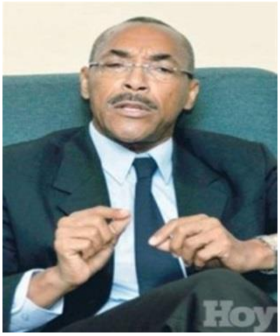
Continuación…

Dr. Manuel de Jesús Linares Jiménez



Obras
Completas

Tomo
70

***Estudiando el Álgebra Superior de Spiegel-Moyer*. (Segundo Volumen).**
Investigación publicada en el mes de julio de 2015.

ESTUDIANDO EL ÁLGEBRA SUPERIOR DE SPIEGEL-MOYER (Segundo Volumen)

Autor: Dr. Manuel Linares
profesormanuellinares@gmail.com
829-637-9303

1ra. Edición, forma física:
Julio, 2015.

Impresos La Escalera,
Santo Domingo, R.D.,
Tel. 809-688-1449.

Portada: Zoquier Grafhic,
Zona Colonial, Arz. Meriño No. 455,
Santo Domingo, D.N.
Tel. 809-685-5541.

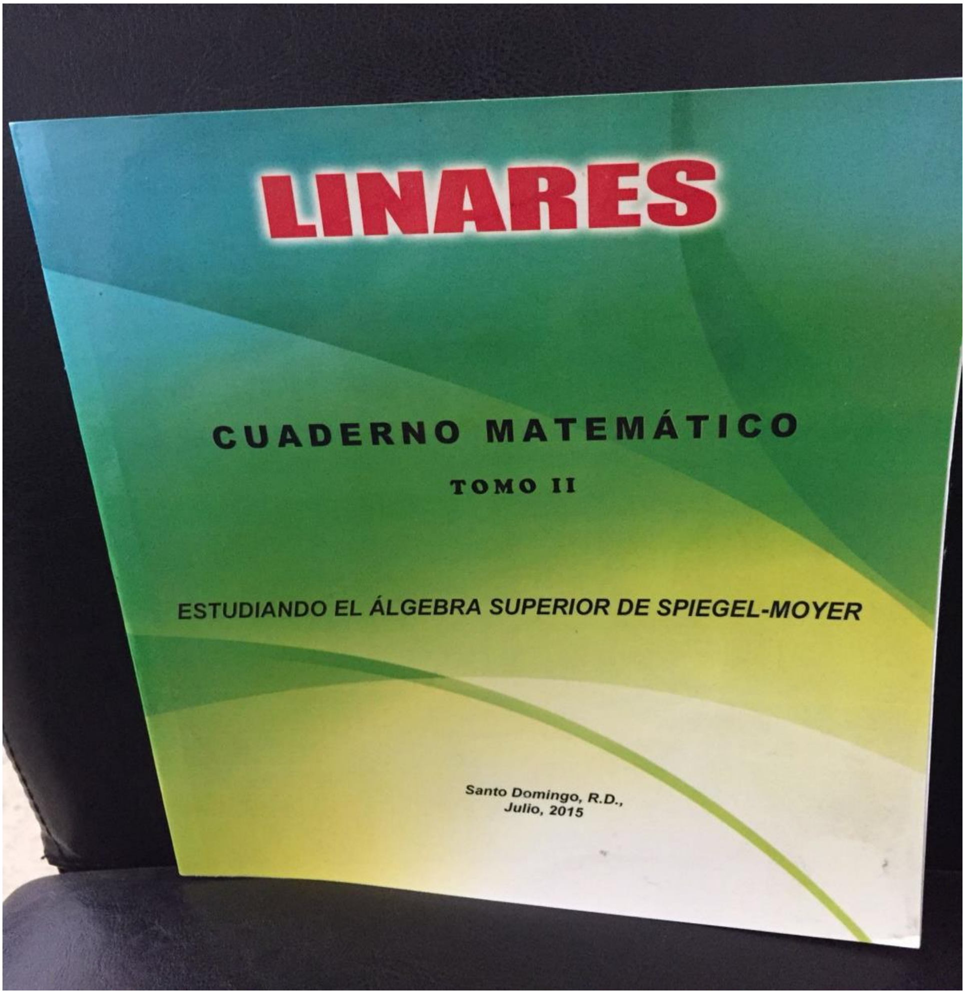
Preparación y difusión edición digital:
Septiembre 2017/abril 2018.

Nueva preparación y difusión edición digital:
2023.

Manuel Linares es el único responsable
de las enmiendas introducidas para la edición digital


¡¡APRUEBE SU EXAMEN CON SCHAUM!!
Álgebra superior
Schaum
3ª EDICIÓN
Murray R. Spiegel • Robert E. Moyer
ABARCA TODOS LOS FUNDAMENTOS DEL CURSO Y COMPLEMENTA CUALQUIER TEXTO SOBRE EL TEMA
PROPORCIONA TÉCNICAS EFECTIVAS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
OFRECE 1,940 PROBLEMAS CON SUS RESPUESTAS
MÁS DE UN CENTENAR DE PROBLEMAS RESUELTOS
LA GUÍA PERFECTA PARA EL AUTOAPRENDIZAJE
Utilícelo para las siguientes asignaturas:
ÁLGEBRA SUPERIOR
ÁLGEBRA I
ÁLGEBRA LINEAL
PRECÁLCULO
ÁLGEBRA II
TODOS TUS LIBROS .COM

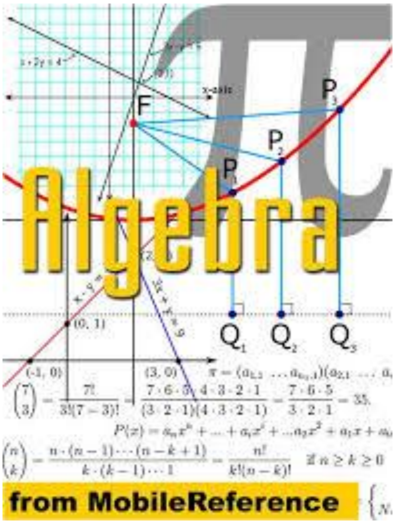
PORTADA DE LA EDICIÓN EN FORMATO FÍSICO



DEDICATORIA VERSIÓN DIGITAL

A mi hijo Enmanuel.

ÍNDICE


Algebra
from MobileReference

PREFACIO AL TOMO 70

El tomo 70 de nuestras Obras Completas para el período 1976-2023, se encuentra constituido por la obra *Estudiando el Álgebra Superior de Spiegel-Moyer*. Segundo Volumen. Investigación publicada en el 2015.

Respecto a la presentación que habíamos escrito relacionada con *Estudiando el Álgebra Superior de Spiegel-Moyer*, segundo volumen, en ocasión de su publicación en formato físico, y que ahora también la acogemos, decíamos:

"El lector tiene ante sí *Estudiando el libro Álgebra superior de Spiegel-Moyer*, en forma de apuntes personales, que da cuenta de mis estudios algebraicos con el fin de iniciarnos en tan importante rama de la matemática.

"Hace varios años que empecé a estudiar la citada obra, pero no fue sino en julio del año 2014 que decidí organizar los apuntes y publicarlos como el tomo II de nuestros CUADERNOS MATEMÁTICOS.

"Es conveniente recordar que el primer tomo, de dichos cuadernos, lo representa *Explorando el camino de la economía matemática*, de nuestra autoría.

"Un simple contacto con el tomo II, pone al descubierto que el suscrito se sitúa claramente en la condición de alumno; es muy evidente.

"Pretendemos iniciarnos en el aprendizaje del álgebra superior, por eso no sólo resolvimos parte de los problemas propuestos del libro en cuestión, sino que también nos ilustramos practicando con los problemas resueltos.

"Nos tropezamos con algunos errores que, en verdad, no menoscaban el carácter científico del libro en cuestión.

“A nuestros lectores, en especial a los economistas, les aconsejamos que adquieran y estudien el libro de SPIEGEL-MOYER, *Álgebra superior*, e indudablemente aprenderán álgebra.

“En efecto, la obra publicada bajo el título de *Algebra superior*, tercera edición, de Spiegel-Moyer, consta de 31 capítulos.

“Son ellos:

“Operaciones fundamentales con los números, Operaciones fundamentales con expresiones algebraicas, Propiedades de los números, Productos especiales, Factorización, Fracciones, Exponentes, Radicales, Operaciones con números complejos, Ecuaciones en general, Razón, proporción y proporcionalidad, Funciones y gráficas, Ecuaciones lineales con una incógnita, Ecuaciones de rectas, Sistemas de ecuaciones lineales simultáneas, Ecuaciones de segundo grado con una incógnita, Secciones cónicas, Sistemas de ecuaciones de segundo grado, Desigualdades, Funciones polinomiales, Funciones racionales, Progresiones y series, Logaritmos, Aplicaciones de los logaritmos y exponentes, Permutaciones y combinaciones, Teorema del binomio de Newton, Probabilidad, Determinantes, Matrices, Inducción matemática y Fracciones parciales.

“Los capítulos XIV-XXII son tratados en este VOLUMEN II.

“Ahora, de los 31 capítulos decidimos estudiar una parte que entendemos nos es muy útil para iniciarnos en el estudio del álgebra y eficientizar el ejercicio de la profesión de economista. Estos son, sin duda, los objetivos específicos que nos llevaron a realizar esta investigación.

“Los objetivos generales tienen que ver con la lucha enconada que se verifica en el campo de la ciencia económica. “Las distintas versiones de la economía política burguesa, de más en más, acuden a las matemáticas para formular y desarrollar los modelos económicos, con los cuales pretenden interpretar la realidad que vive el capitalismo contemporáneo, justificar la existencia de dicho régimen económico y refutar la economía política marxista.

