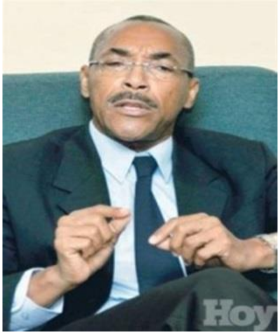
Dr. Manuel de Jesús Linares Jiménez



Obras
Completas

Tomo
69

***Estudiando el Álgebra Superior de Spiegel-Moyer*. (Primer Volumen). Investigación publicada en el mes de julio de 2015.**

ESTUDIANDO EL ÁLGEBRA SUPERIOR DE SPIEGEL-MOYER (Primer Volumen)

Autor: Dr. Manuel Linares
profesormanuellinares@gmail.com
829-637-9303

1ra. Edición, forma física:
Julio, 2015.

Impresos La Escalera,
Santo Domingo, R.D.,
Tel. 809-688-1449.

Portada: Zoquier Grafhic,
Zona Colonial, Arz. Meriño No. 455,
Santo Domingo, D.N.
Tel. 809-685-5541.

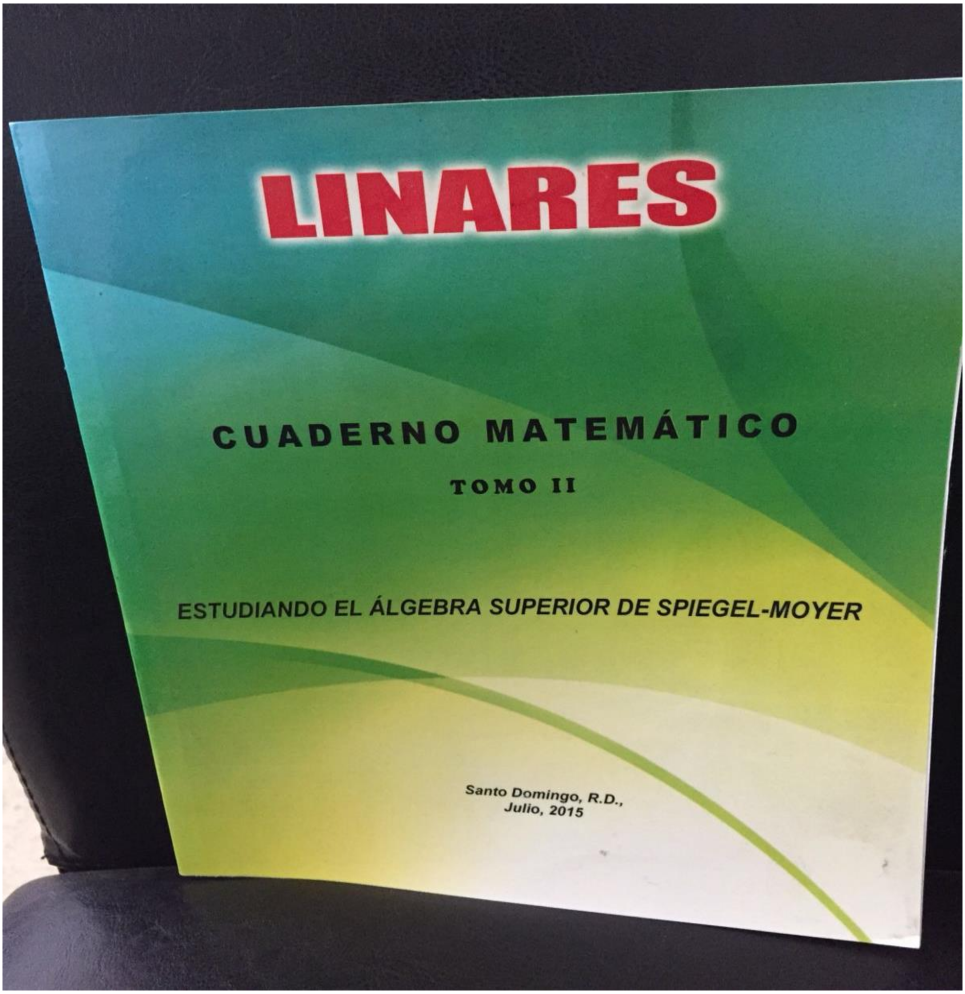
Preparación y difusión edición digital:
Septiembre 2017/abril 2018.

Nueva preparación y difusión edición digital:
2023.

Manuel Linares es el único responsable
de las enmiendas introducidas para la edición digital

Estudiando el Álgebra superior de Spiegel-Moyer (Primer Volumen)

PORTADA DE LA EDICIÓN EN FORMATO FÍSICO



ÍNDICE

PREFACIO AL TOMO 69

El tomo 69 de nuestras Obras Completas para el período 1976-2023, se encuentra constituido por la obra *Estudiando el Álgebra Superior de Spiegel-Moyer*. Primer Volumen. Investigación publicada en el 2015.

Respecto a la presentación que habíamos escrito relacionada con *Estudiando el Álgebra Superior de Spiegel-Moyer*, primer volumen, en ocasión de su publicación en formato físico, y que ahora también la acogemos, decíamos:

“El lector tiene ante sí *Estudiando el libro Álgebra superior de Spiegel-Moyer*, en forma de apuntes personales, que da cuenta de mis estudios algebraicos con el fin de iniciarnos en tan importante rama de la matemática.

“Hace varios años que empecé a estudiar la citada obra, pero no fue sino en julio del año 2014 que decidí organizar los apuntes y publicarlos como el tomo II de nuestros CUADERNOS MATEMÁTICOS.

“Es conveniente recordar que el primer tomo, de dichos cuadernos, lo representa *Explorando el camino de la economía matemática*, de nuestra autoría.

“Un simple contacto con el tomo II, pone al descubierto que el suscrito se sitúa claramente en la condición de alumno; es muy evidente.

“Pretendemos iniciarnos en el aprendizaje del álgebra superior, por eso no sólo resolvimos parte de los problemas propuestos del libro en cuestión, sino que también nos ilustramos practicando con los problemas resueltos.
“Nos tropezamos con algunos errores que, en verdad, no menoscaban el carácter científico del libro en cuestión.

“A nuestros lectores, en especial a los economistas, les aconsejamos que adquieran y estudien el libro de SPIEGEL-MOYER, *Álgebra superior*, e indudablemente aprenderán álgebra.

“En efecto, la obra publicada bajo el título de *Algebra superior*, tercera edición, de Spiegel-Moyer, consta de 31 capítulos.

“Son ellos:

“Operaciones fundamentales con los números, Operaciones fundamentales con expresiones algebraicas, Propiedades de los números, Productos especiales, Factorización, Fracciones, Exponentes, Radicales, Operaciones con números complejos, Ecuaciones en general, Razón, proporción y proporcionalidad, Funciones y gráficas, Ecuaciones lineales con una incógnita, Ecuaciones de rectas, Sistemas de ecuaciones lineales simultáneas, Ecuaciones de segundo grado con una incógnita, Secciones cónicas, Sistemas de ecuaciones de segundo grado, Desigualdades, Funciones polinomiales, Funciones racionales, Progresiones y series, Logaritmos, Aplicaciones de los logaritmos y exponentes, Permutaciones y combinaciones, Teorema del binomio de Newton, Probabilidad, Determinantes, Matrices, Inducción matemática y Fracciones parciales.

“De esos 31 capítulos decidimos estudiar una parte que entendemos nos es muy útil para iniciarnos en el estudio del álgebra y eficientizar el ejercicio de la profesión de economista. Estos son, sin duda, los objetivos específicos que nos llevaron a realizar esta investigación.

“Los objetivos generales tienen que ver con la lucha enconada que se verifica en el campo de la ciencia económica.

“Las distintas versiones de la economía política burguesa, de más en más, acuden a las matemáticas para formular y desarrollar los modelos económicos, con los cuales pretenden interpretar la realidad que vive el capitalismo contemporáneo, justificar la existencia de dicho régimen económico y refutar la economía política marxista.

“Así que los economistas partidarios de la economía política marxista tenemos que prepararnos, cada día más, en las distintas ramas de la matemática, con el fin de entender bien los modelos económicos burgueses y hacerle las críticas, desde una perspectiva científica, en interés del proletariado y de otras clases sociales oprimidas, que luchan por zafarse del yugo del capital en ruta hacia la democracia popular y el socialismo. En esta explicación, pues, se concretiza el objetivo general de la publicación de estos apuntes personales.

"Tras la consecución de los objetivos expuestos definimos un método de trabajo, entendemos nosotros, apropiado. ¿Cuál? Leer y practicar, es decir, observar los conceptos, que en cada página van asentando los autores del libro estudiado, practicar los ejemplos y problemas resueltos y resolver los problemas propuestos; con este método coronamos exitosamente el esfuerzo emprendido. Nos sentimos muy satisfechos.

"Advertencia: las personas que hagan contacto con estos apuntes, que estoy publicando bajo el título de *Estudiando el libro de Álgebra superior de Spiegel-Moyer*, en modo alguno deben tomarlo como guía para aprender álgebra; simplemente continúo haciendo acopio de mi costumbre de hacer de público conocimiento los resultados de las indagaciones que hago en diferentes áreas del saber.

"Igualmente advertimos que esta publicación no persigue fines lucrativos; como siempre, será distribuida en el seno del personal docente de la UASD y en el movimiento obrero avanzado". (FIN).

En lo que concierne a la edición digital, acaecida el 3 de mayo de 2018, adicionamos una nota que de inmediato transcribimos y que obviamente respaldamos:

“Nota: Para la presente edición digital, nuestra obra ESTUDIANDO EL ÁLGEBRA SUPERIOR DE SPIEGEL-MOYER, fue dividida en dos volúmenes. El primero aborda los capítulos que van desde el 1 hasta el 14; en cambio, el segundo toca los capítulos que van desde el 15 hasta el 28”. (FIN).

Dr. Manuel de Jesús Linares Jiménez
Enero 2023.

1

RESOLUCIÓN DE ALGUNOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 1 DEL LIBRO *ÁLGEBRA SUPERIOR* DE SPIEGEL-MOYER

Introducción

El capítulo 1 del libro, de Spiegel-Moyer, *Álgebra Superior*, se llama OPERACIONES FUNDAMENTALES CON LOS NÚMEROS.

En este capítulo los autores nos orientan sobre las cuatro (4) operaciones fundamentales de la aritmética y del álgebra, suma, resta, multiplicación y división.

Probables errores

En la página 3, **EJEMPLOS 1.1**, encontré un error: (-6)+4= 2 no, es -2; en los problemas resueltos, página 6, en el mandato **1.3**, tenemos los errores siguientes: 6:3 no, es 6.3; 0:3782 no, es 0.3782; y 18/7 no, es -18/7; y en las soluciones a los problemas propuestos, página 11, en la sección **1.18**, se observan algunas incorrecciones: -2:8 no, es -2.8; 4:8 no, es 4.8; en la sección **1.19**, también hay unos probables errores: 3:14 no, es 3.14; y 0:001, π+1, aparte de que es 0.001, ambas expresiones no poseen soportes en el mandato de la página 10; en la sección 1.23 hay otra incorrección, el resultado no es -201, es -197; en la sección **1.25**, acápite d), parece que los resultados presentados por el libro están incorrectos.

Problemas propuestos (página 9)

El procedimiento de resolución de los problemas propuestos, se puede encontrar, para cada sección, en los problemas resueltos del libro en cuestión, desde la página 5 hasta la página 9. Por tanto, es recomendable estudiar bien los problemas resueltos, para luego efectuar los propuestos. Es particularmente importante que consultemos la página 4, del libro que estamos estudiando, con el fin de repasar exponentes y potencias y operaciones con fracciones.

1.15 Escriba la suma S, diferencia D, producto P y cociente C de cada uno de los pares de números siguientes:

a) 54, 18; b) 4, 0; c) 0, 4; d) 12, 24; e) 50, 75

S= 54+18= 72; D= 54-18= 36; P= 54(18)= 972; C= 54÷18= 3

b) S= 4+0= 4; D= 4-0= 4; P= 4(0)= 0; C= 4÷0= indefinido

c) S= 0+4= 4; D= 0-4= -4; P= 0(4)= 0; C= 0÷4= 0

d) S= 12+24= 36; D= 12-24= -12; P= 12(24)= 288; C= 12÷24= 1/2

e) S= 50+75= 125; D= 50-75= -25; P= 50(75)= 3,750; C= 50÷75= 2/3

1.16 Efectúe cada una de las operaciones indicadas:

a) 38+57= 95; 57+38= 95 (ley conmutativa de la suma)

b) 15+(33+8)= 15+41= 56; (15+33)+8= 48+8= 56 (ley asociativa de la suma)

c) (23+64)-(41+12)= 87-53= 34

d) 12.8, 8.12= 96, 96 (ley conmutativa de la multiplicación)

e) 6(4.8), (6.4)8= 6(4.8)= 6(32)= 192, (24)(8)= 192 (ley asociativa de la multiplicación)

f) 42.68= 2,856
g) 1,296÷36= 36

h) $(35-23)(28+17)/43-25= (12)(45)/18= 30$

i) $45 \div 15+84 \div 12= 3+7= 10$

j) $10 \div 5-4 \div 2+15 \div 3+2.5= 2-2+5+10= 15$

k) $112 \div (4.7)$, $(112 \div 4).7= 112 \div 28= 4$; $(112 \div 4).7= 196$

l) $15+3.2/9-4 \div 2= 15+6/9-2= 21/7= 3$

1.17 Coloque el símbolo de desigualdad apropiado (< o >) entre cada uno de los pares de números reales siguientes:

a) $4, 3$ — $4>3$
b) $-2, 0$ — $-2<0$
c) $-1, 2$ — $-1<2$
d) $3, -2$ — $3>-2$
e) $-8, -7$ — $-8<-7$

f) $1, \sqrt{2}$ — $1<\sqrt{2}$
g) $-3, -\sqrt{11}$ — $-3>-\sqrt{11}$
h) $-1/3, -2/5$ — $-1/3>-2/5$

1.18 Escriba cada uno de los grupos de números reales siguientes en orden ascendente en cuanto a magnitud:

a) $-\sqrt{3}, -2, \sqrt{6}, -2.8, 4, 7/2$

$-2.8 < -2 < -\sqrt{3} < \sqrt{6} < 7/2 < 4$

b) $2\pi, -6, \sqrt{8}, -3\pi, 4.8, 19/3$

$-3\pi < -6 < \sqrt{8} < 4.8 < 2\pi < 19/3$

1.19 Escriba el valor absoluto de cada uno de los números reales siguientes:

$2, -3/2, -\sqrt{6}, +3.14, 0, 5/3, \sqrt{4}$

|2|, |-3/2|, |-√6|, |3.14|, 0, |5/3|, |√4|

2, 3/2, √6, 3.14, 0, 5/3, √4.

1.20 Evalúe:

a) 6+5= 11; b) (-4)+(-6)= -4-6= -10; c) (-4)+3= -4+3= -1; d) 6+(-4)= 6-4= 2;

e) -8+4= -4; f) -4+8= 4; g) (-18)+(-3)+22= -18-3+22= 1; h) 40-12+4= 32; i) -12-(-8)= -12+8= -4; j) -(-16)-(-12)+(-5)-15= 16+12-5-15= 8.

1.21 Escriba la suma S, diferencia D, producto P y cociente C de cada uno de los pares de números reales siguientes:

a) 12, 4

S= 12+4= 16; D= 12-4= 8; P= 12(4)= 48; C= 12÷4= 3

b) -6, -3

S= -6-3= -9; D= -6-(-3)= -6+3= -3; P= -6(-3)= 18; C= -6÷ (-3)= 2

c) -8, 4

S= -8+4= -4; D= -8-(4)= -12; P= -8(4)= -32; C= -8/4= -2

d) 0, -4

S= 0+(-4)= 0-4= -4; D= 0-(-4)= 0+4= 4; P= 0(-4)= 0; C= 0/-4= 0

e) 3, -2

S= 3+(-2)= 3-2= 1; D= 3-(-2)= 3+2= 5; P= 3(-2)= -6; C= 3/-2= -3/2

1.22 Efectúe las operaciones indicadas:

a) (-3)(2)(-6)= 36

b) (6)(-8)(-2)= 96

c) 4(-1)(5)+(-3)(2)(-4)= -20+24= 4

d) $(-4)(6)/-3+(-16)(-9)/12$= (-24/-3)+(144/12)= 8+12= 20

e) (-8) ÷ (-4)+(-3)(2)= 2-6= -4

f) $(-3)(8)(-2)/(-4)(-6)-(2)(-12)$= $48/24+24$= 48/48= 1

1.23 Evalúe:

a) 3^3= 3.3.3= 27

b) $3(4)^2$= 3(16)= 48

c) $2^4.2^3= 2^{4+3}=2^7$= 128

d) $4^2.3^2$= (16)(9)= 144

e) $5^6.5^3/5^5= 5^9(5^{-5})= 5^{9-5}= 5^4$= 625

f) $3^4.3^8/3^6.3^5= 3^{12}/3^{11}= 3^{12}(3^{-11})$= 3

g) $7^5/7^3.7^4= 7^5/7^7)= 7^5(7^{-7})= 7^{-2}= 1/7^2$=1/49

h) $(3^2)^3= 9^3$= 729

i) $(1/2)^6.2^5= 1^6/2^6.2^5= 1/2^6. 2^5$= (1/64)(32)= 1/2

j) $(-2)^3\cdot(2)^3/3(2^2)^2$= $(-8)(8)/3(16)$= $-64/48$= -4/3

k) $3(-3)^2+4(-2)^3/2^3-3^2$ = $3(9)+4(-8)/8-9$= $27-32/-1$= -5/-1= 5

l) $(5^7/5^4)-[2^{10}/8^2(-2)^3]-4(-3)^4= 5^7(5^{-4})-(1024/-512)-324= 125-(-2)-324= -197$. (Este resultado difiere de la respuesta que presenta el libro. ¿Razón? El segundo término de la fracción dada implica una división, donde el numerador es positivo y el denominador negativo, luego el resultado es -2, por la ley de los signos, pero como dicho término está presidido por un signo negativo, lógicamente el -2, se transforma en 2, el resultado final es -197, no -201. Este es nuestro parecer).

1.24 Escriba cada una de las fracciones siguientes como una fracción equivalente que tenga el denominador indicado.

a) 2/5; 15

2/5.3/3= 6/15

b) -4/7; 28

-4/7.4/4= -16/28

c) 5/16; 64

5/16.4/4= 20/64

d) -10/3; 42

-10/3.14/14= -140/42

e) 11/12; 132

11/12.11/11= 121/132

f) 17/18; 90

17/18.5/5= 85/90

1.25 Encuentre la suma S, diferencia D, producto P y cociente C de cada uno de los pares de números racionales siguientes:

a) 1/4, 3/8;

S= 1/4+3/8= 2+3⁄8= 5/8

D= 1/4-3/8= 2-3⁄8= -1/8

P= 1/4.3/8= 3/32

C= 1/4 ⁄ 3/8= 1/4·8/3= 8/12= 4/6= 2/3

b) 1/3, 2/5

S= 1/3+2/5= 5+6 ⁄ 15= 11/15

D= 1/3-2/5= 5-6 ⁄ 15= -1/15

P= 1/3·2/5= 2/15

C= 1/3 ⁄ 2/5= 1/3·5/2= 5/6

c) -4, 2/3

S= -4/1+2/3= -12+2 ⁄ 3= -10/3

D= -4/1-2/3= -12-2 ⁄ 3= -14/3

P= -4·2/3= -8/3

C= -4/2/3= -4/1·3/2= -12/2= -6
d) -22/3, -3/2

S= -22/3+(-3/2)= (-44-9)/6= -53/6

D= -22/3- (-3/2)= -44-(-9) ⁄ 6= -44+9 ⁄ 6= -35/6

P= (-22/3)(-3/2)= 66/6= 10

C= -22/3 ⁄ -3/2= -22/3·2/-3= -44/-9= 44/9

1.26 Evalúe las expresiones siguientes, dadas x= -2, y= 4, z= 1/3, a= -1, b= 1/2

a) 3x-2y+6z

3(-2)-2(4)+6(1/3)= -6-8+12= -12

b) 2xy+6az

2(-2)(4)+6(-1)(1/3)= -16-2= -18

c) $4b^2x^3$

$4(1/2)^2(-2)^3$= 4(1/4)(-8)= -8

d) $3y^2$-4x ⁄ ax+by= $3(4)^2$-4(-2) ⁄ -1(-2)+1/2(4)= 48+8/2+2= 56/4= 14

e) $x^2y(x+y)$ ⁄ 3x+4y= $(-2)^2(4)(-2+4)$ ⁄ 3(-2)+4(4)= (4)(4)(2) ⁄ -6+16= 32/10= 16/5

f) $(y/x)^3-4(a/b)^2-(xy/z^2)$= $(4/-2)^3-4(-1/1/2)^2$-2(4) ⁄ $(1/3)^2$= (64/-8)-4(4)-8 ⁄ 1/9 = -8-16+72 = 48

La relevancia de Grothendieck en la definición de la geometría algebraica es enorme: tres de los siete Problemas del Milenio, los mayores desafíos matemáticos del siglo, están relacionados con su obra. Se le considera fundador de la teoría K, una de las piezas clave de la topología. Grothendieck tenía un talento único para unificar, como resume Colin McLarty, profesor de matemáticas de la Universidad Case Western

Reserve de Cleveland: “Su visión de las matemáticas era que no había que aproximarse a un problema con una ingente cantidad de conocimiento técnico. La clave para él era concebir el problema con tal nitidez que se resolviera por sí mismo”. McLarty asevera también que es muy difícil seguir su camino, porque aunque los pasos de su método son "sencillos de comprender" la enorme longitud de sus ensayos, y la necesidad de contener todos esos pasos para comprender su razonamiento, hacen extremadamente difícil continuar su legado. Harvey Shoolman, profesor de la Universidad Metropolitana de Londres y cofundador de grothendieckcircle, lamenta el adiós del genio: "Probablemente no volvamos a ver a alguien así por muchas generaciones. Se ha despedido, pero ahora ocupa su lugar junto con Arquímedes, Fermat, Newton, Leibniz, Gauss, Galois y Riemann como un pináculo del éxito en el más difícil y a la vez esencial de los desafíos de la humanidad".

