3}(c+t)$ Solución general.

Sexto paso: solución definida.
Hacemos $t= 0$ y tendremos que
$y(0)= e^{-(0)3}(c+0)= c$
luego,
$c= y(0)$
sustituyendo $y(0)$, por 2 (ver datos del problema),
$c= 2$,
en la solución general sustituimos a c por su igual 2, y tendremos:
$y(t)= e^{-t3}(c+t)$

$y(t)= e^{-t3}(2+t)$ Solución definida.

Ejemplo 5. Resuelva la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficiente y término variables:$2(dy/dt)+(12y+2e^{t})= 0$. Otro dato: y, 3)= 6/7.

Primer paso: transformamos la ecuación diferencial dada
$2(dy/dt)+(12y+2e^{t})= 0$
dividimos entre 2
(dy/dtj+lóy+e^{1}^ 0

Despejamos

$dy/dt= -(6y+e^{t})$
$dy= -(6y+e^{t})dt$
$dy+(6y+e^{t})dt= 0$

Segundo paso: trabajaremos con una ecuación diferencial de esta forma $dy+(uy-w)dt= 0$.

Tercer paso: identificamos los equivalentes de u y w.

$u= 6$ $w= -e^{t}$

Cuarto paso: calculamos el factor de integración, que es la integral de u.

$\int udt= \int 6dt= 6 \int dt= 6t$.

Quinto paso: establecemos la ecuación que representa la solución general de la ecuación diferencial de primer orden

$y(t)= e^{-\int udt}(c+ \int we^{\int udt}dt)$

Sustitución

$y(t)= e^{-6t}(c+ \int -e^{t}e^{6t}dt)$

Sexto paso: pasamos a trabajar el término $\int -e^{t}e^{6t}dt= - \int e^{7t}dt$
Suponemos que $u= 7t$, luego

$du/dt= 7$
$du= 7dt$
$- \int e^{t}e^{6t}dt= - \int e^{7t}dt= -1/7 \int 7e^{7t}dt= -1/7 \int e^{u}du= -1/7\ e^{u}= -1/7\ e^{7t}$

sustitución
$y(t)= e^{-6t}(c-l/7e^{7t})= ce^{-6t}-l/7\ e^{-6t+7t}= ce^{-6t}-l/7\ e^{t}$ Solución general.

Séptimo paso: solución definida.
Hacemos $t= 0$ y tendremos que
$y(0)= ce^{-6t(0)}-l/7\ e^{(0)}= c-1/7$
luego,

c=y(0)+l/7
sustituyendo y(0), por 6/7 (ver datos del problema),
c= 6/7+1/7= 1
en la solución general sustituimos a c por su igual 1, y tendremos:
$y(t)= e^{-6t}-l/7e^{t}$ Solución definida.

Ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden y de primer grado

Una ecuación diferencial no lineal, implica que la potencia de la variable dependiente es superior a uno.

Las ecuaciones diferenciales no lineales, se pueden expresar en varios tipos: exactas, separables y reducibles a la forma lineal.

Cuando la ecuación diferencial es exacta, pero no lineal, le aplicamos la conocida fórmula de solución que se traduce en

$\int M\, dy+\int N\, dt-\int (\partial/\partial t\int M\, dy)dt= c.$

Si la ecuación diferencial es separable, en el sentido de que se pueda aislar f(y) de g(t), estableciendo la ecuación como

$f(y)dy+g(t)dt= 0$

simplemente se aplican técnicas de integración simples.

En efecto, dicen Nagle y Saff que: *"Una clase sencilla de ecuaciones diferenciales que se pueden resolver utilizando integración es la de las ecuaciones separables"*. Y agregan: *"Si el segundo miembro de la ecuación dy/dx= f(x,y), se puede expresar como una función que depende solamente de x, multiplicada por una función que depende solamente de y, entonces la ecuación diferencial se llama separable"*. (Nagle y Saff: Fundamentos de ecuaciones diferenciales. Segunda edición, Addison-Wesley Iberoamericana, México, p. 34). (Comillas y cursiva son nuestras).

Insistamos en las ecuaciones con variables separables. Granville, dice que cuando los términos de una ecuación diferencial pueden disponerse de manera que tome la forma

(1) $\int f(x)dx+F(y)dy= 0,$

siendo f(x) una función de x únicamente y F(y) una función de y únicamente, el procedimiento de resolución se llama de separación de las variables, y la solución se obtiene por integración directa. Así, de (1) obtenemos la solución general
(2) $\int f(x)dx+\int F(y)dy= c,$
en donde c es una constante arbitraria.

Agrega, Granville, que frecuentemente muchas ecuaciones, que no se dan en la forma sencilla (1), pueden reducirse a esa forma mediante la siguiente regla para separar las variables.

Primer paso. Quitar denominadores; si la ecuación contiene derivadas, se multiplican todos los términos por la diferencial de la variable independiente.

Segundo paso. Se sacan las diferenciales como factor común. Si entonces la ecuación toma la forma

Xydx+X'Y'dy= 0,

en donde X y X' son funciones de x únicamente y Y y Y' son funciones de y únicamente, puede reducirse a la forma (1) dividiendo todos los términos de X'Y.

Tercer paso. Se integra cada parte separadamente, como en (2). (Granville: obra citada, págs.462 y 463).

Ejemplo 1. Resuelva 2tdy+2ydt= 0, mediante la separación de variables.

Primer paso: hay que tener presente la ecuación guía:
f(x)dx+F(y)dy= 0.

La ecuación diferencial dada, es obvio que no pertenece a las ecuaciones de variables separadas, debido a que los coeficientes de dy y dt, aparecen intercambiados: 2t con dy, mientras 2y aparece con dt.

Segundo paso: dividimos por 2yt, cada uno de los términos de la ecuación dada, y simplificamos, para obtener una ecuación de variables separables.

[2tdy+2ydt] /2yt= 0
(l/y)dy+(l/t)dt= 0

Tercer paso: solución general

∫ 1/ydy+ ∫ l/tdt= c
ln y +lnt= c
ln (yt)= c
yt= ec= k,
luego
y(t)= k/t Solución general.

Ejemplo 2. Resuelva dy/dt= -t/y, mediante la separación de variables.

Primer paso: tener presente la ecuación guía
f(x)dx+F(y)dy= 0.

Segundo paso: eliminamos el denominador.

dy/dt= -t/y
y(dy)= -t(dt)

$y(dy)+t(dt)= 0$

Tercer paso: solución general

fydy+ftdt= c
$(y^2/2)+(t^2/2)=c$
$l/2y^2+l/2t^2= c$

diviendo por 1/2
$y^2+t^2= 2c$
siendo 2c= k
$y^2+t^2= k$

despejando
$y(t)= (k-t^2)^{1/2}$ Solución general.

Ejemplo 3. Resuelva (y/y+t)dy+(2t/y+t)dt= 0, mediante la separación de variables.

Primer paso: tener presente la ecuación guía
f(x)dx+F(y)dy= 0.

La ecuación diferencial dada, es obvio que no pertenece a las ecuaciones de variables separadas, debido a que los coeficientes de dy y de dt, aparecen intercambiados.

Segundo paso: multiplicamos por (y+t), cada uno de los términos de la ecuación dada, y simplificamos, para obtener una ecuación de variables separables.

(y+t)(y/y+t)dy+(y+t)(2t/y+t)dt= 0
ydy+2tdt= 0

Tercer paso: solución general

$\int ydy+ \int 2tdt=c$
$y^2/2+2t^2/2= c$
$l/2y^2+t^2= c$
$(y^2+2t^2)/2= c$
$y(t)= (2c- 2t^2)^{l/2}$ Solución general.

Ejemplo 4. Resuelva $dy/dt= 3y^2t$, mediante la separación de variables.

Primer paso: tener presente la ecuación guía
f(x)dx+F(y)dy= 0.

Segundo paso: reordenamos los términos de la ecuación dada.

$l/3y^2(dy)= t(dt)$

$l/3y^2(dy)$- $t(dt)= 0$

Tercer paso: solución general

$\int l/3y^{-2}(dy)$-$Jt(dt)= c$
$(l/3y^{-1}/-l)$-$l/2t^2=c$
$-l/3y^{-1}$-$l/2t^2=c,$
$y^{-1} = -3(c)-(3)l/2t^2= k-3/2t^2$
finalmente eliminando el exponente negativo
$y(t)= l/(k-3/2t^2)$ Solución general.

Ecuaciones diferenciales de orden superior

Este tipo de ecuaciones contienen derivadas pero de un orden superior a uno. Resolverlas, implica descubrir la trayectoria que asume la variable dependiente.

El caso de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficiente y término constantes

La ecuación $y''(t)+a|y'(t)+a_2y= b$, forma parte de la familia de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes y término constantes.

Allí, a,, a_2 y b, son constantes. Si el término b es igual a cero, la ecuación es homogénea, si es distinta de cero, la ecuación es no homogénea.

La estrategia de solución consiste en calcular la función complementaria y la integral particular, ya conocidas. La suma de ambas nos proporciona una solución general de la ecuación completa.

En el cálculo de la integral particular, la cual representa la determinación de un valor de la variable y que satisfaga la ecuación no homogénea precisada, se pueden presentar varios escenarios en que dicha integral se obtiene del modo siguiente:

1) $y_p= b/a_2$ $(a_2\neq 0)$
En este caso se supone que el resto de la ecuación arriba precisada es igual a cero.
2) $y_p=b/a_1t$ $(a,=0;\ a_1 \neq 0)$

Como $a_2= 0$, la integral particular arroja un valor indeterminado,
3) yp= b/2t2 (a,=a2=0)

En este caso la integral daría nuevamente indeterminada. “Entonces tendremos que probar una solución de la forma $y= kt^2$ Con $a|=a_2= 0$ la ecuación diferencial se reduce ahora a una forma sumamente simple:

$y''(t)=b$

y si $y= kt^2$, lo cual implica $y'(t)= 2kt$ e $y''(t)= 2k$, la ecuación diferencial es expresable como $2k= b$. Luego hallamos $k= b/2$ y la integral particular será:

$Yp= b/2t^2$ $(a,=a_2=0)$". (Ibid, **p.** 464).

Para el cálculo de la función complementaria es clave la siguiente ecuación:
$r^2+a,r+a_2= 0$

Esta es conocida como la ecuación característica o ecuación auxiliar de la ecuación diferencial, tanto en caso homogéneo como en el caso no homogéneo.

La ecuación característica o auxiliar, es una ecuación de segundo grado, por lo que su solución implica la consecución dos raíces, denominadas raíces características. Para tal efecto se usa la siguiente fórmula

$r_1, r_2= [-a,\pm/(a^2{}_r 4a_2)]/2$

De conformidad con las magnitudes que asuman a_1^2 y a_2, tendremos tres casos disímiles:

a) El primer caso está orientado hacia raíces reales diferentes, en la medida que $a,^2 >4a_2$
En este caso la función complementaria se calcula a partir de $y_c= y_1{}^+y_2{}^= \mathbf{A_1e^{r_1t}+A_2e^{r_2t}}$

b) El segundo caso está orientado hacia raíces reales repetidas, en la medida que $a,^2= 4a_2$
En este caso la función complementaria se calcula a partir de
$y_c= A_3e^{rt}+A_4te^{rt}$

c) El tercer caso está orientado hacia raíces complejas, en la medida que $a_1^2<4a2$.
En este caso la función complementaria se calcula a partir de
$y_c= e^{h\,t}(\infty\cos vt + ßsen\ vt)$.
h, es calculada con esta fórmula
$h= -a,/2$
v, es calculada con esta fórmula

$v= / (4a_2-a,^2)/2$

Ejemplos.

1) Encuentre la integral particular de $y''(t)-2y'(t)+3y= 2$.

Primer paso: identificación de los valores de a y b.
$a_t= -2,\ a_2= 3,\ b= 2$.

Segundo paso: cálculo de la integral particular
Como a_2 tiene un valor distinto de cero usamos esta fórmula:
$y_p= b/a_2$
$y_p= 2/3$ Integral particular.

2) Encuentre la integral particular, la función complementaria y la solución general de $y''(t)+y'(t)$ 4.

Primer paso: identificación de los valores de a y b.

a_1= 1, a_2= 0, b= 4.

Segundo paso: cálculo de la integral particular
Como a_2 tiene un valor igual a cero, pero a, tiene un valor distinto de cero, usamos esta fórmula:
y_p= (b/a,)t
y_p-(4/l)t=4t Integral particular

Tercer paso: cálculo de las raíces características de la función complementaria

r_1, r_9= [-a_1± √(a^2,-4a^)]/2
$r_1 r_2$= (-l±√l)/2=(-l±l)/2= -l± l/2
r_2= (-l+l)/2=0
r_2= (-1-1)/2= -1.

Cuarto paso: comprobación (la suma de las raíces características debe ser igual a -a,, y su producto debe ser igual a a_2).

0-1= -(-1)= 1
(0)(-l)=0

Quinto paso: establecimiento de la función complementaria; en virtud de que las raíces son números reales distintos, la función complementaria es
y_c= y_1+y_2= $A_1 e^{r_1 t}$+$A_2 e^{r_2 t}$
sustituyendo a r, y r_2
y_c= y,+y_2= A_1+$A_2 e^{-t}$ Función complementaria

Sexto paso: solución general (suma de la función complementaria y la integral particular).

y_c= y_1+y_2= A_1+$A_2 e^{-t}$+4t Solución general

3) Encuentre la integral particular de y″(t)+3y= 9

Primer paso: identificación de los valores de a y b.

a_1= 0, a_2= 3, b= 9

Segundo paso: cálculo de la integral particular

y_p= b/a_2

y_p= 9/3= 3 Integral particular.

4) Encuentre la integral particular, la función complementaria y la solución general de y″t)+2y’(t)- y=-5

Primer paso: identificación de los valores de a y b.

a_1= 2, a_2=-1, b=-5

Segundo paso: cálculo de la integral particular
Como a_2 tiene un valor distinto de cero, usamos esta fórmula:

y_P= b/a2
y_p= -5/-l= 5 Integral particular.

Tercer paso: cálculo de las raíces características de la función complementaria

r_1 r_2= [-a_1±√($a^2{}_1$-4a_2)]/2
r_1,r,= [-2±√(4+4)]/2=(-2±2.8284)/2
r_1= (-2+2.8284)/2= 0.4142
r_2= (-2-2.8284)/2= -2.4142

Cuarto paso: comprobación (la suma de las raíces características debe ser igual a –a_1, y su producto debe ser igual a a_2).

0.4142-2.4142= -(-2)= 2
(0.4142)(-2.4142)= -1

Quinto paso: establecimiento de la función complementaria; en virtud de que las raíces son números reales distintos, la función complementaria es

$y_c= y_1+y_2= A_1e^{r_1t}+A_2e^{r_2t}$
sustituyendo a r_1 y r_2
$y = y1+y_2= A_1e^{0.4l42t}+A_2e^{-2.4142t}$ Función complementaria

Sexto paso: solución general (suma de la función complementaria y la integral particular).

$y(t)= y_c+y_p= A_1e^{0.4l42t}+A_2e^{-2.\ 4l42t}+5$ Solución general

5) Encuentre la integral particular de y′′(t)= 8

Primer paso: identificación de los valores de a y b.
a_1= 0, a_2= 0, b= 8

Segundo paso: cálculo de la integral particular

Como a_2 tiene un valor igual a cero, lo mismo podemos decir de a, usamos esta fórmula:

$y_P= b/2t^2$

$y_p = 8/2t^2= 4t^2$ Integral particular

6) Dada y′′ (t)+3y’(t)-4y= 12 encuentre la función complementaria, la integral particular, la solución general y la solución definida, con las condiciones iniciales y(0)= 4 e y’(0)$^=$ 2.

Primer paso: establecemos los valores de a y b.
a_1= 3, a_2= -4, b= 12.

Segundo paso: cálculo de las raíces características
r_1, r_2= [-a,±√(a^2,-4a_2)]/2
r_1, r,= [-3±√(9+16)]/2= -3±V25/2= -3±5/2
r_1= -3+5/2= 1
r_2= -3-5/2= -4.