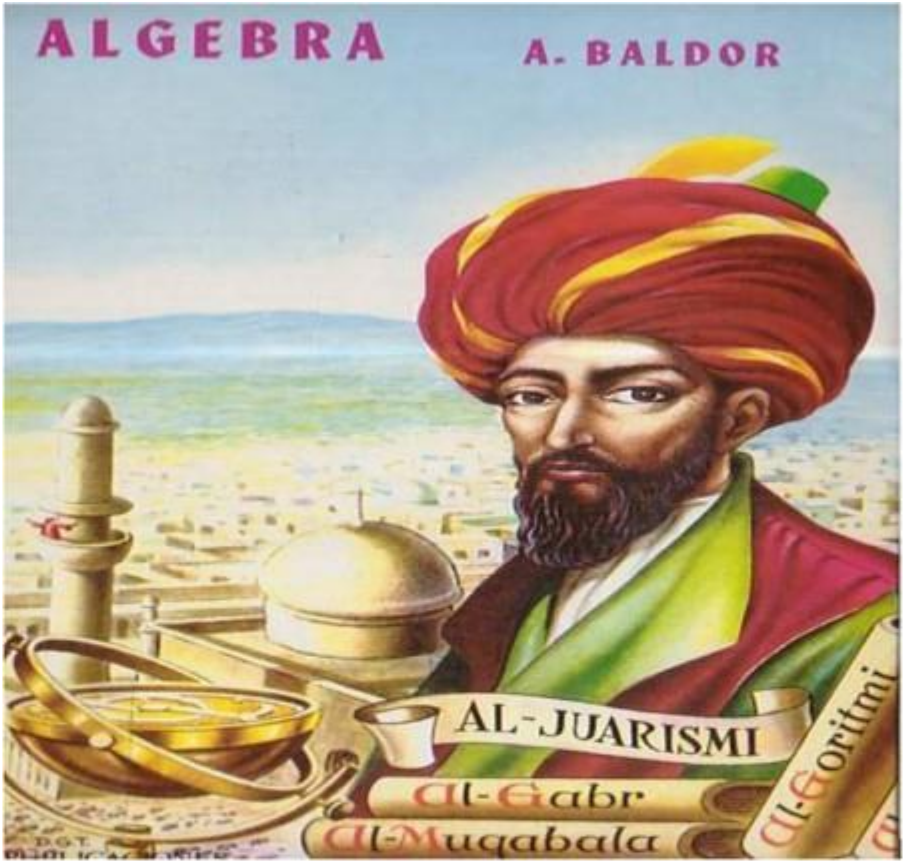
"Así que los economistas partidarios de la economía política marxista tenemos que prepararnos, cada día más, en las distintas ramas de la matemática, con el fin de entender bien los modelos económicos burgueses y hacerle las críticas, desde una perspectiva científica, en interés del proletariado y de otras clases sociales oprimidas, que luchan por zafarse del yugo del capital en ruta hacia la democracia popular y el socialismo. En esta explicación, pues, se concretiza el objetivo general de la publicación de estos apuntes personales.

"Tras la consecución de los objetivos expuestos definimos un método de trabajo, entendemos nosotros, apropiado. ¿Cuál? Leer y practicar, es decir, observar los conceptos, que en cada página van asentando los autores del libro estudiado, practicar los ejemplos y problemas resueltos y resolver los problemas propuestos; con este método coronamos exitosamente el esfuerzo emprendido. Nos sentimos muy satisfechos.

"Advertencia: las personas que hagan contacto con estos apuntes, que estoy publicando bajo el título de *Estudiando el libro de Álgebra superior de Spiegel-Moyer*, en modo alguno deben tomarlo como guía para aprender álgebra; simplemente continúo haciendo acopio de mi costumbre de hacer de público conocimiento los resultados de las indagaciones que hago en diferentes áreas del saber. "Igualmente advertimos que esta publicación no persigue fines lucrativos; como siempre, será distribuida en el seno del personal docente de la UASD y en el movimiento obrero avanzado". (FIN).

"Nota: Para la presente edición digital, nuestra obra *ESTUDIANDO EL ÁLGEBRA SUPERIOR DE SPIEGEL-MOYER*, fue dividida en dos volúmenes. El primero aborda los capítulos que van desde el 1 hasta el 14; en cambio, el segundo toca los capítulos que van desde el 15 hasta el 28". (FIN).

Dr. Manuel de Jesús Linares Jiménez
Enero 2023.


ALGEBRA
A. BALDOR
AL-JUARISMI
Al-Gabr
Al-Muqabala
Al-Goritmi

14

RESOLUCIÓN DE ALGUNOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 15 DEL LIBRO *ÁLGEBRA SUPERIOR* DE SPIEGEL-MOYER

Introducción

Spiegel-Moyer desarrollan el capítulo 15, denominado SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES SIMULTÁNEAS, desde la página 137 hasta la 149. Tratan aquí los siguientes puntos: Sistemas de dos ecuaciones lineales y sistema de tres ecuaciones lineales.

Probables errores

Tenemos un probable error en el página 148, en la respuesta **15.27** a); $y \neq 1$, $y = -1$.

Problemas propuestos (página 146)

15.26 Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones por los métodos que se indican.

a) (1) $2x-3y = 7$
(2) $3x+y = 5$

Método de reducción:

Multiplicamos (2) por 3

$$\begin{array}{l} 2x-3y = 7 \\ \underline{9x+3y = 15} \\ 11x \qquad = 22 \end{array}$$

x = 22/11 = 2

Sustituir:

2(2)-3y = 7

4-3y = 7

-3y = 7-4

-3y = 3

y = -3/3 = -1

Solución (2, -1)

Método de sustitución:

Despejamos *y* en (2)

y = 5-3x

Sustituir en (1)

2x-3(5-3x) = 7

2x-15+9x = 7

11x = 7+15

11x = 22

x = 22/11 = 2

Sustituir

$y = 5-3(2) = 5-6$

$y = -1$

Solución (2, -1)

b) (1) $3x-y = -6$
(2) $2x+3y = 7$

Método de reducción:

Multiplicamos (1) por 3

$$\begin{array}{l} 9x-3y = -18 \\ \underline{2x+3y = \quad 7} \\ 11x \quad\; = -11 \end{array}$$

$x = -11/11 = -1$

Sustituir

$3(-1)-y = -6$

$-3-y = -6$

$y = 6-3 = 3$

Solución (-1, 3)

c) (1) $4x+2y = 5$
(2) $5x-3y = -2$

Método de reducción:

Multiplicamos (1) por 3 y (2) por 2

$12x+6y= 15$
$\underline{10x-6y= \quad -4}$
$22x \quad = \ 11$

$x= 11/22= 1/2$

Sustituir en (1)

$4(1/2)+2y= 5$

$y= (5-2)/2= 3/2$

Solución (1/2, 3/2)

Método de sustitución:

Despejar en (1)

$y = (5-4x)/2$

Sustituir en (2)

$5x-3(5-4x)/2 = -2$

$5x-(15+12x)/2 = -2$

$(10x-15+12x)/(2) = -2$

$22x = -2(2)+15$

$x = (-4+15)/(22)$

$x = 11/22 = 1/2$

Sustituir en

y = [5-4(1)]/2

y = (5-2)/(2) = 3/2

Solución (1/2, 3/2)

15.27 Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones por uno de los métodos.

a) (1) 2x-5y = 10
(2) 4x+3y = 7

Método de reducción:

Multiplicamos (1) por -2 y tendremos:

$$\begin{array}{r} -4x+10y= -20 \\ \underline{4x+3y= \quad 7} \\ 13y= -13 \end{array}$$

y= -1

Sustituir

2x-5(-1) = 10

2x+5 = 10

x = (10-5)/2

x = 5/2

Solución (5/2, -1) (Difiere de la respuesta del libro).

b) 2y-x = 1

$2x+y = 8$

Método de reducción:

Multiplicamos (1) por 2

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & -2x + 4y & = & 2 \\
(2) & \underline{2x + \ \ y} & \underline{=} & \underline{8} \\
 & 5y & = & 10
\end{array}
$$

$y = 10/5 = 2$

Sustituir

$2x+2 = 8$

$x = (8-2)/(2) = 3$

Solución (3, 2)

c) (1) $2x/3+y/5 = 6$
(2) $x/6-y/2 = -4$

Método de reducción:

Multiplicamos (1) por 15 y (2) por 6 y tendremos:

(3) $10x+3y = 90$
(4) $x-3y = -24$

Sustracción:

$$
\begin{array}{rcl}
10x + 3y & = & 90 \\
\underline{x - 3y} & \underline{=} & \underline{-24} \\
11x & = & 66
\end{array}
$$

$x= 66/6= 6$

Sustituir en (4)

$6-3y = -24$

$-3y = -24-6$

$3y = 30$

$y = 10$

Solución (6, 10)

d) (1) $(2x-1)/(3) + (y+2)/(4) = 4$
(2) $(x+3)/(2) – (x-y)/(3) = 3$

Método de reducción:

Eliminamos denominadores multiplicando (1) por 12 y (2) por 6

$(12)[(2x-1)/(3) + (y+2)/(4)] = 12(4)$
$(6)\ [(x+3)/(2) – (x-y)/(3)] = 6(3)$

Nuevas ecuaciones:

$(8x-4)+(3y+6) = 48$
$(3x+9)– (2x-2y)= 18$

(3) $8x+3y= 46$
(4) $x+2y= 9$

Multiplicamos (4) por -8 y sustraemos:

$$\begin{array}{r} 8x+3y= 46 \\ \underline{-8x-16y= -72} \\ -13y= -26 \end{array}$$

$y = -26/-13 = 2$

Sustituir en (4):

$x+2(2) = 9$

$x = 9-4 = 5$

Solución (5, 2)

e) (1) $2x-3y = 9t$
(2) $4x-y = 8t$

Método de reducción:

Multiplicamos (2) por -3 y sustraemos:

$(-3)4x-(-3)y=(-3)8t$

$-12x+3y = -24t$; luego

$$\begin{array}{l} 2x-3y = 9t \\ \underline{-12x+3y = -24t} \\ -10x \quad = -15t \end{array}$$

$10x = 15t$

$x = 15t/10 = 3t/2$

sustituir en (1):

$2(3t/2)-3y = 9t$

$3t-3y = 9t$
$-3y = 9t-3t$

$-3y = 6t$

$y = -2t$

Solución $(3t/2, -2t)$

f) (1) $2x+y+1 = 0$
(2) $3x-2y+5 = 0$

Reordenando:

(1) $2x+y = -1$
(2) $3x-2y = -5$

Método de reducción:

Multiplicamos (1) por 2 y sustraemos:

$$\begin{array}{l} 4x+2y = -2 \\ \underline{3x-2y = -5} \\ 7x \quad\quad = -7 \end{array}$$

$x = -1$

Sustituir en (1):

$2(-1)+y = -1$

$-2 + y = -1$

$y = -1+2 = 1$

Solución $(-1, 1)$

g) (1) $2u-v = -5s$

(2) $3u+2v = 7r-4s$

Método de reducción:

Multiplicamos (1) por 2 y sustraemos:

$$\begin{array}{l} 4u-2v = -10s \\ \underline{3u+2v = -4s+7r} \\ 7u \qquad = -14s+7r \end{array}$$

$u = (-14s+7r)/(7) = -2s+r = r-2s$

Sustituir en (2)

$3(r-2s)+2v = 7r-4s$

$3r-6s+2v = 7r-4s$

$2v = 7r-4s-3r+6s$

$2v = 4r+2s$

$v = 2r+s$

Solución $(r-2s, 2r+s)$

15.28 Indique cuales de los sistemas siguientes son 1) compatibles, 2) indeterminados, 3) incompatibles.

a) (1) $x+3y = 4$
(2) $2x-y = 1$

Multiplicar (1) por -2 y sustraemos:

$$\begin{array}{l} -2x-6y = -8 \\ \underline{2x - y = \quad 1} \\ -7y = -7 \end{array}$$

y = 1

Sustituir en (1)

x+3(1) = 4

x = 4-3 = 1

Solución (1, 1) Es compatible

b)   (1) 2x-y = 5
       (2) 2y = 7+4x

Reordenando:

(1)   2x- y = 5
(2) -4x+2y = 7

Multiplicamos (1) por 2 y sustraemos:

4x-2y = 10
-4x+2y = 7
       0 = 17 Es incompatible

c)   (1) 3x = 2y+3
       (2)   x-2y/3 = 1

Reordenando:

(1) 3x-2y = 3
(2) x- 2y = 1(3)

Multiplicamos la primera por -1 y sustraemos:

-3x + 2y = -3

$$\begin{array}{l} \underline{x - 2y = \ 3} \\ -2x \quad = \ 0 \end{array}$$ Es indeterminado

d) (1) (x+3)/4 = (2y-1)/6
(2) 3x – 4y = 2

Reordenando (1):

x+3 = (2y-1)(2)/3

(3)(x+3) = (2y-1)(2)

3x+9 = 4y-2

3x-4y = -2-9

(3) 3x-4y = -11
(4) 3x-4y = 2

Multiplicamos la (3) por -1 y sustraemos:

$$\begin{array}{r} -3x+4y = 11 \\ \underline{3x-4y \ = \ 2} \\ 0 = 13 \end{array}$$ Es incompatible

e) (1) 2x-y =1
(2) 2y-x = 1

Reordenando:

(1) 2x-y = 1
(2) –x+2y = 1

Multiplicamos (2) por 2 y sustraemos:

2x - y = 1

$$\begin{array}{r} \underline{-2x+4y = 2} \\ 3y = 3 \end{array}$$
$y = 1$

Sustituimos en (1)

$2x-1 = 1$

$x = (1+1)/2 = 1$ Es compatible

f)   (1) $(x+2)/4-(y-2)/12 = 5/4$
     (2) $y = 3x-7$

Multiplicamos (1) por 12, simplificamos y sustraemos:

$3x+6-y+2 = 15$

(1) $3x-y = 7$
(2) $-3x+y = -7$
$0 \quad 0 = 0$ Es indeterminado

15.29 Encuentre dos números sabiendo que si uno de ellos se suma con el doble del otro se obtiene 21, y que si este último se suma con el doble del primero resulta 18.

(1) $x+2y = 21$
(2) $2x+y = 18$

Multiplicamos (1) por -2

$$\begin{array}{r} -2x-4y = -42 \\ \underline{2x+y = \quad 18} \\ -3y = -24 \end{array}$$
$y = 8$

Sustituimos en (1)

$x+2(8) = 21$

$x+16 = 21$

$x = 21-16 = 5$

Solución (5, 8)

15.35 Resuelva los sistemas de ecuaciones siguientes:

a) (1) $2x-y+2z = -8$
(2) $x+2y-3z = 9$
(3) $3x-y-4z = 3$

Multiplicamos (3) por 2, para obtener: $6x-2y-8z = 6$

Sustracción:

$$\begin{array}{ll} & x+2y-3z = 9 \\ & \underline{6x-2y-8z = 6} \\ (1_1) & 7x \quad -11z = 15 \end{array}$$

Multiplicamos (1) por 2, para obtener: $4x-2y+4z= -16$

Sustracción:

$$\begin{array}{ll} & 4x-2y+4z= -16 \\ & \underline{\ x+2y-3z = 9} \\ (2_1) & 5x \quad +z= -7 \end{array}$$

Trabajamos con (1_1) y (2_1)

$7x \quad -11z = 15$
$5x \quad +z = -7$
Ahora aplicamos el método de sustitución:

Despejar x en (2_1)

x= (-7-z)/5

Sustituir en (1_1):
7(-7-z/5) -11z = 15

Multiplicar por 5:

-49-7z-55z= 75

-62z= 75+49

z= -124/62= -2

Sustituir en (1_1)

7x   -11(-2) = 15

7x+22= 15

x= 15-22/7= -1

Sustituir los valores obtenidos de z, x en (1):

2(-1)-y+2(-2) = -8
-2-y-4= -8
-y-6= -8
-y= -8+6= -2
y= 2

Solución (x= -1, y= 2, z= -2)

b) x = y-2z
2y = x+3z+1

$z = 2y-2x-3$

Reordenando:

(1) $x-y+2z = 0$
(2) $-x+2y-3z = 1$
(3) $+2x-2y+z = -3$

Eliminación *x* en (1) y (2)

$$\begin{array}{r} x - y + 2z = 0 \\ \underline{-x + 2y - 3z = 1} \\ y - z = 1 \end{array}$$

(4) $y - z = 1$

Volvemos a eliminar *x* en (1) y (3)

$$\begin{array}{r} -2x+2y-4z = 0 \\ \underline{+2x-2y+z = -3} \\ -3z = -3 \end{array}$$

$z = 1$

Sustituimos en (4)

$y-(1) = 1$

$y = 2$

Sustituimos en (1)

$x-2+(2)(1) = 0$
$x-2+2 = 0$

Solución ($x= 0$, $y= 2$, $z= 1$)
c) (1) $x/3+y/2 -z = 7$

(2) $x/4-3y/2+z/2 = -6$
(3) $x/6-y/4-z/3 = 1$

Reordenando: (1) por 6, (2) por 4 y (3) por 12

(1) $2x+3y-6z = 42$
(2) $x-6y-2z = -24$
(3) $2x-3y-4z = 12$

Eliminamos *y* en (1) y (3)

$2x+3y-6z = 42$
$\underline{2x-3y-4z = 12}$
$4x \ -10z = 54$

(4) $4x \quad -10z = 54$

Eliminamos *y* en (2) y (3)
$x-6y+2z = -24$
$\underline{-x+6y+8z = -24}$
$-3x + 10z = -48$

(5) $-3x + 10z = -48$

Eliminamos *z* en (4) y (5)
$4x - 10z = 54$
$\underline{-3x+10z = -48}$
$x \quad = 6$

Sustitución en (4)

$4(6)-10z = 54$

$24-10z = 54$

$-10z = 54-24$

$10z = -54+24$

$z = -30/10 = -3$

Sustituimos en (1)

2(6)+3Y-6(-3)) 42

$12+3y+18 = 42$

$3y = 42-18-12$

$y = 12/3 = 4$

Solución (x= 6, y= 4, z= -3)

d) $1/x+1/y+1/z = 5$
$2/x-3/y-4/z = -11$
$3/x+2/y-1/z = -6$

Hacemos $1/x = u$; $1/y = v$; $1/z = w$, por tanto

(1) $u+v+w = 5$
(2) $2u-3v-4w = -11$
(3) $3u+2v-w = -6$

Para eliminar v, multiplicamos (1) por 3 y hacemos la sustracción:

$$\begin{array}{l} 3u+3v+3w = 15 \\ \underline{2u-3v-4w = -11} \\ 5u \quad\quad -w = 4 \end{array}$$

(4) $5u \quad\quad -w = 4$

Para eliminar v, en las ecuaciones (1) y (3) Multiplicamos (1) por -2 y hacemos la sustracción:

$$\begin{array}{l} -2u-2v-2w = -10 \\ \underline{\;3u+2v-w\; = \;-6} \\ \;\; u - \quad 3w = -16 \end{array}$$

(5) $u \quad - \quad 3w = -16$

Para eliminar a w, multiplicamos (4) por -3:

$$\begin{array}{l} -15u+3w = -12 \\ \underline{\quad u\; -3w = -16} \\ \quad -14u \; = \; -28 \end{array}$$

$u= 28/14= 2$

Sustituimos el valor de *u* en (4)

$5(2)-w = 4$

$10-w = 4$

$-w = 4-10$

$w = -4+10 = 6$

Sustituir en (1) para obtener v:
$2+v+6 = 5$

$v = 5-6-2$

$v = -3$
Luego,

$1/x = u$; $1/x = 2$; $x = 1/2$

$1/y = v$; $1/y = -3$; $y = -1/3$

$1/z = w$; $1/z = 6$; $z = 1/6$

Solución ($x= 1/2$, $y= -1/3$, $z= 1/6$)

15

RESOLUCIÓN DE ALGUNOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 16 DEL LIBRO *ÁLGEBRA SUPERIOR* DE SPIEGEL-MOYER

Introducción

Spiegel-Moyer desarrollan el capítulo 16, denominado ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA, desde la página 150 hasta la 168. Tratan aquí los siguientes puntos: Ecuaciones de segundo grado, métodos de resolución de las ecuaciones de segundo grado, suma y producto de las raíces, naturaleza de las raíces, ecuaciones con radicales y ecuaciones de tipo cuadrático.