2

RESOLUCIÓN DE ALGUNOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 2 DEL LIBRO *ÁLGEBRA SUPERIOR* DE SPIEGEL-MOYER

Introducción

El capítulo 2 del libro, de Spiegel-Moyer, *Álgebra Superior*, se llama OPERACIONES FUNDAMENTALES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

Los puntos que tratan los autores, en este capítulo, son: expresiones algebraicas, términos, grado, agrupamiento y cálculo de expresiones algebraicas. Estos puntos son importantes debido a que nos permiten aprender cuándo una expresión algebraica es un monomio, binomio, trinomio o polinomio; cuáles son los elementos que constituyen un término; las leyes que gobiernan la eliminación de los símbolos de agrupamiento; y cómo desarrollar las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de expresiones algebraicas.

Desde la página 14 hasta la 15, los autores nos ilustran los puntos enunciados arriba; y desde la página 16 hasta la 20, aparece una gran cantidad de problemas resueltos, que debemos practicar para salir airosos frente a los problemas propuestos que se encuentran desde la página 20 hasta la 21.

Probables errores

En los problemas resueltos, solamente pudimos identificar un probable error que se localiza en la página 19, correspondiente al problema **2.8**, h). La respuesta es x^2+2y, no x^2-2y.

Problemas propuestos (página 20)

2.10 Evalúe cada una de las expresiones algebraicas, dado que x= -1, y=3, z=2, a=1/2, b= -2/3.

a) $4x^3y^2-3xz^2$

$4(-1)^3(3)^2-3(-1)(2)^2 = -36+12 = -24$

b) (x-y)(y-z)(z-x)

(-1-3)(3-2)(2+1) = (-4)(1)(3) = -12

c) $9ab^2+6ab-4a^2$

$9(1/2)(-2/3)^2+6(1/2)(-2/3)-4(1/2)^2= (9/2)(4/9)-2-1 = 2-2-1 = -1$

d) $xy^2-3z ⁄ a+b= (-1)(3)^2-3(2) ⁄ 1/2+(-2/3)= -9-6 ⁄ (3-4/6)= -15 ⁄ (-1/6)= -(15/1)(-6/1)= 90/1= 90$

e) $z(x+y) ⁄ 8a^2-3ab ⁄ y-x+1= 2(-1+3) ⁄ 8(1/2)^2-3(1/2)(-2/3) ⁄ 3-(-1)+1) =$

4/2-(-1/5) = 20-(-2) ⁄ 10 = 22/10 = 11/5

f) $(x-y)^2+2z ⁄ ax+by = (-1-3)^2+2(2) ⁄ (1/2)(-1)+(-2/3)(3) = 16+4 ⁄ -1/2-2 = 20 ⁄ -5/2 = 20/1 \cdot (-2/5) = -40/5 = -8$

g) 1/x+1/y+1/z = 1/-1+1/3+1/2 = -6+2+3 ⁄ 6 = -1/6

h) (x-1)(y-1)(z-1) ⁄ (a-1)(b-1) = (-1-1)(3-1)(2-1) ⁄ (1/2-1)(-2/3-1) =

(-2)(2)(1) ⁄ (-1/2)(-5/3) = -4 ⁄ 5/6 = (-4/1)(6/5) = -24/5

2.11 Determine el grado de cada uno de los polinomios siguientes:

En la página 13, del libro que estamos estudiando, los autores nos dicen que *"El grado de un monomio es la suma de todos los exponentes de las variables de un término"*[1] (Comillas y cursiva, son nuestros). Y agregan: *"El grado de un polinomio es el mismo que el del término que tiene el coeficiente de mayor grado diferente de cero (...)"*[2] (Comillas, cursiva y el punto suspensivo son nuestros). Tomando como guía estas orientaciones tendremos que:

a) $3x^4-2x^3+x^2-5$ 0+4=4; 0+3=3; 2; 0; el grado es 4

b) $4xy^4-3x^3y^3$ 0+1+4=5; 0+3+3=6; el grado es 6

c) $x^5+y^5+z^5-5xyz$ 5; 5; 5; 0+1+1+1 =3; el grado es 5

d) $(\sqrt{3})xyz-5$ 0+1+1+1=3; 0; el grado es 3

e) -10^3 0; el grado es 0

f) $y^2-3y^5-y+2y^3-4$ 2; 0+5=5; 1; 0+3=3; 0; el grado es 5

2.12 Elimine los símbolos de agrupación y simplifique las expresiones resultantes combinando términos semejantes.

En la página 13, del libro que estamos estudiando, los autores nos dicen que la eliminación de los símbolos de agrupamientos está gobernada por las siguientes leyes: si un signo + precede a un símbolo de agrupamiento, éste puede quitarse sin afectar a los términos contenidos en el grupo; si un signo – precede a un símbolo de agrupamiento, éste puede ser retirado si los signos de los términos contenidos en el grupo son modificados; si el agrupamiento tiene más de un signo, los símbolos interiores se quitaran

[1] Spiegel y Moyer (2007): *Algebra superior*. McGraw-Hill, Serie Schaum, tercera edición, México, p. 13.
[2] Ibíd., p. 13.

primero.[3] Tomando como guía estas orientaciones tendremos entonces que:

a) $(x+3y-z)-(2y-x+3z)+(4z-3x+2y) = x+3y-z-2y+x-3z+4z-3x+2y = x+x-3x+3y-2y+2y-z-3z+4z = -x+3y+0 = 3y-x$

b) $3(x^2-2yz+y^2)-4(x^2-y^2-3yz)+x^2+y^2= 3x^2-6yz+3y^2-x^2+4y^2+12yz+x^2+y^2 = 0+6yz+8y^2 = 8y^2+6yz$

c) $3x+4y+3\{x-2(y-x)-y\} = 3x+4y+3\{x-2y+2x-y\} = 3x+4y+3x-6y+6x-3y = 12x-5y$

d) $3-\{2x-[1-(x+y)]+[x-2y]\} = 3-\{2x-[1-x-y]+[x-2y]\} = 3-\{2x-1+x+y+x-2y\} = 3-2x+1-x-y-x+2y = 3-4x+1+y= 4-4x+y = y-4x+4$

2.13 Sume las expresiones algebraicas en cada uno de los grupos siguientes:

a) $2x^2+y^2-x+y$, $3y^2+x-x^2$, $x-2y+x^2-4y^2$

En la página 13, del libro que estamos estudiando, los autores nos dicen que *“La suma de expresiones algebraicas se lleva a cabo combinando términos semejantes. Con el fin de realizar esta suma, las expresiones pueden colocarse en filas con los términos semejantes en la misma columna; enseguida se suman estas columnas”.*[4] (Comillas y cursiva son nuestras).

$$\begin{array}{llll} 2x^2 & +y^2 & -x & +y \\ -x^2 & +3y^2 & +x & \\ +x^2 & -4y^2 & +x & -2y \\ \hline 2x^2 & +0 & +x & -y \end{array}$$

Respuesta: $2x^2+x-y$

[3] Véase el libro citado, p. 13.
[4] Ibíd., p. 13.

b) $a^2-ab+2bc+3c^2$, $2ab+b^2-3bc-4c^2$, $ab-4bc+c^2-a^2$, $a^2+2c^2+5bc-2ab$

$$\begin{array}{lllll}
a^2 & & -ab & +2bc & +3c^2 \\
 & +b^2 & +2ab & -3bc & -4c^2 \\
-a^2 & & +ab & -4bc & +c^2 \\
a^2 & & -2ab & +5bc & +2c^2 \\
\hline
a^2 & +b^2 & +0 & +0 & +2c^2
\end{array}$$

Respuesta: $a^2+b^2+2c^2$

c) $2a^2bc-2acb^2+5c^2ab$, $4b^2ac+4bca^2-7ac^2b$, $4abc^2-3a^2bc-3ab^2c$, $b^2ac-abc^2-3a^2bc$

$$\begin{array}{lll}
2a^2bc & -2ab^2c & +5abc^2 \\
4a^2bc & +4ab^2c & -7abc^2 \\
-3a^2bc & -3ab^2c & +4abc^2 \\
-3a^2bc & +ab^2c & -abc^2 \\
\hline
0 & +0 & +abc^2
\end{array}$$

Respuesta: abc^2

2.14 Reste la segunda expresión de la primera en las expresiones siguientes:

a) $3xy-2yz+4zx$, $3zx+yz-2xy$

En la página 14, del libro que estamos estudiando, los autores nos dicen que *"La resta de dos expresiones algebraicas se lleva a cabo cambiando el signo de cada uno de los términos de la expresión que está siendo sustraída… y sumando este resultado a la otra expresión (…)"*[5] (Comillas, cursiva y el punto suspensivo son nuestros).

[5] Ibíd., p. 14.

$$\begin{array}{l} 3xy-2yz+4zx \\ \underline{2xy-yz-3zx} \\ 5xy-3yz+zx \end{array}$$

b) $4x^2+3y^2-6x+4y-2,\ 2x-y^2+3x^2-4y+3$

$$\begin{array}{rrrrr} 4x^2 & +3y^2 & -6x & +4y & -2 \\ -3x^2 & +y^2 & -2x & +4y & -3 \\ \hline x^2 & +4y^2 & -8x & +8y & -5 \end{array}$$

c) $r^3-3r^2s+4rs^2-s^3,\ 2s^3+3s^2r-2sr^2-3r^3$

$$\begin{array}{rrrr} r^3 & -3r^2s & +4rs^2 & -s^3 \\ 3r^3 & +2r^2s & -3rs^2 & -2s^3 \\ \hline 4r^3 & -r^2s & +rs^2 & -3s^3 \end{array}$$

2.15 Reste xy-3yz+4xz del doble de la suma de las expresiones siguientes:

3xy-4yz+2xz; 3yz-4zx-2xy.

2{(3xy-4yz+2xz)+(3yz-4zx-2xy)}-(xy-3yz+4xz) = 2{(3xy-4yz+2xz+3yz-4zx-2xy)}-xy+3yz-4xz = 2{xy-yz-2xz}-xy+3yz-4xz = 2xy-2yz-4xz-xy+3yz-4xz = xy+yz-8xz

2.16 Obtenga el producto de las expresiones algebraicas en cada uno de los grupos siguientes:

a) $4x^2y^5,\ -3x^3y^2$

En la página 14, del libro que estamos estudiando, los autores nos dicen que *"La multiplicación de expresiones algebraicas se lleva cabo multiplicando los términos contenidos en los factores de las expresiones"*.[6] (Comillas y cursiva son nuestras).

[6] Ibíd., p. 14.

$(4x^2y^5)(-3x^3y^2)= -12x^{2+3}y^{5+2}= -12x^5y^7$

b) $3abc^2, -2a^3b^2c^4, 6a^2b^2$

$(3abc^2)(-2a^3b^2c^4)(6a^2b^2)= (3)(-2)(6)a^{1+3+2}b^{1+2+2}c^{2+4}= -36a^6b^5c^6$

c) $-4x^2y, 3xy^2-4xy$

$(-4x^2y)(3xy^2-4xy)= (-4x^2y)(3xy^2)+(-4x^2y)(-4xy)= -12x^{2+1}y^{1+2}+16x^{2+1}y^{1+1}=$

$-12x^3y^3+16x^3y^2$

d) $r^2s+3rs^3-4rs+s^3, 2r^2s^4$

$(r^2s+3rs^3-4rs+s^3)(2r^2s^4) = 2r^{2+2}s^{1+4}+6r^{1+2}s^{3+4}-8r^{1+2}s^{1+4}+2r^2s^{3+4}= 2r^4s^5+6r^3s^7$

$-8r^3s^5+2r^2s^7$

e) $y-4, y+3$

$(y-4)(y+3)= y^2+3y-4y-12= y^2-y-12$

f) $y^2-4y+16, y+4$

$(y^2-4y+16)(y+4)= y^3+-4y^2+16y+4y^2-16y+64= y^3+64$

g) $x^3+x^2y+xy^2+y^3, x-y$

$(x^3+x^2y+xy^2+y^3)(x-y)= x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3-yx^3-x^2y^2-xy^3-y^4= x^4-y^4$

h) x^2+4x+8, x^2-4x+8

$(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)= x^4+4x^3+8x^2-4x^3-16x^2-32x+8x^2+32x+64= x^4+64$

i) $3r-s-t^2, 2s+r+3t^2$

$(3r-s-t^2)(2s+r+3t^2)= 6rs+3r^2+9rt^2-2s^2-rs-3st^2-2st^2-rt^2-3t^4= 3r^2+5rs++8rt^2-2s^2$

$-5st^2-3t^4$

j) $3-x-y,\ 2x+y+1,\ x-y$

$(3-x-y)(1+2x+y)=$ $(3+5x+2y-2x^2-3xy-y^2)(x-y)=$ $y^3-2y^2-3y+3x+5x^2-3xy-2x^3-x^2y+2xy^2$

2.17 Realice las divisiones que se indican:

En la página 15, del libro que estamos estudiando, los autores nos dicen que *"La división de expresiones algebraicas se logra utilizando las leyes de la división de los exponentes".*[7] (Comillas y cursiva son nuestras).

a) $-12x^4yz^3/3x^2y^4z= -4x^2y^{-3}z^2= -4x^2z^2/y^3$

b) $-18r^3s^2t/-4r^5st^2= 9(1/r^2)s(1/t)/2= 9s/2r^2t$

c) $4ab^3-3a^2bc+12a^3b^2c^4/-2ab^2c^3=-2bc^{-3}+3/2ab^{-1}c^{-2}-6a^2c=(-2b/c^3)+(3/2)(a/bc^2)-6a^2c.$

d) $4x^3-5x^2+3x-2/x+1= 4x^2-9x+12+(-14/x+1)$

2.18 Efectúe las divisiones que se indican:

a)
$$
\begin{array}{rr|l}
27s^3 & -64 & \underline{3s-4} \\
\underline{-27s^3+36s^2} & & 9s^2+12s+16 \\
+36s^2- & 64 & \\
\underline{-36s^2\ +48s} & & \\
+48s-64 & & \\
\underline{-48s+64} & & \\
0\ \ +0 & &
\end{array}
$$

Respuesta $9s^2+12s+16$

[7] Ibíd., p. 15.

b) Después reordenar:

$$
\begin{array}{llll}
x^4 & -x^2 & +1 & |\underline{-x+1} \\
\underline{-x^4+x^3} & & & \quad -x^3-x^2 \\
\quad x^3- x^2 & & & \\
\quad \underline{-x^3+x^2} & & & \\
\quad 0+0+1 & & &
\end{array}
$$

Respuesta $-x^3-x^2+(1/1-x)$

c) $$\frac{2y^3+y^5-3y-2}{y^2-3y+1}$$

Reordenando:

$$
\begin{array}{llllll}
y^5 & +2y^3 & -3y & -2 & | \underline{y^2-3y+1} \\
\underline{-y^5+3y^4 \quad -y^3} & & & & \quad y^3+3y^2+10y+27 \\
\quad 0 +3y^4+y^3 & & -3y & & \\
\quad \underline{-3y^4+9y^3 -3y^2} & & & & \\
\qquad +10y^3-3y^2- \quad 3y-2 & & & & \\
\qquad \underline{-10y^3+30y^2-10y} & & & & \\
\qquad\qquad 27y^2-13y-2 & & & & \\
\qquad\quad \underline{-27y^2+81y-27} & & & & \\
\qquad\qquad\quad 68y-29 & & & &
\end{array}
$$

Respuesta $y^3+3y^2+10y+27+(68y-29 / y^2-3y+1)$

d) $4x^3y+5x^2y^2+x^4+2xy^3/ x^2+2y^2+3xy$

Reordenando:

$$
\begin{array}{ll}
x^4+4x^3y+5x^2y^2+2xy^3 & | \underline{x^2+3xy+2y^2} \\
\underline{-x^4-3x^3y-2x^2y^2} & \qquad x^2+xy \\
\quad 0 +x^3y +3x^2y +2xy^3 & \\
\quad \underline{-x^3y -3x^2y \quad -2xy^3} & \\
\qquad 0 + \quad 0 + \quad 0 &
\end{array}
$$

Respuesta x^2+xy

2.19 Realice las operaciones indicadas y verifíquelas utilizando los valores x=1, y= 2.

a) $(x^4+x^2y^2+y^4)(y^4-x^2y^2+x^4)$; b) $\dfrac{x^4+xy^3+x^3y+2x^2y^2+y^4}{xy+x^2+y^2}$

Desarrollo:

a)
$$\begin{array}{l} x^4+x^2y^2+y^4 \\ \underline{x^4-x^2y^2+y^4} \\ x^8+x^6y^2+x^4y^4 \\ \quad -x^6y^2-x^4y^4\;\; -x^2y^6 \\ \underline{\qquad\qquad +x^4y^4+x^2y^6+y^8} \\ x^8+0+x^4y^4+0\;\;+y^8 \end{array}$$

Respuesta $x^8+x^4y^4+y^8$

Comprobación:

$(x^4+x^2y^2+y^4)(x^4-x^2y^2+y^4) = x^8+x^4y^4+y^8$

$(1^4+1^2\cdot2^2+2^4)(1^4-1^2\cdot2^2+2^4) = 1^8+1^4\cdot2^4+2^8$

$(1+4+16)(1-4+16) = 1+16+256$

$(21)(13) = 273$

$273 = 273$

b)
$$\begin{array}{l|l} x^4+x^3y+2x^2y^2+xy^3+y^4 & \underline{x^2+xy+y^2} \\ \underline{-x^4-x^3y-x^2y^2} & x^2+y^2 \\ \quad 0+0+x^2y^2+xy^3+y^4 & \\ \qquad \underline{-x^2y^2-xy^3\;\;-y^4} & \\ \qquad\; 0\quad +0\quad +0 & \end{array}$$

Respuesta x^2+y^2

Comprobación:

$x^4+x^3y+2x^2y^2+xy^3+y^4 \,/\, x^2+xy+y^2 = x^2+y^2$

$1^4+(1)^3(2)+2(1)^2(2)^2+(1)(2)^3+(2)^4 \,/\, (1)^2+(1)(2)+(2)^2 = (1)^2+(2)^2$

$1+2+8+8+16 \,/\, 1+2+4 = 1+4 = 35/7 = 5$

$5 = 5$

El físico y matemático británico Isaac Newton es la figura culminante de la revolución científica de los siglos XVI y XVII. Las investigaciones de Newton cubrieron un amplio abanico de fenómenos: realizó estudios de óptica, mecánica, matemáticas e incluso alquimia. En el terreno de la óptica, sus experimentos con el prisma le permitieron demostrar que la luz blanca se compone de radiaciones de colores cuya refractabilidad es distinta; sus teorías sobre la naturaleza de la luz, que no estuvieron exentas de controversia y ocasionaron disputas con el conocido científico Robert Hooke, permitieron fundamentar la óptica moderna. Igualmente importante fue la aportación de Newton a las matemáticas. A partir de las técnicas cartesianas para el trazado de tangentes, desarrolló un algoritmo de cálculo diferencial aplicable a las curvas algebraicas. Pero sus mayores logros tuvieron lugar en el campo de la física, en el que logró una síntesis de la física terrestre y la mecánica celeste que mantendría su vigencia hasta principios del siglo XX. Las siguientes fotografías ilustran diversos aspectos de su vida y de sus descubrimientos científicos. Haz clic en las miniaturas para ampliarlas.

3

RESOLUCIÓN DE ALGUNOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO IV DEL LIBRO DE *ÁLGEBRA SUPERIOR* DE SPIEGEL-MOYER

Introducción

Como se ve pasamos del capítulo 2, del libro *Álgebra superior* de Spiegel-Moyer, al capítulo 4, lo que quiere decir que obviamos el capítulo 3.

En el capítulo 4, denominado PRODUCTOS ESPECIALES, Spiegel-Moyer, exponen productos que se presentan con frecuencia en el campo matemático y que son de mucha importancia para los economistas.

Tales productos especiales, son: producto de un monomio y un binomio, producto de la suma y la diferencia de dos términos, cuadrado de un binomio, producto de dos binomios, cubo de un binomio, y cuadrado de un trinomio, así como productos que proporcionan respuestas de la forma $a^n \pm b^n$.

Desde la página 28 hasta la 30, Spiegel-Moyer, nos presentan problemas resueltos que debemos practicar con el fin de afrontar correctamente los problemas propuestos desde la página 30 hasta la 31.

Probables errores

En la página 28 pudimos detectar un error en el problema resuelto **4.1**, e); la expresión que va después del primer signo de igualdad, no es un producto, es una diferencia de términos, además $5x^3$ no se multiplica por 2, este 2 debe aparecer como exponente; igualmente en el f) hay diversos errores, el 3 debe ir como exponente después del primer signo de igualdad y en el resultado final faltó el signo (-); en el i) también hay errores: falta el signo (-) y el 3 va como exponente de x.

Asimismo, en la página 29 pudimos detectar, probablemente, un error en el problema resuelto **4.1**, s), en el cual se invita a usar el producto especial V, cuando debiera ser el IV (véase la página 27, de *Álgebra Superior*, donde se encuentran las distintas formas de productos especiales); en el **4.2**, c), después del primer signo de igualdad el signo - no va en el exponente.