Tercer paso: comprobación (la suma de las raíces características debe ser igual a –a_1, y su producto debe ser igual a a_2).

1-4= -(-3)= 3
(l)(-4)= -4

Cuarto paso: establecimiento de la función complementaria; en virtud de que las raíces son números reales distintos, la función complementaria es

$y_c = y_1+y_2= A_1e^{r_1t}+A_2e^{r_2t}$
sustituyendo a r_1 y r_2

$y_c = y_1+y_2= A_1e^{t}+A_2e^{-4t}$ Función complementaria

Quinto paso: integral particular

a_1= 3, a_2= -4, b= 12

y_p=b/a_2=12/-4= -3 Integral particular

Sexto paso: solución general (suma de la función complementaria y la integral particular).

$y(t)= y_c+y_P= A_1e^{t}+A_2e^{-4t}-3$ Solución general

Séptimo paso: calculamos la solución definida

La solución definida implica definir las dos constantes A_1, y A_2, partiendo de las dos condiciones iniciales dadas como datos del problema.

Haciendo t= 0 en la solución general
$y(t)= y_c+y_p{}^{=} A_1e^{t}+A_2e^{-4t}-3$
tendremos:
$y(0)= y_c+y_p= A_1e^{0}+A_2e^{-4(0)}-3= A_1+A_2-3$
Al diferenciar la ecuación de la solución general, con respecto a t, tenemos
$y'(t)= A_1e^{t}-4A_2e^{-4t}$
y haciendo t= 0 en la derivada, encontramos que:
$y'(0)= A_1e^{(0)}-4A_2e\text{-}^{4(0)}= A_1-4A_2$

Si y(0)= 4, que es una condición inicial y hacemos la sustitución de lugar en
$y(0)= A_1+A_2-3$
tendremos
$4= A_1+A_2-3$
si y'(0)= 2, que es una condición inicial y hacemos la sustitución de lugar en
$y'(0))= A_1-4A_2$
tendremos
$2= A_1-4A_2$
Estamos frente a dos ecuaciones simultáneas
$A_1+A_2-3= 4$
$A_1-4A_2 =2$

de donde
$5A_2-3= 2$
$A_2= (3+2)/5= 1$
sustituyendo en $A_1+A_2-3= 4$, tenemos
$A_1= 4+3-1= 6$
Luego $A_1= 6$, $A_2= 1$.

La solución definida es

$y(t)= y(t)= y_c+y_p= 6e^t+e^{-4t}-3$ Solución definida

7) Dada $y''(t)+5y'(t)+4y= 1$ encuentre la función complementaria, la integral particular, la solución general y la solución definida, con las condiciones iniciales y(0)= 4 e y'(0)= 2.

Primer paso: establecemos los valores de a y b.
$a_1= 5$, $a_2= 4$, $b= 1$

Segundo paso: cálculo de las raíces características
$r_1, r_2= [-a1\pm\sqrt{(a^2{}_1-4a_2)}]/2$
$r_1, r_2= [-5\pm\sqrt{(25-16)}]/2= -5\pm\sqrt{9}/2= -5\pm3/2$
$r_1= -5+3/2= -1$
$r_2= -5-3/2= -4$

Tercer paso: comprobación (la suma de las raíces características debe ser igual a -a,, y su producto debe ser igual a a_2).

$-1-4= -(-5)= 5$
$(-l)(-4)=4$

Cuarto paso: establecimiento de la función complementaria; en virtud de que las raíces son números reales distintos, la función complementaria es

$y_c= y1+y_2= A_1e^{r_1t}+A_2e^{r_2t}$

sustituyendo a r_1 y r_2

$y_c=y_1+y_2=A_1e^{-t}+A_2e^{-4t}$ Función complementaria

Quinto paso: integral particular
$a_1= 5$, $a_2= 4$, $b= 1$
$y_p=b/a_2= 1/4$ Integral particular

Sexto paso: solución general (suma de la función complementaria y la integral particular).
$y(t)= y_c+y_p= A_1e^4+A_2e^{-4t}+1/4$ Solución general

Séptimo paso: calculamos la solución definida

La solución definida implica definir las dos constantes A, y A_2, partiendo de las dos condiciones iniciales dadas como datos del problema, es decir, $y(0)= 4$ y $y'(0)= 2$.

Haciendo $t= 0$ en la solución general
$y(t)= y_c+y_P=A_1e^{-t}+A_2e^{-4t}+1/4$
tendremos:

$y(0)= y_c+y_p = A_1e^0+A_2e^{-4(0)}+l/4= A_1+A_2+l/4$
Al diferenciar la ecuación de la solución general, con respecto a t, tenemos
$y'(t)= -A_1e^{-t}-4A_2e^{-4t}$
y haciendo $t= 0$ en la derivada, encontramos que:
$y'(0)= -A_1e^{(0)}-4A_2e^{-4(0)}= -A,-4A_2$
Si $y(0)= 4$, que es una condición inicial y hacemos la sustitución de lugar en
$y(0)= A_1+A_2+l/4$
tendremos
$4=A_1+A_2+l/4$
si $y'(0)= 2$, que es una condición inicial y hacemos la sustitución de lugar en
$y'(0))= -A_1-4A_2$
tendremos
$2= -A_1-4A_2$
Estamos frente a dos ecuaciones simultáneas
$A_1+A_2+l/4= 4$
$-A_1-4A_2 \quad =2$
de donde

$-3A_2+l/4= 6$
$3 A_2-1/4=-6$
$A_2= (-6+1 /4)/3= (-23/4)/3= -23/12$

sustituyendo en $A_1+A_2+l/4= 4$, tenemos

$A_1= 4-1/4+23/12= 68/12= 17/3$

Luego $A_1= 17/3$, $A_2= -23/12$

La solución definida es

$y(t)= 17/3e^{-t}-23/12e^{-4t}+l/4$ Solución definida.

8) Dada $y''(t)-2y'(t)+y= 3$ encuentre la función complementaria, la integral particular, la solución general y la solución definida, con las condiciones iniciales $y(0)= 4$ e $y'(0)= 2$.

Primer paso: establecemos los valores de a y b.
$a_1= -2,\ a_2= 1,\ b= 3$

Segundo paso: cálculo de las raíces características

$r_1,\ r_2= -a1\pm\sqrt{a^2{}_1 4a_2}/2$
$r_1r_2= (2\pm\sqrt{4-4})/2= 2\pm0/2=$
$r_1= 2/2= 1$
$r_2= 2/2= 1$

Tercer paso: comprobación (la suma de las raíces características debe ser igual a $-a_1$, y su producto

debe ser igual a a_2).

$1+1= -(2)= -2$
$(1)(1)= 1$

Cuarto paso: establecimiento de la función complementaria; en virtud de que las raíces son números reales iguales, la función complementaria es
$y_c = A_3e^{rt}+A_4te^{rt}$
sustituyendo a r_1 y r_2
$y_c= A_3e^t+A_4te^t$ Función complementaria

Quinto paso: integral particular
$a_1= -2,\ a_2= 1,\ b= 3$
$y_p=b/a_2=3 /1 = 3$ Integral particular

Sexto paso: solución general (suma de la función complementaria y la integral particular).
$y(t)= A_3e^t+A_4te^t+3$ Solución general

Séptimo paso: calculamos la solución definida

La solución definida implica definir las dos constantes A_3 y A_4, partiendo de las dos condiciones iniciales dadas como datos del problema, es decir, $y(0)= 4$ y $y'(0)= 2$.
Haciendo t= 0 en la solución general
$y(t)= y_c+y_P= A_3e^t+A_4te^t+3$
tendremos:
$y(0)= y_c+y_p=A_3e^{(0)}+A_4(0)e^{(0)}+3 = A_3+3$
Al diferenciar la ecuación de la solución general, con respecto a t, tenemos
$y'(t)= A_3(1)e^t+A_4te^t+A_4(1)e^t= A_3e^t+A_4te^t+A_4e^t$
y haciendo t= 0 en la derivada, encontramos que:

$y'(0)= A_3e^{(0)}+A_4(0)e^{(0)}+A_4e^{<0)}=A3+A_4$
Si y(0)= 4, que es una condición inicial y hacemos la sustitución de lugar en
$y(0)= A_3+3$
tendremos
$4= A_3+3$
$A_3=4-3= 1$
si y'(0)= 2, que es una condición inicial y hacemos la sustitución de lugar en
$y'(0))=A_3+A_4$
tendremos
$2= A_3 +A_4$
despejando y sustituyendo
$A_4= 2-A_3= 2-1= 1$
Luego $A_3= 1$, $A_4= 1$
La solución definida es
$y(t)= e^t+te^t+3$ Solución definida

9) Dada y ″(t)+8y'(t)+l 6y= 8 encuentre la función complementaria, la integral particular, la solución general y la solución definida, con las condiciones iniciales y(0)= 4 e y'(0)= 2.

Primer paso: establecemos los valores de a y b.

$a_1= 8$, $a_2= 16$, $b= 8$

Segundo paso: cálculo de las raíces características

$r_1, r_2= [-a,\pm\sqrt{(a^2,-4a_2)}]/2$
$r_1, r,= [-8\pm\sqrt{(64-64)}]/2= -8\pm0/2$
$r_1= -8/2= -4$
$r_2= -8/2= -4$

Tercer paso: comprobación (la suma de las raíces características debe ser igual a $-a_1$, y su producto debe ser igual a a_2).

-4.4= -(-8)= 8
(-4)(-4)= 16

Cuarto paso: establecimiento de la función complementaria; en virtud de que las raíces son números reales iguales, la función complementaria es
$y_c= A_3e^{rt}+A_4te^{rt}$
sustituyendo a r
$y_c= A_3e^{-4t}+A_4te^{-4t}$ Función complementaria

Quinto paso: integral particular
$a_1= 8$, $a_2= 16$, $b= 8$
$y_p=b/a_2=8/16= 1/2$ Integral particular

Sexto paso: solución general (suma de la función complementaria y la integral particular).
$y(t)= A_3e^{-4t}+A_4te^{-4t}+l/2$ Solución general
Séptimo paso: calculamos la solución definida

La solución definida implica definir las dos constantes A_3 y A_4, partiendo de las dos condiciones iniciales dadas como datos del problema, es decir, y(0)= 4 y y'(0)= 2.
Haciendo t= 0 en la solución general
$y(^t)=y_c+y_P{}^= A_3e^{'4l}+A_4te\text{-}^{4t}+l/2$
tendremos:
$y(0)= y_c+y_p= A_3e^{-4(0)}+A_4(0)e^{-4(0)}+l/2$
$= A_3+1/2$
luego si t(0)= 4
$4= A_3+l/2$
$A_3= 4-1/2=7/2$
Al diferenciar la ecuación de la solución general, con respecto a t, tenemos
$y'(t)= A_3(-4)e^{-4t}+A_4te^{-4t}+A_4(l)e^{-4t}=-4A_3e^{-4t}+A_4te^{-4t}+A_4e^{-4t}$
y haciendo t= 0 en la derivada, encontramos que:
$y'(0)= -4A_3e^{-4(0)}+A_4(0)e^{-4(0)}+A_4e^{-4(0)}=-4A_3+A_4$
Si y'(0)= 2, que es una condición inicial y hacemos la sustitución de lugar en
$y'(0)= -4A_3+A_4$
tendremos

$2= -4(7/2)+A_4$
$A_4= 2+14= 16$
Luego $A_3= 7/2$, $A_4= 16$
La solución definida es
$y(t)= 7/2e^{-4t}+16te^{-4t}+l/2$ Solución definida.

10) Dada $y''(t)-4y'(t)+8y= 0$ encuentre la función complementaria, la integral particular, la solución general y la solución definida, con las condiciones iniciales y(0)= 3 e y'(0)= 7

Primer paso: precisamos los valores de a y b.
$a_1= -4$, $a_2= 8$, $b= 0$

Segundo paso: calculamos la integral particular
Como a_2 tiene un valor distinto de cero, usamos esta fórmula:
$y_p= b/a,= 0/8= 0$ Integral particular.

2) Función complementaria
Debido a que a_1^2 es menor que $4a_2$, es decir 16<32, estamos ante números complejos, donde
$h= -a_1/2= 4/2= 2$
$v= 1/2 \sqrt{(4a_2-a_1^2)}= 1/2 \sqrt{l\,6}= 2$
Sustitución de h y v por sus valores en

$y_c= e^h t(\infty\cos vt + ßsen\ vt)$
$y_c= e^{2t}(\infty\cos 2t + ßsen\ 2t)$ Función complementaria

Tercer paso: solución general (suma de la función complementaria y la integral particular)
$y(t)= e^{2\,t}(\infty\cos 2t + ßsen\ 2t)+0$ Solución general.

Cuarto paso: solución definida (es necesario calcular ∞ y B, sobre la base de utilizar las dos condiciones iniciales).

Haciendo t= 0 en la solución general, obtenemos el siguiente resultado:

$y(0)= e^{2\,(0)}(\infty \cos 2(0) + ßsen\ 2(0)$
como cos 0= 1 y sen 0= 0, tendremos,
$y(0)=(l)(\infty+0)=\infty$,
aplicando la condición inicial y(0)= 3, y sustituyendo en

$y(0)= \infty$
tendremos que
$\infty= 3$.
Ahora derivemos la solución general con respecto a t,
$y(t)= e^{2\,t}(\infty\cos 2t + ßsen\ 2t)$
$y'(t)= e^{2t}(-2\infty sen\ 2t + 2ß\cos 2t)+2e^{2\,t}(\infty\cos 2t + ßsen\ 2t)$

Haciendo t= 0

$y'(0)= e^{2(0)}(-2\infty sen\ 2(0)+ 2ß\cos 2(0))+2e^{2(0)}(\infty\cos 2(0)+ ßsen\ 2(0))= e^{(0)}(-2\infty sen\ 0+ 2ß\cos 0)+2e^{\circ}(\infty\cos 0+ ßsen\ 0)= (l)(-2\infty(0)+ 2ß(1)+2(1)\ (\infty(1)+ ß(0)= 0+ 2ß+2\infty+0= 2ß+2\infty$
$y'(0)=2ß+2\infty$
Aplicando la condición inicial y'(0)= 7
$7= 2ß+2\infty$
$7= 2ß+2(3)$

$ß= (7-6)/2=1/2$

De modo que ß= 1/2; ∞= 3.
Sustituyendo en la solución general, tendremos
$y(t)= e^{2\,t}(\infty\cos 2t + ßsen\ 2t)$
$y(t)= e^{2t}(3\cos 2t + l/2sen\ 2t)$ Solución definida.

11) Dada $y''(t)+4y'(t)+8y= 2$ encuentre la función complementaria, la integral particular, la solución general y la solución definida, con las condiciones iniciales y(0)= 5/4 e y'(0)= 2

Primer paso: precisamos los valores de a y b.
$a_1= 4$, $a_2= 8$, b= 2.

Segundo paso: calculamos la integral particular
$y_p= b/a_2= 2/8= ¼$

2) Función complementaria

Debido a que a_1^2 es menor que $4a_2$, es decir 16<32, estamos ante números complejos, donde
$h= -a_1/2= -4/2= -2$
$v= 1/2 \sqrt{(4a_2-a_1^2)}= 1/2\sqrt{16}=2$
Sustitución de h y v por sus valores en
$y_c= e^{h\,t}(\infty\cos vt + ß\text{sen } vt)$
$y_c= e^{-2\,t}(\infty\cos 2t + ß\text{sen } 2t)$ Función complementaria

Tercer paso: solución general (suma de la función complementaria y la integral particular)
$y(t)= e^{-2\,t}(\infty\cos 2t + ß\text{sen } 2t)+l/4$ Solución general

Cuarto paso: solución definida (es necesario calcular ∞ y ß, sobre la base de utilizar las dos condiciones iniciales).