Probables errores

En la página 150, sección **16.1 ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO**, tercera línea, dice: "Las dos últimas ecuaciones"… Pero debiera decir: las ecuaciones segunda y cuarta…, para que hay correspondencia con los cálculos efectuados. En la página 153, en el **EJEMPLO 16.7**, no es √x-3, sino √x+3; en el **EJEMPLO 16.8**, no es (u-5)(u-2)= 0, sino (u-5)(u+2)= 0; en el **EJEMPLO 16.9**, segunda línea, se dice "Haciendo el cambio de variable u= 2x-, cuando debe decir: Haciendo el cambio de variable u= 2x-1. En la página 157, sección **16.11**, ejercicio b), las raíces dadas son (3, 2), pero el desarrollo del problema concuerda con estas raíces: (-3, 2). En la página 163, problema **16.36** g), dice: $1+2x= 2x^2= 0$, sin embargo debe decir $1+2x+2x^2= 0$.

Resolviendo los problemas propuestos (página 163)

16.30 Resuelva las ecuaciones siguientes.

a) $x^2-40 = 9$

$x^2 = 9+40 = 49$

$x = \pm\sqrt{49} = \pm 7$

b) $2x^2 - 400 = 0$

$x^2 = 400/2 = 200$

$x = \pm\sqrt{200} = \pm\sqrt{100.2} = \pm\sqrt{100}\sqrt{2} = \pm 10\sqrt{2}$

c) $x^2 + 36 = 9 - 2x^2$

$x^2 + 2x^2 = 9 - 36$

$3x^2 = -27$

$x^2 = -27/3$

$x = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9(-1)} = \pm\sqrt{9}\sqrt{-1} = \pm 3i$

d) $x/16 = 4/x$

$x(x) = 4(16)$

$x^2 = 64$

$x = \pm\sqrt{64} = \pm 8$

e) $y^2/3 = (y^2/6) + 2$

$y^2/3 - (y^2/6) - 2 = 0$

$[y^2/3 - (y^2/6) - 2]/6 = 0$

$(2y^2 - y^2 - 12)/6 = 0$

y^2-12= 0(6)+12

y^2= 12

y^2= 12

y= ±√12= ±√4.3= ±√4√3= ±2√3

f) (1-2x/3-x)= (x-2/3x-1)

(1-2x)(3x-1)= (3-x)(x-2)

3x-1-6x^2+2x= 3x-6-x^2+2x,

Agrupamos términos semejantes, simplificamos y queda:

5x^2= 5,

Después de despejar tendremos:

x= ±√1= ±1

g) (1/2x-1)-(1/2x+1)= 1/4

[1/(2x+1)-1/(2x-1)]= (2x+1)-(2x-1)/(2x-1)(2x+1)

2x+1-2x+1/ (2x-1)(2x+1)= 1/4

2/ (2x-1)(2x+1)= 1/4

(2x-1)(2x+1)= 8

4x^2+2x-2x-1= 8

x^2= 9/4

$x = \pm\sqrt{9/4} = \pm\sqrt{9}/\sqrt{4} = \pm 3/2$

16.31 resuelva las ecuaciones por el método de descomposición de factores.

a) $x^2-7x= -12$

$x^2-7x+12= 0$

$(x-3)(x-4)= 0$

$(x-3)= 0$

$x= 3$

$(x-4)= 0$

$x= 4$

$x= 3, 4$

b) $x^2+x= 6$

$x^2+x-6= 0$

$(x+3)(x-2)= 0$

$(x+3)= 0$
$x= -3$

$(x-2)= 0$

$x= 2$

$x= -3, 2$

c) $x^2= 5x+24$

$x^2-5x-24= 0$

$(x-8)(x+3)= 0$

$(x-8)= 0$

$x= 8$

$(x+3)= 0$

$x= -3$

$x= 8, -3$

d) $2x^2+2= 5x$

$2x^2-5x+2= 0$

$2(x-2)(x-1/2)= 0$

$(x-2)= 0$

$x= 2$

$(x-1/2)= 0$

$x= 1/2$

$x= 2, 1/2$

e) $9x^2= 9x-2$

$9x^2- 9x+2= 0$

$9(x-1/3)(x-2/3)= 0$

$(x-1/3)= 0$

$x= 1/3$

$(x-2/3)= 0$

$x= 2/3$

$x= 1/3, 2/3$

f) $4x-5x^2= -12$

$5x^2-4x-12= 0$

$5(x-2)(x+6/5)=0$

$(x-2)= 0$

$x= 2$

$(x+6/5)=0$

$x= -6/5$

$x= 2, -6/5$

g) $x/2a= 4a/x+2a$

$x(x+2a)= 2a(4a)$

$x^2+2ax= 8a^2$

$-8a^2+x^2+2ax= 0$

$x^2+2ax-8a^2= 0$

$(x+4a)(x-2a)= 0$

$(x+4a)= 0$

$x= -4a$

$(x-2a)= 0$

$x= 2a$

$x= -4a, 2a$

16.32 Resuelva las ecuaciones siguientes completando el cuadrado perfecto.

a) $x^2+4x-5= 0$

$x^2+4x= 5$

$[1/2(4)]^2= 2^2= 4$

$x^2+4x+4= 5+4$

$x^2+4x+4= 9$

$(x+2)^2= 9$

$(x+2)= \pm\sqrt{9}$

$x= -2\pm3$

$x= 1, -5$

b) $x(x-3)= 4$

x^2-3x= 4

$[1/2(3)]^2= (3/2)^2= 9/4$

$x^2-3x+9/4=4+9/4$

$x^2-3x+9/4= 25/4$

$(x-3/2)^2= 25/4$

$(x-3/2)= \pm\sqrt{25/4}$

x= 3/2±5/2

x= 4, -1

c) $2x^2$= x+1

$2x^2$-x= 1

Dividimos entre 2 y tendremos:

$x^2-1/2x= 1/2$

$[1/2(-1/2)]^2= (-1/4)^2= 1/16$

$x^2-1/2x+1/16= 1/2+1/16$

$x^2-1/2x+1/16= 9/16$

$(x-1/4)^2= 9/16$

$x-1/4= \pm\sqrt{9/16}$

x= 1/4±3/4

$x= 1, 1/2$

d) $3x^2-2= 5x$

$3x^2-5x= 2$

Dividimos entre 3 y tendremos:

$x^2-5/3x= 2/3$

$[1/2(-5/3)]^2= (-5/6)^2= 25/36$

$x^2-5/3x+25/36= 2/3+25/36$

$x^2-5/3x+25/36= 49/36$

$(x-5/6)^2= 49/36$

$x-5/6= \pm\sqrt{}49/36$

$x= 5/6\pm 7/6$

$x= 2, -1/3$

e) $4x^2= 12x-7$

$4x^2-12x= -7$

Dividimos entre 4 y tendremos:

$x^2-3x= -7/4$

$[1/2(-3)]^2= (-3/2)^2= 9/4$

$x^2-3x+9/4= -7/4+9/4$

x^2-3x+9/4= 1/2

$(x-3/2)^2$= 1/2

x-3/2= ±√1/2

x= 3/2±√1/2

x= 3/2+√1/2

x= 3/2-√1/2

f) $6y^2$= 19y-15

$6y^2$-19y= -15

Dividimos entre 6 y tendremos:

y^2-19/6y= -15/6

$[1/2(-19/6)]^2$= $(-19/12)^2$= 361/144

y^2-19/6y+361/144= -15/6+361/144

y^2-19/6y+361/144= 1/144

$(y-19/12)^2$= 1/144

(y-19/12)= ±√1/144

x= 19/12±√1/144

x= 19/12+1/12= 5/3

x= 19/12-1/12= 3/2

16.33 Resuelva las ecuaciones siguientes aplicando la fórmula general.

a) x^2-5x= 6

x^2-5x-6= 0

a= 1, b= -5, c= -6

Sustitución en la fórmula general

x= [5±√25-4(1)(-6)]/2(1)

x= 6, -1

b) x^2-6= x

x^2-x-6= 0

a= 1, b=-1, c= -6

Sustitución en la fórmula general

x= [1±√1-4(1)(-6)]/2(1)

x= 3, -2

c) $3x^2$-2x= 8

$3x^2$-2x-8= 0

a= 3, b= -2, c= -8

Sustitución en la fórmula general

x= [2±√4-4(3)(-8)]/2(3)

$x= -4/3, 2$

d) $16x^2-8x+1= 0$

$a= 16, b= -8, c= 1$

Sustitución en la fórmula general

$x= [8\pm\sqrt{}64-4(16)(1)]/2(16)$

$x= 1/4, 1/4$

e) $x(5x-4)= 2$

$5x^2-4x-2= 0$

$a= 5, b= -4, c= -2$

Sustitución en la fórmula general

$x= [4\pm\sqrt{}16-4(5)(-2)]/2(5)$

$x= 1.148, -0.348$

f) $9x^2+6x= -4$

$9x^2+6x+4= 0$

Dividimos entre 9, quedando:

$x^2+2x/3+4/9= 0$

$a= 1, b= 2/3, c= 4/9$

Sustitución en la fórmula general

x= [-2/3±√4/9-4(1)(4/9)]/2= [-2/3±√-4/3]/2= [-2/3±√-4/√3]/2= [-2/3±√-4√3^{-1}]/2=

[-2/3±√4(-1)√3^{-1}]/2= [-2/3±2i√3^{-1}]/2= [-2/3±2i√3^{-1}]/2

x= -2/3+2i√3^{-1}/2, -2/3-2i√3^{-1}/2

O lo que es lo mismo:

x= -0.33+0.58i, -0.33-0.58i (Este resultado difiere de la respuesta del libro, probablemente yo estoy equivocado).