Problemas propuestos (página 30)

4.5 Encuentre cada uno de los productos siguientes:

a) $2xy(3x^2y-4y^3)$, aquí tenemos el producto de un monomio y un binomio:
$a(c+d) = ac+ad$, por tanto, tendremos,

$(2xy)(3x^2y)-(2xy)(4y^3) = 6x^3y^2-8xy^4$

b) $3x^2y^3(2xy-x-2y)= (3x^2y^3)(2xy)-(3x^2y^3)(x)-(3x^2y^3)(2y) = 6x^3y^4-3x^3y^3-6x^2y^4$

c) $(2st^3-4rs^2+3s^3t)(5rst^2) = (2st^3)(5rst^2)- (4rs^2)(5rst^2) +(3s^3t)(5rst^2) = 10rs^2t^5-20r^2s^3t^2+15rs^4t^3$

d) $(3a+5b)(3a-5b)$, aquí tenemos el producto de la suma y la diferencia de dos términos: $(a+b)(a-b) = a^2-b^2-ab+ab= a^2-b^2$, por tanto,

$(3a+5b)(3a-5b) = (3a)^2-(5b)^2 = 9a^2-25b^2$

e) $(5xy+4)(5xy-4) = (5xy)^2-(4)^2 = 25x^2y^2-16$

f) $(2-5y^2)(2+5y^2) = (2)^2-(5y^2)^2 = 4-25y^4$

g) $(3a+5a^2b)(3a-5a^2b) = (3a)^2-(5a^2b)^2 = 9a^2-25a^4b^2$

h) $(x+6)^2$, aquí tenemos el cuadrado de un binomio: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$;$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$, luego,

$(x+6)^2 = x^2+2(6)(x)+6^2 = x^2+12x+36$

i) $(y+3x)^2 = y^2+2(y)(3x)+(3x)^2 = y^2+6xy+9x^2$

j) $(z-4\ )^2 = z^2-2(z)(4)+(4)^2 = z^2-8z+16$

k) $(3-2x^2)^2 = 3^2-2(3)(2x^2)+(2x^2)^2 = 9-12x^2+4x^4$

l) $(x^2y-2z)^2 = (x^2y)^2-2(x^2y)(2z)+(2z)^2 = x^4y^2-4x^2yz+4z^2$

m) $(x+2)(x+4)$, aquí tenemos el producto de dos binomios: $(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$, luego,

$(x+2)(x+4) = (x)(x)+(2+4)(x)+(2)(4) = x^2+6x+8$

n) $(x-4)(x+7) = (x)(x)+(-4+7)(x)+(-4)(7) = x^2+3x-28$

o) $(y+3)(y-5) = (y)(y)+(3-5)y+(3)(-5) = y^2-2y-15$

p) $(xy+6)(xy-4) = (xy)(xy)+(6-4)(xy)+(6)(-4) = x^2y^2+(2)(xy)-24 = x^2y^2+2xy-24$

q) $(2x-3)(4x+1)$, aquí usamos la siguiente expresión como guía: $(ax+b)(cx+d)=$

$acx^2+(ad+bc)x+bd$, luego,

$(2x-3)(4x+1)= (2x)(4x)+[(2)(1)+(-3)(4)]x+(-3)(1)= 8x^2+(2-12)x-3= 8x^2+2x-12x-3 = 8x^2-10x-3$

r) $(4+3r)(2-r)$, aquí usamos la siguiente expresión como guía:

$(a+b)(c+d) = ac+bc+ad+bd$, luego,

$(4)(2)+(3r)(2)+(4)(-r)+(3r)(-r) = 8+6r-4r-3r^2 = 8+2r-3r^2$

s) $(5x+3y)(2x-3y) = (5x)(2x)+3y(2x)+5x(-3y)+3y(-3y) = 10x^2+6xy-15xy-9y^2 = 10x^2-9xy-9y^2$

t) $(2t^2+s)(3t^2+4s) = (2t^2)(3t^2)+(s)(3t^2)+(2t^2)(4s) +(s)(4s) = 6t^4+3st^2+8st^2+4s^2 = 6t^4+11t^2s+ 4s^2$

u) $(x^2+4y)(2x^2y-y^2) = x^2(2x^2y)+4y(2x^2y)+x^2(-y^2)+4y(-y^2) = 2x^4y+8x^2y^2-x^2y^2-4y^3 = 2x^4y+7x^2y^2-4y^3$

v) $x(2x-3)(3x+4) = x(2x)(3x)+x(-3)(3x)+x(2x)(4)+x(-3)(4) = 6x^3-9x^2+8x^2-12x = 6x^3-x^2-12x$

w) $(r+s-1)(r+s+1)= (r+s)^2-(1)^2 = r^2+2rs+s^2-1$

x) $(x-2y+z)(x-2y-z) = (x-2y)^2-(z)^2 = x^2-2x2y+(2y)^2-z^2= x^2-4xy+4y^2-z^2$

4.6

a) $(2x+1)^3 = (2x)^3+3(2x)^2(1)+3(2x)(1)^2+(1)^3 = 8x^3+12x^2+6x+1$

b) $(3x+2y)^3 = (3x)^3+3(3x)^2(2y)+3(3x)(2y)^2+(2y)^3 = 27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3$

c) $(r-2s)^3 = (r)^3-3(r)^2(2s)+3(r)(2s)^2-(2s)^3 = r^3-6r^2s+12rs^2-8s^3$

d) $(x^2-1)^3 = (x^2)^3-3(x^2)^2(1)+3(x^2)(1)^2-(1)^3 = x^6-3x^4+3x^2-1$

e) $(ab^2-2b)^3 = (ab^2)^3-3(ab^2)^2(2b)+3(ab^2)(2b)^2-(2b)^3 = a^3b^6-6a^2b^5+12ab^4-8b^3$

f) $(t-2)(t^2+2t+4)$, aquí aplicamos el producto especial VII, que se expresa así:

$(a-b)(a^2-ab+b^2)= a^3-b^3$, por tanto,

$(t-2)(t^2+2t+4) = (t)^3-(2)^3 = t^3-8$

g) $(z-x)(x^2+xz+z^2) = z^3-x^3$

h) $(x+3y)(x^2-3xy+9y^2) = (x)^3+(3y)^3 = x^3+27y^3$

4.7

a) $(x-2y+z)^2= (x)^2+(-2y)^2+(z)^2+2(x)(-2y)+2(x)(z)+2(-2y)(z)= x^2+4y^2+z^2-4xy+2xz-4yz = x^2-4xy+4y^2+2zx-4yz+z^2$

b) $(s-1)(s^3+s^2+s+1) = (s)(s^3+s^2+s+1)- (1)(s^3+s^2+s+1) = s^4+s^3+s^2+s- s^3-s^2-s-1= s^4-1$

c) $(1+t^2)(1-t^2+t^4-t^6) = 1(1-t^2+t^4-t^6)+t^2(1-t^2+t^4-t^6) = 1-t^2+t^4-t^6+t^2-t^4+t^6-t^8 = 1-t^8$

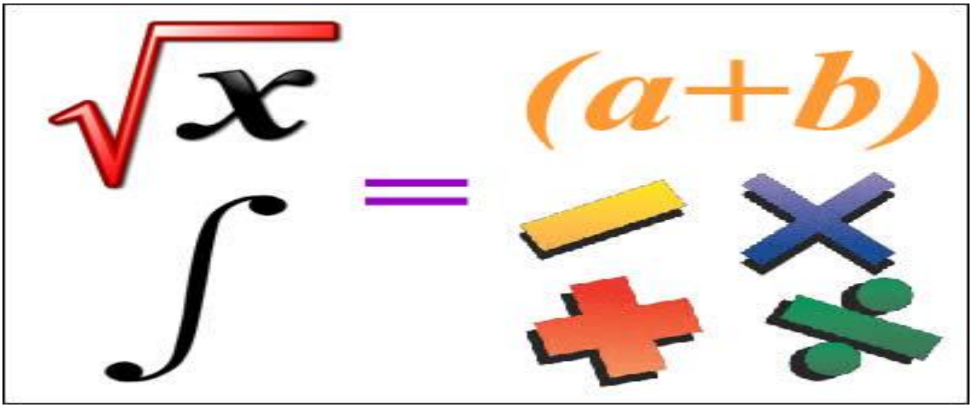
d) $(3x+2y)^2(3x-2y)^2= [(3x)^2+2(3x)(2y)+(2y)^2][(3x)^2-2(3x)(2y)+(2y)^2]=$

$(9x^2+12xy+4y^2)(9x^2-12xy+4y^2)= [(3x+2y)(3x-2y)]^2= [3x(3x-2y)+2y(3x-2y)]^2= [9x^2-6xy+6xy-4y^2]^2= (9x^2-4y^2)^2 = (9x^2)^2-2(9x^2)(4y^2)+(4y^2)^2 = 81x^4-72x^2y^2+16y^4$

e) $(x^2+2x+1)^2(x^2-2x+1)^2 = (x^2+1+2x)^2(x^2+1-2x)^2 = [(x^2+1)^2-4x^2]^2= (x^4+2x^2+1-4x^2)^2 = (x^4-2x^2+1)^2= (x^4)^2+(-2x^2)^2 +1^2 +2(x^4)(-2x^2)+2x^4(1) +2(-2x^2)(1)= x^8+4x^{4+1}-4x^6+2x^4-4x^2 = x^8-4x^6+6x^4-4x^2+1$

f) $(y-1)^3(y+1)^3=[(y-1)(y+1)]^3 = (y^2-1)^3= (y^2)^3-3(y^2)^2(1)+3y^2(1)^2 -1^3= y^6-3y^4+3y^2-1$

g) $(u+2)(u-2)(u^2+4)(u^4+16) = (u^2-4)(u^2+4)(u^4+16) = (u^4-16) (u^4+16) = u^8-256$



4

RESOLUCIÓN DE ALGUNOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO V DEL LIBRO *ÁLGEBRA SUPERIOR* DE SPIEGEL-MOYER

Introducción

El capítulo 5 del libro de Spiegel-Moyer, *Álgebra Superior*, se llama FACTORIZACIÓN.

En este capítulo 5, Spiegel-Moyer, tratan el importante tema de la factorización. En una primera parte orientan, de una manera ejemplificada, lo que es la factorización, los procedimientos de factorización, el cálculo del máximo común divisor y el cálculo del mínimo común múltiplo; en una segunda parte exponen problemas resueltos sobre la temática en cuestión y finalmente, en una tercera parte, presentan los problemas propuestos.

Probables errores

En **EJEMPLOS 5.1**, d), página 32, hay una incorrección, antes del término $8y^2$, se debe colocar el signo -; en ejemplos **5.4**, b), después del termino $9x^2$, no es posible que se coloque el signo de igualdad. Finalmente, en la página 40, está la indicación **5.17**, debe ser **5.19**.

Problemas propuestos (página 39)

Descomponga en factores las expresiones siguientes.

5.13

a) $3x^2y^4+6x^3y^3= 3x^2y^3(y+2x)$

b) $12s^2t^2–6s^5t^4+4s^4t = 2s^2t(6t–3s^3t^3+2s^2)$

c) $2x^2yz–4xyz^2+8xy^2z^3= 2xyz(x–2z+4yz^2)$

d) $4y^2–100= 4(y^2-25)= 4(y+5)(y-5)$

e) $1–a^4= 1^2–(a^2)^2 = (1+a^2)(1+a)(1–a)$

f) $64x–x^3 = x(64-x^2)= x(8^2-x^2)= x(8+x)(8–x)$

g) $8x^4–128= 8(x^4-16)= 8[(x^2)^2-(4)^2]= 8(x^2+4)(x+2)(x-2)$

h) $18x^3y–8xy^3= 2xy(9x^2–4y^2)= 2xy[(3x)^2–(2y)^2]= 2xy(3x+2y)(3x–2y)$

i) $(2x+y)^2–(3y–z)^2= [(2x+y)+(3y-z)] [(2x+y)–(3y–z)]= (2x+y+3y-z)(2x+y–3y+z)= (2x+4y–z)(2x–2y+z)$

k) $x^2 + 4x + 4$, Trinomio cuadrado perfecto

$x^2 + (2)(x)(2) + (2)^2= (x + 2)^2$

l) $4–12y+9y^2$ Trinomio cuadrado perfecto

$(2)^2–(2)(2)(3y) + (3y)^2 = (2–3y)^2$

m) $x^2y^2 – 8xy + 16$ Trinomio cuadrado perfecto

$(xy)^2 – (2)(xy)(4) + (4)^2 = (xy – 4)^2$

n) $4x^3y + 12x^2y^2 + 9xy^3$ Trinomio cuadrado perfecto

$xy(4x^2 + 12xy + 9y^2)= xy(2x+3y)^2$

o) $3a^4 + 6a^2b^2 + 3b^4$ Trinomio cuadrado perfecto

$3(a^4+2a^2b^2+b^4)= 3[(a^2)^2 + 2(ab)^2 + (b^2)^2]$, luego: $3(a^2 + b^2)^2$

p) $(m^2–n^2)^2 + 8(m^2–n^2) + 16 = (m^2–n^2)^2 + 8(m^2–n^2) + (4)^2 = (m^2–n^2+4)^2$

q) $x^2 + 7x + 12= (x+3) (x+4)$ Otro trinomio

r) $y^2 – 4y – 5 = (y–5) (y+1)$ Otro trinomio

s) $x^2 – 8xy + 15y^2 = (x–3y) (x–5y)$ Otro trinomio

t) $2z^3 + 10z^2 – 28z = 2z(z^2+5z–14) = 2z(z+7)(z–2)$

u) $15 + 2x-x^2 = x^2-2x-15= (x-5)(x+3)$

5.14

a) $m^4–4m^2–21= (m^2)^2–(2m)^2–21 = (m^2–7)(m^2+3)$

b) $a^4–20a^2+64= (a^2)^2–20a^2+8^2 = (a^2–4)(a^2–16)= (a+2)(a–2)(a+4)(a–4)$

c) $4s^4t–4s^3t^2–24s^2t^3= 4s^2t(s^2–st–6t^2)= 4s^2t(s–3t) (s+2t)$

d) $x^{2m+4}+5x^{m+4}-50x^4= x^4(x^{2m}+5x^m–50x)= x^4(x^m-5)(x^m+10)$

f) $3y^2–11y+6 = (3y–2) (y–3)$

g) $5m^3–3m^2–2m = m(5m^2–3m–2) = m(5m+2)(m–1)$

5.15

a) y^3+27, esta es una suma de dos cubos; usamos esta fórmula:

$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$. Sustituimos:

$y^3+27 = (y)^3+(3)^3 = (y+3) [(y)^2–(y)(3)+(3)^2] =(y+3) (y^2–3y+9)$

b) $x^3–1$, usamos esta fórmula: $a^3–b^3 = (a–b)(a^2+ab+b^2)$. Sustituimos:

$x^3–1 = (x–1)[(x)^2+(x)(1)+(1)^2] = (x–1)(x^2+x+1)$

c) x^3y^3+8, fórmula usada en a), por tanto:

$x^3y^3+8 = (xy)^3+(2)^3 = (xy+2)[(xy)^2-(xy)(2)+2^2] = (xy+2)(x^2y^2–2xy+4)$

d) $8z^4–27z^7$, fórmula usada en b):

$8z^4–27z^7 = (2)^3z^4–(3)^3z^7 = z^4(2–3z)[(2)^2+(2)(3z)+(3z)^2] = z^4(2–3z)(4+6z+9z^2)$

f) $m^9–n^9 = (m^3)^3–(n^3)^3 = (m^3–n^3[(m^3)^2+(m^3)(n^3)+(n^3)^2] = (m^3–n^3)(m^6+m^3n^3+n^6) = (m–n)(m^2+mn+n^2)(m^6+m^3n^3+n^6)$

g) $y^6+1 = (y^2)^3+1 = (y^2+1)[(y^2)^2–(y^2)(1)+(1)^2] = (y^2+1)(y^4–y^2+1)$

h) $(x–2)^3+(y+1)^3 = (x–2+y+1) = (x+y–1)[(x–2)^2–(x–2)(y+1)+(y+1)^2] =$

$(x+y–1)[x^2–2(x)(2)+2^2–(x–2)(y+1)+(y^2+2y+1)] = (x+y–1)(x^2–4x+4–$

$xy+2y–x+2+y^2+2y+1) = (x+y–1)(x^2–xy+y^2–5x+4y+7)$

5.16

a) $xy+3y–2x–6$, aquí tenemos un problema de agrupamiento de términos,

tipo $ac+bc+ad+bd = c(a+b)+d(a+b) = (a+b)(c+d)$, por tanto: $xy+3y–2x–6=$

$xy+3y-2x-6= y(x+3)+(-2)(x+3) = (x+3)(y–2)$

b) $2pr–ps+6qr–3qs = p(2r–s)+3q(2r–s) = (2r–s)(p+3q)$

c) $ax^2+bx–ax–b = ax^2–ax+bx–b= ax(x–1)+b(x–1)= (ax+b)(x–1)$

d) $x^3–xy^2–x^2y+y^3= x^3–x^2y–xy^2+y^3= x^2(x–y)–y^2(x–y)= (x–y)(x^2–y^2)$

5.19 Encuentre el MCD y el MCM de cada grupo de polinomios.

a) $16y^2z^4$, $24y^3z^2$

Primer paso: encontramos factores primos

$16y^2z^4 = 2^4y^2z^4$, $24y^3z^2 = 2^3\cdot 3y^3z^2$

Segundo paso: observamos cuál es el polinomio de mayor grado, es decir,

2+4=6; 3+2=5; 6>5, luego el primero posee el grado más elevado.

Tercer paso: seleccionamos el factor que elevado a la potencia del menor valor, en este caso, $2^3=8$, por tanto MCD = $2^3y^2z^2 = 8y^2z^2$. Para calcular el MCM, hacemos lo contrario a lo establecido en los puntos 2 y 3. Por tanto: MCM = $2^4\cdot 3y^3z^4 = 48y^3z^4$

b) $9r^3s^2t^5$, $12r^2s^4t^3$, $21r^5s^2$

$9r^3s^2t^5 = 3^2r^3s^2t^5$,
$12r^2s^4t^3 = 2^2\cdot 3r^2s^4t^3$
$21r^5s^2 = 3.7r^5s^2$
MCD = $3r^2s^2$

El dominio de las fracciones es clave para el entendimiento de problemas que se verifican en la economía, con cierto contenido menos sencillo.

5

RESOLUCIÓN DE ALGUNOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO VI DEL LIBRO *ÁLGEBRA SUPERIOR* DE SPIEGEL-MOYER

Introducción

El capítulo 6 del libro de Spiegel-Moyer, *Álgebra Superior*, se llama FRACCIONES.

En este capítulo, Spiegel-Moyer, abordan las fracciones algebraicas racionales. Enfatizan en establecer claramente las reglas para el cálculo con fracciones algebraicas, precisan las operaciones con fracciones algebraicas, asimismo analizan las fracciones complejas y exponen una gran cantidad de problemas resueltos, finalmente presentan los problemas propuestos.

Problemas propuestos (página 46)

Demuestre que:

6.6

En este apartado estamos ante la simplificación de una fracción que consiste, según dicen nuestros autores, en transformarla en otra equivalente cuyo numerador y denominador no tengan más factores comunes.[8]

a) $24x^3y^2/18xy^3 = 4x^2/3y$

[8] Ibíd., p. 41.

$3.8.x.x.x.y.y/3.6.x.y.y.y= 4x^2/3y$.

b) $36xy^4z^2/-15x^4y^3z$

$36xy^4z^2/-15x^4y^3z= -12yx/5x^3$

$=3.12.x.y.y.y.y.z.z/-3.5.x.x.x.x.y.y.y.z= -12yz/5x^3$

c) $5a^2-10ab/a-2b= 5a$
$5a(a-2b)/(a-2b)= (5ad)$ $4x^2-16/x^2-2x= 4(x+2)/x$

$4x^2-16/x^2-2x= 4(x^2-4)/x(x-2)= 4(x+2)(x-2)/x(x-2)= 4(x+2)/x$

6.7

a) $(8xyz^2/3x^3y^2z)(9xy^2z/4xz^5)= 6y/x^2z^3$, multiplicamos los numeradores y denominadores de ambas fracciones y luego simplificamos.

$(8xyz^2/3x^3y^2z)(9xy^2z/4xz^5)= 72x^2y^3z^3/12x^4y^2z^6= 6y/x^2z^3$

b) $(xy^2/2x-2y)(x^2-y^2/x^3y^2)= x+y/2x^2$

$(xy^2/2x-2y)(x^2-y^2/x^3y^2)= (xy^2/2(x-y)(x+y)(x-y/x^3y^2)$

$= (xy^2/2)(x+y/x^3y^2)= xy^2(x+y)/2x^3y^2= x+y/2x^2$

c) $(x^2+3x)/(4x^2-4)(2x^2+2x)/(x^2-9)(x^2-4x+3)/x^2)= 1/2$

$(x^2+3x)/(4x^2-4)(2x^2+2x)/(x^2-9)(x^2-4x+3)/x^2)$

$= (x(x+3)/4(x^2-1)(2x(x+1)/(x+3)(x-3)(x-1)(x-3)/x^2$

$= x(x+3)/4(x+1)(x-1)(2x(x+1)/(x+3)(x-3)(x-1)(x-3)/x^2)$

$= (x/4)(2x)(1/x^2)= 2x^2/4x^2= 1/2$
d) $(x^2-4y^2/3xy+3x)(2y^2-2/2y^2+xy-x^2$

$= -2(x+2y)(y-1)/3x(x+y)(x^2-4y^2/3xy+3x)(2y^2-2/2y^2+xy-x^2$

$= (x+2y)(x-2y)/3x(y+1)(2(y^2-1)/(2y-x)(y+x)$

$= (x+2y)(x-2y)/3x(y+1)(2(y+1)(y-1)/(2y-x)(y+x)$

$= -2(x+2y)(y-1)/3x(x+y)$, después de simplificar y multiplicar por -1.

e) $(y^2-y-6/y^2-2y+1)(y^2+3y-4/9y-y^3)= -(y+2)(y+4)/y(y-1)(y+3)$

Procedimiento: factorizar, multiplicar por -1 y simplificar.