Haciendo t= 0 en la solución general, obtenemos el siguiente resultado:

$y(0)= e^{-2\,(0)}[\infty\cos 2(0) + ß\text{sen } 2(0)]+l/4$
como cos 0= 1 y sen 0= 0, tendremos,
$y(0)= \infty+1/4$,
aplicando la condición inicial y(0)= 5/4, y sustituyendo en
$y(0)= \infty+1/4$
tendremos que

$5/4= \infty+1/4$
$\infty= 5/4-1/4= 1$

Ahora derivemos la solución general con respecto a t,
$y(t)= e^{-2\,t}(\infty\cos 2t + ß\text{sen } 2t)+l/4$
$y'(t)= e^{-2\,t}(-2\infty\text{sen } 2t + 2ß\cos 2t)-2e^{-2\,t}(\infty\cos 2t + ß\text{sen } 2t)+0$
$y'(t)= e^{-2\,t}(-2\infty\text{sen } 2t + 2ß\cos 2t)-2e^{-2\,t}(\infty\cos 2t + ß\text{sen } 2t)$
$y'(t)= -2e^{-2\,t}(\infty\cos 2t + ß\text{sen } 2t)+e^{-2\,t}(-2\infty\text{sen } 2t + 2ß\cos 2t)$.

Haciendo t= 0

$y'(0)= -2e^{-2(0)}(\infty\cos 2(0) + ß\text{sen } 2(0)+e^{-2(0)}[-2\infty\text{sen } 2(0) + 2ß\cos 2(0)]$
$y'(0)= -2e^{(0)}(\infty\cos 0 + ß\text{sen } 0+e^{(0)}(-2\infty\text{sen } 0 + 2ß\cos 0)= -2(l)\infty(l)+0+(l)(-2\infty(0)+ 2ß (1)= -2\infty+0+ 2ß= -2 \infty+2ß$ $y'(0)= 2ß-2\infty$

Aplicando la condición inicial y'(0)= 2
$2- 2ß-2\infty$
$2= 2ß-2(1)$
$ß= (2+2)12= 2$
De modo que ß= 2; ∞= 1.
Sustituyendo en la solución general, tendremos
$y(t)= e^{-2\,t}(\infty\cos 2t + ß\text{sen } 2t)+1/4$
$y(t)= e^{-2\,t}(\cos 2t + 2\text{sen } 2t)+l/4$ Solución definida.

12) Dada y″(t)-2y'(t)+5y= 5 encuentre la función complementaria, la integral particular, la

solución general y la solución definida, con las condiciones iniciales y(0)= 6 e y'(0)$^{=}$ 3

Primer paso: precisamos los valores de a y b.
a_1= -2 , a_2= 5 , b= 5.
Segundo paso: calculamos la integral particular
Como a_2 tiene un valor distinto de cero, usamos esta fórmula:
y_p= b/a_2= 5/5= 1

2) Función complementaria

Debido a que a_1^2 es menor que 4a_2, es decir 4<20, estamos ante números complejos, donde

h= -a_1/2= 2/2= 1
v= 1/2 $\sqrt{(4a_2-a_1^2)}$= 1/2$\sqrt{16}$=2
Sustitución de h y v por sus valores en
y_c= $e^{h\,t}$ (∞cos vt + Usen vt)
y_c= e^t(∞cos 2t + ßsen 2t) Función complementaria

Tercer paso: solución general (suma de la función complementaria y la integral particular)
y(t)= e ^{t}(∞cos 2t + ßsen 2t)+l Solución general

Cuarto paso: solución definida (es necesario calcular ∞ y ß, sobre la base de utilizar las dos condiciones iniciales).
Haciendo t= 0 en la solución general, obtenemos el siguiente resultado:
y(0)= $e^{(0)}$(∞cos 2(0) + ßsen 2(0)+1
como cos 0= 1 y sen 0= 0, tendremos,
y(0)=(l)(∞+0)+l=∞+l
aplicando la condición inicial y(0)= 6, y sustituyendo en
y(0)= ∞+1
tendremos que
6= ∞+1
∞= 6-1=5

Ahora derivemos la solución general con respecto a t,

y(t)= e^t(∞cos 2t + ßsen 2t)+l
y'(t)= e^t(-2∞sen 2t + 2ßcos 2t)+e^t(∞cos 2t + ßsen 2t)+0

Haciendo t= 0

y'(0)= $e^{(0)}$ (-2 ∞sen 2(0) +2 ßcos 2(0)+$e^{(0)}$[∞cos 2(0) + ßsen 2(0)]
y'(0)= (1)(0 + 2ß+∞+0)= 2ß+∞
y'(0)= 2ß+∞
Aplicando la condición inicial y'(0)= 3
3= 2ß+∞
3= 2ß+5
ß= (3-5)/2= -1

De modo que ß=-l; ∞=5
Sustituyendo en la solución general, tendremos
$y(t)= e^t(\infty \cos 2t + -ß \operatorname{sen} 2t)+l$
$y(t)= e^t(5\cos 2t - \operatorname{sen} 2t)+l$ Solución definida.

Resumen procedimental para resolver ecuaciones diferenciales

I) ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN CON COEFICIENTE Y TÉRMINO CONSTANTE

1 .Ecuación de la forma $dy/dt+ay= w$
2. Homogénea $dy/dt+ay= 0$
3. No homogénea $dy/dt+ay= b$
4. Si es homogénea $y(t) = Ae^{-at}$ (solución general),

$y(t) = y(0)e^{-at}$ (solución definida, donde y(0), sustituye a la constante A).

5. Si es no homogénea $y(t) = y_c+y_p= Ae^{-at}+b/a$ (solución general).

$y_c=Ae^{-at}$ (función complementaria).
$y_p=b/a$ (integral particular).

Solución definida: se obtiene haciendo t=0 y utilizando la condición inicial dada como dato del problema.

II) ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN CON COEFICIENTE Y TERMINO VARIABLES

1. Ecuación de la forma $dy/dt+uy= w$.
2. Homogénea $dy/dt+uy= 0$.
3. No homogénea (hacia la ecuación diferencial exacta) $dF(y, t)= \partial F/\partial y(dy)+ \partial F/\partial t(dt)= 0$

$M\,dy+N\,dt= 0$ es exacta, si $\partial M/\partial t= \partial N/\partial y$.
$\int M\,dy+\int N\,dt-J(\partial/\partial t \int M\,dy)dt= c$ (solución general).

4. Transformación de una inexacta, en otra exacta Usamos un factor de integración ($\int u dt$).

$y(t)= e^{-\int u dt}(c+\int w e^{\int u dt}dt)$: es la solución general.
Solución definida: hacemos t= 0 y usamos la condición inicial dada como dato del problema.

III) ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES DE PRIMER ORDEN Y DE PRIMER GRADO

IV)

1. Si la ecuación es exacta $\int M\,dy+\int N\,dt-\int(\partial/\partial t \int M\,dy)dt= c$ (solución general).
2. Si la ecuación es de variable separable $f(x)dx+F(y)dy= 0$.

$\int f(x)dx+\int F(y)dy= c$ (solución general).

V) ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES Y TERMINO CONSTANTES

1. Ecuación de la forma $y''(t)+a_1y'(t)+a_2y= b$

2. Homogénea $y''(t)+a_1y'(t)+a_2y=0$

3. No homogénea Ecuación idéntica a la anterior, pero b asume un valor diferente de cero.

Integral particular:

$y_p= b/a_2$ $(a_2 \neq 0)$

$y_p= bt/a_1$ $(a_1 \neq 0, a_2= 0)$

$y_p= b/2t^2$ $(a_1=0, a_2= 0)$

Función complementaria:

$r^2 +a_1r+a_2= 0$

$r_1, r_2= (a_1 \pm -\sqrt{a^2{}_1+-4a_2})/2.$

Si $a^2{}_1>4a_2$, usamos:

$y_c- A_l e^{r_1 t}+A_2te^{r_2 t}.$

Si $a^2{}_t=4a_2$, usamos:

$y_c{}^= A_3e^{rt}+A_4te^{rt}$

Si $a^2{}_1<4a_2$, usamos:

$h= -a^2{}_1/2$

$v=(\sqrt{a^2},+-4a_2)/2$

$y_c= e^{h\,t}(\infty\cos vt + ßsen\ vt).$

Solución general:

y_c+y_p

Solución definida:

Hacemos t=0, derivamos la ecuación de la solución general y usamos la condición inicial dada como dato del problema.

6

CAPITULO VI

QUINTO CAMINO EXPLORADO: ECUACIONES EN DIFERENCIA

Introducción

No es lo mismo bregar con ecuaciones diferenciales, que con ecuaciones en diferencia. Su signo distintivo se ubica en el rol e interpretación de la variable tiempo, esencial en la determinación del curso temporal que adopta la variable dependiente ante cambios de la variable independiente.

En el caso de las ecuaciones diferenciales, la variable tiempo es utilizada desde el punto de vista continuo y por tanto sujeta a cambios infinitesimales; sin embargo, en el caso de las ecuaciones en diferencia, la variable tiempo es concebida como variable discreta, por consiguiente la variable dependiente solamente cambiaría, cuando la independiente cambie de un valor entero, al próximo valor entero, verbigracia, 1 día, 2 días, etc.

Ecuaciones en diferencia

Si tenemos una ecuación del tipo
$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$

Estamos frente a una ecuación en diferencia, donde el primer miembro representa un mandato o una directiva para obtener la primera diferencia de (y), y_t representa el valor de y en el período t, e $y_{t+]}$ representa el valor de y en el período siguiente.

Estas ecuaciones, al igual que las ecuaciones diferenciales, pueden ser lineales o no lineales, homogéneas o no homogéneas, y de primer orden u orden superior.

Por ejemplo, La ecuación en diferencia $\mathbf{y_{t+1}-y_t= 3}$ es lineal, debido a que la variable y no está elevada a potencia alguna superior a 1, es no homogénea puesto que el segundo miembro (3) es distinto de cero (0), y es de primer orden en virtud de que solamente expresa una diferencia Δy_t.

Ecuación en diferencia de primer orden: método de cálculo

En una ecuación del tipo

$Y_{t+1}+ay_t = c$

la solución general tiene dos componentes: solución particular y función complementaria.

En el caso de la función complementaria, se puede proponer una solución a partir de $y = Ab^t$

(donde A, b, toman valores distintos de cero). E igualmente, podemos inferir que $y_{t+I}= Ab^{t+1}$.

Ejemplos.

1) Resolvamos esta ecuación en diferencia: $y_{t+l}+3y_t = 4$ $(y_0=4)$
Primer paso: cálculo de la función complementaria
$y_t=Ab^t$
$y_{t+1}= Ab^{t+1}$
sustituimos estos valores en la versión homogénea
$y_{t+1}+3y_t = 0$ Homogénea en virtud de que el término 4, fue sustituido por 0.
$Ab^{t+1}+3Abt= 0$
b= -3,
en virtud de que eliminamos a Ab^t como factor común, del modo siguiente $(Ab^{t+1}+3Ab^t)/Ab^t=b+3$,
luego b+3= 0,
b= -3.
De hecho entonces el coeficiente b equivale al valor de -a, por lo que la función complementaria se puede expresar así
$y = Ab^t = A(-a)^t$
sustituyendo
$y_c= Ab^t=A(-3)^t$ Función complementaria.

Segundo paso: cálculo de la solución particular (para encontrar ésta, se propone la solución $y_t= k$, la cual supone $y_{t+1}= k$).
Sustitución en la ecuación en diferencia completa
$y_{,+1}+3y_t = 4$ Ecuación en diferencia completa
k+3k=4 k(l+3)= 4 k= 4/4=1.
En consecuencia:
$y_p= 1$ Solución particular.
Tercer paso: solución general (suma de la función complementaria y la solución particular)
$y_t= A(-3)^t+l$ Solución general.
Haciendo t= 0 en la solución general, tendremos $y_0= A(-3)^{(0)}+l= A(l)+1= A+l$
$y_0=A+l$
Ahora utilizamos la condición inicial $y_0= 4$,
4= A+l
A= 4-1= 3
A= 3,
por lo que la solución definida es $y_t=A(-3)^t+l$
$y_t= 3(-3)^t+l$ Solución definida.

2) Resolvamos esta ecuación en diferencia: $2y_{t+1}y_t = 2$ $(y_0= 7)$
Primer paso: normalizamos la ecuación en diferencia dada, dividiendo a ambos miembros por 2.
$(2y_{t+1}-y_t)/2= 2/2$
$(y_{t+1}-l/2y_t)= 1$ Ecuación normalizada (objeto: obtener una ecuación del tipo $y_{t+1}+ay_t = c$).
$y_t= Ab^l$
Segundo paso: cálculo de la función complementaria

$y_t=Ab^t$

$y_{t+1}= Ab^{t+1}$

sustituimos estos valores en la versión homogénea
y_{t+l}-l/2y_t = 0 Homogénea en virtud de que el término 1, fue sustituido por 0.
Ab^{t+1}-l/2Ab^t - 0
b= 1/2 En virtud de que eliminamos a Ab^t como factor común, del modo siguiente (Ab^{t+1}-l/2Ab^t)/Ab^t= b-1/2, luego b= 1/2.

De hecho entonces el coeficiente b equivale al valor de -a, por lo que la función complementaria se puede expresar así
$y_c{}^{=}$ Ab^t = $A(-a)^t$,
sustituyendo
y_c= Ab^t=$A(l/2)^t$ Función complementaria.

Segundo paso: cálculo de la solución particular (para encontrar ésta, se propone la solución y = k, la cual supone y_{t+1}= k).

Sustitución en la ecuación en diferencia completa

$y_{t+,}$-l/2y_t = 1 Ecuación en diferencia completa

k-l/2k= 1
k(l-l/2)= 1
k(l/2)= 1
k- l/(l/2)= 2.

En consecuencia:
y_p= 2 Solución particular
Tercer paso: solución general (suma de la función complementaria y la solución particular)
y=$A(l/2)^t$+2 Solución general.

Haciendo t= 0 en la solución general, tendremos

y_0= $A(l/2)^{(0)}$+2= A(l)+2= A+2
y_0= A+2

Ahora utilizamos la condición inicial y_0= 7

7= A+2
A= 7-2= 5
A= 5,
por lo que la solución definida es y_t=$A(l/2)^t$+2
y_t= $5(l/2)^t$+2. Solución definida.

3) Resolvamos esta ecuación en diferencia: y_{t+l}= 0.2y_t+8 (y_0= 1)

Primer paso: normalizamos la ecuación en diferencia.

$y_{t+1}=0.2y_t+8$
$y_{t+)}-0.2y_t= 8$ Ecuación normalizada (objeto: obtener una ecuación del tipo $y_{t+1}+ay_t = c$).

Segundo paso: cálculo de la función complementaria

$y_t= Ab^t$
$y_{t+1}= Ab^{t-1}$

sustituimos estos valores en la versión homogénea

$y_{t+1}-0.2y_t = 0$ Homogénea en virtud de que el término 8,- fue sustituido por 0.

$Ab^{t+1,}-0.2Ab^{t=} 0$

b= 0.2 En virtud de que eliminamos a Ab^t como factor común, del modo siguiente $(Ab^{t+1}-$
$0.2Ab^t)/Ab$ – b-0.2, luego b= 0.2

De hecho entonces el coeficiente b equivale al valor de -a, por lo que la función complementaria se nuede expresar así

$y_c= Ab^t = A(-a)^t$

sustituyendo

$y_c= Ab^t=A(0.2)^t$ Función complementaria.

Segundo paso: cálculo de la solución particular (para encontrar ésta, se propone la solución $y_t= k$, la cual supone $y_{t+1}= k$).
Sustitución en la ecuación en diferencia completa
$y_{t+1}-0.2y_t = 8$ Ecuación en diferencia completa

k-0.2k= 8
k(1-0.2)=8 k(0.8)= 8
k= 8/(0.8)= 10
En consecuencia:
$y_p= 10$ Solución particular
Tercer paso: solución general (suma de la función complementaria y la solución particular)
$y_t=A(0.2)^t+10$ Solución general.