Igualmente si dejamos la ecuación intacta, tendremos el mismo resultado:

$9x^2+6x+4= 0$

a= 9, b= 6, c=4

Sustitución en la fórmula general

x= [-6±√36-4(9)(4)]/18= [-6±√36-144]/18= [-6±√108(-1)]/18= [-6±√108√(-

1)]/18= [-6± 10.39√(-1)]/18= [-6± 10.39i]/18=

x= -0.33+0.58i, -0.33-0.58i (Este resultado difiere de la respuesta del libro, probablemente yo estoy equivocado).

g) $(5x^2-2p^2)/x=p/3$

$3(5x^2-2p^2)= xp$

$15x^2-px-6p^2= 0$

a= 15, b= -p, c= $-6p^2$

Sustitución en la fórmula general

$x= [p\pm\sqrt{p^2-4(15)(-6p^2)}]/2(15)= [p\pm\sqrt{p^2-4(15)(-6p^2)}]/30=$
$[p\pm\sqrt{p^2+360p^2})]/30=$

$[p\pm\sqrt{361p^2})]/30= [p\pm\sqrt{361p^2})]/30= [p\pm\sqrt{361}\sqrt{p^2})]/30= [p\pm19\sqrt{p^2}]/30=$

$[p\pm19p^{2/2}]/30= [p\pm19p]/30$

$x= 2p/3, -3p/5$

16.35 Calcule, sin resolver las ecuaciones, la suma S y el producto P de las raíces de las ecuaciones siguientes**:**

a) $2x^2+3x+1= 0$

Ecuación guía: $ax^2+bx+c = 0$

$a = 2, b = 3, c = 1$

$S= -b/a = -3/2$

$P= c/a = 1/2$

b) $-x^2+x= 2$

Reordenando:

$x^2-x= -2$

$x^2-x+2= 0$

Ecuación guía: $ax^2+bx+c = 0$

$a = 1, b = -1, c = 2$

S= -b/a = -(-1)/1= 1

P= c/a = 2/1= 2

c) 2x(x+3)= 1

Reordenando:

$2x^2+6x-1= 0$

Ecuación guía: $ax^2+bx+c = 0$

a = 2, b = 6, c = -1

S= -b/a = -6/2= -3

P= c/a = -1/2

d) $2x^2+6x-5= 0$

Ecuación guía: $ax^2+bx+c = 0$

a = 2, b = 6, c = -5

S= -b/a = -6/2= -3

P= c/a = -5/2

e) $3x^2-4 = 0$

Ecuación guía: $ax^2+bx+c = 0$

a = 3, b = 0, c = -4
S= -b/a = -0/3 = 0
P= c/a = -4/3

f) $4x^2+3x = 0$

$a = 4$, $b = 3$, $c= 0$

$S= -b/a = -3/4$

$P= c/a = 0/4 = 0$

g) $2x^2+5kx+3k^2 = 0$

$a = 2$, $b = 5k$, $c = 3k^2$

$S= -b/a = -5k/2$

$P= c/a = 3k^2/2$

h) $0.2x^2-0.1x+0.03 = 0$

$a = 0.2$, $b = -01$, $c = 0.03$

$S= -b/a$, $b = -(0.1)/(0.2) = 1/2 = 0.5$

$P= c/a = 0.03/0.2 = 0.3/2 = 0.15$

i) $a = \sqrt{2}x^2-\sqrt{3}x+1 = 0$

$a = \sqrt{2}$, $b = -\sqrt{3}$, $c = 1$

$S= -b/a = (-)-\sqrt{3}/\sqrt{2}= \sqrt{3}/\sqrt{2}$ (Este resultado equivale a la respuesta del libro).

$P= c/a = 1/\sqrt{2}$ (Este resultado equivale a la respuesta del libro).

16.36 Encuentre el discriminante b^2-4ac y determine el carácter de las raíces:

a) $2x^2-7x+4 = 0$

Discriminante y carácter de las raíces:

$a= 2$, $b= -7$, $c= 4$

$b^2-4ac = (-7)^2-4(2)(4) = 49-32 = 17$

Como $b^2-4ac > 0$, las raíces son reales y distintas, pero irracionales, debido a que no es un cuadrado perfecto.

b) $3x^2 = 5x-2$

$3x^2-5x+2 = 0$

$a = 3$, $b = -5$, $c = 2$

Discriminante y carácter de las raíces:

$b^2-4ac = (-5)^2-4(3)(2) = 25-24 = 1>0$, las raíces son reales y distintas, pero irracionales, debido a que no es un cuadrado perfecto.

c) $3x-x^2 = 4$

$-x^2+3x-4 = 0$

$a = -1$, $b = 3$, $c = -4$

Discriminante y carácter de las raíces:

$b^2-4ac = (3)^2-4(-1)(-4) = 9-16 = -7<0$, las raíces no son reales.

d) $x(4x+3) = 5$
$4x^2+3x-5 = 0$

Discriminante y carácter de las raíces:

$a = 4$, $b = 3$, $c = -5$

b^2-4ac = 3^2-4(4)(-5) = 9+80 = 89>0, las raíces son reales y distintas, pero irracionales, debido a que no es un cuadrado perfecto.

e) $2x^2 = 5 + 3x$

$2x^2-3x-5 = 0$

Discriminante y carácter de las raíces:

$a = 2$, $b = -3$, $c = -5$

b^2-4ac = $(-3)^2$-4(2)(-5) = 9+40 = 49>0, las raíces son reales, racionales y distintas. Racionales, debido a que se puede formar el cuadrado perfecto.

f) $4x\sqrt{3} = 4x^2+3$

$4x\sqrt{3}-4x^2-3 = 0$

$-4x^2-4\sqrt{3}x-3 = 0$

Discriminante y carácter de las raíces:

$a = -4$, $b = 4\sqrt{3}$, $c = -3$

b^2-4ac) $(4\sqrt{3})^2$-4(-4)(-3) = $4^2(3^{2/2})$-48 = 16(3)-48 = 48-48 = 0, las raíces son reales e iguales.

g) $1+2x=2x^2 = 0$. Parece que los autores quisieron colocar + donde está el primer signo de igualdad en g). En este sentido hay un error en g). Debe ser:
$1+2x+2x^2 = 0$

$2x^2+2x+1 = 0$

Discriminante y carácter de las raíces:

$a = 2,\ b = 2,\ c = 1$

$b^2-4ac = 2^2-4(2)(1) = 4-8 = -4<0$, las raíces no son reales.

h) $3x+25/3x = 10$

$(3x)(3x)+25)/3x= 10$

$9x^2+25 = 3x(10)$

$9x^2-30x+25 = 0$

$a = 9,\ b = -30,\ c = 25$

$b^2-4ac = (-30)^2-4(9)(25) = 900-900 = 0$, las raíces son reales, racionales e iguales.

16.37 Encuentre una ecuación cuadrática de coeficientes enteros, cuyas raíces sean las indicadas

a) 2, -3

Sumamos las raíces

$S= 2+(-3) = -1$

Producto de las raíces

$P = (2)(-3) = -6$

Sustituir en la ecuación guía: $x^2-Sx+P= 0$ y tendremos:

$x^2+x-6 = 0$

b) -3, 0

Sumamos las raíces

$S = -3+0 = -3$

Producto de las raíces

$P = (-3)(0) = 0$

Sustituir en la ecuación guía: $x^2-Sx+P= 0$ y tendremos:

$x^2+3x = 0$

c) 8, -4

Sumamos las raíces

$S = 8+(-4) = 4$

Producto de las raíces

$P = (8)(-4) = -32$

Sustituir en la ecuación guía: $x^2-Sx+P= 0$ y tendremos:

$x^2-4x-32 = 0$

d) -2, -5

Sumamos las raíces

$S= -2-5 = -7$

Producto de las raíces

P= (-2)(-5) = 0

Sustituir en la ecuación guía: x^2-Sx+P= 0 y tendremos:

$x^2+7x= 0$

f) 2+√3, 2-√3

Sumamos las raíces

S= (2+√3)+(2-√3)= 2+2 = 4

Producto de las raíces

P= (2+√3)(2-√3)

= 4-2(√3)+2√3-(√3)(√3)

= 4-√3.√3 = 4-√9 = 4-3 = 1

Sustituir en la ecuación guía: x^2-Sx+P= 0 y tendremos:

$x^2-4x+1 = 0$

g) -1+i, -1-i

Sumamos las raíces

S = -1+i-1-i = -2

Producto de las raíces

P= (-1+i)(-1-i) = 1+i-i-i^2 = 1-(-1) = 1+1 = 2

Sustituir en la ecuación guía: x^2-Sx+P= 0 y tendremos:

$x^2+2x+2 = 0$

h) $-2-\sqrt{6}$, $-2+\sqrt{6}$

Sumamos las raíces

$S = -2-\sqrt{6}-2 = -4$

Producto de las raíces

$P= (-2-\sqrt{6})(-2+\sqrt{6})$

$P = 9-2-\sqrt{6}-2+\sqrt{6} =$

$4-2\sqrt{6}+2\sqrt{6}-(\sqrt{6})(\sqrt{6}) =$

$4-\sqrt{6.6} = 4-\sqrt{36} = 4-6 = -2$

Sustituir en la ecuación guía: $x^2-Sx+P= 0$ y tendremos:

$x^2+4x-2 = 0$

i) $2+3i/2$, $2-3i/2$

Sumamos las raíces

$S = 2+3i/2+2-3i/2 = 4$

Producto de las raíces

$P = (2+3i/2)(2-3i/2) =$

$4-(2)\ (3i/2)+(3i/2)(2)-(3i/2)^2 =$

$4-9\ i^2/4=$

4-(9/4)(-1)=

4+9/4= 25/4

Sustituir en la ecuación guía: x^2-Sx+P= 0 y tendremos:

x^2-4x+25/4 = 0

Multiplicamos ambos términos por 4, tachamos los semejantes y queda:

$4x^2$-16x+25= 0

j) √3-√2, √3+√2

Sumamos las raíces

S = √3-√2+√3+√2 = 2√3

Producto de las raíces

P = (√3+√2)(√3+√2) = (√3)(√3)+(√2)(√3)-(√2))√3)-(√2)(√2) =

√3.3-√2.2 = √9-√4 0 3-2 = 1

Sustituir en la ecuación guía: x^2-Sx+P= 0 y tendremos:

No es posible (x^2-2√3+1 = 0) → Aunque obtuve la respuesta que brinda el libro, no la digerí bien.

k) a+bi, a-bi
Sumamos las raíces

S = a+bi+a-bi = 2a

Producto de las raíces

P = (a+bi)(a-bi) =

a^2-abi+abi+bi = a^2-$b^2$$i^2$ = a^2-b^2(-1) =

a^2+b^2

Sustituir en la ecuación guía: x^2-Sx+P= 0 y tendremos:

x^2-2ax+a^2+b^2 = 0

l) m+√n ⁄ 2, m-√n ⁄ 2

Sumamos las raíces

S = m+√n ⁄ 2 + m-√n ⁄ 2 = m+√n+m-√n ⁄ 2 = 2m/2 = m

Producto de las raíces

P = (m+√n ⁄ 2)(m-√n ⁄ 2)

=2(m-√n)2(m+√n) = 2m-2√n+2m+2√n

= 4m

Sustituir en la ecuación guía: x^2-Sx+P= 0 y tendremos:

4x^2-4mx+m^2-n = 0

16.40 Resuelva las ecuaciones:

a) √(x^2-x+2) = 2

(√x^2-x+2)^2= 2^2

(x^2-x+2)$^{2/2}$= 2^2

x^2-x+2 = 2^2

x^2-x+2-4 = 0

x^2-x-2= 0

(x- 2)(x+1)= 0

(x- 2)= 0

x= 2

(x+1)= 0

x= -1

Solución (2, -1)

b) $\sqrt{}$(2x-2) = x-1

($\sqrt{}$2x-2)^2 = (x-1)^2

(2x-2)$^{2/2}$ = x^2-2x+1

2x-2 = x^2-2x+1

x^2-2x+1-2x+2 = 0

x^2-4x+3 = 0

(x-1)(x-3) = 0

(x-1)= 0

x= 1

$(x-3) = 0$

$x= 3$

Solución (1, 3)

d) $2-\sqrt[3]{(x^2+2x)} = 0$

$(\sqrt[3]{(x^2+2x)})^3 = 2^3$

$(x^2+2x)^{3/3} = 2^3$

$x^2+2x= 8$

$x^2+2x-8 = 0$

$(x+4)(x-2) = 0$

$(x+4)= 0$

$x= -4$

$(x-2) = 0$

$x= 2$

Solución (-4, 2)

16.41 Resuelva las ecuaciones:

a) $x^4-13x^2+36 = 0$

Sea $x^2 = u$; entonces $u^2-13u+36 = 0$

$(u-4)(u-9) = 0$

$u = 4, 9$

Para $u = 4$, $x^2 = 4$; $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

Para $u = 9$, $x^2 = 9$, $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

Las cuatro soluciones son $x = \pm 2, \pm 3$ que satisfacen la ecuación dada.

b) $x^4-3x^2-10 = 0$

sea $x^2 = u$; entonces $u^2-3u-10 = 0$

$(u-5)(u+2) = 0$

$u = 5, -2$

Para $u = 5$, $x^2 = 5$, $x = \pm\sqrt{5}$

Para $u = -2$, $x^2 = -2$, $x = \pm\sqrt{-2} = \pm i\sqrt{2}$

Las cuatro soluciones son $x = \pm\sqrt{5}$, $\pm i\sqrt{2}$

Abel Henrik Niels (1802-1829): Probó la imposibilidad de resolver algebraicamente ecuaciones de quinto grado. La vida de Abel estuvo dominada por la pobreza. Después de muerto su padre, quien era un ministro protestante, Abel tuvo que asumir la responsabilidad de mantener a su madre y familia, en 1820. El profesor de Abel, Holmboe, reconoció su talento para las matemáticas, debido a su falta de dinero para asistir a una colegiatura para ingresar a la universidad de Christiania, ingresó a la universidad en 1821, diez años después de que la universidad fuera fundada, y se graduó en 1822.

16

RESOLUCIÓN DE ALGUNOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 17 DEL LIBRO *ÁLGEBRA SUPERIOR* DE SPIEGEL-MOYER

Introducción

Spiegel-Moyer desarrollan el capítulo 17, denominado SECCIONES CÓNICAS, desde la página 169 hasta la 190. Tratan allí los siguientes puntos: Ecuaciones generales de segundo grado, Secciones cónicas, Círculos, Parábolas y Elipses, entre otros temas.

Probables errores

En la página 169, sección **17.1**, en el punto 2, después de b^2-4ac, se debe colocar el símbolo >; en esta misma línea hay que tachar la palabra parábola y en su lugar colocar hipérbola. En el punto 3, hay que tachar la palabra hipérbola y en su lugar colocar parábola. En **EJEMPLOS 17.1**, hay un error en el resultado, que presenta el libro, relacionado con el problema a); la respuesta correcta es 1, no -3, por consiguiente la figura no es una elipse, es una hipérbola o un caso degenerado.

En la página 171, **EJEMPLOS 17.3**, que comienzan en la página 170, ejercicio b), cuando se está en la fase de “ordenando los términos”, 100 pasa al segundo miembro de la expresión con signo (-), de ninguna manera con signo (+), por tanto, el resto de los resultados son erróneos; en adición, en la ecuación del círculo encontrada, el segundo término, del primer miembro, no es (y+3), sino $(y+3)^2$. En la sección **17.4 PARÁBOLAS**, ecuación (1) está formulada de manera incorrecta, pues en el segundo miembro de dicha ecuación, fue colocada la expresión 4py, sin embargo es 4px.

En la página 173, **EJEMPLOS 17.5**, en el desarrollo del problema a), se incurre en el siguiente error:

x= -p

x= (-2)= 2

En verdad -2 no puede ser igual a 2, la formulación correcta es –(-2)= 2, debido a que p= -2, en el problema que estamos tratando. En el desarrollo del problema b) tenemos otro probable error. Si p= 3/2 y la directriz es y= -p, entonces y≠ 3/2, y= -3/2. En **EJEMPLOS 17.6**, en el desarrollo del a), el libro dice que se consulte la figura 17-4, cuando es la 17-5. En EJEMPLOS 17.7, en el desarrollo del problema b), 3x pasa con signo (-) al segundo miembro de la ecuación, por tanto, los resultados pudieran ser errados.

En la página 176, en el desarrollo del problema c), en el cálculo de los vértices, k+a≠ -1, k+a= 21.

En las páginas 187-190, en el apartado de las respuestas a los problemas propuestos, encontramos algunos errores, siempre en nuestro parecer (podríamos estar equivocados). En la sección **17.14**, página 189, respuesta b), el centro no es C(6,2), es (-6, 2). En la página 189, sección **17.18**, respuesta c, el centro no es C(3, -5), es (-3, -5), igualmente se arrastran errores en los resultados de los vértices y focos de la elipse. En la página 190, sección **17.20**, en la respuesta b), el foco F’ no es (1, -8), es (1, -6); en la respuesta b) la ecuación de la hipérbola no es $(x-1)^2/4-(y-3)^2/5= 1$, es $(x-1)^2/4-(y+3)^2/5= 1$, el centro no es C(1, 3), es (1, -3), e igualmente tenemos diferencia con los resultados presentados por el libro en lo atinente a vértices y focos de la hipérbola, en este problema; en la respuesta c), el centro no es C(3, 5), es (3, -5); en la respuesta d) el libro otorga resultados cuestionables en lo que respecta a los cálculos de los focos de la hipérbola.

Resolviendo los problemas propuestos (página 186).

17.12 Grafique cada una de las ecuaciones siguientes: (nota: no haremos la gráfica, pero si analizaremos el tipo de gráfica que se corresponde con la ecuación dada).

a) $x^2+y^2= 9$

$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f= 0$ (Forma general de una ecuación de segundo grado con dos incógnitas x y y).

Discriminante= b^2-4ac.

a= 1, b= 0, c= 1,

$b^2-4ac= 0^2-4(1)(1)= -4<0$; la gráfica en sentido general es una elipse, pero como b= 0, y a=c, la gráfica es un círculo. De donde:

$y^2= 9-x^2$

$y= \pm\sqrt{(9- x^2)}$

Observe que y es real cuando $9-x^2\geq 0$, es decir, cuando $-9\leq x\leq 9$. De aquí que los valores de x mayores a 9 o menores que -9 quedan excluidos.

b) $xy= -4$

$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f= 0$ (Forma general de una ecuación de segundo grado con dos incógnitas x y y).

Discriminante= b^2-4ac.

a= 0, b= 1, c= 0,

$b^2-4ac= 1^2-4(0)(0)= 1>0$; la gráfica es una hipérbola.

$y = -4/x$,

c) $4x^2+y^2= 16$

$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f= 0$ (Forma general de una ecuación de segundo grado con dos incógnitas x y y).

Discriminante= b^2-4ac.

$a=4$, $b= 0$, $c= 1$,

$b^2-4ac= 0^2-4(4)(1)= -16<0$; la gráfica podría ser una elipse. Queda excluida la posibilidad de que sea un círculo, puesto que a pesar de que $b= 0$, $a\neq c$. Sin duda es una elipse.

Veamos:

$y^2= 16-4x^2$

$y= \pm\sqrt{(16-4x^2)}$

Observe que y es real cuando $16-4x^2\geq 0$, es decir, cuando $-2\leq x\leq 2$. De aquí que los valores de x mayores a 2 o menores que -2 quedan excluidos.

d) $x^2-4y^2= 36$

$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f= 0$ (Forma general de una ecuación de segundo grado con dos incógnitas x y y).

Discriminante= b^2-4ac.

$a=1$, $b= 0$, $c= -4$,

$b^2-4ac= 0^2-4(1)(-4)= 16>0$; la gráfica es una hipérbola.

Después de despejar, la ecuación dada, queda:

$y= \pm\sqrt{(x^2-36)/4}$

Observe que y es real cuando $(x^2-36)/4 \geq 0$, luego x no puede tener un valor entre -6 y 6.

e) $y^2= 4x$

$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f= 0$ (Forma general de una ecuación de segundo grado con dos incógnitas x, y).