$y^2-y-6= (y-3)(y+2)$

$y^2-2y+1= (y-1)^2$

$y^2+3y-4= (y+4)(y-1)$

$9y-y^3= y(9-y^2)= y(3+y)(3-y)$

por tanto,

$(y-3)(y+2)/(y-1)^2(y+4)(y-1)/y(3+y)(3-y)= (y-3)(y+2)/(y-1)(y+4)/y(3+y)(3-y)= -(y+2)(y+4)/y(y-1)(y+3)$.

6.8

a) $(3x/8y)/(9x/16y)= 2/3$

$(3x/8y)/(9x/16y)= (3x/8y)(16y/9x)= 48xy/72xy= 2/3$

b) $(24x^3y^2/5z^2)/(8x^2y^3/15z^4)= 9xz^2/y$

$(24x^3y^2/5z^2)(15z^4/8x^2y^3)= (360x^3y^2z^4)/40x^4y^3= 9xz^2/y$

c) $(x^2-4y^2/x^2+xy)/(x^2-xy-6y^2/y^2+xy)= y(x-2y)/x(x-3y)$

$(x^2-4y^2/x^2+xy)(y^2+xy/(x^2-xy-6y^2)= (x^2+xy)(y^2+xy)/(x^2-4y^2)(x^2-xy-6y^2)=$

$y(x-2y)/x(x-3y)$

6.9

a) $6x^2-x-2/(3x-2/2x+1)= (2x+1)^2$

$6x^2-x-2= (3x-2)(2x+1)(3x-2)(2x+1)(2x+1/3x-2)= (2x+1)(2x+1)= (2x+1)^2$

b) $(y^2-3y+2/y^2+4y-21)/(4-4y+y^2/9-y^2=$ **-(**$y-1)(y+3)/(y-2)(y+7)(y^2-3y+2/y^2+4y-21)(9-y^2/4-4y+y^2)=$ $(y-2)(y-1)/(y+7)(y-3)/(y-2)(y-2)/(3+y)(3-y)=$ $(y-2)(y-1)/(y+7)(y-3).(3+y)(3-y)/(y-2)(y-2)=$ $(y-1)(3+y)(3-y)/(y+7)(y-3)(y-2)= -(y-1)(y+3)/(y-2)(y+7)$

c) **(**$x^2y+xy^2/x-y)/(x+y)= xy/x-y$

Procedimiento: factorizar y tachar términos semejantes.

($x^2y+xy^2/x-y)(1/x+y)$**(**$x^2y+xy^2/x-y)(1/x+y)=$ $(xy(x+y)/x-y)(1/x+y)=$ $xy/x-y)$

6.10

a) $(2x/3)-(x/2)= x/6$

$[(2x/3)-(x/2)]/6= (4x-3x)/6= x/6$

b) $(4/3x)-(5/4x)= 1/12x$

$[(4/3x)-(5/4x)]/12x= (16-15)/12x= 1/12x$

c) $(3/2y^2)-(8/y)= (3-16y)/2y^2$

$[(3/2y^2)-(8/y)]/2y^2= (3-16y)/2y^2$

d) $(x+y^2/x^2)+(x-1/x)-1=$ $y^2/x^2[(x+y^2/x^2)+(x-1/x)-1]/x^2=$ $(x+y^2+x^2-x-x^2)/x^2= y^2/x^2$

e) $(1/x+2)+(1/x-2)-(x/x^2-4)=$ $x/x^2-4[(1/x+2)+(1/x-2)-(x/x^2-4)]/x^2-4=$ $x-2+x+2-x/x-4= x/x^2-4$

6.11

a) $(x+y)/(1/x+1/y)= xy$

Procedimiento: trabajar el denominador, sustituir y simplificar.

$(1/x+1/y)/xy= y+x/xy$, luego,

$(x+y)/(y+x/xy)= (x+y)(xy)/y+x= xy$

b) $(2+1/x)/2x^2+x)= 1/x^2$

Trabajar el numerador:

$(2+1/x)/x= 2x+1/x$

Factorizar el denominador:

$2x^2+x= x(2x+1)$

Sustituir y simplificar:

$(2x+1/x)/x(2x+1)= (2x+1/x)(1/x(2x+1)= (1/x)(1/x)= 1/x^2$

c) $(y+2y/y-2)/(1+4/y^2-4)= y+2$

Trabajar el numerador:

$(y+2y/y-2)= (y(y-2)+2y)/y-2= (y^2-2y+2y)/y-2= y^2/y-2$

Trabajar el denominador:

$(1+4/y^2-4)= (y^2-4+4)/y^2-4= y^2/y-4= (y+2y/y-2)= y^2/(y+2)(y-2)$

Replantear y simplificar:

$(y^2/y-2)/(y^2/(y+2)(y-2)= (y^2/y-2)(y+2)(y-2)/y^2= y+2$

d) $(x+1/x-1)-(x-1/x+1)/1/x+1)+1/x-1)= 2$

Trabajar el numerador:

$(x+1/x-1)-(x-1/x+1)= (x+1)(x+1)-x-1)(x-1)/(x-1)(x+1)= (x+1)^2-(x-1)^2/x^2-1^2= (x+1)^2-(x-1)^2/x^2-1$

Trabajar el denominador:

$1/x+1+1/x-1= (x-1)+(x+1)/(x+1)(x-1)= (x-1)+(x+1)/(x^2-1^2)= (x-1)+(x+1)/(x^2-1)$

Replantear y simplificar:

$(x+1)^2-(x-1)^2/(x^2-1)(x^2-1)/(x-1)+(x+1)= (x+1)^2-(x-1)^2/(x-1)+(x+1)= [(x^2+2x+1)-(x^2-2x+1)]/x-1+x+1= x^2+2x+1-x^2+2x-1/x-1+x+1= 4x/2x= 2$

6

RESOLUCIÓN DE ALGUNOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 7 DEL LIBRO *ÁLGEBRA SUPERIOR* DE SPIEGEL-MOYER

Introducción

El capítulo 7, llamado Exponentes, aparece en la página 48 de *Álgebra superior* de Spiegel-Moyer y abarca los siguientes subtemas: exponente entero positivo, exponente entero negativo, exponentes racionales, leyes generales de los exponentes y notación científica. Asimismo despliega una gran cantidad de problemas resueltos y de problemas propuestos.

Probables errores

En la página 50, **EJEMPLOS 7.15**, **b)**, el exponente debe ser -2 En los problemas resueltos el d) correspondiente a la sección 7.3, denominada "Exponentes racionales", página 51, la respuesta, 1/4, debe quedar fuera del radical; el l) correspondiente a la sección **7.6** denominada "Leyes generales de los exponentes", página 51, arroja un resultado errado: $10^{-0.7}$. Igualmente el a) de la sección **7.9**, página 52, tiene un error: $(ab)^p = a^p b^b$, debe ser: $a^p b^p$.

En los problemas propuestos pudimos comprobar algunas imprecisiones; el i) de la sección **7.20**, denominada "Evalúe cada una de las expresiones siguientes", página 56, presenta el número 4, como parte de la expresión subradical; mas, su rol allí no se comprende bien, por tanto el resultado que se presenta en la página 57, se torna confuso.

Problemas propuestos (página 56)

Evalúe cada una de las expresiones siguientes:

7.19

a) $3^4 = 3.3.3.3 = 81$

b) $(-2x)^3 = (-2)^3(x)^3 = -8x^3$

c) $(3y/4)^3 = (3y)^3/(4)^3 = (3)^3(y)^3/4.4.4 = 27y^3/64$

d) $4^{-3} = 1/4^3 = 1/4.4.4 = 1/64$

e) $(-4x)^{-2} = 1/(-4x)^2 = 1/(-4)^2x^2 = 1/16x^2$

f) $(2y^{-1})^{-1} = 1/(2y^{-1}) = 1/2y^{-1} = y/2$

g) $$\frac{3^{-1}x^2y^{-4}}{2^{-2}x^{-3}y^3} = \frac{x^2 \cdot x^3 \cdot 2^2}{3y^4y^3} = \frac{2^2 \cdot x^2 \cdot x^3}{3y^3y^4} = \frac{4x^5}{3y^7}$$

h) $(16)^{1/4} = \sqrt[4]{16} = 2$

i) $8^{-2/3}(-8)^{2/3}/8^{1/3} = -8^{2/3}/8^{2/3}(8^{1/3}) = -8^{2/3}/8^{2/3+1/3} = (\sqrt[3]{64})/8 = 4/8 = 1/2$

j) $(-a^3b^3)^{-2/3} = 1/(-a^3b^3)^{2/3} = 1/(\sqrt[3]{a^6}b^6) = 1/(a^6b^6)^{1/3} = 1/a^{6(1/3)}b^{6(1/3)} = 1/a^2b^2$

k) $-3(-1)^{-1/5}(4)^{-1/2} = -3/(-1)^{1/5}(4)^{1/2} = -3/(-1)(2) = -3/-2 = 3/2$

l) $(10^3)^0 = 10^0 = 1$

m) $(x-y)^0 [(x-y)^4]^{-1/2} = (1)/[(x-y)^4]^{1/2} = 1/(x-y)^2$

n) $x^y \cdot x^{4y} = x^{y+4y} = x^{5y}$

o) $3y^{2/3} \cdot y^{4/3} = 3y^{2/3+4/3} = 3y^{6/3} = 3y^2$

p) $(4 \cdot 10^3)(3 \cdot 10^{-5})(6 \cdot 10^4) = 7{,}200$

7.20

a) $2^3.2^{-2}.2^4/2^{-1}.2^0.2^{-3}= 2^3.2^4.2.2^3/2^2.2^0= 2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2/2.2.1= 2^9$

b) $10^{x+y}.10^{y-x}.10^{y+1}/10^{y+1}.10^{2y+1}= 10^{y+y+y-x+y+1}/10^{y+1+2y+1}= 10^{3y+1}/10^{3y+2}=$

$10^{3y+1}.10^{-3y-2}= 10^{3y+1-3y-2}= 10^{-1}= 1/10$

c) $3^{1/2}.3^{-2/3}/3^{-1/2}.3^{-1/3}= 3^{1/2}.3^{1/2}/3^{1/3}.3^{1/3}=3/3= 1$

d) $(x+y)^{2/3}(x+y)^{-1/6}/[(x+y)^2]^{1/4}= (x+y)^{2/3-1/6}/(x+y)^{1/2}= (x+y)^{1/2}/(x+y)^{1/2}= 1$

e) $(10^2)^{-3}(10^3)^{1/6}/\sqrt{}10.(10^4)^{-1/2}= 10^{-6}.10^{1/2}/10^{1/2}.10^{-2}= 10^{-6}.10^2= 10^{-4}= 1/10^4= 10^{-4}$

f) $[(x^{-1})^{-2}]^{-3}= (x^2)^{-3}= x^{-6}= 1/x^6= x^{-6}$

g) $4^{-1/2}a^{2/3}b^{-1/6}c^{-3/2}/8^{2/3}a^{-1/3}b^{-2/3}c^{5/2}= a^{2/3}.a^{1/3}.b^{2/3}.b^{-1/6}/c^{3/2}.c^{5/2}.4^{1/2}.8^{2/3}= a^{2/3+1/3}.b^{2/3-1/6}/c^{3/2+5/2}.4^{1/2}.8^{2/3}= a.b^{1/2}/c^4.4^{1/2}.8^{2/3}= a\sqrt{b}/c^4.\sqrt{4}.\sqrt[3]{8^2}= a\sqrt{b}/c^4.2.4= a\sqrt{b}/8c^4$

h) $(2^{-8}.3^4/5^{-4})^{-1/4}= (3^4.5^4/2^8)^{-1/4}= 4/15$

7.21

a) $\sqrt{(27^{-2/3})}+5^{2/3}\cdot5^{1/3} = (27^{-2/3})^{1/2}+5^{2/3}\cdot5^{1/3} = 27^{-1/3}+5 = 1/27^{1/3}+5= 1/(\sqrt[3]{27} + 5= 1/3+5= 16/3$

b) $4(1/2)^0+2^{-1}-16^{-1/2}\cdot4\cdot3^0 = 4(1)+1/2-1/16^{1/2}\cdot4(1) = (4+1/2-1/(\sqrt{16})(4)= 4+1/2-(1/4)(4)= 4+1/2-1= 4-1/2= 8-1/2= 7/2$

c) $8^{2/3}+3^{-2}-1/9(10)^0 = 8^{2/3}+1/3^2-1/9 = \sqrt[3]{64}+1/9-1/9 = 4$

d) $27^{2/3}-3(3x)^0+25^{1/2} = \sqrt[3]{729}-3+5 = \sqrt[3]{729}+2 = 9+2 = 11$

e) $8^{2/3}.16^{-3/4}.2^{0}-8^{-2/3}= \sqrt[3]{(64)}/16^{3/4}-1/8^{2/3}= 4/\sqrt[4]{(4{,}096)}-1/4= 4/8-1/4= 1/4$

f) $\sqrt[3]{(x-2)^{-2}}$ cuando x= -6

$\sqrt[3]{(x-2)^{-2}}= \sqrt[3]{[1/(x-2)^{2}]}= \sqrt[3]{[1/(x.x-2.x.2+2.2)]}= \sqrt[3]{[1/x^{2}-4x+4]}=$ $\sqrt[3]{[1/(-6)^{2}-}$

$4(-6)+4]= \sqrt[3]{(1/36+24+4)}= \sqrt[3]{(1/64)}= 1/4$

g) $x^{3/2}+4x^{-1}-5x^{0}$ cuando x= 4

$x^{3/2}+4x^{-1}-5x^{0}= x^{2}+4(1/x)- 5x^{0}= (4^{2})+4(1/4)-5(4)^{0}= 8+1-5(1)= 8-4= 4$

h) $y^{2/3}+3y^{-1}-2y^{0}$ cuando y= 1/8

$y^{2/3}+3y^{-1}-2y^{0}= y^{2}+3(1/y)-2y^{0}= (1/8)^{2}+3(1/1/8)-2(1/8)^{0}= 1/64+24-2= 1/64+22= 89/4$

i) $64^{-2/3}.16^{5/4}.2^{0}.(\sqrt{3})^{4}= 1/64^{2/3}.16^{5/4}.2^{0}.(3^{1/2})^{4}= 1/\sqrt[3]{64^{2}}.\sqrt[4]{16^{5}}.1.(3^{4/8})=$

$1/\sqrt[3]{(64)^{2}}.\sqrt[4]{(16)^{5}}.1.(3^{4/8})= 18$

7.22

a) $25^{0}+0.25^{1/2}-8^{1/3}\cdot 4^{-1/2}+0.027^{1/3} = 1+\sqrt{0.25}-8^{1/3}/\sqrt{4}+\sqrt[3]{0.027} = 0.8$

b) $1/8^{-2/3}-3a^{0}+(3a)^{0}+(27)^{-1/3}-1^{3/2} = \sqrt[3]{64}-3+1+1/\sqrt[3]{27}= 4-3+1+1/3-1= 4/3$

c) $[3^{-2}+5(2)^{0}]/3-4(3)^{-1}= [1/9+5(1)]/3-4(1/3)= 46/15$

d) $(3^{0}x+4x^{-1})/x^{-2/3}$ si x=8

$(3^{0}x+4x^{-1})/x^{-2/3} = [1(8)+4(8)^{-1}]/(8)^{-2/3}= [8+4(1/8)]/(1/\sqrt[3]{64}) = (8+1/2)/1/4= 34$

7

RESOLUCIÓN DE ALGUNOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 8 DEL LIBRO *ÁLGEBRA SUPERIOR* DE SPIEGEL-MOYER

Introducción

Spiegel-Moyer desarrollan el capítulo 8, denominado RADICALES, desde la página 58 hasta la 66. Tratan allí los siguientes puntos: expresiones radicales, leyes de los radicales, simplificación de radicales, operaciones con radicales y racionalización de denominadores formados por binomios.

La sección de problemas resueltos, que comienza en la página 61 y llega hasta la 65, es verdaderamente fabulosa, puesto que nos enseña a reducir una expresión radical a su forma más simple, la transformación de un radical, a sumar y restar radicales similares; y nos enseña también la multiplicación y división de radicales.

Para la solución de los problemas propuestos es muy importante tener como guía las leyes de los radicales que aparecen en la página 58, de *Álgebra superior* de Spiegel-Moyer.

Problemas propuestos (página 65)

Demuestre que

8.11

a) $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

$\sqrt{36.2} = 6\sqrt{2}$
$\sqrt{6^2.2} = 6\sqrt{2}$

$6^{2/2}\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

$6\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

b) $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$\sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$

$\sqrt{3^2 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$

$3^{2/2}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

$3\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

c) $3\sqrt{20} = 6\sqrt{5}$

$3\sqrt{4 \cdot 5} = 6\sqrt{5}$

$3\sqrt{2^2 \cdot 5} = 6\sqrt{5}$

$(3)(2^{2/2})\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

$6\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

d) $2/5\sqrt{50a^2} = 2a\sqrt{2}$

$2/5\sqrt{25 \cdot 2a^2} = 2a\sqrt{2}$

$2/5 \quad \sqrt{5^2 \cdot 2a^2} = 2a\sqrt{2}$

$2/5\ (5^{2/2})(a^{2/2})\sqrt{2} = 2a\sqrt{2}$

$2/5\ (5)(a)\sqrt{2} = 2a\sqrt{2}$

$2a\sqrt{2} = 2a\sqrt{2}$

e) $a/b\sqrt{75a^3b^2} = 5a^2\sqrt{3a}$

$a/b\ \sqrt{(25\cdot 3\cdot a^2\cdot a\cdot b^2)} = 5a^2\sqrt{3a}$

$a/b\quad \sqrt{5^2\cdot 3\cdot a^2\cdot a\cdot b^2} = 5a^2\sqrt{3a}$

$a/b\quad (5^{2/2})(a^{2/2})(b^{2/2})\ \sqrt{3a} = 5a^2\sqrt{3a}$

$a/b\quad (5)(a)(b)\ \sqrt{3a} = 5a^2\sqrt{3a}$

$5a^2\sqrt{3a} = 5a^2\sqrt{3a}$

f) $4/ab\sqrt{98a^2b^3} = 28\sqrt{2b}$

$4/ab\ \sqrt{49.2a^2b^2\cdot b} = 28\sqrt{2b}$

$4/ab\ \sqrt{7^2\cdot 2\cdot a^2\cdot b^2\cdot b} = 28\sqrt{2b}$

$4/ab\ (7^{2/2})(a^{2/2})(b^{2/2})\ \sqrt{2b} = 28\sqrt{2b}$

$28\sqrt{2b} = 28\sqrt{2b}$

g) $\sqrt[3]{640^3} = 4\sqrt[3]{10}$

$\sqrt[3]{64.10} = 4\sqrt[3]{10}$

$\sqrt[3]{8^2.10} = 4\sqrt[3]{10}$

$4\sqrt[3]{10} = 4\sqrt[3]{10}$

h) $^3\sqrt{88x^3y^6z^5} = 2xy^2z^3\sqrt{11z^2}$

$\sqrt[3]{8\cdot 11\cdot x^3\cdot y^6z^3\cdot z^2} = 2xy^2z(^3\sqrt{11z^2})$
$\sqrt[3]{2^3\cdot 11x^{3\cdot}y^6\cdot z^3\cdot z^2} = 2xy^2z(^3\sqrt{11z^2})$

$2^{3/3}\cdot x^{3/3}\cdot y^{6/3}\cdot z^{3/3}(\sqrt[3]{11z^2}) = 2xy^2z(\sqrt[3]{11z^2})$

$2xy^2z(\sqrt[3]{11z^2}) = 2xy^2z(\sqrt[3]{11z^2})$

i) $\sqrt{a/b} = \sqrt{ab}/b$

$\sqrt{a/b\cdot b/b} = \sqrt{ab}/b$

$\sqrt{ab/b^2} = \sqrt{ab}/b$

$(\sqrt{ab})/b^{2/2} = \sqrt{ab}/b$

$\sqrt{ab}/b = \sqrt{ab}/b$

j) $14\sqrt{2/7} = 2\sqrt{14}$

$14\sqrt{2/7(7/7)}= 2\sqrt{14}$

$14\sqrt{14/7^2} = 2\sqrt{14}$

$(14\sqrt{14})/ 7^{2/2} = 2\sqrt{14}$

$(14\sqrt{14})/7 = 2\sqrt{14}$

$2\sqrt{14}= 2\sqrt{14}$

8.12

"Para sumar algebraicamente dos o más radicales se reducen a su forma más simple y se combinan los términos con radicales semejantes (…)"[9] (Comillas, cursiva y el punto suspensivo son nuestros).

a) $\sqrt{27}+\sqrt{48}-\sqrt{12} = 5\sqrt{3}$

---

[9] Ibíd., p. 59.