Haciendo t= 0 en la solución general, tendremos
$y_0= A(0.2)^{(0)}+10= A(l)+10= A+10$ $y_0= A+10$
Ahora utilizamos la condición inicial $y_0= 1$
1= A+10
A= -10+1= -9

A= -9,
por lo que la solución definida es y_t= A(02)^t+2
y_t= -9(0.2)^t+10. Solución definida.

Ecuaciones en diferencia de segundo orden con coeficientes y término constantes

Un tipo de estas ecuaciones en diferencia es

yt+2+aiyt+i-a2yt= c

la cual es lineal, no homogénea y con coeficientes (a! y a_2), y término c, constantes. (Ver la citada obra de Alpha Chiang, p. 538).

Cuando una ecuación en diferencia, expresa que una variable dependiente, su valor, depende no sólo de y_{t+1}, sino también de y_{t-2}, es de segundo orden.

Resolver una ecuación en diferencia de segundo orden, supone el cálculo de una solución particular y de una función complementaria.

La solución particular, se puede obtener ensayando una propuesta de la forma y_t= k. Si este valor constante es sustituido en $y_{t+2}+a_1y_{t+1}-a_2y_t^=$ c obtendremos la fórmula que nos permite calcular la solución particular y_p= c/(1+a_l+a_2), donde a,+a_2≠-1.

Si $a_1+a_2^=$ -1, se ensaya la propuesta y_t= kt, por tanto la fórmula de la solución particular adquiere la forma
y_p(=kt)= (c/a_1+2)t (donde a_1+a_2= -1; a,≠ -2)

En cambio, si a_1+a_2= -1, simultáneamente a_1= -2, Chiang recomienda ensayar y_t=kt^2, lo cual supone que yt+l= k(t+l)2. La fórmula para el cálculo de la solución particular sería
y_p= kt^2-(c/2)t^2 (a_1= -2; a_2= 1).

En lo que concierne a la función complementaria se ha de afrontar una ecuación cuadrática así $b^2+a_1b+a_2$= 0 de la cual se extraen dos raíces características aplicando esta fórmula:

b_1, b_2=(-a_1±√a_1^2-4a_2)/2

Si las raíces son reales distintas, la función complementaria se expresa así y_c= $A_1b_1^t+A_2b_2^t$.

Si las raíces son reales repetidas, la función complementaria se expresa así
y_c = $A_3b^t+A_4tb^t$.

Si las raíces características son complejas conjugadas, la función complementaria se expresa así y_c= $A_5b_1^t+A_6tb_2^t$.

Cálculo de la ecuación característica y las raíces características de ecuaciones en diferencia de segundo orden lineales con coeficientes y término constantes

1) $y_{t+2}-y_{t+1}+1/2y_t= 2$

Primer paso: postulamos la ecuación característica $b^2+a_1b+a_2= 0$.

Segundo paso: sustituimos las representaciones de los coeficientes (a_1 y a_2), por sus valores, explicitados en la ecuación en diferencia dada.
$b^2-b+l/2= 0$ Ecuación característica.

Tercer paso: calculamos las raíces características, aplicando la fórmula $b_1, b_2= [-a_1\pm\sqrt{}(a_1^2-4a_2)]/2$.
$b_l, b_2= (1\pm\sqrt{}-l)/2= [1\pm \sqrt{}-l)/2]i= l/2\pm l/2i$ Raíces características.

2) $y_{t+2}+l/2y_{t+1}-l/2y_t= 5$

Primer paso: postulamos la ecuación característica $b^2+a_1b+a_2= 0$.

Segundo paso: sustituimos las representaciones de los coeficientes (a_1 y a_2), por sus valores, explicitados en la ecuación en diferencia dada.
$b^2+l/2b-l/2= 0$ Ecuación característica.

Tercer paso: calculamos las raíces características, aplicando la fórmula $b_1, b_2= [-a_1\pm\sqrt{}(a_1^2-4a_2)]/2$.
$b_1, b_2= [-l/2\pm\sqrt{}(l/4+2)]/2= (-l/2\pm\sqrt{}9/4)/2= (-l/2\pm 3/2)2= 1/2, -1.$ Raíces características.

3) $y_{t+2}-4y_{t+1}+4y_t= 7$

Primer paso: postulamos la ecuación característica $b^2+a_1b+a_2= 0$.

Segundo paso: sustituimos las representaciones de los coeficientes (a, y a_2), por sus valores, explicitados en la ecuación en diferencia dada.
$b^2-4b+4= 0$ Ecuación característica.

Tercer paso: calculamos las raíces características, aplicando la fórmula $b_1, b_2= [-a,\pm\sqrt{}(a_1^2-4a_2)]/2$.
$b_1, b_2= [4\pm\sqrt{}(16-16)]/2= (4\pm\sqrt{}0)/2)= (4\pm)/2=2, 2.$
$b_1, b_2=2, 2$ Raíces características.

Cálculo de soluciones particulares de ecuaciones en diferencia de segundo orden lineales con coeficientes y término constantes

1) $y_{t+2}-y_{t+1}+l/2y_t= 2$

Primer paso: postulamos la ecuación para el cálculo de la solución particular
$y_P{}^{=}c/(l+a_1+a_2)$,

donde $a,+a_2\neq -l$.

Segundo paso: sustituimos las representaciones de los coeficientes a_1, a_2 y el término c, por sus valores, explicitados en la ecuación en diferencia dada, para obtener,

y_p= 2/(l-l+l/2)= 4 Solución particular.

2) y_{t+2}+l/2y_{t+1}-l/2y_t= 5

Primer paso: postulamos la ecuación para el cálculo de la solución particular
y_p= c/(l+a,+a_2),
donde a,+$a_2 \neq$-l.

Segundo paso: sustituimos las representaciones de los coeficientes a_1, a_2 y el término c, por sus valores, explicitados en la ecuación en diferencia dada, para obtener,

y_p= 5/(l+ ½-1/2)=5/1=5 Solución particular.

3) y_{t+2}-4y_{t+1}+4y_t=7

Primer paso: postulamos la ecuación para el cálculo de la solución particular

y_p=c/(1+a1+a2),

donde $a_1+a_2 \neq -1$

Segundo paso: sustituimos las representaciones de los coeficientes a_1 , a_2 y el término c, por sus valores, explicitados en la ecuación en diferencia dada, para obtener,

y_p= 7/(1 -4+4)= 7/1=7 Solución particular.

Solución general y solución definida de ecuaciones en diferencia de segundo orden lineales con coeficientes y término constantes

De inmediato resolveremos algunas ecuaciones en diferencia de segundo orden lineales con coeficientes y término constantes.

1) y_{t+2}+3y_{t+1} -7/4y_t= 9 y_0=6, y_1 = 3

Primer paso: identificamos los valores del término constante y de los coeficientes.
c= 9, a_1=3, a_2= -7/4.

Segundo paso: calculamos la solución particular
y_p=c/(l+a_1+a_2)= 9/l+3-7/4= 4 Solución particular.

Tercer paso: función complementaria
Si $a_1^2>4a_2$, estamos frente a raíces reales distintas. En efecto 9 es mayor que 7. Por tanto,
$b^2 + a_1b + a_2= 0$
b_1 , b_2= -a, ± √[(a,)^2-4a_2]

$b_1, b_2= -3 \pm \sqrt{[(3)^2-4(-7/4)]}= 1/2, -7/2.$

Sustituimos en la ecuación de la función complementaria
$y_c= A_1 b_1^t+A_2 b^t$

$y_c= A, (l/2)^t+A_2(-7/2)^t$ Función complementaria.

Cuarto paso: calculamos la solución general

$y_t= A, (1/2)^t+A_2(-7/2)^t+4$ Solución general

Quinto paso: calculamos la solución definida
Hacemos t=0 en la solución general

$y_0= A_1 (1 /2)^{(0)}+A_2(-7/2)^{(0)}+4$

$y_0{}^= A_1+A_2+4.$

Aplicamos la condición inicial $y_0= 6$

$6= A_1 +A_2 +4$

$A_1 +A_2=6-4=2$
$A_1+A_2= 2$

Haciendo t= 1 y utilizando $y_1= 3$

En el caso de t=l

$y_1= A_1 (l/2)^{(1)}+A_2(-7/2)^{(1)}+4$
$y_1= A_1 (l/2)+A_2(-7/2)+4$

En el caso de $y_1 =3$

$3= A, (l/2)+A_2 (-7/2)+4$
$3-4= A, (l/2)+A_2 (-7/2)$
$-1= A, (1/2)+A_2 (-7/2)$

Formación de ecuaciones simultáneas

$A_1 + \quad A_2= 2$
$1/2A_1 -7/2A_2= -1$

multiplicamos la primera ecuación por -1/2

$-1/2 A_1 -1/2A_2= -1$
$1/2A_1 -7/2 A_2= -1$

resultado

$-4A_2= -2$
$A_2= 1/2$,

sustituyendo

$A_1+1/2= 2$
$A_1 = 3/2$

Sexto paso: solución definida

$y_c= 3/2(l/2)^t+1/2(-7/2)^t+4$ Solución definida.

2) $y_{t+2}-y_{t+1}+l/4y_t= 2$ $y_0=4$, $y_1= 7$

Primer paso: identificamos los valores del término constante y de los coeficientes.

$c= 2$, $a_1=-l$, $a_2= 1/4$.

Segundo paso: calculamos la solución particular

$y_p=c/(l+a_1+a_2)= 2/(l-l+l/4)= 8$ Solución particular.

Tercer paso: función complementaria

Si $a_1^2=4a_2$, estamos frente a raíces características iguales, por tanto se anula la operación subradical.

En efecto -1+1=0. Por tanto,

$b^2+ a_1b + a_2= 0$
$b_1,b_2=-a_1/2$
$b_1,b_2= 1/2$

la nueva expresión de la función característica será,

$y_c= A_3b^t+A_4tb^t$

sustituyendo

$y_c= A_3(1/2)^t+A_4t(1/2)^t$ Función complementaria.

Cuarto paso: calculamos la solución general

$y_t=A_3(1/2)^t+A_4t(1/2)^t+8$ Solución general

Quinto paso: calculamos la solución definida

Hacemos t=0 en la solución general

$y_0= A_3(1/2)^{(0)}+A_4(0)(1/2)^{(0)}+8= A_3+A_4t+8$
$y_0= A_3 +0+8= A_3+8$

Aplicamos la condición inicial $y_0= 4$

$4= A_3+8$
$A_3 = -8+4=- 4.$

Hacemos t=l y utilizamos la condición inicial $y_3= 7$

$y_1= A_3(l/2)^{(1)}+A_4(l)(l/2)^{(1)}+8= A_3(l/2)+A_4(l/2)+8$

Utilizamos la condición inicial $y_1= 7$

$7= A_3(l/2)+A_4(l/2)+8$

sustituimos a A_3

por su igual -4

$7= -4(1/2)+A_4(l/2)+8$

simplificando y despejando, tenemos:

$A_4= 2$

hacemos las sustituciones correspondientes en la solución general,

$y_t= -4(1/2)^t+2t(l/2)^t+8$ Solución definida.

7

CAPITULO VII
SÉPTIMO CAMINO EXPLORADO: ALGEBRA MATRICIAL

Introducción

El álgebra matricial o lineal, en el campo de la economía facilita postular un sistema de ecuaciones sin importar el número de ecuaciones que contenga, permite demostrar la existencia de una solución mediante la evaluación de un determinante, y finalmente, aporta un método para hallar dicha solución, en el supuesto que exista. Su limitación fundamental consiste en que solamente puede evaluar aquellas ecuaciones de naturaleza lineal.

Significados de matriz y de vector

Una matriz se define como un ordenamiento rectangular de números, parámetros o variables.

Ejemplos:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ es una matriz cuadrada de dos filas por dos columnas, es decir, $2\,X2$.

$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ es una matriz cuadrada de tres filas por tres columnas, es decir, $3\,X\,3$.

$\begin{bmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ es una matriz de dos filas por tres columnas, es decir, 2X3.

El vector es también una matriz. Cuando la matriz consta solamente de una columna se denomina vector columna, y si en cambio, solamente consta de una fila, es un vector fila.

Ejemplos

$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$ es una matriz de tres filas por una columna, es decir, $3\,X\,1$, por tanto es un vector columna.

[4 5 8 7] es una matriz de una fila por cuatro columnas, es decir, 1 X 4, es un vector fila.

Condiciones para que dos matrices sean iguales

Para que dos matrices sean iguales, tienen que reunir las siguientes condiciones: tienen que ser del mismo orden y los elementos que las integran tienen que ser idénticos.

Ejemplo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

De estas cuatro matrices solamente A=D, debido a que son del mismo orden, 2 X 2, y los elementos que las integran son idénticos. La matriz C es del mismo orden que A y D, pero sus elementos no son idénticos a los de éstas. La matriz B, difiere en el orden (2 X 3) y en los elementos que la constituyen.

Suma y resta de matrices

Dos matrices se pueden sumar o restar si tienen la misma dimensión, es decir si poseen el mismo número de filas y columnas.

Ejemplos.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Estas matrices se pueden sumar o restar, debido a que son del mismo orden: 2X2.

Adición: $A + B = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+2 \\ 3+4 & 0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

Sustracción: $A - B = \begin{bmatrix} 1-0 & 2-2 \\ 3-4 & 0-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

Escalar, matrices y la multiplicación

Un número real se le da el nombre de escalar cuando en la operación desarrollada, participan matrices. La multiplicación de un escalar por una matriz, implica que cada elemento de la matriz se multiplica por el escalar.

En lo que respecta a la multiplicación de dos matrices, la dimensión columna de la primera matriz debe ser igual a la dimensión fila de la segunda, para que sean conformes y se puedan multiplicar. Ejemplo de la multiplicación de escalar por una matriz.

$$2\begin{bmatrix}5 & 4\\1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(2)(5) & (2)(4)\\(2)(1) & (2)(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10 & 8\\2 & 0\end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix}5 & 4\\1 & 0\end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\3 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

La matriz AB, está definida, es decir se puede llevar a cabo la multiplicación de las matrices A y B, debido a que A tiene dos columnas y B tiene dos filas; el resultado será una matriz de 2 filas por 3 columnas. Veamos:

$$AB = \begin{bmatrix}(5)(1)+(4)(3) & (5)(2)+(4)(2) & (5)(0)+(4)(0)\\(1)(1)+(0)(3) & (1)(2)+(0)(2) & (1)(0)+(0)(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}17 & 18 & 0\\1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

Tipos de matrices

De inmediato procedemos a caracterizar algunas matrices.

La matriz diagonal es la que reúne las siguientes características: es cuadrada y los elementos que no pertenecen a su diagonal son todos cero.

Ejemplo.

$\begin{bmatrix}9 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 5\end{bmatrix}$ esta matriz es diagonal en virtud de las razones expuestas más arriba.

La matriz identidad, es una matriz diagonal cuyos elementos diagonales se identifican con el número uno.

Ejemplo

$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ esta es una matriz identidad por las razones expuestas más arriba.

La matriz nula es aquella que está integrada por elementos que se identifican con el número cero. Ejemplo.

$\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ esta matriz es nula por las razones expuestas más arriba.

Matriz traspuesta

Una matriz traspuesta es la que resulta de intercambiar filas por columnas.
Ejemplo.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ esta es una matriz 3 X 2, su traspuesta debe ser una matriz $2 X 3$. Veamos:

$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ¿Qué hicimos? Intercambiamos las filas por columnas.

Cuando una matriz cuadrada y su traspuesta son iguales, se dice que la matriz es simétrica.

Ejemplo

$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

la traspuesta es idéntica a ésta,

$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

es una matriz simétrica alrededor de su diagonal principal.

El determinante de una matriz

Ese es un escalar, el cual proviene de los elementos que constituyen una matriz, sujeta a determinadas operaciones concretas.

Los determinantes sólo pueden provenir de matrices cuadradas.

Ejemplo:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$=l(3)-2(2)= 3-4= -1

Si tenemos una matriz de orden superior, por ejemplo, 3 X 3, el determinante se puede calcular mediante el procedimiento que lleva el nombre de expansión por cofactores.

Ejemplo:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$=1(-4)-0(-2)+2(0)= -4-0+0= -4

Las propiedades principales de los determinantes son las siguientes:

1) El intercambio de filas y columnas no afecta el valor de un determinante.
2) El intercambio de dos filas (o dos columnas) alterará el signo, pero no el valor númerico del determinante.
3) La multiplicación de una fila cualquiera (o de una columna), por un escalar k, cambiará el valor del determinante pues lo multiplicará por k.
4) El valor del determinante no cambia al sumar (o restar) un múltiplo de cualquier fila a otra fila.
5) Si una fila (o columna) es múltiplo de otra fila (o columna) el valor del determinante será cero.

La inversa de una matriz

La inversa de la matriz A, denotada por A^{-1}, satisface la siguiente condición:
$AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Las matrices inversas presentan las siguientes propiedades:

1º. $(A^{-1})^{-1} = A$
2º. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3°. $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

La primera nos dice que la inversa de una inversa es la matriz original. La segunda establece que la inversa de un producto es el producto de las inversas en el orden invertido. La tercera indica que la inversa de la traspuesta es la transpuesta de la inversa.

La aplicación del concepto de matriz inversa a la solución de un sistema simultáneo de ecuaciones, es directo.

Si tenemos la operación matricial $Ax= d$, si premultiplicamos ambos miembros de la ecuación por la inversa de A, en el primer miembro nos queda x, debido $A'^{1} A= I$, que es la matriz identidad, por tanto queda, $x= A^{-1}d$.

De modo que es crucial la determinación de la matriz inversa para la solución del sistema de ecuaciones lineales.

Una matriz tiene inversa si cumple con dos condiciones: primera, es cuadrada; segunda, sus filas son linealmente independientes (su determinante, que es un escalar asociado a la matriz, es diferente de cero).

El procedimiento general para hallar la inversa de una matriz cuadrada A, comprende los pasos siguientes:

1) Hallar el determinante de A, si éste es distinto de cero proseguimos adelante, si es igual a cero la matriz carece de inversa;

2) Encontramos los cofactores de todos los elementos de A y los disponemos como una matriz de cofactores.

3) Tomamos la transposición de C para hallar la adjunta de A.

4) Dividimos la adjunta de A por el determinante de A. El resultado será la inversa buscada.

Ejemplo: hallar la inversa de esta matriz A= $\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

Primer paso: calculamos el determinante de A:

$|A|= \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$ =0-27=-27.

Segundo paso: calculamos la matriz de cofactores:

C_{11}=0
C_{12}=-3
C_{21}=-9
C_{22}=4
luego

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -9 & 4 \end{bmatrix}$$

Tercer paso: obtenemos la adjunta de A, en base a traspuesta de C:

Adj. A=$\begin{bmatrix} 0 & -9 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

Cuarto paso: calculamos la inversa de la matriz A dividiendo la Adj. A entre el determinante de A:

A^{-1}= 1$|A|$ (Adj. A)= 1/-27 $\begin{bmatrix} 0 & -9 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ Matriz inversa calculada.

Ejemplo 2: hallar la inversa de la matriz A= $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Primer paso: calculamos el determinante de A:

$|A|= \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-10)$

Segundo paso: calculamos la matriz de cofactores.

Primera fila

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = (2 - 2 - 4)$$

Segunda fila

$$-\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (2 \ \ -2 \ \ -4)$$

Tercera fila

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-3 - 7 \ \ 1)$$

luego

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 2 & -2 & -4 \\ -3 & -7 & 1 \end{vmatrix}$$

Tercer paso: calculamos la matriz Adj. A:

$$\text{Adj A}= \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 10 & -2 & -7 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

Cuarto paso: calculamos la matriz inversa

A^{-1}=1/$|A|$ (Adj. A)= 1/10 $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 10 & -2 & -7 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix}$ Matriz inversa calculada.

Ecuaciones lineales simultáneas

Un método relacionado directamente con el álgebra matricial, para la solución de ecuaciones lineales simultáneas, es el de Cramer.

Con la regla de Cramer podemos determinar los valores críticos de las variables que constituyen las ecuaciones simultáneas, a partir de los determinantes calculados.

Así, para cada variable, el denominador lo será el determinante de la matriz de los coeficientes; en cambio, el numerador lo será el determinante de la matriz de coeficientes, en la que la primera columna es reemplazada por los términos constantes del miembro de la derecha de las ecuaciones. Ahora procederemos a resolver los siguientes sistemas de ecuaciones con la regla de Cramer.

Ejemplo 1

$2x_1+x_2 = 25$

$3x_1-2x_2= 13$

Primer paso: calculamos el determinante de la matriz de coeficientes.

$|A|=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = -4 - 3 = -7$

Segundo paso: calculamos el determinante de la matriz de coeficientes en la que la primera columna es reemplazada por los términos constantes del miembro de la derecha de las ecuaciones.

$|A_1|=\begin{bmatrix} 25 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = -50 - 13 = -63$

Tercer paso: calculamos el determinante de la matriz de coeficientes en la que la segunda columna es reemplazada por los términos constantes del miembro de la derecha de las ecuaciones.

$|A_2|=\begin{bmatrix} 2 & 25 \\ 3 & 13 \end{bmatrix} = 26 - 75 = -49$

Cuarto paso: procedemos a calcular los valores críticos.

$x_1=|A_1|/|A|=-63/-7=9$

$x_2=|A_2|/|A|=-49/-7=7$

Ejemplo 2.

$2x_1-x_2 = 2$
$3x_2+2x_3 =16$
$5x_1 \quad +3x_3 =21$

Primer paso: calculamos el determinante de la matriz de coeficientes.

$|A|=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 8.$

Segundo paso: calculamos el determinante de la matriz de coeficientes, en la que la primera columna es reemplazada por los términos constantes del miembro de la derecha de las ecuaciones.

$|A_1|=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 16 & 3 & 2 \\ 21 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 24.$

Tercer paso: calculamos el determinante de la matriz de coeficientes, en la que la segunda columna es reemplazada por los términos constantes del miembro de la derecha de las ecuaciones.

$|A_2|=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 16 & 2 \\ 5 & 21 & 3 \end{bmatrix} = 32$

Cuarto paso: calculamos el determinante de la matriz de coeficientes, en la que la tercera columna es reemplazada por los términos constantes del miembro de la derecha de las ecuaciones.

$$|A_3|=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 16 \\ 5 & 0 & 21 \end{bmatrix} = 16$$

Quinto paso: procedemos a calcular los valores críticos.
x_1=24/8=3
x_2=32/8=4
x_3=16/8=2

Aplicaciones del Algebra matricial

En el campo de la economía el Algebra matricial es de múltiple aplicación, particularmente en lo que concierne a la determinación de mínimos y máximos de funciones de dos o más variables, en el análisis de insumo-producto, en la programación lineal y en la teoría de los juegos.

Mínimos y máximos de funciones de dos variables

Determinar valores máximos y valores mínimos de funciones objetivos, está referido al proceso de optimización. Proceso este que procura alcanzar lo óptimo para el agente económico de que se trate: la familia, la empresa o el gobierno.

La identificación de este tipo de valores, con funciones objetivos, digamos de dos variables, recrea un contexto mucho más realista en la medida que tiende a reflejar una realidad más compleja y diversificada, como en efecto lo es.

Obvio es que estos valores extremos que se tratan de establecer a través de la optimización, tienen una característica esencial: son relativos, es decir, cuando se le compara con otros valores en la vencidad de la función de que se trate, constituyen un máximo o constituyen un mínimo, siempre con respecto a otros valores.

Su establecimiento pasa por la aplicación de derivadas parciales, como medidas de tasas de cambio, en virtud de que la optimización se lleva a cabo en una situación en la que hay más de una variable de elección o variable independiente.

Condiciones a observar

Para localizar valores extremos de una función de dos variables, hay que observar dos condiciones esenciales:

1) Condición de primer orden

Esta consiste en derivar parcialmente la función objetivo e igualar a cero las ecuaciones resultantes. Es una condición necesaria.

2) Condición de segundo orden
Esta consiste en calcular la segunda derivada parcial. Es una condición suficiente.

Reglas para hallar valores máximos y **mínimos de una función f(x, y)**

a) Derivada parcial de la función con respecto a cada una de las variables e igualamos a cero cada una de las ecuaciones obtenidas.

b) Resolvemos el sistema de ecuaciones simultáneas.

c) Calculamos la segunda derivada parcial.

d) Si

$\partial f/\partial x= \partial f/\partial y- 0$ Primer orden

$\partial^2 f/\partial x^2, \partial^2 f/\partial y^2>0$, y
$(\partial^2 f/\partial x^2)(\partial^2 f/\partial y^2)> (\partial f/\partial x \partial f/\partial y)^2$ Segundo orden

la función presenta un máximo.

Si

$\partial f/\partial x= \partial f/\partial y= 0$ Primer orden

$\partial^2 f/\partial x^2, \partial^2 f/\partial y^2>0$, y

$(\partial^2 f/\partial x^2)(\partial^2 f/\partial y^2)> (\partial f/\partial x \partial f/\partial y)^2$ Segundo orden

la función presenta un mínimo.

Calculemos los valores máximos y mínimos de las siguientes funciones:

Ejemplo 1: $f= x^2+xy+2y^2+3$

Primer paso.

$\partial f/\partial x= 2x+y= 0$
$\partial f/\partial y= x+4y= 0$

Ordenamos los términos. Surgen ecuaciones simultáneas.

$2x+y= 0$
$x+4y=0$

Resolvemos el sistema de ecuaciones por la regla de Cramer,

$$\Delta = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 8 - 1 = 7$$

$$\Delta\, x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 0 - 0 = 0$$

$$\Delta\, y = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 - 0 = 0$$

x= 0/7= 0
y= 0/7= 0,

sustituyendo en f= $x^2+xy+2y^2+3$, tendremos:
f= 3

Segundo paso:

$\partial^2 f/\partial x^2 = 2$
$\partial^2 f/\partial y^2 = 4$
$\partial^2 f/\partial x \partial y = 1$

Tercer paso.

Dado que,
$\partial^2 f/\partial x^2$, $\partial^2 f/\partial y^2 > 0$,
2, 4 > 0.

dado que,
$(\partial^2 f/\partial x^2)(\partial^2 f/\partial y^2) > (\partial f/\partial x\ \partial f/\partial y)^2$,
$(2)(4) > (1)^2$,

la función presenta un mínimo, es decir,
f=3, es un mínimo.

Ejemplo 2: f= $4x+2y-x^2+xy-y^2$

Primer paso:

$(\partial f/\partial x) = 4-2x+y=0$
$(\partial f/\partial y) = 2+x-2y=0$

$-2x+y= -4$
$x-2y= -2$

Resolvemos el sistema de ecuaciones por la regla de Cramer,

$\Delta = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = 4 - 1 = 3$

$\Delta\ x = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = 8 + 2 = 10$

$\Delta\ y = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = 4 + 4 = 8$

x= 10/3= 3.33
y= 8/3= 2.67

sustituyendo en $f= 4x+2y-x^2+xy-y^2$,
f= 9.34.

Segundo paso:
$\partial^2 f/\partial x^2= -2$
$\partial^2 f/\partial y^2= -2$
$\partial^2 f/\partial x \partial y= 1$

Tercer paso.
Dado que,
$\partial^2 f/\partial x^2, \partial^2 f/\partial y^2 < 0$,
-2, -2 < 0.

dado que,

$(\partial^2 f/\partial x^2)(\partial^2 f/\partial y^2) > (\partial f/\partial x\ \partial f/\partial y)^2$,
$(-2)(-2) > (1)^2$,

la función presenta un máximo, es decir,
f=9.34.

Máximos y mínimos de funciones de más de dos variables

Para la localización de valores extremos en las funciones objetivos de más de dos variables, al igual que el caso de dos variables, se precisa observar las condiciones de primer orden y de segundo orden.

Las de primer orden refiéranse a la necesidad de que las tres derivadas parciales, de primer orden, sean cero.

Mientras que las de segundo orden indican que si los menores principales del determinante hessiano simétrico (determinante con derivadas parciales de segundo orden como elementos), arrojan valores superiores a cero (definido positivo), el valor asumido por la función objetivo representa un mínimo, pero si en cambio el primer menor principal es menor que cero y luego el segundo y el tercero son superiores e inferiores a cero, respectivamente, es un máximo.

La regla para hallar valores mínimos y máximos de funciones objetivos con más de dos variables, es la siguiente:

a) Igualamos a cero las tres derivadas parciales y resolvemos el sistema de ecuaciones.
b) Aplicamos la derivada parcial de segundo orden y procedemos a calcular el determinante hessiano simétrico.
c) Calculamos los menores principales de dicho determinante.
d) Si todos los menores del determinante hessiano son mayores que cero, la función objetivo presenta un mínimo, en cambio si el primero es menor que cero, el segundo mayor que cero y el tercero menor que cero, la función objetivo presenta un máximo.

Calculamos los máximos y mínimos de las siguientes funciones objetivos.

1) $f= x,^2-3x|x_2+3x_2^2+4x_2x3+6x_3^2$

Primer paso

$\partial f\partial x_1= 2x_1 -3 x_2 \quad =0$
$\partial f/\partial x_2 = -3x,+6x_2+ 4x_3 \quad = 0$
$\partial f/3x_3= \quad +4x_2+12x_3 \quad = 0.$

Siendo esas tres ecuaciones independientes es obvio que $x_1 = 0$, $x_2= 0$, $x_3= 0$ y por tanto z= 0, como valor crítico.

Segundo paso:

$\partial 2f/\partial x^2{}_1= 2$
$\partial f/\partial x^2{}_2- 6$
$\partial 2/\partial x^2{}_3= 12$

$\partial^2 f/\partial x_1\partial x_2= \partial^2 f/\partial x_2\partial x_1= -3$
$\partial^2 f/\partial x_1\partial x_3= \partial^2 f/\partial x_3\partial x_1= 0$
$\partial 2f/\partial x_2\partial x_3= \partial^2 f/\partial x_3\partial x_2= 4.$

Luego el determinante hessiano será:

$$|\mathrm{H}| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

Tercer paso:

Cálculo de los menores principales

$|H_1|=\partial^2 f/\partial x^2{}_1=2$

$|H_2|= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 9 = 3$

$|H_3|= |H|=4$

Cuarto paso:

Dado que $| H_1 | = 2>0$, $| H_2 | = 3 >0$, $| H_3 | = 4>0$, la función presenta en z= 0, un mínimo.

Ejemplos en el campo económico

1) Una empresa produce dos bienes (baterías de carro y agua destilada) en un contexto de competencia perfecta.

Su función de ingreso total es:

1= PaQb+PcQd.

La función de costo de la empresa es:

$C= (2Q^2b+Q^2d)$

La función de beneficios es

$B= I-C= PaQb+PcQd-(2Q^2b+Q^2d)$

Significados de la simbología:

I= Ingreso total

Pa= Precio de la batería

Qb= Volumen producido de baterías

Pc= Precio del agua destilada

Qd= Volumen producido de agua destilada.

Condición de primer orden:

Primer paso: calculamos el costo marginal de ambos productos.

$\partial C/\partial Qb= 4Qb= 0$

$\partial C/\partial Qd= 2Qd= 0$

Segundo paso: derivadas parciales de primer orden de la función de beneficios

$\partial B/\partial Qb= Pa-4Qb= 0$

$\partial B/\partial Qd= Pc-2Qd= 0$

Tercer paso: buscamos los valores críticos.

Pa= 4Qb

Pc= 2Qd,

despejando:

Qb= Pa/4

$Qd = Pc/2$.

Sustituyendo (precio de la batería $1,000.00; precio del agua destilada $24)

$Qb = 1000/4 = 250$ baterías

$Qd = 24/2 = 12$ unidades de agua destilada

B= $125,144 Beneficio máximo.

Condición de segundo orden:

Cuarto paso: cálculo de las derivadas parciales de segundo orden de la función de beneficios.

$\partial^2 B/\partial Q^2 b = -4$
$\partial^2 B/\partial^2 Q^2 d = -2$
$\partial^2 B/\partial Qb\partial Qd = 0$
$\partial^2 B/\partial Qd\partial Qb = 0$.