$\sqrt{9.3}+\sqrt{16.3}-\sqrt{4.3} = 5\sqrt{3}$

$3\sqrt{3}+4\sqrt{3}-2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

$(3+4-2)\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

$5\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

b) $5\sqrt{8}-3\sqrt{18} = \sqrt{2}$

$5\sqrt{4.2}-3\sqrt{9.2} = \sqrt{2}$

$(5)(2)\sqrt{2}-(3)(3)\sqrt{2} = \sqrt{2}$

$10\sqrt{2}-9\sqrt{2} = \sqrt{2}$

$(10-9)\sqrt{2}= \sqrt{2}$

$\sqrt{2} = \sqrt{2}$

d) $5\sqrt{2}-3\sqrt{50}+7\sqrt{288} = 74\sqrt{2}$

$5\sqrt{2}-3\sqrt{25.2}+7\sqrt{144.2} = 74\sqrt{2}$

$5\sqrt{2}-(3)(5)\sqrt{2}+(7)(12)\sqrt{2} = 74\sqrt{2}$

$(5-15+84)\sqrt{2} = 74\sqrt{2}$

$74\sqrt{2} = 74\sqrt{2}$

e) $\sqrt{(16a^3-48a^2b)} = 4a\sqrt{(a-3b)}$

$\sqrt{16a^2(a-3b)} = 4a\sqrt{(a-3b)}$

$4a\sqrt{a-3b} = 4a\sqrt{a-3b}$

8.13

a) $(3\sqrt{8})(6\sqrt{5}) = 36\sqrt{10}$

$(3.6\sqrt{8.5}) = 36\sqrt{10}$

$(18\sqrt{4.10}) = 36\sqrt{10}$

$(18(2)\sqrt{10}) = 36\sqrt{10}$

$36\sqrt{10} = 36\sqrt{10}$

b) $\sqrt{48x^5}\sqrt{3x^3} = 12x^4$

$\sqrt{48\cdot 3x^8} = 12x^4$

$\sqrt{144x^8} = 12x^4$

$\sqrt{144}\ \sqrt{x^8} = 12x^4$

$12x^{8/2} = 12x^4$

$12x^4 = 12x^4$

c) $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{32} = 4$

$\sqrt[3]{2.32} = 4$

$\sqrt[3]{64} = 4$

$4=4$

d) $\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{18})= 8$

$\sqrt{2.2}+\sqrt{2.18}= 8$

$\sqrt{4}+\sqrt{36}= 8$

$2+6= 8$

$8=8$

e) $(5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2}) = 23$

$25-5\sqrt{2}+5\sqrt{2}-\sqrt{2.2} = 23$

$25 -\sqrt{4} = 23$

$25-2 = 23$

$23 = 23$

g) $(2\sqrt{3}-\sqrt{6})(3\sqrt{3}+3\sqrt{6}) = 9\sqrt{2}$

$6\sqrt{3.3}+6\sqrt{3.6}-3\sqrt{6.3}-3\sqrt{6.6} = 9\sqrt{2}$

$6\sqrt{9}+6\sqrt{18}-3\sqrt{18}-3\sqrt{36} = 9\sqrt{2}$

$6(3)+6\sqrt{2.9}-3\sqrt{2.9}-3(6) = 9\sqrt{2}$

$18+6(3)\sqrt{2}-3(3)\sqrt{2}-18 = 9\sqrt{2}$

$18\sqrt{2}-9\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$

$(18-9)\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$

$9\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$

h) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}) = 6+\sqrt{6}$

$(3\sqrt{2})(4\sqrt{2})+(3\sqrt{2})(3\sqrt{3})- (2\sqrt{3})(4\sqrt{2})-(2\sqrt{3})(3\sqrt{3}) = 6+\sqrt{6}$

(3.4) $\sqrt{2}\sqrt{2}+3.3\sqrt{2}\sqrt{3}-2.4\sqrt{3}\sqrt{2}-2.3\sqrt{3}\sqrt{3} = 6+\sqrt{6}$

$12\sqrt{2.2}+9\sqrt{2.3}-8\sqrt{3.2}-6\sqrt{3.3} = 6+\sqrt{6}$
$12\sqrt{4}+9\sqrt{6}-8\sqrt{6}-6\sqrt{9}= 6+\sqrt{6}$

$12(2)+9\sqrt{6}-8\sqrt{6}-6(3) = 6+\sqrt{6}$

$24+9\sqrt{6}-8\sqrt{6}-18 = 6+\sqrt{6}$

$6+9\sqrt{6}-8\sqrt{6}= 6+\sqrt{6}$

$6+\sqrt{6}(9-8)= 6+\sqrt{6}$

$6+\sqrt{6}= 6+\sqrt{6}$

i) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 10$

$(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+$

$(\sqrt{3})^2 = 10$

$\sqrt{4}-2\sqrt{6}+\sqrt{9}+\sqrt{4}+2\sqrt{6}+\sqrt{9} = 10$

$2-2\sqrt{6}+3+2+2\sqrt{6}+3 = 10$

$2+3+2+3 = 10$

$10 = 10$

j) $(2\sqrt{a}+5\sqrt{a-b})(\sqrt{a}+\sqrt{a-b}) = 7a-5b+7\sqrt{(a^2-ab)}$

$(2\sqrt{a})(\sqrt{a})+(5\sqrt{a-b})\sqrt{a}+(2\sqrt{a})(\sqrt{a-b})+ (5\sqrt{a-b})(\sqrt{a-b}) = 7a-5b+7\sqrt{(a^2-ab)}$

$2\sqrt{a^2}+5\sqrt{a(a-b)}+2\sqrt{a(a-b)}+5\sqrt{(a-b)(a-b)} = 7a-5b+7\sqrt{(a^2-ab)}$
$2\sqrt{a^2}+5\sqrt{(a^2-ab)}+2\sqrt{(a^2-ab)}+5\sqrt{(a^2-2ab+b^2)} = 7a-5b+7\sqrt{(a^2-ab)}$

$2a+5\sqrt{(a^2-ab)}+2\sqrt{(a^2-ab)}+5\sqrt{(a^2-2ab+b^2)} = 7a-5b+7\sqrt{(a^2-ab)}$

$2a+7\sqrt{(a^2-ab)}+5(a-2a^{1/2}b^{1/2}+b) = 7a-5b+7\sqrt{(a^2-ab)}$

$2a+7\sqrt{(a^2-ab)}+5a+5b+7\sqrt{a^2}-5\sqrt{2ab}= 7a-5b+7\sqrt{(a^2-ab)}$

$2a+5a+5b+7\sqrt{(a^2-ab)}-5\sqrt{2ab}= 7a-5b+7\sqrt{(a^2-ab)}$

$7a+5b+7\sqrt{(a^2-ab)}-5\sqrt{2ab}= 7a-5b+7\sqrt{(a^2-ab)}$ OJO

k) $(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}) =1+2\sqrt{15}$

$(\sqrt{3})(\sqrt{3})+(\sqrt{5})(\sqrt{3})+(\sqrt{7})(\sqrt{3})+(\sqrt{3})(\sqrt{5})+(\sqrt{5})(\sqrt{5})+(\sqrt{7})(\sqrt{5})-(\sqrt{7})(\sqrt{7})-$

$(\sqrt{5})(\sqrt{7})-$

$(\sqrt{7})(\sqrt{7}) = 1+2\sqrt{15}$

$3+\sqrt{15}+\sqrt{21}+\sqrt{15}+5+\sqrt{35}-\sqrt{21}-\sqrt{35}-7 = 1+2\sqrt{15}$

$1+2\sqrt{15}=1+2\sqrt{15}$

m) $(4+\sqrt{8})/2= 2+\sqrt{2}$

$(4+\sqrt{2.4})/2= 2+\sqrt{2}$

$(4+\sqrt{2}\sqrt{4})/2= 2+\sqrt{2}$

$(4+2\sqrt{2})/2= 2+\sqrt{2}$

$(4/2)+(2\sqrt{2}/2)= 2+\sqrt{2}$

$2+\sqrt{2}= 2+\sqrt{2}$

n) $(6-\sqrt{18})/3= 2-\sqrt{2}$

$(6-\sqrt{2.9})/3= 2-\sqrt{2}$

$(6-\sqrt{2}\sqrt{9})/3= 2-\sqrt{2}$

$(6-3\sqrt{2})/3= 2-\sqrt{2}$

$2-\sqrt{2}= 2-\sqrt{2}$

p) $(8+4\sqrt{48})/8= 1+2\sqrt{3}$

$(8+4\sqrt{3.16})/8= 1+2\sqrt{3}$

$(8+4\sqrt{3}\sqrt{16})/8= 1+2\sqrt{3}$

$(8+4(4)\sqrt{3})/8= 1+2\sqrt{3}$

Después de simplificar, en el primer miembro, queda:

$1+2\sqrt{3}= 1+2\sqrt{3}$

q) $(36-2\sqrt[3]{81})/6= 6-\sqrt[3]{3}$

$(36-2\sqrt[3]{3.27})/6= 6-\sqrt[3]{3}$

$36-2(3)\sqrt{27}/6= 6-\sqrt[3]{3}$

$6-\sqrt[3]{3}= 6-\sqrt[3]{3}$

8.14

b) $a\sqrt{b}/b\sqrt{a}= \sqrt{ab}/b$

$(a\sqrt{b}/b\sqrt{a})(b\sqrt{a})/b\sqrt{a})= \sqrt{ab}/b$

$ab\sqrt{ab}/b^2\sqrt{a^2})= \sqrt{ab}/b$

$a\sqrt{ab}/ba)= \sqrt{ab}/b$

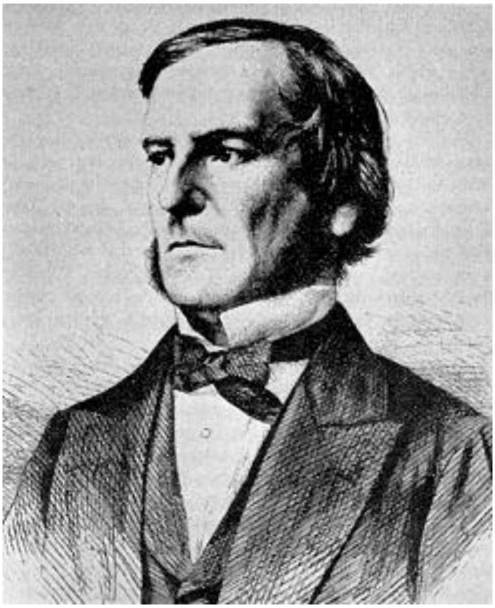
$\sqrt{ab/b}) = \sqrt{ab}/b$

d) $(\sqrt{6}-\sqrt{10}-\sqrt{12})/\sqrt{18} = (\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{6})/\sqrt{3}$

$(\sqrt{2.3}-\sqrt{2.5}-\sqrt{2.6})/\sqrt{2.9} = (\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{6})/\sqrt{3}$

$2\sqrt{3}-2\sqrt{5}-2\sqrt{6})/2\sqrt{9} = (\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{6})/\sqrt{3}$

$\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{6}/3 = (\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{6})/\sqrt{3}$



Como inventor del álgebra de Boole, que marca los fundamentos de la aritmética computacional moderna, Boole es considerado como uno de los fundadores del campo de las Ciencias de la Computación. En 1854 publicó *An Investigation of the Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*, donde desarrolló un sistema de reglas que le permitían expresar, manipular y simplificar problemas lógicos y filosóficos cuyos argumentos admiten dos estados (verdadero o falso) por procedimientos matemáticos. Se podría decir que es el padre de las operaciones lógicas y gracias a su álgebra hoy en día es posible manipular operaciones lógicas.

8

RESOLUCIÓN DE ALGUNOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 9 DEL LIBRO *ÁLGEBRA SUPERIOR* DE SPIEGEL-MOYER

Introducción

El capítulo 9, denominado OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS, que va desde la página 67 a la 72, nos introduce en el campo de números diferentes a los números reales. Se tratan los temas siguientes: números complejos, representación gráfica de los números complejos y operaciones algebraicas con números complejos.

Probables errores

En la página 68, debajo de la gráfica 9-1, párrafo tres (3), no debe decir "recorra 1 unidad a lo largo del eje X'X hacia la derecha", sino a la izquierda, puesto que el dato es -1-4i. En la página 69, apartado **9.2**, ejercicio b), antes de (3+5i) debe colocarse el signo (-).

Problemas propuestos (página 71)

9.6 Exprese en función de i

a) $2\sqrt{-49} = 2\sqrt{(49)(-1)} = 2\sqrt{49}\sqrt{-1} = 2(7)(i) = 14i$

b) $-4\sqrt{-64} = -4\sqrt{(64)(-1)} = -4\sqrt{64}\sqrt{-1} = -4(8)(i) = -32i$

c) $6\sqrt{-1/9} = 6\sqrt{(1/9)(-1)} = 6\sqrt{1/9}\sqrt{-1} = 6(1/3)i = 2i$

e) $3\sqrt{(-25)}-5\sqrt{-100} = 3\sqrt{(25)(-1)}-5\sqrt{(100)(-1)} =$
$3(5)i-5(10)i = 15i-50i = -35i$

f) $2\sqrt{(-72)}+3\sqrt{-32} = 2\sqrt{(72)(-1)}+3\sqrt{(32)(-1)} =$

$2\sqrt{72}\sqrt{-1}+3\sqrt{32}\sqrt{-1} = 2\sqrt{2.36}\sqrt{-1}+3\sqrt{2.16}\sqrt{-1}= 2\sqrt{(2.36)}i+3\sqrt{(2.16)}i =$

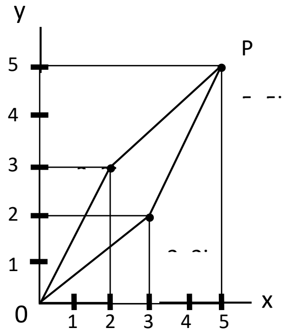
$2(6)\sqrt{2}i+3(4)\sqrt{2}i = 12\sqrt{2}i+12\sqrt{2}i = 24\sqrt{2}i$

i) $4\sqrt{-81}-3\sqrt{(-36)}+4\sqrt{25} = 4\sqrt{81(-1)}-3\sqrt{36(-1)}+4(5) = 4(9)i-3(6)i+20 =$ $36i18i+20= 18i+20$

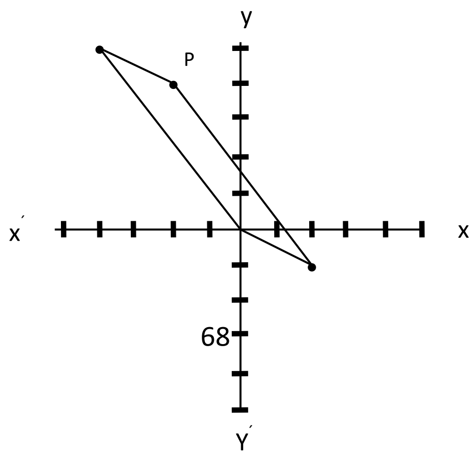
j) $3\sqrt{(12)}-3\sqrt{-12} = 3\sqrt{(3.4)}-3\sqrt{(12)(-1)} = 3(2)\sqrt{3}-3\sqrt{3.4}\ \sqrt{-1} = 6\sqrt{(3)}-6\sqrt{3}i$

9.7 Represente las expresiones dadas algebraica y gráficamente

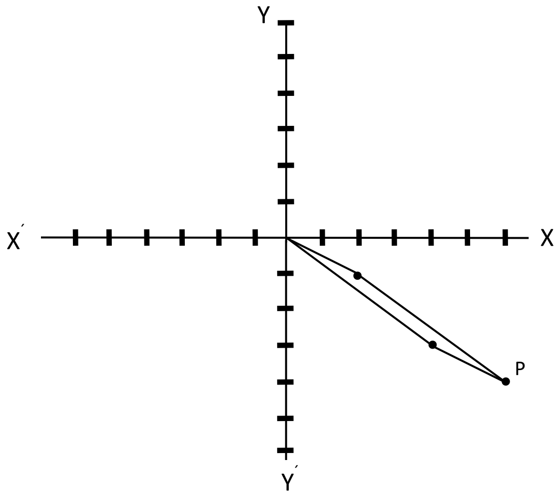
a) $(3+2i)+(2+3i) = (3+2)+(2i+3i) = 5+5i$



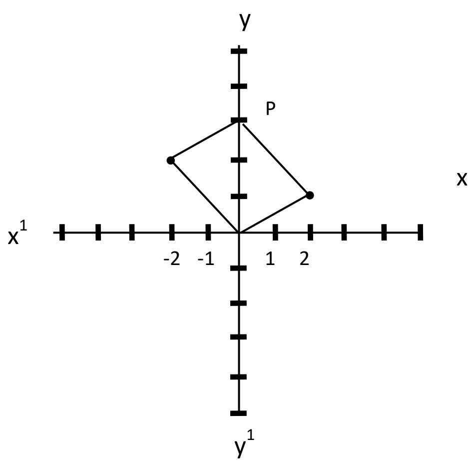
b) $(2-i)+(-4+5i) = (2-4)+(-i+5i) = -2+4i$



c) $(4-3i)-(-2+i) = (4-3i)+(2-i) = (4+2)+(-3i-i) = 6-4i$



d) $(-2+2i)-(-2-i) = (-2+2)+(2i+i) = 0+3i = 3i$



9.8 Efectúe cada una de las operaciones indicadas y simplifique.

a) $(3+4i)+(-1-6i) = (3-1)+(4i-6i) = 2-2i$

b) $(-2+5i)-(3-2i) = (-2-3)+(5i+2i) = -5+7i$

c) $(2/3-1/2\ i)-(-1/3+1/2\ i) = (2/3+1/3)+(-1/2\ i\ -1/2\ i) = 1-i$

d) $(3+\sqrt{-8})-(2-\sqrt{-32}) = (3+\sqrt{(8)(-1)}-(2-\sqrt{(32)(-1)}) = (3+\sqrt{2.4}\sqrt{-1})-(2-\sqrt{(2.16)}\sqrt{-1}) = (3+2\sqrt{2}i)-(2-4\sqrt{2}i) = 3+2\sqrt{2}i-2+4\sqrt{2}i = (3-2)+(2\sqrt{2}i+4\sqrt{2}i) = 1+6\sqrt{2}i$

e) $\sqrt{-3}\sqrt{-12}= \sqrt{3(-1)}\ \sqrt{12(-1)}= \sqrt{3(-1)}\ \sqrt{12(-1)}=\sqrt{3}\sqrt{-1}\sqrt{(3.4)}\sqrt{-1}= \sqrt{(3)}i\ 2\sqrt{(3)}i= 2\sqrt{(3)}i\sqrt{(3)}i= 2\sqrt{3.3}i^2 = 2.3(-1)= -6$

f) $(-i\sqrt{2})(i\sqrt{2})= -i^2\sqrt{4} = -(-1)2 = 2$

g) $(2i)^4 = 16i^4 = 16.\ i^2.\ i^2 = 16(-1)\ (-1)= 16$

i) $5i(2-i) = 10i-5i^2= 10i-5(-1) = 10i+5 = 5+10i$

j) $(2+i)(2-i) = 4-2i+2i-i^2 = 4-i^2 = 4-(-1)= 5$

k) $(-3+4i)(-3-4i) = 9+12i-12i-16i^2 = 9-16i^2 = 9-16(-1) = 25$

l) $(2-5i)(3+2i) = 6+4i-15i-10i^2 = 6-11i-10(-1) = 6+10-11i= 16-11i$

m) $(3-4i)^2 = 9-24i+16i^2 = 9-24i+16(-1) = 9-24i-16= -7-24i$

n) $(1+i)(2+2i)(3-i) = 2+2i+2i+2i^2 = 2+4i+2(-1) = 4i(3-i) = 12i-4i^2 = 12i-4(-1) = 12i+4= 4+12i$

o) $(i-1)^3 = i^3-3i^2+3i-1 = i^2.i-3(-1)+3i-1 = i(-1)+3+3i-1= -i+3+3i-1 = 2i+2 = 2+2i$

p) $(2+3i)^3 = 8+36i+54i^2+54i^2+27i^3 = 8+36i+54i(-1)+27(-i) = -46+9i$

q) $(1-i)^4 = (1-i)^3\ (1-i) = (1-3i+3i^2-i^3)(1-i) = (1-3i+3(-1)-(-i)(1-i) =$

$(1-3i-3+i)(1-i) = (-2-2i)(1-i) = -2-2i+2i+2i^2 = -2+2i^2 = -2+2(-1) = -4$

9

RESOLUCIÓN DE ALGUNOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 10 DEL LIBRO *ÁLGEBRA SUPERIOR* DE SPIEGEL-MOYER

Introducción

Spiegel-Moyer desarrollan el capítulo 10, denominado ECUACIONES EN GENERAL, desde la página 73 hasta la 80. Tratan allí los siguientes puntos: ecuaciones, operaciones utilizadas en la transformación de ecuaciones, ecuaciones equivalentes, fórmulas y ecuaciones con polinomios.

Problemas propuestos (página 79)

10.10 Determine cuáles de las expresiones siguientes son ecuaciones y cuáles son identidades:

Spieguel-Moyer, en *Álgebra superior*, el libro que estamos estudiando, dicen que "Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones que se denominan miembros de la misma.

"Una ecuación que solo se verifique para ciertos valores de las letras… recibe el nombre de ecuación condicional (…)

"Una ecuación que se verifique para todos los valores permitidos de sus literales (…) recibe el nombre de identidad (…)"[10] (Comillas, cursiva y puntos suspensivos son nuestros).