Quinto paso: cálculo del determinante hessiano orlado, en base al cuarto paso.

$$|H^*| = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = 8 - 0 = 8$$

$|H^*_1| = -4 < 0$,

$|H^*_2| = |H^*| = 8 > 0$.

Por tanto la función presenta un beneficio máximo en B= $125,144.

2) Analicemos el problema de la empresa con producción múltiple en un contexto monopólico

$Q_1 = 40-2P_1,-P_2$

$Q_2 = 35-P_1-P_2$

$C = Q_1^2 + 2Q_2^2 + 10$

En virtud de las características de las ecuaciones de la demanda, los bienes son complementarios ya que el aumento del precio de uno de los bienes provoca la disminución de la demanda del otro. Expresemos los precios P_1 y P_2 en términos de los volúmenes de venta Q_1 y Q_2, de donde dimana el ingreso medio para los dos bienes.

Q_1- 40- -2P,-P_2

Q_2-35=-P,-P_2

$-2P, - P_? = Q, -40$

$-P, - P_2 = Q_2 - 35.$

Aplicamos la regla de Cramer.

$\Delta = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = 2 - 1 = 1$

$|P_1| = \begin{bmatrix} (Q1 - 40) & -1 \\ (Q2 - 35) & -1 \end{bmatrix} = -Q_1 + 40 + Q_2 - 35 = -Q_1 + Q_2 + 5$

$|P_2| = \begin{bmatrix} -2 & (Q1 - 40) \\ -1 & (Q2 - 35) \end{bmatrix} = (-2Q2+70)-(-Q1+40) = Q_1 - 2Q_2 + 30$

Funciones de ingreso medio:

$P_1 {}^{=} 5 - Q_1 + Q_2$

$P_2 = 30 + Q, -2Q_2,$

Función de ingreso total:

$I = 5 - Q_1 + Q_2 Q2 + (30 + Q_1 - 2Q_2)(Q2) = 5\ Q_1 - Q_1^2 + Q_1 Q_2 - +30Q_2 + Q_1 Q_2 - Q_2^2$
Luego,

$B = I - C$

$B = 5\ Q_1 Q_1^2 + Q_1 Q_2 - +30 Q_2 + Q_1 Q_2 - Q_2^2 - (Q_1^2 + 2Q_2^2 + 10),$

que es una función objetivo de dos variables.

Derivamos parcialmente:
$B_1 = \partial B / \partial Q_1 = 5 - 2Q_1 + Q_2 + Q_2 - 2Q_1$

$B_2 = \partial B / \partial Q_2 = Q_1 + 30 + Q_1 - 2Q_2 - 4Q_2$

$B_{11} = \partial^2 b / \partial Q_1^2 = -2 - 2 = -4$

$B_{22} = \partial^2 b / \partial Q_2^2 = -2 - 4 = -6$

$B_{12} = \partial^{2ß} / \partial Q_1 \partial Q_2 = 1 + 1 = 2$

Ecuaciones simultáneas, para probar que:

$B_1 = 0$

$B_2=0$,

luego

$4Q_1-2Q_2=5$

$-2Q_1+8Q_2= 30$

$\Delta=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} = 32 - 4 = 28$

$|Q_1|=\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 30 & +8 \end{bmatrix}$ = 40+60+100

$|Q_1|$= 100/28= 3.57

$|Q_2|=\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 30 \end{bmatrix}$ = 130/28= 4.64.

Sustitución

P_1= 5-3.57+4.64= 6.07

P_2= 30+3.57-2(4.64)= 24.29

Sustitución B=5(3.57)-30(4.64)+2(3.57)(4.64)-(3.57)2-2(4.64)2-(3.57)2+2(4.64)2+10= 68.59.

El determinante hessiano orlado es:

$|H| = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$= 32-4= 28

$|H_2|$ = -4<0, $|H_2|$ = |H|= 28>0, el beneficio calculado es un máximo.

3) Ahora veamos un contexto de discriminación de precios.

Una empresa monopólica tiene las siguientes funciones de ingreso medio:

$P_1= 63-4Q_1$
$P_2= 105-5Q_2$
$P_3= 75-6Q_3$

Las funciones de ingreso, en consecuencia, son:

$I_l =P_1Q_1=63-Q_14Q_1^2$
$I_2=P_2Q_2=105\ Q_2-5Q_2^2$

$I_3=P_3Q_3=75Q_3=-6Q_3^2$

Función de costo total

$C= 20+15Q+Q^2$

Funciones de ingreso marginal y de costo marginal (derivadas parciales de primer orden).

$\partial I_1/\partial Q_1 = 63-8Q_1$
$\partial I_2/\partial Q_2 = 105-10Q_2$
$\partial I_3/\partial Q_3= 75-12Q_3$
$\partial C/\partial Q= 15-2Q=15+2Q1+2Q_2+2Q_3$

Cálculo de las cantidades de equilibrio igualando el ingreso marginal al costo marginal

$63-8Q1=15+2Q1+2Q_2+2Q_3$
$48= 10Q1 +2Q_2+2Q_3$
$105-10Q_2=15+2Q_1 +2Q_2+2Q_3$
$90= 2Q_1 +12Q_2+2Q_3$
$75-12Q_3=15+2Q_1 +2Q_2+2Q_3$
$60= 2Q_1 +2Q_2+14Q_3$

Aplicamos regla de Cramer.

$10Q_t+2Q_2,+2Q_3=48$

$2Q_1+12Q+2Q_3=90$
$2Q_1+2Q_2+14Q_3=60$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 2 & 12 & 2 \\ 2 & 2 & 14 \end{vmatrix} = 1{,}552$$

$$|Q_1|=\begin{vmatrix} 48 & 2 & 2 \\ 90 & 12 & 2 \\ 60 & 2 & 14 \end{vmatrix} = 4{,}512$$

$Q_1= 4{,}512/1552= 2.9$

$$|Q_2|=\begin{vmatrix} 10 & 48 & 2 \\ 2 & 90 & 2 \\ 1 & 60 & 14 \end{vmatrix} = 10{,}212$$

$Q_2= 10{,}212/1552=6.6$

$|Q_3|=\begin{vmatrix}10 & 2 & 48\\ 2 & 12 & 90\\ 2 & 2 & 60\end{vmatrix}=4{,}560$

$|Q_3|$= 4,560/1,552=2.9

Sustitución en las ecuaciones de demanda

P1= 63-4Q1
=6.-4(2.9)=$51.4
P2=105-5Q2
=105-5(6.6)=$72.00
P3=75-6Q2
=75-6(2.9)=$57.60

Dado que:
I’’1= -8
I’’ 2= -10
I’’ 3=-12
C’’ = 2

obtenemos:

I’’ 1-C’’= -8-2= -10∠ 0
I’’1I″2-(I″ 1+I″2)(C″)= -8(-10)+(8+10)(2)= 80+36= 116>0.

Hessiano orlado:

$|H|=\begin{vmatrix}I''-C'' & -C'' & -C''\\ -C'' & I''-C'' & -C''\\ -C'' & -C'' & I''-C''\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-10 & -2 & -2\\ -2 & -12 & -2\\ -2 & -2 & -14\end{vmatrix}=-1.552<0$

Luego,

$|H_1|$= -10<0, $|H_2|=\begin{vmatrix}f11 & f12\\ f21 & f22\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-10 & -2\\ -2 & -12\end{vmatrix}=116>0$

$|H_3|$ = |H| = -1552<0, queda confirmada la condición de segundo orden, la función objetivo alcanzó un máximo.

Optimización restringida

En la optimización restringida el proceso encuentra ciertas restricciones qué la distinguen de la optimización libre. Y como dice Chiang: *“el propósito primario de imponer una restricción es dar la debida importancia a ciertos factores limitadores que existen en el problema de optimización estudiado”.* (Chiang: ob. cit., p. 352). (Comillas y cursiva son nuestras).

En la optimización restringida, es conveniente el uso del multiplicador de Lagrange, el cual permite *“(...) convertir un problema de extremo restringido en una forma tal que pueda seguir aplicándose la condición de primer orden del problema de extremo libre”*. (Ibid, p. 355). (Comillas, cursiva y el punto suspensivo son nuestros).

Determinemos el óptimo de esta función:

$z= xy$, sujeta a $2-x-2y= 0$

Los pasos que debemos dar son los siguientes:

1) Función objetivo aumentada,

$z = xy + \lambda (2-x-2y)$.

2) Derivada parcial,

(a) $\partial z/\partial x= y- \lambda = 0$
(b) $\partial z/\partial y= x-2 \lambda =0$
(c) $\partial z/\partial \lambda = 2-x-2y= 0$.

Multiplicamos (a) por -2 y tendremos:

$2 y+2 \lambda = 0$, a la que se le resta (b), resultando
$x-2y= 0$
$x= 2y$.

Sustitución en (c)

$2y+2y= 2$
$4y= 2$
$y= 1/2$.

Sustitución en (a)
$1/2- \lambda= 0$
$\lambda= 1/2$.

Sustitución en (b)

$x-2(l/2)= 0$
$x= 2(1/2)$

$x= 1$.

Cálculo de z.

$z= xy+ \lambda (2-x-2y).= 1 (1/2)+1/2(2-1 -2(1/2)= 1/2$.

Condición de segundo orden: aplicamos las derivadas parciales de segundo orden, es decir, Derivamos parcialmente:

$\partial 2z/\partial x^2= 0$

$\partial^2 z/\partial y^2= 0$

$\partial^2 z/\partial^2 z^{\ 2}= 0$
$\partial^2 z/\partial x^2= 0$

$\partial/\partial x(\partial z/\partial y)= 1$

$\partial/\partial y(\partial z/\partial x)= 1$

g_x=-l

g_y= -2,

las dos últimas expresiones se obtuvieron derivando la restricción: 2-x-2y.

$|H^*|= \begin{vmatrix} 0 & gx & gy \\ gx & zxx & zxy \\ gy & zyx & zyy \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 4 > 0$, luego el valor de z= 1/2 es un máximo.

Análisis de insumo producto

"El modelo de insumo-*producto, llamado también tabla de transacciones intersectoriales, es un instrumento elaborado por el matemático soviético W. W. Leontieff para describir las interdependencias entre los diferentes sectores de una economía (...) a fin de poder prever las producciones de cada sector en función de la demanda directa de los consumidores finales para el año próximo".* (Sevilla, Fiol y Souvegrain: Tópicos de matemáticas para administración y economía. Editorial Trillas, México, 1974, p. 207). (Comillas, cursiva y el punto suspensivo son nuestros).

Este análisis nos permite precisar el nivel de producción que debe alcanzar cada una de las distintas industrias que componen una economía para satisfacer la demanda total de un producto determinado.

Los supuestos en que se cimenta dicho análisis son *"1) cada industria produce únicamente un bien homogéneo (...); 2) cada industria aplica una razón fija de insumo (...) para su producción; 3) la producción de todas las industrias está sujeta a rendimientos constantes a escala (...)"* (Chiang: ob. cit., p. 129). (Comillas, cursiva y puntos suspensivos son nuestros).

El procedimiento de cálculo es el siguiente:

1) Usamos las matrices siguientes:

I= matriz identidad.

A= matriz de coeficientes de insumo.

x= vector de variables. d= vector de demanda.

2) Calculamos la matriz (I-A).

3) Calculamos la matriz $(I\text{-}A)^{-1}$.

4) Obtenemos el producto $(I\text{-}A)^{-1}d$.

Ejemplo. Supongamos que sólo hay tres industrias en la economía y que la matriz de coeficientes de insumo y de demanda es como sigue:

$$A=\begin{vmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 20 \\ 5 \\ 10 \end{vmatrix} = d,$$

$$I\text{-}A=\begin{vmatrix} 1-0.2 & -0.3 & -0.2 \\ -0.4 & 1-0.1 & -0.2 \\ -0.1 & -0.3 & 1-0.2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0.8 & -0.3 & -0.2 \\ -0.4 & 0.9 & -0.2 \\ -0.1 & -0.3 & 0.8 \end{vmatrix},$$

El determinante de la matriz I-A, equivale a 0.384.

Cálculo de la matriz de cofactores

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0.9 & -0.2 \\ -0.3 & 0.8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -0.4 & -0.2 \\ -0.1 & 0.8 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -0.4 & 0.9 \\ -0.1 & -0.3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -0.3 & -0.2 \\ -0.3 & 0.8 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.1 & 0.8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0.8 & -0.3 \\ -0.1 & -0.3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -0.3 & -0.2 \\ 0.9 & -0.2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.4 & -0.2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0.8 & -0.3 \\ -0.4 & 0.9 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.66 & 0.34 & 0.21 \\ 0.30 & 0.62 & 0.27 \\ 0.24 & 0.24 & 0.60 \end{bmatrix}$$

Cálculo de la matriz adjunta (traspuesta de la matriz de cofactores).

$$\text{Adj } A=\begin{bmatrix} 0.66 & 0.30 & 0.24 \\ 0.34 & 0.62 & 0.27 \\ 0.21 & 0.27 & 0.60 \end{bmatrix}$$

Luego : $(I-A)^{-1}$= (1/0.384) (Adj A) = 1/0.384 $\begin{bmatrix} 0.66 & 0.30 & 0.24 \\ 0.34 & 0.62 & 0.24 \\ 0.21 & 0.27 & 0.60 \end{bmatrix}$

de donde:

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$= $(I-A)^{-1}d$= 1/0.384 $\begin{bmatrix} 0.66 & 0.30 & 0.24 \\ 0.34 & 0.62 & 0.24 \\ 0.21 & 0.27 & 0.60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$

x_1 = 34.375+3.90625+6.25 = 44.53
x_2 = 17.70833333+8.0729166667 +6.25 = 32.03
x_3 = 10.9375+3.515625+15.625 = 30.08

8

CAPITULO VIII
SEPTIMO CAMINO EXPLORADO: PROGRAMACION LINEAL

Programación lineal

Mediante la programación lineal se continúa enfatizando en la problemática de la optimización de variables económicas, pero con la diferencia que, por ejemplo, en el contexto antes analizado, las condiciones establecidas para el desarrollo de los cálculos, se diseñan en base a ecuaciones (igualdades), en cambio desde la óptica de la programación lineal, se hacen en base a inecuaciones (desigualdades).

Minimización

Ejemplo 1.
Minimización $C= 6x1+ 4x_2$
Restricciones: $400x_1 + 100x_2 \geq 200$
$20x_1 + 10x_2 \geq 14$
$20x_1 + 60x_2 \geq 30$
$x_1 + x_2 = 1$
$x_1 + x_2 \geq 1$
$x_1, + x_2 > 0$

La primera ecuación es una función de costo, la cual constituye la función objetivo del programa lineal. El objeto es minimizar dicha función.

Las tres desigualdades que siguen son restricciones. La última desigualdad excluye cantidades negativas.

En efecto, de acuerdo Chiang, hay tres ingredientes en un programa lineal: una función objetivo, un conjunto de restricciones y un conjunto de condiciones de no negatividad.

El procedimiento a utilizar es el siguiente:

Primer paso: transformamos la primera inecuación en ecuación.
$400x_1+ 100x_2 =200$
para $x_1= 0$

$x_2= 200/100= 2$

para $x_2=0$

x_1=200/400= 0.5

Segundo paso: transformamos la segunda inecuación en ecuación.

$20x_1$+ $10x_2$= 14
para x_1= 0

x_2= 14/10=1.4

para x_2= 0

x_1= 14/20= 0.7

Tercer paso: transformamos la tercera inecuación en ecuación.

$20x_1$ + $60x_2$=30

para x_1= 0

x_2= 30/60= 0.5

para x_2= 0

x_1= 30/20= 1.5

Cuarto paso: trabajamos la cuarta expresión algebraica.

x_1= l

x_2= 1

Quinto paso: solución gráfica.

Los valores calculados los graficamos en el primer cuadrante de un sistema de coordenada plano, por las condiciones de no negatividad.

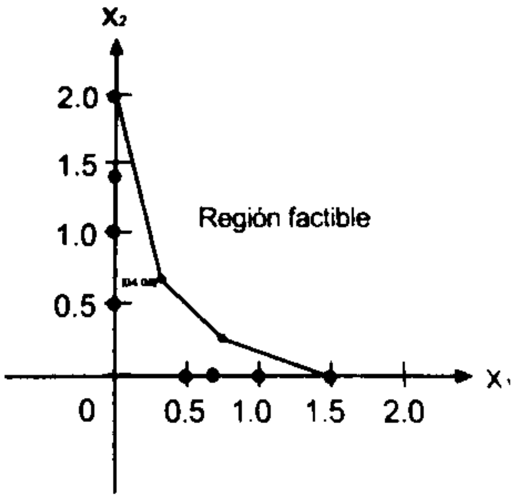


Figura 29

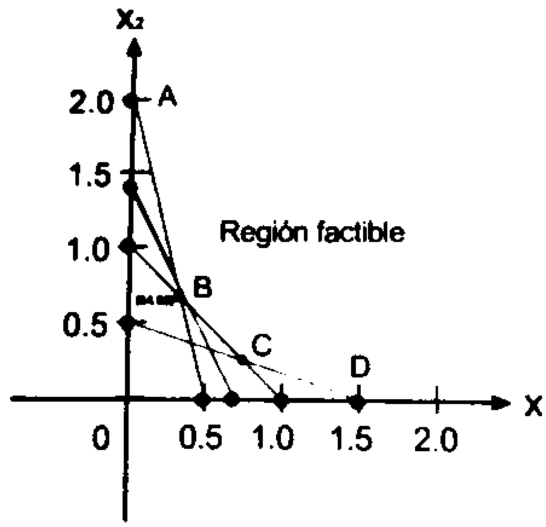


Figura 30

Sexto paso: ubicamos la región factible en el diagrama, constituida por aquellos pares ordenados que satisfacen las restricciones previamente impuestas y la condición de no negatividad.

Séptimo paso: en las figuras edificadas, ha quedado delimitada una superficie cuyos vértices son A, B, C y D. Cada uno de sus puntos es solución del problema, pero de lo que se trata es de localizar aquel punto en el que la función objetivo (función de costos), es decir, $C= 6x_1 + 4x_2$, sea mínima, *“(...) La determinación de este punto, en el número infinito de posibles soluciones, se facilita gracias a un teorema del álgebra lineal. Este teorema asegura que el mínimo o máximo de la función económica se encuentra en uno de los vértices de la superficie de soluciones”.*[4] (Espinosa, Héctor: obra citada, p. 54). (Comillas, cursiva y el punto suspensivo son nuestros).

Con ese teorema, el número de puntos donde puede encontrarse el mínimo de la función deja de ser infinito para reducirse a 4 solamente, o sean los vértices A, B, C y D. E1 procedimiento para localizar la solución es sustituir las coordenadas de cada vértice en la función económica y seleccionar el ¿vértice al que corresponded menor valor de la función.

El vértice A es la intersección de la recta que tiene por ecuación $400x_1+100x_2 =200$, con el eje $0x_2$, por consiguiente, las coordenadas están dadas por la solución del sistema:

$400x_1+ 100x_{2=}200$
$x_1 = 0$

Siendo $x_1= 0$, es claro entonces que $x_2= 200/100$-.2 Las coordenadas del primer vértice A son (0, 2).

El vértice B es la intersección de la recta que tiene por ecuación $20x_1 +10x_2= 14$, con la recta que tiene por ecuación x1+x2 =1, por consiguiente, las coordenadas están dadas por la solución del sistema:

[4] Espinosa, Héctor: Obra citada, p. 54.

$20x_1+10x_2=114$

$x_1+\ \ x_2 = 1$

$\Delta=\begin{vmatrix} 20 & 10 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 20 - 10 = 10$

$|x_1|=\begin{vmatrix} 14 & 10 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 14 - 10 = 4$

$x_1= 4/10= 0.4$

$|x_2|=\begin{vmatrix} 20 & 14 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 20 - 14 = 6$

$x_2= 6/10= 0.6$

Las coordenadas del segundo vértice B son (0.4, 0.6)

El vértice C resulta de la intersección de la recta que tiene por ecuación $20x_1 + 60x_2= 30$ y la recta que tiene por ecuación x_1+x_2-l, por consiguiente la obtención dejas coordenadas, tiene como base la solución del siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$20x_1+ 60x_2 =30$
$x_1 + \ \ x_2 = 1$

El determinante es -40.

El determinante de x_1= -30

Valor crítico de x_1= 0.75

El determinante de x_2= -10

Valor crítico de x_2- 0.25.

Las coordenadas del vértice C son (0.75, 0.25).

El vértice D es la intersección de la recta que tiene por ecuación $20x_1 + 60x_2 = 30$, con m eje $0x_1$, por consiguiente, las coordenadas están dadas por la solución del sistema:

$20x_1 + 60x_2 = 30$
$x_2 = 0$

Siendo $x_2 = 0$, es claro entonces que x_2= 30/20= 1.5. Las coordenadas del vértice D son (1.5, 0). ’

Octavo paso: sustituimos las coordenadas de cada vértice en la función objetivo o función económica.

Sustituyendo vértice A(0,2) se tiene:

C= 6(0)+4(2)= $8.00.

Sustituyendo el vértice B(0.4, 0.6)

C= 6(0.4)+4(0.6)= $4.80

Sustituyendo el vértice C(0.75, 0.25)

C= 6(0.75)+4(0.25)= $5.5.

Sustituyendo el vértice D(1.5, 0)

C= 6(0.75)+4(0.25)= $5.5.

Al comparar los valores obtenidos de la función económica, podemos observar que el valor más bajo está representado por el vértice B, por lo que la solución del problema, es decir, la minimización del costo, es x_1= 0.4, x_2= 0.6.

Maximización

Ejemplo 1.

Maximizar B= $6x_1$+ $5x_2$

Restricciones: $12x_1+ \quad 8x_2 \leq \quad 48$
$3x_1+ \quad 3x_2 \leq \quad 18$
$5{,}000x_1 + \quad 10{,}000x_2 \leq \quad 40{,}000$
$x_1 \quad x_2 \leq \quad 0$

La primera ecuación es una función de beneficios, la cual constituye la función objetivo del programa lineal. El objeto es maximizar dicha función.

Las tres desigualdades que siguen son restricciones. La última desigualdad excluye cantidades negativas.

El procedimiento a utilizar es el siguiente:

Primer paso: transformemos la primera inecuación en ecuación.

$12x_1 + 8x_2 = 48$

para $x_1 = 0$

$x_2 = 48/8 = 6$

para $x_2 = 0$

$x_1 — 48/12 = 4$

Segundo paso: transformamos la segunda inecuación en ecuación.

$3x_1 + 3x_2 = 18$

para $x_1 = 0$

$x_2 = 18/3 = 6$

para $x_2 = 0$

$x_1 - 18/3 = 6$

Tercer paso: transformamos la tercera inecuación en ecuación.

$5{,}000x_1 + 10{,}000x_2 = 40{,}000$

para $x_1 = 0$

$x_2 = 40{,}000/10{,}000 = 4$

para $x_2 =: 0$

$x_1 = 40{,}000/5{,}000 = 8$

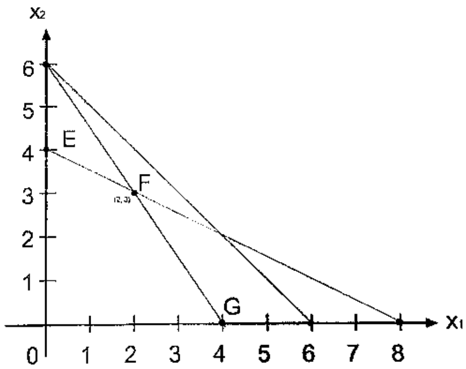


Figura 31.

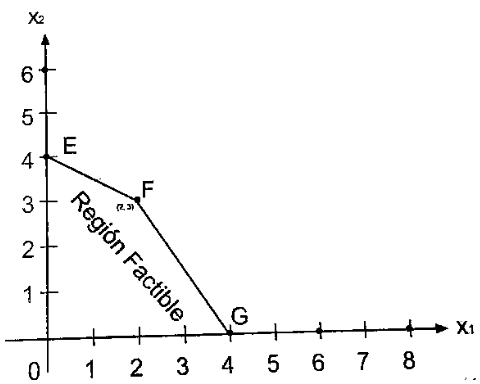


Figura 32.

Cuarto paso: solución gráfica Las cantidades calculadas las graficamos en el primer cuadrante de un sistema de coordenada plano, por las condiciones de no negatividad.

Quinto paso: ubicamos la región factible en el diagrama, constituida por aquellos pares ordenados que satisfacen las restricciones previamente impuestas.

Sexto paso: en las figuras edificadas, ha quedado delimitada una superficie cuyos vértices son E, F y G. Cada uno de sus puntos es solución del problema, pero de lo que se trata es de localizar aquel punto en el que la función objetivo (función de beneficios), es decir, $B= 6x_1 + 5x_2$, sea máxima.

El procedimiento para Idealizar la solución es sustituir las coordenadas de cada vértice en la función económica y seleccionar el vértice al que corresponde el mayor valor de la función,

Él vértice E es la intersección de la recta que tiene por ecuación 5,000x,+ 10,000x2^ 40,000, con el eje 0x2, por consiguiente, las coordenadas están dadas por la solución del sistema:

$5{,}000x_1 + 10{,}000x_2 = 40{,}000$
$x_1 = 0$

Siendo $x_1 = 0$, es claro entonces que x_2= 40,000/10,000= 4. Las coordenadas del primer vértice E son (0, 4).

El vértice F es la intersección de la recta que tiene por ecuación $12x_1$;+ $8x_2$- 48, con la recta que tiene por ecuación $5{,}000x_1 + 10{,}000x_2= 40{,}000$, por consiguiente, las coordenadas están dadas por la solución del sistema:

$12x_1 + 8x_2 = 48$
$5{,}000x_1 + 10{,}000x_2 = 40{,}000$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 12 & 8 \\ 5000 & 10000 \end{vmatrix} = 80000$$

$$|x_1|=\begin{vmatrix} 48 & 8 \\ 4000 & 10000 \end{vmatrix} = 480{,}000 - 320 = 160{,}000$$

x_1= 160, 000/80, 000= 2

$$|x_2|=\begin{vmatrix} 12 & 48 \\ 5{,}000 & 40{,}000 \end{vmatrix} = 180{,}000 - 240{,}000 = 240{,}000$$

x_2= 240, 000/80, 000= 3

Las coordenadas del segundo vértice F son (2, 3).

El vértice G resulta de la intersección de la recta que tiene por ecuación $12x_1 + 8x_2 = 48$ con el eje $0x_2$, por tanto las coordenadas resultan de la solución de las ecuaciones:

$12x_1 + 8x_2 = 48$
$x_2 = 0$

Siendo $x_2 = 0$, entonces x_1= 48/12= 4.

Las coordenadas del vértice G(4, 0)

Octavo paso: sustituimos las coordenadas de cada vértice en la función objetivo o función económica 7 B= $6x_1 + 5x_2$.

Sustituyendo el vértice E(0,4) se tiene:

B=6(0)+5(4)= $20.00

Sustituyendo el vértice F(2, 3)

B= 6(2)+5(3)= $27.00

Sustituyendo el vértice G(4, 0)

B= 6(4)+5(0)= $24.00

Al comparar los valores obtenidos de la función económica, podemos observar que el valor de más alto nivel, está representado por el vértice F, por lo que la solución del problema, es decir, la maximización de los beneficios, es x_1= 2, x_2= 3.

El método simplex

Mediante el método gráfico, en páginas anteriores, nos enfrentamos con problemas de optimización de funciones objetivos que disponían de dos variables de elección, pero cuando las variables exceden ese número dicho método se hace difícil de concretar a menos que se use un plano tridimensional.

Con el simplex esa dificultad es superada puesto que la optimización de la función objetivo se efectúa a partir de recursos puramente algebraicos.

Draper y Klingman, recomiendan el siguiente procedimiento: (Draper y Klingman, ob. cit., págs. 621 y 622).

1) Sumamos las variables sueltas y artificiales necesarias para convertir desigualdades en igualdades.

2) Ordenamos los datos en una tabla simplex.

3) Determinamos una solución factible de ü tabla simplex.

4) Probamos la solución para ver si es óptima.

5) Si la solución no es óptima, determinamos, de la tabla, la variable de entrada y la de salida para la próxima solución.

6) Calculamos las entradas para la tabla revisada.

7) Probamos la solución de la tabla revisada para ver si es óptima.

8) Repetimos este proceso (pasos 5 a 7) hasta la obtención de lía-solución óptima.

Ejemplo 1.

Maximizar Z- $22x_1+27x_2$

Restricciones:

$3x_1+x_2+0.5x_3 \leq 60$
$1.5x_1-5x_2+0.5x_4 \leq 90$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Replanteo del problema.

Función objetivo ampliada:

$Z= 22x_1+27x_2-0x_3+0x_4$

Restricciones:

$3x_1+2x_2+0.5x_3 = 60$
$1.5x_1+5x_2+ \quad 0.5x_4 =90$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

En la tabla 1, la fría x_3 se obtuvo a partir de los, coeficientes de la primera restricción; la fila x4 se obtuvo a partir de los coeficientes de la segunda restricción; fe fila Zj (de los beneficios) se obtuvo sustituyendo en la función objetivo ampliada $Z= 22x_1+27x_2+0x_3+ 0x_4$ arrojando un valor de $0, debido a que en la primera etapa se concibe un programa de producción en el que los factores de .producción permanecen en estado ocioso.

Tabla 1 (primera etapa de producción)

			$22	$27	SO	$0
Cj	Variables	Constantes	x_1	x_2	x_3	x_4
$0	x_3	60	3	2	0.5	0
$0	x_4	90	1.5	5	0	0.5
	Zj	$0	$0	$0	$0	$0
	Cj-Zj		$22	$27	$0	$0

El beneficio neto (fila Cj-Zj), se obtuvo así:

22-0= 22

27-0= 27

0-0= 0

0-0= 0.

La presencia de valores positivos en Cj-Zj indica que la solución se puede mejorar.

Tabla 2 (segunda etapa de producción)

			$22	$27	$0	$0
Cj	Variables	Constantes	x_1	x_2	x_3	x_4
$0	x_1	24	2.4	0	0.5	-0.2
$27	x_2	18	0.3	1	0	0.1
	Zj	$486	$8	$27	$0	$2.7
	Cj-Zj		$13.9	$0	$0	-$2.7

Para la segunda etapa, tenemos que observar en la función objetivo, cuál de las variables hace el mayor aporte al beneficio, por unidad de producto. Obviamente es x_2, que ha de ser la variable entrante. Para determinar la variable saliente, dividimos la columna de constante (la cual representa la disponibilidad de los factores de producción), entre los coeficientes de la variable entrante y seleccionamos el cociente menor:
60/2= 30
90/5= 18.

Como 18<30, sale x_4, en virtud de que es la opción que no violenta la restricción de la cantidad disponible de los factores de producción.
La fila x_2, se obtiene dividiendo la fila x_4 entre el coeficiente de x_2 que es 5:
90/5= 18
1.5/5= 0.3
5/5= 1
0/5=0
0.5/5= 0.1

La nueva fila de x_3, de acuerdo a Draper, se obtiene así:

[Elemento en la fila nueva]= [Elemento en la fila original]-[elemento de la fila original en la columna de óptimos][correspondiente elemento en la fila de reemplazo],

60-2(18)= 24

3-2(0.3)= 2.4

2-2(1)= 0

0.5-2(0)= 0.5

0-2(0.1)= -0.2.

Para el cálculo de la fila Zj, fila de los beneficios, procedemos de la siguiente manera:
Zj= 22(0)+27(18)= $486; luego:
x_1= 0(2.4)+27(0.3)= 8.1
x_2= 0(0)+27(l)= 27
x_3= 0(0.5)+27(0)= 0

x_4= 0(-0.2)+27(0.1)= 2.7

Para el cálculo de la fila Cj-Zj, o beneficio neto, en la segunda etapa, procedimos así:
22-8.1= 13.9
27-27= 0
0 -0 = 0
0-2.7= - 2.7.