Con esas orientaciones, procedamos:

[10] Ibíd., p. 73.

a) $2x+3-(2-x) = 4x-1$

$2x+3-2+x= 4x-1$

$3x+1= 4x-1$ Ecuación condicional

b) $(2y-1)^2+(2y+1)^2 = (2y)^2+6$

$4y^2-4y+1+4y^2+4y+1 = 4y^2+6$

$8y^2+2= 4y^2+6$ Ecuación condicional

c) $2\{x+4-3(2x-1)\} = 3(4-3x)+2-x$

$2\{x+4-6x+2\} = 12-9x+2-x$

$2\{7-5x\}= 14-10x$

$-10x+14 = -10x+14$ Identidad

d) $(x+2y)(x-2y)-(x-2y)^2+4y(2y-x) = 0$

$x^2-2xy+2xy-4y^2-(x^2-4xy+4y^2)+8y^2-4xy = 0$

$x^2-2xy+2xy-4y^2-x^2+4xy-4y^2+8y^2-4xy = 0$

$0 = 0$ Identidad

e) $\dfrac{9x^2-4y^2}{3x-2y} = 2x+3y$

$9x^2-4y^2= (2x+3y)(3x-2y)$

$9x^2-4y^2 = 6x^2-4xy +9xy-6y^2$

$9x^2-4y^2= 6x^2+5xy-6y^2$ Ecuación condicional

f) $(x-3)(x^2+3x+9) = x^3-27$

$x^3+3x^2 +9x-3x^2-9x-27 = x^3-27$

$x^3-27= x^3-27$ Identidad

g) $x^2/4 + x^2/12 = x^2$

$(3x^2+x^2)/12 =x^2$

$4x^2 / 12 = x^2$

$1/3\ x^2= x^2$ Ecuación condicional

h) $(x^2-y^2)^2+(2xy)^2 = (x^2+y^2)^2$

$x^4-2x^2y^2+y^4+4x^2y^2 = (x^4 +2x^2y^2+y^4)$

$x^4 +2x^2 y^2+y^4 = x^4+2x^2y^2+y^4$ Identidad

10.11 Compruebe si la solución o soluciones indicadas satisfacen las ecuaciones.

a) $(y^2-4)/y-2= 2y-1;$ $y = 3$

$(3^2-4)/3-2= 2(3)-1$

$(9-4)/1= 6-1$

$5/1= 5$

$5= 5,$ $y= 3$ es solución

b) $x^2-3x = 4;$ $x = -1, -4$

$(1)^2$-3(-1) = 4
1+3 = 4

4 = 4, x = -1 es solución

$(-4)^2$-3(-4) = 4

16+12 = 4

$28 \neq 4$; x = -4 no es solución

c) $\sqrt{(3x-2)}-\sqrt{(x+2)}= 4$; x = 34, 2

$\sqrt{[3(34)-2]}-\sqrt{(34+2)}= 4$

$\sqrt{(102-2)}-\sqrt{36}= 4$

$\sqrt{100}-\sqrt{36}= 4$

10-6 = 4

4= 4; x = 34 es solución

$\sqrt{[3(2)-2]}-\sqrt{(2+2)}= 4$

$\sqrt{(6-2)}-\sqrt{4}= 4$

2-2= 4

$0 \neq 4$; x = 2 no es solución

d) $x^3-6x^2-11x-6 = 0$; x= 1, 2, 3

$(1)^3-6(1)^2+11(1)-6 = 0$
1-6+11-6 = 0

$6-6 = 0$
$0 = 0$; $x = 1$ es solución

$(2)^3-6(2)^2+11(2)-6 = 0$

$8-24+22-6 = 0$

$0 = 0$; $x = 2$ es solución

$(3)^3-6(3)^2 +11(3)-6 = 0$

$27-54+33-6 = 0$

$0 = 0$; $x = 3$ es solución

e) $1/x+1/2x = 1/x-1$; $x = 3$

$1/3+1/2(3) = 1/3-1$

$1/3+1/6 = 1/2$

$2+1/6 = 1/2$

$3/6= 1/2$

$1/2 = 1/2$; $x=3$ es solución

f) $y^3+y^2-5y-5 = 0$; $\pm\sqrt{5}, -1$

$(\sqrt{5})^3+(\sqrt{5})^2-5(\sqrt{5})-5= 0$

$\sqrt{5^3}+\sqrt{5^2}-5(\sqrt{5})-5 = 0$

$\sqrt{125}+\sqrt{25}-5(\sqrt{5})-5 = 0$
$\sqrt{25.5}+5-5(\sqrt{5})-5 = 0$
$5\sqrt{5}+5-5(\sqrt{5})-5 = 0$

$5-5= 0$

$0= 0$; $y= \sqrt{5}$ es solución

$(-\sqrt{5})^3+(-\sqrt{5})^2-5(-\sqrt{5})-5= 0$

$(-\sqrt{5^3})+(-\sqrt{5^2}-5(-\sqrt{5})-5 = 0$

$(-\sqrt{125})+(-\sqrt{25})-5(-\sqrt{5})-5 = 0$

$(-\sqrt{25.5})+(-5)-5(-\sqrt{5})-5 = 0$

$-5\sqrt{5}-5+5\sqrt{5}-5 = 0$

$-10 = 0$; $y = -\sqrt{5}$ no es solución (hay que observar bien este resultado, difiere del libro).

$(-1)^3+(-1)^2-5(-1)-5 = 0$

$-1 +1 +5 -5 = 0$

$0= 0$; -1 es solución

g) $x^2-2y = 3y^2$; $x= 4$, $y= 2$; $x= 1$, $y= -1$

$(4)^2-2(2) = 3(2)^2$

$16-4 = 12$

$12= 12$

$1^2 -2(-1) = 3(-1)^2$

$1+2= 3$

$3= 3$, por tanto,

$x= 4, y= 2;\ x= 1, y= -1$ son soluciones

h) $(x+y)^2+(x-y)^2 = 2(x^2+y^2)$; cualquier valor de x, y

$x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2 = 2x^2+2y^2$

$2x^2+2y^2 = 2x^{2+}2y^2$ es una identidad, por consiguiente, todos los valores de x e y
son soluciones.

10.12 Aplique los axiomas de la igualdad para resolver las ecuaciones siguientes. Compruebe las soluciones obtenidas.

a) $5(x-4)= 2(x+1)-7$

$5x-20= 2x+2-7$

$5x-20= 2x-5$

$5x-20-2x+5= 0$

$3x-15= 0$

$x= 15/3= 5$

Comprobación:

$5(5-4)= 2(5+1)-7$

$5(1)= 2(6)-7$

$5= 5$

b) $(2y/3)-(y/6)= 2$

$(4y-y)/6= 2$

$3y/6= 2$

$y= 2(6)/3= 12/3= 4$

Comprobación:

$(2.4/3)-(4/6)= 2$

$(8/3)-(4/6)= 2$

$(8/3)-(4/6)= 16-4/6= 12/6= 2$

$2=2$

c) $1/y = 8-3/y$

$1= (8-3/y)\ y$

$1= (8y-3y/y)$

$1= 8y-3$

$y= 1+3/8= 1/2$

Comprobación:

$1/1/2 = 8-3/1/2$

$1/1/2 = 8-3/1/2$

$2=2$

d) $x+1/x-1= x-1/x-2$

$x+1= (x-1/x-2)\ (x-1)$

$x+1= (x^2-x-x+1)/x-2$

$x+1= x^2-2x+1 / x-2$

$(x-2)(x+1) = x^2-2x+1$

$x^2-2x+x-2= x^2-2x+1$

$x^2-2x+x-2-x^2+2x-1= 0$

$x-3= 0$

$x= 3$

Comprobación:

$(3+1) / (3-1)= (3-1) / (3-2)$

$4/2= 2/1$

$2=2$

e) $3x-2 / x-2= x+2 / x-2$

$3x-2= (x+2 / x-2) (x-2)$

Tachamos términos semejantes y queda

$3x-2 = x+2$

$3x-2-x-2 = 0$

$2x-4 = 0$

$x = 4/2 = 2$

Comprobación:

$3(2)-2 / 2-2 = 2+2 / 2-2$

$6-2/0 = 4/0$

$4/0 = 4/0$ no tiene solución

f) $\sqrt{(3x-2)}= 4$

$3x-2= 4^2$

$3x-2= 16$

$x= (16+2)/3= 6$

Comprobación:

$\sqrt{(3.6-2)}= 4$

$\sqrt{16}= 4$

$4=4$

g) $\sqrt{(2x+1)}+5= 0$

$\sqrt{(2x+1)}= -5$

$2x+1= -5^2$

$2x+1= 25$

$2x= 25-1$

$x= 24/2= 12$

Comprobación:

$\sqrt{(2.12+1)}+5= 0$

$5+5 \neq 0$ no tiene solución

h) $\sqrt[3]{(2x-3)}+1 = 0$

$2x-3= -1^3$

$2x-3= -1$

$x= -1+3/2= 1$

i) $(y+1)^2 = 16$

$y^2+2y+1= 16$

$y^2+2y+1-16= 0$

$y^2+2y-15= 0$

$(y+5)(y-3)$

$y= -5$

$y= 3$

Comprobación:

$(-5+1)^2 = 16$

$(-4)^2 = 16$
$16=16$
Comprobación:

$(3+1)^2 = 16$

$(4)^2 = 16$

$16=16$

j) $(2x+1)^2+(2x-1)^2 = 34$

$4x^2+4x+1+4x^2-4x+1= 34$

$8x^2+2= 34$

$x^2= 34-2/8= 32/8= 4$

$x= \pm\sqrt{4}= \pm 2$

Comprobación:

$(2.2+1)^2+(2.2-1)^2 = 34$

$(5)^2+(3)^2 = 34$

$25+9 = 34$

$34=34$

10.13 Despejar la incógnita que se indica en las fórmulas siguientes:

a) $P_1V_1/T_1= P_2V_2/T_2$; T_2

$(T_2)(P_1V_1/T_1)= P_2 V_2$

$(T_2)(P_1V_1)= (P_2V_2)(T_1)$

$T_2= (P_2V_2)(T_1)/P_1V_1$

b) $t= \sqrt{(2s/g)}$; s

$t= \sqrt{2s}/\sqrt{g}$

$t\sqrt{g} = \sqrt{2s}$

$(t\sqrt{g})^2 = 2s$

$t^2 g^{2/2} = 2s$

$t^2 g = 2s$

$s = t^2 g / 2 = 1/2 g t^2$

c) $m = 1/2\sqrt{(2a^2+2b^2-c^2)}$; c

$2m = \sqrt{(2a^2+2b^2-c^2)}$

$(2m)^2 = 2a^2+2b^2-c^2$

$4m^2 = 2a^2+2b^2-c^2$

$c^2 = 2a^2+2b^2-4m^2$

$c = \pm\sqrt{(2a^2+2b^2-4m^2)}$

e) $T = 2\pi(\sqrt{m/k})$; k

$T = 2\pi\sqrt{m} / \sqrt{k}$

$T\sqrt{k} = 2\pi\sqrt{m}$

$\sqrt{k} = 2\pi\sqrt{m} / T$

$k = (2\pi\sqrt{m} / T)^2$

$k = 4\pi^2(\sqrt{m})^2 / T^2$

$k = 4\pi^2 m^{2/2} / T^2$

$k = 4\pi^2 m / T^2$

f) $S = n/2[2a+(n-1)d]$; d

$2S = n[2a+(n-1)d]$

$2S = 2an+n(n-1)d$

$2S = 2an+dn(n-1)$

$2S-dn(n-1) = 2an$

$-dn(n-1) = 2an-2S$

$dn(n-1) = 2S-2an$

$dn = (2S-2an)/(n-1)$

$d = [(2S-2an)/(n-1)]/n$

$d = (2S-2an)/n(n-1)$

10.14 Hallar el valor de la incógnita que se indica conocidos los valores de las restantes.

a) $v = v_0+at$; encuentre a si $v = 20$, $v_0 = 30$, $t = 5$.

$a = (v-v_0)/t = 20-30/5 = -10/5 = -2$

b) $S = (n/2)(a+d)$; encuentre d si $S = 570$, $n = 20$, $a = 40$.
$2S = n(a+d)$

$2S/n = a+d$

$d = (2S/n)-a$

$d= [(2)(570)/20]-40= (1140/20)-40= 57-40= 17$

c) $1/f= 1/p+1/q$; encuentre q si $f= 30$, $p= 10$.
$1/f-1/p= 1/q$

$q(1/f-1/p)= 1$

$q= 1/(1/f-1/p)= 1/30-1/10= -15$

d) $Fs= 1/2mv^2$; encuentre v si $F= 100$, $s= 5$, $m= 2.5$.

$2Fs= mv^2$

$v^2 = 2Fs/m$

$v= \pm\sqrt{(2Fs/m)}= \pm\sqrt{2[(100)(5)/2.5]}= \pm 20$

e) $f = 1/2\pi LC$; encontrar C con cuatro cifras decimales si $f= 1000$, $L= 4.10^{-6}$

$2\pi LCf= 1$

$C= 1/2\pi Lf= 1/2(3.1416)(4.10^{-6})(1000)= 0.0063$

10.15 Determine el grado de las ecuaciones siguientes respecto a las incógnitas que se indican:

a) $x^3-3x+2= 0$: x; el grado es 3.

b) $x^2+xy +3y^4= 6$: x; y; x y y; con respecto a x es grado 2, con respecto a y es grado 4, con respecto a x y y es grado 4.

c) $2xy^3-3x^2y^2+4xy= 2x^3$: x; y; x y y; con respecto a x es grado 3, con respecto a y es grado 3, con respecto a xyy es grado 4.

d) $xy+yz+xz+z^2x = y^4$: x; y; z; x y z; y y z; x, y, y z; con respecto a x es grado 1, con respecto a y es grado 4, con respecto a z es grado 2, con respecto a x y z es grado 3, con respecto a y y z es grado 4, con respecto a xyz es grado 4.

10.16 Clasificar las ecuaciones siguientes (transformándolas si es preciso) según sean lineales, cuadráticas, de tercero, de cuarto o quinto orden respecto a todas las incógnitas que figuran en ellas.

a) $2x^4+3x^3-x-5= 0$, de cuarto grado, debido a que se corresponde con el grado del término que precisamente posee el mayor grado en dicha ecuación.

b) $x-2y= 4$, es lineal.
c) $2x^2+3xy+y^2= 10$, de segundo grado, debido a que se corresponde con el grado del término que precisamente posee el mayor grado en dicha ecuación.

d) $x^2y^3-2xyz= 4+y^5$, de quinto grado, debido a que se corresponde con el grado del término que precisamente posee el mayor grado en dicha ecuación.

e) $\sqrt{(x^2+y^2-1)}= x+y$, de primer grado (mi resultado difiere del libro, éste dice que es de segundo grado). Veamos:

$x^2+y^2-1= (x+y)^2$

$x^2+y^2-1= x^2+2xy+y^2$

$x^2+y^2-1-x^2-2xy-y^2= 0$

$-2xy-1= 0$

$-2xy= 1$

$2xy= -1$, por tanto es lineal.

f) $2x+y/x-3y=4$, es lineal.

g) $3y^2-4y+2=2(y-3)^2$, de segundo grado. Veamos:

$3y^2-4y+2=2(y^2-6y+9)$

$3y^2-4y+2=2y^2-12y+18$

$3y^2-4y+2-2y^2+12y-18=0$

$y^2+8y-16=0$, comprobado.

h) $(z+1)^2(z-2)=0$, de tercer grado. Veamos:

$(z^2+2z+1)(z-2)=0$

$z^3+2z^2+z-z^2-4z-2=0$

$z^3+z^2-3z-2=0$, comprobado.

Claves para estudiar libros como el que nos ocupa: estudiar los ejemplos; y efectuar los ejercicios resueltos.

10

RESOLUCIÓN DE ALGUNOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 11 DEL LIBRO *ÁLGEBRA SUPERIOR* DE SPIEGEL-MOYER

Introducción

Spiegel-Moyer desarrollan el capítulo 11, denominado RAZÓN, PROPORCIÓN Y PROPORCIONALIDAD, desde la página 81 hasta la 88. Tratan allí los siguientes puntos: razón, proporción, variación, precio unitario y mejor compra.

Probables errores

Tenemos la impresión de que la respuesta del libro, correspondiente al ejercicio **11.25**, página 87, equivalente a x= 7/3, no es correcta; pensamos que debe ser x= 7y/3.

Problemas propuestos (página 86)

11.19 Exprese las razones siguientes por medio de una fracción simplificada:

a) 40:64

40:64= 40/64= 20/32= 10/16= 5/8

b) 4/5:8/3

4/5:8/3= (4/5)/(8/3)= (4/5)(3/8)= 12/40= 3/10

c) x^2y^3:$3xy^4$

$x^2y^3:3xy^4= x^2y^3/3xy^4= x/3y$

d) $(a^2b+ab^2):(a^2b^3+a^3b^2)$

$(a^2b+ab^2):(a^2b^3+a^3b^2)= (a^2b+ab^2)/(a^2b^3+a^3b^2)= ab(a+b)/a^2b^2(b+a)=$

$ab(a+b)/a^2b^2(a+b)= ab/a^2b^2= 1/ab$

11.21 Encuentre el valor de x en las proporciones siguientes:

a) $(x+3):(x-2)= 3:2$

$(x+3)/(x-2)= 3/2$

$2(x+3)= 3(x-2)$

$2x+6= 3x-6$

$6+6= 3x-2x$

$12= x$

$x= 12$

b) $(x+4):1= (2-x):2$

$(x+4)/1= (2-x)/2$

$2(x+4)= (2-x)$

$(2x+8)= (2-x)$

$(2x+x)= (2-8)$

$3x= -6$

$x= -6/3= -2$

c) $(x+1):4= (x+6):2x$

$(x+1)/4= (x+6)/2x$

$2x(x+1)= 4(x+6)$

$2x^2+2x= 4x+24$

$2x^2+2x-4x-24= 0$

$2x^2-2x-24= 0$

$x= [-b^2\pm\sqrt{}(b^2-4AC]/2A= [2\pm\sqrt{}4-4(2)(-24)]/4$
$x= 4, -3$

d) $(2x+1):(x+1)= 5x:(x+4)$

$(2x+1)/(x+1)= 5x/(x+4)$

$(x+4)(2x+1)= (x+1)5x$

$(2x^2+8x+x+4)= (5x^2+5x)$

$2x^2+8x+x+4-5x^2-5x= 0$

$-3x^2+4x+4= 0$

$3x^2-4x-4= 0$

$x= [-b^2\pm\sqrt{}(b^2-4AC]/2A= [4\pm\sqrt{}16-4(3)(-4)]/6$

$x= 2, -2/3$

11.22 Encuentre la cuarta proporcionalidad de los conjuntos de números siguientes:

a) 3, 4, 12

3:4= 12:x

3/4= 12/x

3x= 12(4)

3x= 48

x= 48/3= 16

b) -2, 5, 6

-2:5= 6:x

-2/5= 6/x

-2x= 6(5)

-2x= 30

x= -30/2= -15

c) a, b, c

a:b= c:x

a/b= c/x

ax= bc

x= bc/a

d) m+2, m-2, 3

m+2: m-2= 3:x

m+2/m-2= 3/x

x(m+2)= 3(m-2)

x= 3(m-2)/(m+2)

11.23 Encuentre la tercera proporcional de los pares de números siguientes:

a) 3, 5

3:5= 5:x

3/5= 5/x

3x= 5(5)

3x= 25

x= 25/3

b) -2, 4

-2:4= 4:x

-2/4= 4/x
-2x= 4(4)

-2x= 16

x= -16/2= -8

c) a, b

a:b= b:x

a/b= b/x

ax= b(b)

ax= b^2

x= b^2/a

d) ab, √ab

ab:√ab= √ab:x

ab/√ab= √ab/x

abx= (√ab)(√ab)

abx= $(\sqrt{ab})^{1/2}(\sqrt{ab})^{1/2}$

abx= $(\sqrt{ab})^{1/2+1/2}$

abx= ab

x= ab/ab= 1

11.24 Calcule la media proporcional de los pares de números siguientes:

a) 3, 27

Sea *x* la media proporcional. Por lo tanto, 3 : x = x : 27,

3/x = x/27

$3 = x/27\ (x)$
$27(3) = x^2$

$x^2 = 81$

$x = \pm\sqrt{81} = \pm 9$

b) -4, -8

Sea *x* la media proporcional. Por lo tanto,

$-4 : x = x : -8$

$-4/x = x/-8$
$-4 = 2/-8\ (x)$

$-8(-4) = x^2$

$x^2 = 32$

$x = \pm\sqrt{32} = \pm\sqrt{2.16} = \pm\sqrt{2}\cdot\sqrt{16} = \pm 4\sqrt{2}$

c) $3\sqrt{2}$ y $6\sqrt{2}$

Sea x la media proporcional. Por lo tanto,

$3\sqrt{2} : x = x : 6\sqrt{2}$

$3\sqrt{2}/x = x : 6\sqrt{2}$

$(6\sqrt{2})\ (3\sqrt{2}) = (x)\ (x)$

$18\sqrt{4} = x^2$

$18(2) = x^2$
$x^2 = 36$

$x = \pm\sqrt{36} = \pm 6$

d) $m+2$ y $m+1$

Sea x la media proporcional. Por lo tanto,

$m+2/x = x/m+1$

$(m+1)(m+2) = x^2$

$x^2 = m^2+2m+m+2 = m^2+3m+2$

$x = \pm\sqrt{(m^2+3m+2)}$

11.25

Si $(x+y) : (x-y) = 5 : 2$, calcule $x : y$

$x+y/x-y = 5/2$

$(2)\ (x+y) = 5(x-y)$

$2x+2y = 5x-5y$

$2x-5x = -5y-2y$

$-3x = -7y$

$3x = 7y$

$x = 7y/3$ (observar bien esta respuesta, difiere de la ofrecida por el libro).

11.29

a) Si x es directamente proporcional a *y* y para $x=8$, $y=5$, encuentre *y* cuando $x=20$

$x = ky$

$k = x/y = 8/5$

luego

$20 = 8/5\ y$

$y = (5/8)(20)$

$y = 100/8 = 12\ ½$

b) Si *x* es directamente proporcional a y^2 y para x=4, y=3, encuentre *x* cuando y=6

$x = ky^2$

$k = x/y^2 = 4/3^2 = 4/9$

luego

$x = ky^2$
$x = (4/9)(6)^2 = (4/9)(36) = 144/9 = 16$

11.30 La distancia recorrida por un cuerpo que cae libremente, partiendo del reposo, es directamente proporcional al cuadrado del tiempo de descenso. Sabiendo que un cuerpo cae desde 144 pies en 3 segundos, ¿qué distancia habrá caído en 10 segundos?

Empecemos:
$D = kt^2$

$144 = k3^2$

$144 = k9$
$k = 144/9 = 16$

luego

$d = 16(10)^2 = 16(100) = 1{,}600$ pies

11.33 ¿Cuál es el precio unitario de cada artículo redondeado a centenas?

a) Una lata de 1.37 litros de jugo de frutas que cuesta $1.09

x¢/109¢ = 1 litro/1.3 litros

x = 109/1.3 = 80.1 cent./litro

b) Un frasco de 283 gramos de mermelada que cuesta $0.79

x/79 = 1 gramo/283 gramos

x = 79/283 = 0.3 cent./gramo

c) Un frasco de 10.4 onzas de crema facial que cuesta $3.73

x/373 = 1 onza/10.4 onzas

x = 373/10.4 = 35.9 cent./onza

d) Una docena de latas de chícharos que cuesta $4.20

x/420) 1 lata/12 latas

x = 420/12 = 35 cent./lata

e) 25 libras de semillas de pasto que cuesta $27.75

x/2,775 = 1 libra/25 libras

x= 2775/25 = 111 cent./lb

f) 3 donas que cuestan $0.49

x/49 = 1 dona/3 donas

x = 49/3 = 16.3 cent/dona

11.34 ¿Cuál es la mejor compra?

a) 100 pastillas de aspirina a $1.75 o 200 pastillas a $2.69

x/175 = 1 pastilla/100 pastillas

x = 175/100 = 1.75 cent./pastilla

x/269= 1 pastilla/200 pastillas

x = 269/200 = 1.34 cent./pastilla

En virtud de que 1.75> 1.34, la mejor compra es 200 pastillas $2.69.

b) Un frasco de 6 onzas de mantequilla de nuez a $0.85 o uno de 12 onzas a $1.59.

x/85= 1 onza/6 onzas

x = 85/6 = 14.17 cent./onza

x/159 = 1 onza/12 onzas

x= 159/12 = 13.25 cent./onza

Como 14.17 > 13.25, la mejor compra es un frasco de12 onzas por $1.59.

c) Una botella de 14 onzas de antiséptico bucal a $1.15 o una de 20 onzas a $1.69

x/115 = 1 onza/14 onzas

x = 115/14 = 8.2 cent/onza

x/169 = 1 onza/20 onzas

x = 169/20 = 8.45 cent/onza

Como 8.2 <8.45, seleccionamos la opción botella de 14 onzas por $1.15

d) Un frasco de 9 onzas con mostaza a $0.35 o uno de 24 onzas a $0.89

x/35 = 1 onza/9 onzas

x = 35/9 = 3.9 cent/onza

x/89 = 1 onza/24

x = 89/24 = 3.7 cent/onza

Como 3.7 > 3.9, opción frasco de 24 onzas por $0.89

e) Una caja de galletas de 454 gramos a $1.05 o una de 340 gramos a $0.93

x/195 = 1 gramo/454 gramos

x = 105/454 = 0.23 cent/gramo

x/93 = 1 gramo/390 gramos

x = 93/390 = 0.27 cent/gramo

Como 0.23 < 0.27, opción caja de 454 gramos por $1.05.

f) Una botella de 0.94 litros de suavizante para ropa a \$0.99 o una de 2.76 litros a \$2.65

x/99 = 1 litro/0.94 litro

x = 99/0.94 = 105.3 cent/litro

x/265 = 1 litro/2.76

x = 265/2.76 = 96 cent/litro

Como 95 < 105.3, opción una botella de 2.76 litros por \$2.65.

Dofanto de Alejandría. (Siglo III) Matemático griego. Sus escritos contribuyeron de forma notable al perfeccionamiento de la notación algebraica y al desarrollo de los conocimientos del álgebra de su época. Mediante artificios de cálculo supo dar soluciones particulares a numerosos problemas, y estableció las bases para un posterior desarrollo de importantes cuestiones matemáticas. De su obra se conservan varios volúmenes de la *Aritmética* (libro de inspiración colectiva, pero redactado por un solo autor) y fragmentos de *Porismas* y *Números poligonales*.

11

RESOLUCIÓN DE ALGUNOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 12 DEL LIBRO *ÁLGEBRA SUPERIOR* DE SPIEGEL-MOYER

Introducción

Spiegel-Moyer desarrollan el capítulo 12, denominado FUNCIONES Y GRÁFICAS, desde la página 89 hasta la 113. Tratan allí los siguientes puntos: variables, relaciones, funciones, notación funcional, sistemas de coordenadas rectangulares, función de dos variables, simetría, desplazamientos, escalamiento y utilización de la calculadora gráfica.

Problemas propuestos (página 106)

12.33 Dada la función $y = 5+3x-2x^2$, encuentre los valores de *y* correspondientes a
$x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

Cuando $x = -3$

$y = 5+3(-3)-2(-3)^3 = 5-9-18 = -22$

Cuando $x = -2$

$y = 5+3(-2)-2(-2)^2 = 5-6-8 = -9$

Cuando $x = -1$

$y = 5+3(-1)-2(-1)^2 = 5-3-2 = 0$

Cuando $x = 0$

$y = 5+3(0)-2(0)^2 = 5+0-0 = 5$

Cuando x = 1

$y = 5+3(1)-2(1)^2 = 5+3-2 = 6$

Cuando x = 2

y = 5+3(2)-2(2)2) = 5+6-8 = 3

Cuando x= 3

$y = 5+3(3)+2(3)^2 = 5+9-18 = -4$

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	-22	-9	0	5	6	3	-4

12.34 Amplíe la tabla de valores del problema 12.33 hallando los valores de *y* correspondientes a x = -5/2, -3/2, -1/2, 1/2, 3/2, 5/2

Cuando x = 5/2

$y = 5+3(-5/2)-2(-5/2)^2 = 5-15/2-2(25/4) = 5-15/2-25/2 = -15$

Cuando x = -3/2

$y = 5+3(-3/2)-2(-3/2)^2 = 5-9/2-2(9/4) = 5-9/2-9/2 = -4$

Cuando x = -1/2

$y = 5+3(-1/2)-2(-1/2)^2 = 5-3/2-2(1/4) = 5-3/2-1/2 = 3$

Cuando x = 1/2
$y = 5+3(1/2)-2(1/2)^2 = 5+3/2-2(1/4) = 5+3/2-1/2 = 6$

Cuando x = 3/2

$y = 5+3(3/2)-2(3/2)^2 = 5+9/2-2(9/4) = 5+9/2-9/2 = 5$

Cuando x = 5/2

$y = 5+3(5/2)-2(5/2)^2 = 5+15/2-2(25/4) = 5+15/2-25/2 = 0$

X	-5/2	-3/2	-1/2	1/2	3/2	5/2
Y	-22	-9	0	5	6	3

12.35 Establezca el dominio y el rango de cada ecuación.

a) $y = -2x+3$

Dominio = {todos los números reales}; puesto que si *x* es sustituida por cualquier número real la ecuación citada está definida.

Rango = {todos los números reales}

b) $y = x^2-5$

Dominio = {todos los números reales}; puesto que todos los números reales pueden elevarse al cuadrado, x^2-5 está definido para todos los números reales.

Rango = {todos los números reales ≥ -5}

c) $y = x^3-4$

Dominio = {todos los números reales}; puesto que todos los números reales pueden elevarse al cubo, y darán como resultado otros números reales.
Rango = {todos los números reales}

d) $y = 5-2x^2$

Dominio = {todos los números reales}; puesto que $5-2x^2$ está definida ante cada número real.

Rango = {todos los números reales ≤ 5}

e) $y = 2/x+6$

Dominio = {todos los números reales $\neq -6$}; puesto que para el número real -6, la ecuación dada no está definida, ya que el denominador se hace cero (0).

Rango = {todos los números reales $\neq 0$}

f) $y = \sqrt{(x-5)}$

Dominio = {todos los números reales ≥ 5}; puesto que si el número real es inferior a 5, el resultado excede el campo del número real.

Rango = {todos los números reales ≥ 0}

g) $y = \sqrt[3]{(1-2x)}$

Dominio = {todos los números reales}

Rango = {todos los números reales}

h) $y = x/x+1$

Dominio = {todos los números reales $\neq -1$}; puesto que para el número real -1, la ecuación se hace indefinida.

Rango= {todos los números reales $\neq 1$}

i) $y = 4/x$

Dominio = {todos los números reales $\neq 0$}

Rango = {todos los números reales $\neq 0$}

12.36 ¿Para cuales relaciones y es función de x?

a) $y = x^3+2$, es una función, puesto que para cada valor de *x*, x^3+2 da exactamente como resultado un valor.

b) $x = y^3+2$, es una función, puesto que para cada número real, *x* es un número real y cada número real tiene exactamente una raíz cúbica real.

c) $x = y^2+4$

$y = \pm\sqrt{(x-4)}$, no es una función, puesto que para x=8, *y* puede ser 2 ó -2.

d) $y = x^2-5$, es una función, puesto que para cada valor que asuma *x*, x^2-5 da exactamente como resultado un valor.

e) $x^2+y^2 = 5$, no es una función debido a que $y = \pm\sqrt{(5-x^2)}$ cuando *x* sea sustituida, por ejemplo, por 3,, y= ±2, por tanto no es una función.

f) $y = \pm\sqrt{(x-7)}$, no es una función, por las razones expuestas arriba, es decir, si x= 8, entonces y= ±1.

h) $y = \sqrt[3]{(x+1)}$, es una función; cada número real que asuma *x*, dará como resultado exactamente una raíz cúbica real.
i) $y = \sqrt{(5+x)}$, es una función, debido a que para cada valor de $x \geq -5$, $\sqrt{(5+x)}$ da como resultado la raíz cuadrada buscada.

12.37 Si $f(x) = 2x^2+6x-1$, encuentre f(-3), f(-2), f(0), f(1/2), f(3):
$f(-3) = 2(-3)^2+6(-3)-1 = 18-18-1 = -1$

$f(-2) = 2(-2)^2+6(-2)-1 = 8-12-1 = -5$

$f(-0) = 2(0)^2+6(0)-1 = -1$

$f(1/2) = 2(1/2)^2+6(1/2)-1 = 2(1/4)+3-1 = ½+2 = 5/2$

$f(3) = 2(3)^2+6(3)-1 = 18+18-1 = 35$

12.38 Si $F(u) = u^2-2u ⁄ 1+u$, encuentre a) $F(1)$, b) $F(2)$, c) $F(x)$, d) $F(-x)$.

a) $F(1) = 1^2-2(1) ⁄ 1+1 = 1-2 ⁄ 2 = -1/2$

b) $F(2) = 2^2-2(2) ⁄ 1+2 = 4-4 ⁄ 3 = 0/3 = 0$

c) $F(x) = x^2-2(x) ⁄ 1+x = x^2-2x ⁄ 1+x$

d) $F(-x) = (-x)^2-2(-x) ⁄ 1-x = x^2+2x ⁄ 1-x$

12.40 Si $F(x, y) = 2x^2+4xy-y^2$, encuentre:

a) $F(1, 2)$

$F(1, 2) = 2(1)^2+4(1)(2)-(2)^2 = 2+8-4 = 6$

b) $F(-2, -3)$

$F(-2, -3) = 2(-2)^2+4(-2)(-3)-(-3)^2 = 8+24-9 = 23$

c) $F(x+1, y-1)$

$= 2(x+1)^2+4(x+1)(y-1)-(y-1)^2 = 2(x^2+2x+1)+4(y+xy-x-1)-y^2+2y-1 =$

$2x^2+4x+2+4y+4xy-4x-y^2+2y-1 = 2x^2-3+6y+4xy-y^2 = 2x^2+4xy-y^2+6y-3$

12.42 Si $y = 3x+2$, a) obtenga los valores de *y* correspondientes a $x = -2$, -1, 0, 1, 2 y b) represente los puntos (x, y) obtenidos.

$y = 3(-2)+2 = -6+2 = -6+2 = -4$

$y = 3(-1)+2 = -3+2 = -1$

$y = 3(0)+2 = 0+2 = 2$

$y = 3(1)+2 = 3+2 = 5$

$y = 3(2)+2 = 6+2 = 8$

12.43 Determine si la gráfica de cada relación es simétrica con respecto al eje *y*, al eje *x* o al origen.

a) $y = 2x^4+3$

Sustituyendo -*x* por *x*, se obtiene $y = 2(-x)^4+3$, que es equivalente a $y = 2x^4+3$, por lo que la gráfica es simétrica con respecto al eje *y*.

Sustituyendo -*y* por *y*, se obtiene $-y = 2x^4+3$, que no es equivalente a $y = 2x^4+3$, por lo que la gráfica no es simétrica con respecto al eje *x*.

Sustituyendo -*x* por *x*, *y* -*y* por *y*, se obtiene $-y = 2(-2)^4+3$, que no es equivalente a $y = 2x^4+3$, por tanto la gráfica no es simétrica respecto al origen de coordenada.

b) $y = (x-3)^2$

Sustituyendo -*x* por *x*, se obtiene $y = (-1-3)^3$; que en modo alguno es equivalente a $y = (x-3)^3$; no hay simetría respecto al eje *y*.

Sustituyendo -*y* por *y*, se obtiene $-y = (x-3)^3$, que no es equivalente a $y = (x-3)^3$; no hay simetría respecto al eje *x*.

Finalmente, sustituyendo -*y* por *y* y -*x* por *x*, obtenemos $-y = (-x-3)^3$, que es equivalente a $y = (x-3)^3$; hay simetría respecto al origen.

c) $y = -\sqrt{(9-x)}$

Al sustituir -*x* por *x*, tendremos $y = -\sqrt{[9-(-x)]} = -\sqrt{(9+x)}$, obviamente esta ecuación no es equivalente a $y = -\sqrt{(9-x)}$; no hay simetría respecto al eje *y*; al sustituir -*y* por *y*, tendremos $-y = -\sqrt{[9-(-x)]}$, que no es equivalente a $y = -\sqrt{(9-x)}$; al sustituir –x por x, -y por y, tendremos $-y= -\sqrt{9-(-x)}$ que no es equivalente a $y = -\sqrt{(9-x)}$, por tanto no es simétrica respecto al origen.

d) $y = 3$

Al sustituir -x por x, tenemos que $y = 3$ no se altera, hay simetría respecto al eje *y*; en cambio, al sustituir -*y* por *y*, $-y = 3$ no equivale a $y = 3$, no hay simetría respecto al eje *x*; una conclusión similar adoptamos con respecto al origen.

e) $y = -5x^3$

Al sustituir -*x* por *x*, tenemos $y = (-5)(-x)^3$, tenemos una ecuación no equivalente a $y = -5x^3$, no hay simetría respecto al eje *y*; si sustituimos -*y* por *y*, tendremos $-y = -5x^3$ no equivalente a $y = 5x^3$, no hay simetría respecto al eje *x*; si sustituimos -*y* por *y*, -*x* por *x*, tendremos $-y = (-5)(-2)^3$ equivalente a $y = -5x^3$, hay simetría respecto al origen.

f) $y = 7x^2+4$

Al sustituir -*x* por *x*, tenemos $y = 7(-x)^2+4$ equivalente a $y = 7x^2+4$; hay simetría respecto al eje *y*; al sustituir -*y* por *y*, tenemos $-y = 7x^2+4$ que no es equivalente a $y = 7x^2+4$, no hay simetría respecto al eje *x*; al sustituir -*x* por *x*, -*y* por *y*, tenemos $-y = 7(-x)^2+4$ que no es equivalente a $y = 7x^2+4$, luego no hay simetría respecto al origen.

g) $y^2 = x+2 = \pm\sqrt{x+2}$

Al sustituir -*x* por *x*, tenemos $y^2 = -x+2$, es decir $y = \pm\sqrt{(x+2)}$, es decir $y = \pm\sqrt{(x+2)}$, obviamente no equivalente a $y^2 = x+2$; en cambio, al sustituir -*y* por *y*, tenemos $-y^2 = x+2$ que es equivale a $y^2 = x+2$, entonces hay simetría respecto al eje *x*; al sustituir -*x* por *x*, -*y* por *y*, tenemos $-y^2 = -x+2$, que no es equivalente a $y^2 = x+2$, luego no hay simetría respecto al origen.

h) y = 3x-1

Al sustituir -*x* por *x*, tenemos y = 3)-x)-1), difiere ésta de y = 3x-1, no hay simetría respecto al eje y; igualmente sustituir -*y* por *y*, tenemos y = 3x-1, no hay simetría respecto al eje *x*; y al sustituir -*x* por *x*, -*y* por *y*, tenemos -y = 3(-x)-1), que no es equivalente a y = 3x-1, no hay simetría respecto al origen.

i) y = 5x

Al sustituir -*x* por *x*, tenemos y = 5(-x), no equivalente a y = 5x, en consecuencia no hay simetría respecto al eje *y*; igual sucede cuando sustituimos -*y* por *y*, obteniendo -y = 5x, la cual no es equivalente a y = 5x; pero cuando sustituimos -*x* por *x*, y -*y* por *y*, tenemos -y = 5(-x) equivalente a y = 5x; por tanto, la gráfica es simétrica respeto al origen.

12.45 Represente las funciones (nos limitaremos a construir la tabla):

a) f (x) = 1-2x

f (x) = 1-2x

f (-2) = 1-2(-2) = 1+4 = 5

f (-1) = 1-2(-1) = 1+2 = 3

f (0) = 1-2(0) = 1

f (1) = 1-2(1) = -1

f (2) = 1-2(2) = 1-4 = -3

f (3) = 1-2(3) = 1-6 = -5

X	-2	-1	0	1	2	3
Y	5	3	1	-1	-3	-5

b) $f(x) = x^2-4x+3$

$f(x) = x^2-4x+3$

$f(-2) = -2^2-4(-2)+3 = 4+8+3 = 15$

$f(-1) = -1^2-4(-1)+3 = 1+4+3 = 8$

$f(0) = 0^2-(0)+3 = 3$

$f(1) = 1^2-4(1)+3 = 1-4+3 = 0$

$f(2) = 2^2-4(2)+3 = 4-8+3 = 1$

$f(3) = 3^2-4(3)+3 = 9-12+3 = 0$

$f(4) = 4^2-4(4)+3 = 16-16+3$

$f(5) = 5^2-4(5)+3 = 25-20+3 = 8$

X	-2	-1	0	1	2	3	4
Y	15	8	3	0	-1	0	3

c) $f(x) = 4-3x-x^2$

$f(-4) = 4-3(-4)-(-4)^2 = 4+12-16 = 0$

$f(-3) = 4-3(-3)-(-3)^2 = 4+9-9 =4$

$f(-2) = 4-3(-2)-(-2)^2 = 4+6-4 = 6$

$f(-1) = 4-3(-1)-(-1)^2 = 4+3-1 = 6$

$f(0) = 4-3(0)-(0)^2 = 4$

$f(1) = 4-3(1)-1^2 = 4-3-1 = 0$

X	-4	-3	2	-1	0	1
Y	0	4	6	6	4	0

12.47 Represente:

a) $x^2+y^2 = 16$

$y^2 = 16-x^2$

$y = \pm\sqrt{(16-x^2)}$

Cuando $x = -4$

$y = \pm\sqrt{[16-(-4)^2]} = \pm\sqrt{(16-16)} = 0$

Cuando $x = -3$

$y = \pm\sqrt{[16-(-3)^2]} = \pm\sqrt{(16-9)} = \pm\sqrt{7}$

Cuando $x = -2$
$y = \pm\sqrt{[16-(-2)^2]} = \pm\sqrt{(16-4)} = \pm\sqrt{8} = \pm\sqrt{4}\sqrt{2} = \pm 2\sqrt{2}$

Cuando $x = -1$

$y = \pm\sqrt{[16-(-1)^2]} = \pm\sqrt{(16-1)} = \pm\sqrt{15}$
Cuando $x = 0$

$y = \pm\sqrt{[16-(0)^2]} = \pm\sqrt{16} = \pm 4$

Cuando x = 1

$y = \pm\sqrt{[16-(1)^2]} = \pm\sqrt{15}$

Cuando x = 2

$y = \pm\sqrt{[16-(2)^2]} = \pm\sqrt{18-4} = \pm\sqrt{12} \pm\sqrt{4}\sqrt{3} = \pm 2\sqrt{3}$

Cuando x = 3

$y = \pm\sqrt{(16-3^2)} = \pm\sqrt{16-9} = \pm\sqrt{7}$

Cuando x = 4

$y = \pm\sqrt{(16-4^2)} = 0$

X	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
Y	0	$\pm\sqrt{7}$	$\pm 2\sqrt{2}$	$\pm\sqrt{15}$	± 4	$\pm\sqrt{15}$	$\pm 2\sqrt{3}$	$\pm\sqrt{7}$	0

b) $x^2+4y^2 = 16$

$4y^2 = 16-x^2$

$y^2 = 16-x^2 / 4$
$y = \pm\sqrt{(16-x^2/4)}$

Cuando x = -4

$y = \pm\sqrt{(16-(-4)^2 / 4)} = 0$

Cuando x = -3

$y = \pm\sqrt{(16-(-3)^2/4)}$

$y = \pm\sqrt{(16-9/4)}$
$y = \pm\sqrt{(7/4)}$

Cuando $x = -2$

$y = \pm\sqrt{(16-(-2)^2/4)}$

$y = \pm\sqrt{(16-4/4)}$

$y = \pm\sqrt{(12/4)}$

$y = \pm\sqrt{3}$

Cuando $x = -1$

$y = \pm\sqrt{(16-(-1)^2/4)}$

$y = \pm\sqrt{(15/4)}$

Cuando $x = 0$

$y = \pm\sqrt{16-0^2}$

$y = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

Cuando $x = 1$

$y = \pm\sqrt{(16-1^2/4)}$

$y = \pm\sqrt{(15/4)}$

Cuando $x = 2$

$y = \pm\sqrt{(16-2^2/4)}$

$y = \pm\sqrt{(12/4)}$

$y = \pm\sqrt{3}$

Cuando x = 3

$y = \pm\sqrt{(16-(-2)^2 / 4)}$

$y = \pm\sqrt{(7/4)}$

Cuando x = 4

$y = \pm\sqrt{(16-4^2 / 2)}$

$y = 0$

X	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
Y	0	$\pm\sqrt{(7/4)}$	$\pm\sqrt{3}$	$\pm\sqrt{(15/4)}$	± 2	$\pm\sqrt{(15/4)}$	$\pm\sqrt{3}$	$\pm\sqrt{(7/4)}$	0

12

RESOLUCIÓN DE ALGUNOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 13 DEL LIBRO *ÁLGEBRA SUPERIOR* DE SPIEGEL-MOYER

Introducción

Spiegel-Moyer desarrollan el capítulo 13, denominado ECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA, desde la página 114 hasta la 127. Tratan aquí los siguientes puntos: Ecuaciones lineales, ecuaciones con variables y problemas con enunciado.