La presencia de un valor positivo en Cj-Zj, indica que la solución se puede mejorar aún. En virtud de que dicho valor se encuentra en la columna x, ésta es la variable que debe entrar para la tercera etapa.

La determinación de la variable que debe salir se lleva a cabo de este modo:
24/2.4= 10 18/0.3= 60.
Como 10<60, debe salir x_3.

Tabla 3 (tercera etapa de producción)

			$22	$27	$0	$0
Cj	Variables	Constantes	x_1	x_2	x_3	x_4
$22	x_1	10	1	0	0.2	-0.08
$27	x2	15.22	0	1	-0.06	0.124
	Zj	$630.94	$22	$27	$2.78	$1.54
	Cj-Zj		$0	$0	-$2.78	-$1.54

La fila x_1 se obtiene dividiendo la fila x_3 entre el coeficiente de x_1 que es 2.4.
24/2.4= 10
2.4/2.4= 1
0/2.4= 0
0.5/2.4= 0.2
-0.2/2.4= -0.08.
La fila de x_2 se obtiene con el mismo procedimiento utilizado en la segunda etapa:
18-0.3(10)= 15.22
0.3-0.3(1)= 0
1.0.3(0)= 1
0-0.3(0.2)= -0.06
0.1-0.3(-0.08)= 0.124.
El beneficio (fila Zj), en la tercera etapa, lo obtenemos de este modo:
Zj= 22(10)+27(15.22)= 220+410.94= $630.94.
Para x_1= 22(1)+27(0)= 22
Para x_2= 22(0)+27(l)= 27
Para x_3= 22(0.2)+27((-0.06)= 2.78
Para x_4= 22(-0.08)+27(0.124)= 1.54.

El beneficio neto (fila Cj-Zj), se obtuvo de este modo:

22-22= 0
27-27= 0
0-2.78= -2.78
0-1.54=-1.54.

En virtud de que en la fila Cj-Zj, no aparece valor positivo alguno, la solución no se puede mejorar, luego la solución óptima es:
x_1= 10

x_2= 15.22.

Ejemplo 2. Minimización de costos.
Función objetivo:

$C= x_1+5x_2$

Restricciones: $x_1 \ +l/2x_2 \geq 3$
$2.5x_1+2x_2 \geq 10$
y: $x_1, x_2 \geq 0$

Replanteo del problema:

Función objetivo aumentada:

$C= x_1+5x_2+0x_3+0x_4+Mx_5$

Restricciones: $x_1+l/2x_2+l/2x_3 = 3$
$2.5x_1+2x_2- \ 1/2x_4+1/2x_5 =10$
y: $x_1,x_2,x_3, x_4,x_5 \geq 0$

Tabla 1 (primera etapa de producción)

			$1	$5	$0	$0	$M
Cj	Variables	Constantes	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$0	x_3	3	1	0.5	0.5	0	0
$M	x_5	10	2.5	2	0	-0.5	0.5
	Zj	$10M	$2.5M	$2M	$0	-$1/2M	$1/2M
	Cj-Zj		$1-2.5M	$5-2M	$0	$1/2M	-$1/2M

Gran parte del contenido de esta tabla, emerge de las informaciones contenidas en la función objetivo y en las restricciones.

La fila x_3 se obtuvo a partir de los coeficientes de la primera restricción; la fila x5 se obtuvo a partir de los coeficientes de la segunda restricción. Concretamente la fila Zj (costos), surge de este modo:

$C= x_1+5x_2+0x_3+0x_4+Mx_5$

C=0+0+0+0+10M=$10M.

Para x_1= 0(1)+M(25)= $2.5M

x_2= 0(0.5)+M(2)= $2M

x_3= 0(0.5)+M(0)= $0

x_4= 0(0)+M(-l/2)= -$1/2M

x_5=0(0)+M(l/2)=$l/2M.

La fila Cj-Zj la obtuvimos precisamente así: calculando la diferencia entre esas dos variables.

La presencia de valores negativos en Cj-Zj, indica que la solución inicial se puede mejorar. Nos internamos en la segunda etapa de producción.

Ahora, tenemos que observar en la función objetivo, cuál de las variables hace el mayor aporte a la minimización de los costos, por unidad de producto. Obviamente es x_1 que ha de ser la variable entrante. Para determinar la variable saliente, dividimos la columna de constantes, entre los coeficientes de la variable entrante y seleccionamos el cociente menor:

3/1=3

10/2.5=4.

Como 3<4, sale x3, en virtud de que es la opción que no violenta las restricciones inicialmente impuestas.

Tabla 2 (segunda etapa de la producción).

			$1	$5	$0	$0	$M
Cj	Variables	Constantes	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$1	x_1	3	1	0.5	0.5	0	0
$M	x_5	2.5	0	3/4	-1.25	-0.5	0.5
	Zj	$3+2.5M	1	$0.5+3/4M	$0.5+1.25M	-$1/2M	$1/2M
	Cj-Zj		0	$5-(0.5+3/4M	-$0.5+1.25M	41/2M	-$1/2M

La fila x_1 se obtiene dividiendo la fila x_3 entre el coeficiente de x_1 que es 1:
3/1- 3

1/1= 1

0.5/1= 0.5

0/1=0

0/1= 1

La nueva fila de x_5, de acuerdo a Draper, se obtiene así:

[Elemento en la fila nueva]= [Elemento en la fila original]-[elemento de la fila original en la columna de óptimos][correspondiente elemento en la fila de reemplazo].

10-2.5(3)= 2.5

2.5-2.5(1)= 0

2-15(0.5)= 0.75

0-15(0.5)=-1.25

-05-2.5(0)= -0.5

0.5-2.5(0)= 1/2.

Para el cálculo de la fila Zj, fila del costo, procedemos de la siguiente manera:

Zj- 3+0+2.5M= $3+2.5M; luego:

x_1=(1)+M(0)= 1
x_2= l(0.5)+M(3/4)= 0.5+3/4M

x_3= 1(0.5)+M(-1.25)= 0.5-1.25M

x_4=l(0)+M(-l/2)= -1/2M

x_5=l(0)+M(l/2)= 1/2M

Para el cálculo de la fila Cj-Zj, en la segunda etapa, procedimos así:

1-1=0

5-(0.5+3/4M)
0-(0.5-1.25M)= -0.5+1.25M

0-(-l/2M)= 1/2M

M-1/2M= 1/2M

La presencia de un valor negativo en Cj-Zj, indica que la solución se puede mejorar aún. En virtud de que dicho valor se encuentra en la columna x2 ésta es la variable que debe entrar para la tercera etapa.

La determinación de la variable que debe salir se lleva a cabo de este modo:

3/0.5= 6

2.5/0.75=3.33.

Como 3.33<6, debe salir x_5.

Tabla 3 (tercera etapa de producción).

			$1	$5	$0	$0	$M
Cj	Variables	Constantes	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$1	x_1	1.33	1	0	-0.33	0.33	-0.33
$5	x_2	3.33	0	1	-1.67	-0.67	0.67
	Zj	$3+2.5M	$1	$5	-$8.68	-$3.02	$3.02
	Cj-Zj		$0	$0	$8.68	$3.02	$3.02+M

La fila x_2 se obtiene dividiendo la fila x_5 entre el coeficiente de x_2 (pivote) que es 3/4.

2.5/0.75=3.33

0/0.75=0

0.75/0.75= 1

-1.25/0.75=-1.67

-0.5/0.75=-0.67

0.5/0.75= 0.67.

La fila de x_1 se obtiene con el mismo procedimiento utilizado en la segunda etapa:
[Elemento en la fila nueva]= [Elemento en la fila original]-[elemento de la fila original en la

columna de óptimos][correspondiente elemento en la fila de reemplazo].
3-0.5(3.33)= 1.33

1-0.5(0)= 1

0.5-0.5(1)= 0

0.5-0.5(1.67)= -0.33

0-0.5(-0.67)= 0.33

0.5(0.67)= -0.33

El costo (fila Zj), en la tercera etapa, lo obtenemos de este modo:

Zj= 1.33+5(3.33)+0= $17.98

Para x_1= l(l)+5(0)= 1

Para x_2= 1(0)+5(1)= 5

Para x_3= l(-0.33)+5(-1.67)= -8.68

Para x_4= l(0.33)+5(0.67)= -3.02

Para x_4= l(-0.33)+5(0.67)= -3.02

La fila Cj-Zj, se obtuvo de este modo:

1-1=0

5-5=0

0-(-8.68) = 8.68

0-(-3.02)= 3.02

M-3.02= M-3.02

En virtud de que en la fila Cj-Zj, no aparece valor negativo alguno, la solución no se puede mejorar, luego la solución óptima es:

X_1= 1.33

x_2= 3.33

El dual

Todo programa lineal original se llama generalmente primal y su contraparte dual. *“(...) De manera que se resuelve un problema de programación lineal en realidad estamos resolviendo dos. En esos dos problemas los valores óptimos de las funciones objetivos serán iguales. Esta propiedad se puede usar ventajosamente pues es posible que el dual de un problema sea mucho más sencillo de resolver. El concepto de Dualidad establece que por cada problema de maximización hay otro de minimización que está asociado al primero. Resolver uno implica que se ha resuelto el otro (...)”.* (Lora, Ricardo: Métodos cuantitativos en la toma de decisiones. Segunda Edición, Editora Corripio, Santo Domingo, p. 134). (Comillas, cursiva y puntos suspensivos son nuestros).

Las reglas de transformación del primal en dual o de éste en primal, son: 1) cambiar *“maximizar por “minimizar” y viceversa... 2) los signos de desigualdad de las restricciones del primal deben invertirse en las restricciones del dual, pero los signos de las condiciones de no negatividad nunca se alteran; 3) como matriz de los coeficientes para las restricciones del dual, tomar la transpuesta de la matriz de los coeficientes de las restricciones del primal, 4) luego de transpuesto, el vector fila de los coeficientes de la función objetivo del primal debe tomarse como vector columna de las constantes en las restricciones del dual (en forma similar, el vector columna de las constantes, en las restricciones del primal, se transforma, luego de transpuesto, en el vector fila de los coeficientes de la función objetivo en el dual)”.* (Ibíd., p. 626). (Comillas y cursiva son nuestras).

Ejemplo 1.

Primal:

Minimizar: $C = 6y_1 + 14y_2$

Restricciones: $2y_1 + 4y_2 \geq 13$

$y_1 + 3y_2 \geq 1$

y: $y_1, y_2 \geq 0$

Dual:

Maximizar: $B = 13x_1 + x_2$

Restricciones: $2x_1 + x_2 \leq 6$

$4x_1 + 3x_2 \leq 14$

y: $x_1, x_2 \geq 0$

Ejemplo 2.

Primal:

Maximizar: B= $5y_1 + 4y_2 + 9y_3$

Restricciones: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

y: $y_1, y_2, y_3 \geq 0$.

Dual:

Minimizar C= $x_1 + 3x_2$

Matemático francés René Descartes

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

1) Ayres, Frank: *ECUACIONES DIFERENCIALES*. McGraw Hill, México, 2000.

2) Allen, R.: *ECONOMÍA MATEMÁTICA*. Editorial AGUILAR, Madrid, segunda edición, 1967.

3) Allen R.: *ANÁLISIS MATEMÁTICO PARA ECONOMISTAS*. Editorial AGUILAR, Madrid, octava edición-tercera reimpresión 1978.

4) Baumol William J.: *Teoría económica y análisis de operaciones*. Editores Herrero Hermanos, sucesores, S.A., México, quinta edición, 1974.

5) Chiang, A1pha: *Métodos fundamentales de economía matemática*. Amorrortu editores, s.a., Buenos Aires, 1976.

6) Drapety Klingman. *Matemáticas para administración y economía*. Impreso en México, CEPSA, 1980.

7) Demidovich: *Problemas y ejercicios de análisis matemático*. Editorial MIR, Moscú, novena edición, 1987.

8) Ekelud, Robert y Hébert, Robert: *Historia de la teoría económica y de su método*. McGraw Hill, México, tercera edición, 1998.

9) E. Héctor: *Programación lineal*. Editorial Pax, México, sexta edición, 1975.

10) Ferguson y Gould: *Teoría microeconómica*. Fondo de Cultura Económica, México, México, 1978.

11) Granville, William Anthony: *Cálculo diferencial e integral*. Editorial Hispano- Americana, México, reimpresión del año 1970.

12) Baser: *Análisis matemático*. Editorial F. TRILLAS, S.A., México, 1970.

13) Huaig, David S.: *Introducción al uso de la matemática en el análisis económico*. Siglo XXI, quinta edición, México, 1978.

14) Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio: *Metodología de la investigación*. McGraw Hill, México, 2000.

15) Kells, Lyman: *Ecuaciones diferenciales elementales*. McGraw Hill, México, primera edición en español, 1970.

16) Kindle, Joseph: *Geometría Analítica*. Serie Schaum. McGraw-Hill, Bogotá Colombia, 1981.

17) Kent Nagle, R. y Saff, Edward B.: *Fundamentos de ecuaciones diferenciales*. Addison Wesley Longman, México, primera reimpresión de la segunda edición, 199/8.

18) Lehmann, Charles H.: *Geometría analítica*. Editorial LIMUSA, México, 1999.

19) Larson, Hostetler y Edwards: Cálculo. McGraw Hill, México, sexta edición, 1999.

20) Lora, Ricardo: Métodos cuantitativos en la toma de decisiones. Segunda edición, PUCMM, Santo Domingo, RD, 1989.

21) Peña, Geraldino: *Matemática superior*. Editorial Antillas, Santo Domingo, RD, 1998.

22) Randolph, John: *Cálculo-geometría analítica-vectores*. Compañía Editorial Continental, S.A., México, 1970.

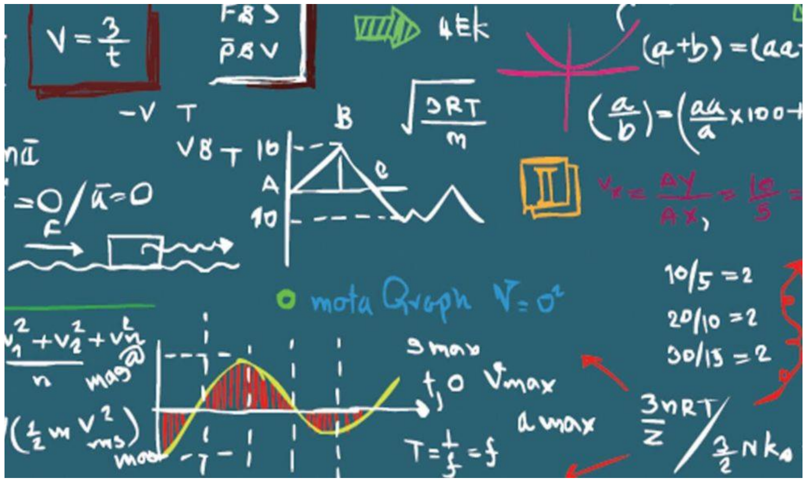
23) Spiegel, Murray R.: *Álgebra superior*. McGraw Hill, México, 1996.

24) Sevilla, Fiol y Souvegrain: *Tópicos de matemáticas para administración y economía*. Editorial TRILLAS, México, 1974.

25) Samuelson, Paul A.: *Curso de economía moderna*. Editora Aguilar, Madrid, decimosexta edición- quinta reimpresión 1972.

26) Thomas, George: *Cálculo infinitesimal y geometría analítica*. Editorial AGUILAR, Madrid, sexta edición-sexta reimpresión, 1980.

**Este libro se terminó de imprimir y encuadernar
en el mes de Febrero del 2002
en los Talleres de Somos Artes Gráficas
Santo Domingo, República Dominicana**


mota Graph
10/5 =2
20/10 =2
30/15 =2


16.28
16.66
14.3
16.95
11.65
Feb
March