Problemas propuestos (pág. 124)

13.34 Resuelva las ecuaciones siguientes:

a) $3x-2= 7$

$3x= 7+2$

$x= 9/3= 3$

b) $y+3(y-4)= 4$

$y+3y-12= 4$

$y= (4+12)/4= 4$

c) $4x-3= 5-2x$

$4x+2x= 5+3$
$6x= 8$

$x= 8/6= 4/3$

d) $x-3-2(6-2x)= 2(2x-5)$

$x-3-12+4x= 4x-10$

$5x-4x= 15-10$

$x= 5$

e) $(2t-9)/3= (3t+4)/2$

$2(2t-9)= 3(3t+4)$

$4t-18= 9t+12$

$4t-9t= 12+18$

$-5t= 30$

$t= -30/5= -6$

f) $(2x+3)/(2x-4)= (x-1)/(x+1)$

$(x+1) (2x+3)= (x-1)(2x-4)$

$(2x^2+2x+3x+3)= (2x^2-2x-4x+4)$

$(2x^2+5x+3)= (2x^2-6x+4)$

$2x^2+5x+3-2x^2+6x-4= 0$

$11x-1= 0$

$x= 1/11$

g) $(x-3)^2+(x+1)^2= (x-2)^2+(x+3)^2$

$[(x)^2-2x(3)+3^2]+[(x)^2+2x(1)+1^2]=[(x)^2-2x(2)+2^2]+[(x)^2+2x(3)+3^2]$

$(x)^2-6x+9+(x)^2+2x+1= (x)^2-4x+4+(x)^2+6x+9$

$2x^2-4x+10= 2x^2+2x+13$

$2x^2-4x+10-2x^2-2x-13= 0$

$-6x-3= 0$
$x= -3/6= -1/2$

h) $(2x+1)^2= (x-1)^2+3x(x+2)$

$(2x)^2+2x(1)+1^2= (x)^2-2x(1)+1^2+3x^2+6x$

$4x^2+2x+1= x^2-2x+1+3x^2+6x$

$4x^2+2x+1= 4x^2+4x+1$

$4x^2+2x+1-4x^2-4x-1= 0$

$-2x= 0$

$x= -0/2= 0$ Tengo la impresión de que el resultado arrojado por el libro (identidad) es errado.

i) $(3/z)-(4/5z)= 1/10$

$30/z-40/5z= 1$

$150-40/5z= 1$

$110/5z= 1$

$110 = 5z$

$z = 110/5 = 22$

j) $(2x+1/x)+(x-4/x+1) = 3$

$[(x+1)(2x+1)+x(x-4)]/x(x+1) = 3$

$[(x+1)(2x+1)+x(x-4)]/x(x+1) = (3)x(x+1)$

$(x+1)(2x+1)+x(x-4) = 3x^2+3x$

$2x^2+2x+x+1+x^2-4x = 3x^2+3x$

$3x^2-x+1-3x^2-3x = 0$

$-4x+1 = 0$

$-4x = -1$

$x = 1/4$

k) $(5/y-1)-(5/y+1) = (2/y-2)-(2/y+3)$

$[(y+1)(5/y-1)-(y-1)(5/y+1)]/(y-1)(y+1) = [(y+3)(2/y-2)-(y-2)(2/y+3)]/(y-2)(y+3)[(5y+5)-(5y-5)]/(y-1)(y+1) = [(2y+6)-(2y-4)]/(y-2)(y+3)$

$(5y+5-5y+5)/(y-1)(y+1) = (2y+6-2y+4)/(y-2)(y+3)$

$10/(y-1)(y+1) = 10/(y-2)(y+3)$

$10(y-2)(y+3) = 10(y-1)(y+1)$

$10(y^2-2y+3y-6) = 10(y^2-y+y-1)$
$10y^2-20y+30y-60 = 10y^2-10y+10y-10$

$10y^2-20y+30y-60-10y^2+10y-10y+10= 0$

$10y-50= 0$

$10y= 50$

$y= 50/10= 5$

13.35

a) $2(x-p) = 3(6p-x)$; ¿x?

$2x-2p = 18p-3x$

$2x+3x = 18p+2p$

$5x = 20p$

$x = 20/5p = 4p$

b) $2by–2a = ay–4b$: y

$2by–ay = -4b+2a$
$y(2b-a) = 2a-4b$

$y = (2a–4b)/(2b-a)$

$y = -2$; si $a \neq 2b$

c) $(2x-a)/(b) = (2x-b)/(a)$: x

$a(2x-a) = b(2x-b)$
$2ax-a^2 = 2bx–b^2$

$x = [(a^2-b^2)/(a-b)]/2 = (a+b)/2$; si $a\neq b$

d) $x-a/x-b = x-c/x-d$: x

$(x-a)(x-d) = (x-b)(x-c)$

$x^2dx-ax+ad = x^2-cx-bx+cb$

$-dx-ax+cx+bx = cb-ad$

$bx+cx-ax-dx = cb-ad$

$x(b+c-a-d) = cb-ad$

$x = (bc-ad)/(b+c-a-d)$

e) $1/ay + 1/by\ (y) = 1/c$: y

$1/a + 1/b = y/c$

$c/a + c/b = y$

$(bc+ac)/(ab) = y$

$y = (ac+bc)/(ab)$

13

RESOLUCIÓN DE ALGUNOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 14 DEL LIBRO *ÁLGEBRA SUPERIOR* DE SPIEGEL-MOYER

Introducción

Spiegel-Moyer desarrollan el capítulo 14, denominado ECUACIONES DE RECTAS, desde la página 128 hasta la 136. Tratan aquí los siguientes puntos: Pendiente de una recta, rectas paralelas y perpendiculares, forma pendiente-ordenada al origen de la ecuación de una recta y forma de intersección de la ecuación de una recta.

Probables errores

La respuesta correspondiente al ejercicio **14.10** f), página 135, el libro incurre en un error, pues no es 26, es -6.

Problemas propuestos (página 134)

14.10 ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa a través de cada uno de los pares de puntos siguientes?

"La pendiente de una recta es la razón de cambio en y comparada con el cambio en x".[11] (Comillas y cursiva son nuestras).

a) (-1, 2), (4, -3)

$m = (y_2-y_1)/(x_2-x_1) = -3 -2 ⁄ 4-(-1) = -5/5 = -1$
b) (3, 4), (-4, -3)

[11] Ibíd., p. 128.

$m = (y_2\text{-}y_1)/(x_2\text{-}x_1) = \text{-}3\text{-}4 \,/\, \text{-}5\text{-}5 = \text{-}7/\text{-}7 = 1$

c) (5, 4), (5, -2)

$m = (y_2\text{-}y_1)/(x_2\text{-}x_1) = \text{-}2\text{-}4 \,/\, 5\text{-}5) = \text{-}6/0 \rightarrow$ no está definida, es una recta vertical

d) (-5, 3), (2, 3)

$m = (y_2\text{-}y_1)/(x_2\text{-}x_1) = 3\text{-}3 \,/\, \text{-}2\text{-}(\text{-}5) = 0/7 = 0$, es una recta horizontal

e) (-1, 5), (-2, 3)

$m = (y_2\text{-}y_1)/(x_2\text{-}x_1) = 3\text{-}5 \,/\, \text{-}2\text{-}(\text{-}1) = \text{-}2/\text{-}1 = 2$

f) (7, 3), (8, -3)

$m = y_0\text{-}y_1 \,/\, x_2.x_1 = \text{-}3\text{-}3 \,/\, 8\text{-}7 = \text{-}6/1 = \text{-}6$ (Difiere de la respuesta del libro).

14.11 Determine si la recta que pasa por los puntos P y Q es paralela, perpendicular o ninguna de las opciones anteriores a la recta que pasa por los puntos R y S.

"Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si sus pendientes son iguales".[12] (Comillas y cursiva son nuestras).

a) P(4, 2), Q(8, 3), R(-2, 8), S(1, -4)

Pendiente (PQ) = $(y_2\text{-}y_1)/(x_2\text{-}x_1) = 3\text{-}2 \,/\, 8\text{–}4 = 1/4$

Pendiente (RS) = $(y_2\text{-}y_1)/(x_2\text{-}x_1) = \text{-}4\text{-}8 \,/\, 1\text{-}(\text{-}2) = \text{-}12/3 = \text{-}4$

Son rectas perpendiculares, ya que (1/4)(-4) = -1

[12] Ibíd., p. 129.

b) P(0, -5), Q(15, 0), R(1,2), S(0, 5)

Pendiente (PQ) = $(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$ = 0-(-5) ⁄ 15-0 = 5/15 = 1/3

Pendiente (RS) = $(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$ = 5-2 ⁄ 0-1 = 3/-1 = -3/1

Como ambas pendientes son desiguales, no son paralelas; y como

(1/3) (-3) = -1, son perpendiculares

c) P(-7, 8), Q(8, -7), R(-8,10), S(6, -4)

Pendiente (PQ)= $(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$ = 7-8 ⁄ 8-(-7) = -15/8+7 = -15/15 = -1

Pendiente (RS) = $(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$ = -7-10 ⁄ 6-(-8) = -14/14 = -1
Las pendientes son iguales, las rectas son paralelas

d) P(8, -2), Q(2, 8), R(-2, -8), S(-8, -2)

Pendiente (PQ)= $(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$ = 8-(-2) ⁄ 2–8 = 10/-6 = 5/-3= -5/3

Pendiente (RS) = $(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$ = -2-(-8) ⁄ -8-(-2) = -2+8/-8+2 = 6/-6= -1

Como ambas pendientes son desiguales, las rectas no son paralelas,

y como (5/-3)(-1) = 5/3, tampoco son perpendiculares.

14.13 Determine si los tres puntos proporcionados son colineales o no.

a) (-3, 1), (-11, -1), y (-15, -2)

m_1 = $(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$ = -1-1 ⁄ -11-(-3) = -2/-11+3 = -2/-8= 1/4

m_2 = -2-(-1) ⁄ -15-(-11) = -2+1 ⁄ -15+11 = -1/-4 = 1/4
Son colineales, puesto que poseen la misma pendiente.

b) (1, 1), (4, 2), y (2, 3)

$m_1 = (y_2-y_1)/(x_2-x_1) = 2-1 \,/\, 4-1 = 1/3$

$m_2 = (y_2-y_1)/(x_2-x_1) = 3-2 \,/\, 2-4 = 1/-2$

Como las pendientes son desiguales, no son colineales.

14.14 Escriba la ecuación de la recta que tiene como pendiente m y como ordenada al origen b.

a) $m = -3$, $b = 4$

$y = mx+b$

Sustitución:

$y = -3x+4$

b) $m = 0$, $b = -3$

$y = mx+b$

$y = -3$

c) $m = 2/3$, $b = -2$

$y = mx+b$

$y = 2/3x-2;$

$y = 2/3x-2 = 2x–6 \,/\, 3;$

$3y = 2x-6$
$2x-3y = 6$

d) $m = 4$, $b = 0$

$y = mx+b$

$y = 4x$

e) $m = -1/2$, $b = 3$

$y = mx+b$

$y = -1/2x+3$

$-1/2x+3 = -x+6/2$

$2y = -x+b$

$x+2y = 6$

f) $m = -5/6$, $b = 1/6$

$y = mx+b$

$y = -5/6x+1/6$

$-5/6x+1/6 = -5x+1/6$

$6y = -5x+1$
$5x+6Y = 1$

14.15 Escriba la ecuación de la recta que pasa por el punto P y tiene como pendiente m.

a) $p(-5, 2)$, $m = -1$

Tenemos que aplicar el criterio de la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta que se expresa en: $y–y_1 = m(x–x_1)$, puesto que $(x_1, y_1) = (-5, 2)$ y $m = -1$, tendremos

$y-2 = -(x+5)$

$y-2 = -x-5$

$x+y = -5+2$

$x+y = -3$

b) p(-4, -3), m = 4

$y-y_1 = m(x-x_1)$

$y-(-3) = 4(x-(-4))$

$y+3 =4(x+4)$

$y+3 = 4x+16$

$-4x+y = 16-3$

$-4x+y = 13$

$4x-y = -13$

c) p(4, -1), m = 2/3

$y-y_1 = m(x-x_1)$
$y-(-1) = 2/3(x-4)$

$y+1 = 2/3(x–4)$

$2/3x–8/3 = 2x-8/3$

$3(y+1) = 2x-8$

$3y+3 = 2x–8$

$-2x+3y = -8-3$

$-2x+3y = -11$

$2x–3y = 11$

d) $p(0, 4)$, $m = -4/3$

$y-y_1 = m(x-x_1)$

$y-4 = -4/3(x-0)$

$y-4 = -4/3x$

$(y-4)(3) = -4x$

$3y-12 = -4x$

$4x+3y = 12$

e) $p(2, 6)$, $m = -5$

$y-y_1 = m(x-x_1)$

$y-6 = -5(x-2)$

$y-6 = -5x+10$

$5x+y = 10+6$

$5x+y = 16$

f) p(-1, 6), m = 0

$y-y_1 = m(x-x_1)$

$y-(6) = 9(x-(-1)$
$y-6= 0$

$y = 6$

14.16 Escriba la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q.

a) p(1, 2), q(2, 4)

$y-y_1 = (y_2-y_1/x_2-x_1)(x-x_1)$

$y-2 = (4-2⁄2-1)(x-1)$

después de simplificar queda:

$y= 2x$

d) p(10, 2), q(5, 2)

$y-y_1 = (y_2-y_1/x_2-x_1)(x-x_1)$

$y–2 = (2–2 ⁄ 5-10)(x-10)$

$y-2 = (0/-5)(x-10)= 0$

$y = 2$
e) p(3, 6), q(-3, 8)

$y-y_1 = (y_2-y_1/x_2-x_1)(x-x_1)$

$y-6 = (8-6 ⁄ -3-3)(x-3)$

$y-6 = (2/-6)(x-3)$

$(-6)(y-6) = 2x-6$

$-6y+36 = 2x-6$

$-6y-2x = -6-36$

$-6y-2x = -42$

$6y+2x = 42$
$6y/2 + 2x/2 = 42/2$

$x+3y = 21$

f) p(-4, 2), q(2, 4)

$y-y_1 = (y_2-y_1/x_2-x_1)(x-x_1) =$

$y-2 = 4-2/2-(-4)\ (x-(-4)$

$y-2 = 2/6\ (x+4)$

$6y-12 = 2x+8$

$6y = 2x+8+12$

$6y = 2x+20$

$2x/2 - 6y/2 = -20/2$
$y = (2x+20)/6$ $x–3y = -10$

$y = 1/3x+10/3$

$1/3x+10/3 = x+10/3$

$3y = x+10$

$-3y = -x-10$

$x-3y= -10$

g) p(-1, 3), q(0,6)

$y-y_1 = (y_2-y_1/x_2-x_1)(x-x_1)$

$y-(3) = (6-3/0+1)\ (x+1)$

$y-3 = (3/1)(x+1)$

$y-3 = 3x+3$

$-y+3 = -3-3$
$3x–y = -6$

h) p(0, 0), q(-3, 6)

$y-y_1 = (y_2-y_1/x_2-x_1)(x-x_1)$

$y-0 = (6-0/-3-0)\ (x-0)$

$y = (6/-3)(x)$

$y= -2x$

14.17 Escriba la ecuación de la recta que intercepta al eje x en la coordenada a y al eje y en la b.

a) a = -2, b = -2

$x/a + y/b = 1$

$x/-2 + y/-2 = 1$

$-x-y/2 = 1$

$-x-y = 2$

$x+y = -2$

b) $a = 6, b = -3$

$x/a + y/b = 1$

$x/b + y/-3 = 1$

$x-2y/6 = 1$

$x-2y = 6$

c) $a = -1/2, \ b = 4$

$x/1 + 6/b = 1$

$x/-1/2 + y/4 = 1$

$-8x+y/4 = 1$

$-8x+y = 4$

$8x-y = -4$

d) $a = 6, \ b = 1/3$

$x/a + y/b = 1$

$x/6 \quad y/1/3$

$x+18y/6 = 1$

$x+18y = 6$

14.18 Escriba la ecuación de la recta que pasa por el punto P y es paralela a la recta l.

a) p(2, -4), recta l: $y = 4x-6$

Forma pendiente ordenada:

$y = mx+b$, luego: $y = 4x-6$

$m = 4$

Forma punto pendiente

$y-y_1 = m(x-x_1)$

$y-(-4) = 4(x-2)$

$y+4 = 4x-8$

$y = 4x-8-4$

$y = 4x-12$

b) p(1, 0), recta l: $y = 3x+1$

$m = 3$

Forma punto pendiente
$y-y_1 = m(x-x_1)$

$y-0 = 3(x-1)$

$y = 3x-3$

c) p(-1, -1), recta l: $4x+5y = 5$

Transformación:

$5y = -4x+5$

$y = (-4x+5)/5$

$y = -4/5x +1$

$m = 14/5$

$y-y_1 = m(x-x_1)$

$y-(-1) = -4/5(x-(-1))$

$y+1 = -4/5x-4/5$

$y = -4/5x-4/5-1/1$

$y = -4/5x-9/5$

$-4/5-1/1 = -4-5/5$

De modo que:

$y+4/5x = -9/5$

$5y+5\ 4/5x = -9$

$5y+4x = -9$

$4x+5y = -9$

d) p(3, 5), recta l: $3x-2y = 18$

Transformación:

$3x-18 = 2y$

$2y = 3x-18$

$y = 3x/2-18/2$

$y = 3/2\ x-9$

$m = 3/2$

Punto pendiente

$y-y_1 = m(x-x_1)$

$y-5 = 3/2(x-3)$

$2y-10 = 3x-9$

$2y-3x = -9+10$

$2y-3x = 1$

$3x-2y = -1$

14.19 Escriba la ecuación de la recta que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta l.

a) p(2, -1), recta l: $x = 4y$,
$y = mx+b$

$y = mx+b$

$y = 1/4x$

$m = 1/4$, por tanto, la pendiente de la recta buscada es el inverso de aquella con signo contrario: -4. Ahora tenemos $m = -4$; p(2, -1), por ende;

$y-y_1 = m(x-x_1$
$y+1 = -4(x-2)$

$y = -4x+8-1$

$y = -4x+7$

$4x+y = 7$

b) p(0, 6), recta l: $2x+3y = 5$

Transformación:

$3y = -2x+5$

$y = -2/3\ x+5/3$

$m = -2/3$

Por tanto, la nueva pendiente

$m = 3/2$, así que
$y–y_1 = m(x–x_1)$

$y-6 = 3/2(x-0)$

$y-6 = 3/2\ x$
$2y-12 = 3x$

$-3x+2y = 12$
$3x -2y = -12$

c) $p(1, 1)$, recta l: $3x-2y = 4$

Transformación:

$-2y = -3x+4$

$2y = 3x-4$

$y = 3/2\, x-2$
$m = 3/2$

Luego:

$m = -2/3$, de donde

$y-y_1 = m(x-x_1)$

$y-1 = -2/3(x-1)$

$3y-3 = -2x+2$

$2x+3y = 2+3$

$2x+3y = 5$
d) $p(1, -2)$, recta l: $4x+y = 7$

Transformación:

$y = -4x+7$

$m = -4$

$m = 1/4$,

Luego

$y-y_1 = m(x-x_1)$

$y+2 = 1/4(x-1)$

$4y+8 = x–1$

$-x+4y = -8-8$

$-x+4y = -9$

$x-4y = 9$

14.20 determine si el triángulo cuyos vértices son A, B y C es un triángulo rectángulo.
a) A(4, 0), B(7, -7), y C(2, -5)

Pendiente AB = $(y_2-y_1)/(x_2-x_1)= (-7-0)/(7-4)= -7/3= -7/3$

Pendiente BC = $-5-(-7)/2-7= -5+7/-5 = -2/5$

Pendiente AC = $(-5-0)/(2-4) = -5/-2 = 5/2$

Sí AC⊥ BC, por tanto, el citado triángulo es un triángulo rectángulo.
b) A(5, 8), B(-2, 1), C(2, -3)

$AB = 1-8/-2-5 = -7/-7 = 1$

$BC = -3-1 / 2+2 = -4/4 = -1$

Sí AB ⊥ BC, por tanto, el citado triángulo es un triángulo rectángulo.

c) A(2, 1), B(3, -1), C(1, -2)

$AB = (-1-1)/(3-2) = -2/1 = -2$

BC= (-2+1)/(1-3) = -1/-2 = 1/2

Sí AB⊥BC, por tanto, el citado triángulo es un triángulo rectángulo.

d) A(-6, 3), B(3, -5), C(-1, 5)

AB = (-5-3)/(3+6) = -8/9

BC = (5+5)/(-1-3) = 10/-4 = -5/2

AC = (5-3)/(-1+6) = 2/5

Sí AC ⊥ BC, por tanto, el citado triángulo es un triángulo rectángulo.

René Descartes, también llamado **Renatus Cartesius** (La Haye en Touraine, Turena, 31 de marzo de 1596-Estocolmo, Suecia, 11 de febrero de 1650). Fue un filósofo, matemático y físico francés, considerado como el padre de la geometría analítica y de la filosofía moderna, así como uno de los nombres más destacados de la revolución científica.