Discriminante= b^2-4ac.

a=0, b= 0, c= 1,

$b^2-4ac= 0^2-4(0)(1)= 0$; la gráfica es una parábola.

Después de despejar, en la ecuación dada, queda:

$y= \pm\sqrt{4x}$

Observe que y es real cuando $4x \geq 0$, luego x no puede tener un valor inferior a cero.

f) $x^2+3y^2-1= 0$

$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f= 0$ (Forma general de una ecuación de segundo grado con dos incógnitas x y y).

Discriminante= b^2-4ac.

a= 1, b= 0, c= 3,

$b^2-4ac= 0^2-4(1)(3)= -12$; la gráfica es una elipse; no puede ser un círculo debido a que $a \neq c$.

Después de despejar, en la ecuación dada, queda:

$y= \pm\sqrt{(1-x^2)/3}$

Observe que y es real cuando $(1-x^2)/3> 0$, luego x no puede tener un valor inferior a -1, ni mayor que 1.

g) $x^2+3xy+y^2= 16$

$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f= 0$ (Forma general de una ecuación de segundo grado con dos incógnitas x y y).

Discriminante= b^2-4ac.

a= 1, b= 3, c= 1,

$b^2-4ac= 3^2-4(1)(1)= 5> 0$; la gráfica es una hipérbola.

h) $x^2+4y= 4$

$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f= 0$ (Forma general de una ecuación de segundo grado con dos incógnitas x y y).

Discriminante= b^2-4ac.

a= 1, b= 0, c= 0,

$b^2-4ac= 0^2-4(1)(0)= 0$; la gráfica es una parábola.

Después de despejar, en la ecuación dada, queda:

$y= \pm\sqrt{(4-x^2)/4}$

Observe que y es real cuando $(4-x^2)/4 \geq 0$, luego x no puede tener un valor inferior a -2, ni mayor que 2.

17.13 Escriba la ecuación del círculo que tenga las siguientes características.

a) Centro (4,1) y radio 3.

En este caso usamos esta ecuación del círculo: $(x-h)^2+(y-k)^2= r^2$

Sabiendo que h= 4, k= 1, r= 3

Sustitución

$(x-4)^2+(y-1)^2= 3^2$

$(x-4)^2+(y-1)^2= 9$

b) Centro (5, -3) y radio 6.

En este caso usamos esta ecuación del circulo: $(x-h)^2+(y-k)^2= r^2$

Sabiendo que h= 5, k= -3, r= 6

Sustitución

$(x-5)^2+(y+3)^2= 6^2$

$(x-5)^2+(y+3)^2= 36$

c) Pasa por (0, 0), (-4, 0) y (0, 6)

En este caso usamos esta ecuación del círculo $x^2+y^2+Dx+Ey+F= 0$

Para (0, 0) $0^2+0^2+D(0)+E(0)+F= 0$

F= 0

Para (-4, 0) $-4^2+0^2+D(-4)+E(0)+F= 0$

$$16-4D+F=0$$
$$-4D+F=-16$$

Para (0, 6) $\quad 0^2+6^2+D(0)+E(6)+F=0$

$$0+36+0+6E+F=0$$
$$6E+F=-36$$

Luego,

1) $\quad F=0$
2) $\quad -4D \quad +F=-16$
3) $\quad 6E+F=-36$

Usamos uno de los métodos de resolución de ecuaciones simultáneas y tendremos como resultado final: D= 4, E= -6, F= 0, por tanto tendremos:

$x^2+y^2+4x-6y=0$

17.14 Escriba la ecuación del círculo en su forma estándar y establezca su centro y su radio.

a) $x^2+y^2+6x-12y-20=0$

Ordenar términos:

$(x^2+6x)+(y^2-12y)=20$

Completar el cuadrado para x e y:

$(x^2+6x+9)+(y^2-12y+36)=20+9+36$

Forma estándar:

$(x+3)^2+(y-6)^2=65$

También tenemos:

$C(h, k)$

$C(-3, 6)$

$r^2 = 65$

$r = \sqrt{65}$

b) $x^2+y^2+12x-4y-5 = 0$

Ordenar términos:

$(x^2+12x)+(y^2-4y) = 5$

Completar el cuadrado para x e y:

$(x^2+12x+36)+(y^2-4y+4) = 5+36+4$

Forma estándar:

$(x+6)^2+(y-2)^2 = 45$

También tenemos:

$C(h, k)$

$C(-6, 2)$ Este resultado difiere del libro.

$r^2 = 45$

$r = \sqrt{45} = \sqrt{9.5} = 3\sqrt{5}$

17.17 Escriba la ecuación de la elipse que tiene las características siguientes:

a) Vértices $(\pm 4, 0)$ focos $(\pm 2\sqrt{3}, 0)$

Si es una elipse central tiene su centro en el origen, por lo que (h, k) = (0, 0).

Asimismo, las formas estándares de las elipses centrales son:

1) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

2) $y^2/a^2 + x^2/b^2 = 1$

¿Cómo determinar cuál de esas dos ecuaciones vamos a utilizar? Nos fijamos en los datos dados. Spiegel-Moyer, en su obra que estamos analizando, página 174, trazan la orientación. Se usa la ecuación 1) cuando los vértices tienen coordenadas v(a,0) y v^1(-a,0) y los focos tienen coordenadas F(c,0). Esta orientación coincide totalmente con los datos dados v(±, 4, 0) y F(±2√3, 0).

Ahora debemos fijar el procedimiento para determinar a^2, b^2, y c^2; *a* es la letra que indica la distancia desde un vértice al centro y *b* desde su covértice al centro y *c* representa la distancia desde un foco al centro (Spiegel-Moyer, p.173); de donde a = 4 (datos del problema, vértices (±4, 0)), c = 2√3 (datos del problema, focos (±2√3, 0)) y aplicamos la siguiente fórmula:

$a^2 = b^2+c^2$

$4^2 = b^2-(2\sqrt{3})^2$

$16 = b^2+2^2(\sqrt{3})^2$

$16 = b^2+4(3)^{2/2}$

$16 = b^2+4(3)$

$16 = b^2+12$

$b^2 = 16-12 = 4$, por tanto

$x^2/16+y^2/4= 1 \rightarrow$ es la ecuación de la elipse.

b) Covértices (±3, 0) longitud del eje mayor 10

En este problema observamos un dato crucial: covértices (±3, 0), que coincide con esta orientación de Spiegel-Moyer, en la página 174: usamos la ecuación 2), es decir, $y^2/a^2 + x^2/b^2 = 1$, cuando, entre otras cosas, los covértices se encuentran en B(b,0) y B'(-b,0); por lo tanto b=3; como el eje mayor tiene una longitud de 10 y sabiendo nosotros que *a* es la distancia del vértice al centro, entonces a=5, por consiguiente:

$a^2 = b^2+c^2$

$(5)^2 = (3)^2+c^2$

$25 = 9+c^2$

$c^2 = 25-9 = 16$

La ecuación es: $y^2/25 + x^2/9 = 1$

c) Centro (-3, 2), vértice (2, 2), c = 4.

Debido a que en este problema el centro no es C(0, 0), sino C(-3, 2), descartamos las dos ecuaciones estándares de la elipse, con la cuales trabajamos en los problemas a) y b); ahora usaremos una de estas dos ecuaciones de la elipse:

3) $(x-h)^2 / a^2 + y-k / b^2 = 1$

4) $(y-k)^2 / a^2 + (x-h)^2 / b^2= 1$

En el problema que nos ocupa hay otro dato crucial: vértice (2, 2), el cual coincide con la orientación de Spiegel-Moyer, en el sentido de que uno de los vértices se encuentra en V(h+a, k), cuando la ecuación a usar es la 3).

Si el centro es (-3, 2), ello quiere decir que en el planteamiento general de centro (h, k), en este tipo de elipse, h = -3 y k = 2. Pasemos ahora al vértice: (h+a, k) = (-3+a, 2) = (2, 2), por lo tanto (-3+a) = 2, es decir:

$-3+a = 2$

$a = 2+3 = 5$

Luego, $a^2 = 5^2 = 25$; tenemos como dato del problema que c = 4, por tanto $c^2 = 4^2 = 16$, ahora calculamos b^2:

$a^2 = b^2+c^2$

$25 = b^2+16$

$b^2 = 25-16 = 9$

$b = \sqrt{9} = 3$

La ecuación de la elipse es:

$[x-(-3)]^2/25 + (y-2)^2/9 = 1$

$(x+3)^2/25 + (y-2)^2/9 = 1$

d) Vértices (3, 2) y (3, -6), covértices (1, -2) y (5, -2)

Se afirma que el punto medio del segmento de línea entre los vértices es el centro, por lo que éste es, según los datos del problema, c(3+3/2, 2-6/2) = (3, -2); por lo que se tiene una elipse con centro en (h, k), donde h = 3 y k = -2. La forma estándar de la elipse es la ecuación 3) ó 4).
Los vértices son V(h, k+a) y V'(h, k-a). Hagamos las sustituciones:

(h, k+a) = (3, -2+a) = (3, 2)

$-2+a = 2$

$a = 2+2 = 4$
$a^2 = 16$

Trabajemos ahora los covértices B(h+b, k) y B'(h-b, k). Sustitución:

$(h+b, k) = (3+b, -2) = (1, -2)$

$3+b = 1$

$b = 1-3 = -2$

$b^2 = 4$

Por tanto,

$a^2 = b^2+c^2$

$16 = 4+c^2$

$c^2 = 16-4 = 12$

$c = \sqrt{12}$

La ecuación es:

$(y-k)^2/a^2 + (x-h)^2/b^2 = 1$

$[y-(-2)]^2/16 + (x-3)^2/4 = 1$

$(y+2)^2/16 + (x-3)^2/4 = 1$

17.18 Escriba la ecuación de la elipse en su forma estándar y determine el centro, vértices, focos y covértices:

a) $3x^2+4y^2-30x-8y+67 = 0$

$3x^2-30x+4y^2-8y+67 = 0$

$3(x^2-10x)+4(y^2-2y) = -67$

$3(x^2-10x+25)+4(y^2-2y+1) = -67+3(25)+4(1)$

$3(x-5)^2+4(y-1)^2 = 12$

Dividimos por 12 y queda:

$(x-5)^2/4 + (y-1)^2/3 = 1 \rightarrow$ ecuación de la elipse en su forma estándar

$a^2 = b^2+c^2$

$4 = 3+c^2$

$c^2 = 4-3 = 1$

$c = 1$

$a = 2$

$b = \sqrt{3}$

Centro $(h, k) = (5, 1)$

Vértices	$(h+a, k)$	y	$(h-a, k)$
	$V(5+2, 1)$	y	$V'(5-2, 1)$
	$V(7, 1)$	y	$V'(3, 1)$
Focos	$(h+c, k)$	y	$(h-c, k)$
	$F(5+1, 1)$	y	$F'(5-1, 1)$
	$F(6, 1)$	y	$F'(4, 1)$
Covértices	$B(h, k+b)$	y	$B(h, k-b)$
	$B(5, 1+\sqrt{3})$	y	$B'(5, 1-\sqrt{3})$

b) $16x^2+7y^2-64x+28y-20 = 0$

$16x^2-64x+7y^2+28y-20 = 0$

$16(x^2-4x)+7(y^2+4y) = 20$

$16(x^2-4x+4)+7(y^2+4y+4) = 20+16(4)+7(4)$

$16(x-2)^2+7(x+2)^2 = 112$

Dividimos por 112 y queda:

$(x-2)^2/7+(y+2)^2/16= 1$

Pero como
4) $(y-k)^2/a^2+(x-h)^2/b^2= 1$

Tendremos:

$(y+2)^2/16+/x-2)^2/b^2= 1$

Centro = (2, -2)

$a^2 = b^2+c^2$

$16 = 7+c^2$

$c^2 = 16-7 = 9$

$c = 3$

$a = 4$

$b = \sqrt{7}$

Vértices (h, k+a) y (h, k-a)

	V(2, -2+4)	y	V’(2, -2-4)
	V(2, 2)	y	V’(2, -6)
Focos	(h, k+c)	y	(h, k-c)
	F(2, -2+3)	y	F’(2, -2-3)
	F(2, 1)	y	F’(2, -5)
Covértices	(h+b, k)	y	(h-b, k)
	B(2+$\sqrt{7}$, -2)	y	B’(2-$\sqrt{7}$, -2)

c) $9x^2+8y^2+54x+80y+209 = 0$

$9x^2+54x+8y^2+80y+209 = 0$

$9(x^2+6x)+8(y^2+10y) = -209$

$9(x^2+6x+9)+8(y^2+10y+25) = -209+9(9)+8(25)$

$9(x+3)^2+8(y+5)^2 = 72$

Dividimos por 72 y queda:

$(x+3)^2/8 + (y+5)^2/9 = 1$

Pero como

4) $(y-k)^2/a^2+(x-h^2/b^2 = 1$

Tendremos:

$(y+5)^2/9+(x+3)^2/8= 1 \rightarrow$ forma estándar

Centro (h, k) = (-3, -5)

$a^2 = b^2+c^2$

$9 = 8+c^2$

$c^2 = 9-8 = 1$

$c = 1$

$a= 3$

$b = \sqrt{8}$

Vértices	(h, k+a)	y	(h, k+a)
	V(-3, -5+3)	y	V'(-3, -5-3)
	V(-3, -2)	y	V'(-3, -8)
Focos	(h, k+c)	y	(h, k-c)
	F(-3, -5+1)	y	F'(-3, -5-1)
	F(-3, -4)	y	F'(-3, -6)
Covértices	(h+b, k)	y	(h-b, k)
	B(-3+√8, -5)	y	B'(-3-√8, -5)
	B(-3+2√2, -5)	y	B'(-3-2√2, -5)

d) $4x^2+5y^2-24x-10y+21 = 0$

$4(x^2-6x)+5(y^2-2y)= -21$

$4(x^2-6x+9)+5(y^2-2y+1) = -21+4(9)+5(1)$

$4(x-3)^2+5(y-1)^2 = 20$

Dividimos por 20:

$(x-3)^2/5 + (y-1)^2/4 = 1 \rightarrow$ forma estándar
Centro $(h, k) = (3, 1)$

$a^2 = b^2+c^2$

$5 = 4+c^2$

$c^2 = 5-4 = 1$

$c = \sqrt{1} = 1$

$a = \sqrt{5}$

$b = \sqrt{4} = 2$

Vértices	(h+a, k)	y	(h-a, k)
	V(3+√5, 1)	y	V'(3-√5, 1)
Focos	(h+c, k)	y	(h-c, k)
	F(3+1, 1)	y	F'(3-1, 1)
	F(4, 1)	y	F'(2, 1)
Covértices	(h, k+b)	y	(h, k-b)
	B(3, 1+2)	y	B'(3, 1-2)
	B(3, 3)	y	B'(3, -1)

17.19 Escribas las ecuaciones de la hipérbola que tiene las características siguientes:

a) Vértices (±3, 0), focos (±5, 0)

Dados los datos de los vértices y focos, estamos frente a una hipérbola central, cuya forma estándar es 1) $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, debido a que en este tipo de hipérbola, nos dicen Spiegel-Moyer, los vértices son V(a, 0) y V'(-a, 0) y los focos F(c, 0) y F'(-c, 0). Es conveniente observar el libro que estamos analizando en la página 177.

A partir de la premisa establecida arriba podemos afirmar que el centro se encuentra en el origen (0, 0). Como nos dieron el dato de los vértices, (±3, 0), se deduce que *a*, la medida de la distancia del centro a un vértice, es igual a 3; y como sabemos, la magnitud de los focos (±5, 0), se deduce que *c*, la medida de la distancia del centro al foco, es igual a 5. Sabemos también que $c^2 = a^2+b^2$, sustituyendo tendremos que:

$5^2 = 3^2+b^2$
$25 = 9+b^2$
$b^2 = 25-9 = 16$

Por tanto, la ecuación estándar es:

$x^2/9 – y^2/16 = 1$

b) Vértices (0, ±8), focos (0, ±10)

Es evidente que en este problema, el dato de los vértices, (0, ±8), delata que el centro de la hipérbola se encuentra en el origen, (0, 0); y se advierte además que los vértices se encuentran sobre una línea vertical, por lo que la forma estándar es $y^2/a^2-x^2/b^2 = 1$.

Procedemos a otros cálculos:

Vértices	(0, a)	y	(0, -a)
	V(0, 8)	y	V’(0, -8)
Focos	(0, c)	y	(0, -c)
	F(0, 10)	y	F’(0, -10)

Luego,

$a = 8$

$c = 10$

$c^2 = a^2+b^2$

$b^2 = 10^2-8^2$

$b^2 = 100-64$
$b^2 = 36$

$b = \sqrt{36} = 6$

Por tanto,

$y^2/64 – x^2/36 = 1 \rightarrow$ forma estándar

c) Focos (4, -1) y (4, 5), la longitud del eje transversal es 2.

Debido a que los focos están en (4, -1) y (4, 5) se encuentran sobre una línea paralela al eje *y*, por lo que su forma es: $(y-k)^2/a^2 - (x-h)^2/b^2 = 1$
El punto medio del segmento de línea entre los focos (4, -1) y (4, 5) es el centro, por lo que $c(h, k) = (4+4/2, -1-5/2) = 5, 2$

Pasemos a determinar c: los focos están en (h, k+c) y (h, k+c), por lo que (h, k+c) = (4, -1) y 2-c = -1, donde –c = -1-2 = -3, de aquí que c = 3. El eje transversal tiene una longitud de 2, se deduce pues que 2a = 2, a = 2/2 = 1. A partir de c^2 0 a^2+b^2, tendremos $3^2 = 1^2+b^2$, $b^2 = 9-1 = 8$, por tanto,

$(y-2)^2/1-(x-4)^2/8= 1 \rightarrow$ forma estándar.

d) Vértices (-1, -1) y (-1, 5), b = 5

Estamos frente a un problema similar al c). La propuesta de elipse que tenemos, en su forma estándar se expresa como:

4) $(y-k)^2/a^2 - (x-h)^2/b^2 = 1$

Vértices:

v(h, k+a) y v'(h, k-a)

17.20 Escriba la ecuación de la hipérbola en su forma estándar y determine su centro, vértices y focos:

a) $4x^2-5y^2-8x-30y-21 = 0$

$4x^2-8x-5y^2-30y-21 = 0$

$4(x^2-2x)-5(y^2+6y) = 21$

$4(x^2-2x+1)+5(y^2+6y+9) = 21+4(1)-5(9)$

$4(x-1)^2-5(y+3)^2 = -20$

Dividimos por -20

$(x-1)^2/-5 - (y+3)^2/-4 = 1$

Multiplicamos por -1:

$(y+3^2/4 – (x-1)^2/5 = 1 \rightarrow$ forma estándar

$a^2 = a^2+b^2$
$c^2 = 4+5 = 9$

$a = 2$

$b = \sqrt{5}$

$c = 3$

Centro (h, k) = 1, -3)

Vértices	(h, k+a)	y	(h, k+a)
	V(1, -3+2)	y	V'(1, -3-2)
	V(1, -1)	y	V'(1, -5)
Focos	(h, k+c)	y	(h, k-c)
	F(1, -3+3)	y	F'(1, -3-3)
	F(1, 0)	y	F'(1, -6)

b) $5x^2-4y^2-10x-24y-51 = 0$

$5x^2-10x-4y^2-24y-51 = 0$

$5(x^2-2x)-4(y^2+6y) = 51$

$5(x^2-2x+1)-4(y^2+6y+9) = 51+5(1)-4(+9)$

$5(x-1)^2-4(y+3)^2 = +20$

Dividimos por 20,

$(x-1)^2/4 - (y+3)^2/5 = 1$

$c^2 = a+b^2 = 4+5 = 9$; $c = 3$; $a = 2$; $b = \sqrt{5}$

Centro (h, k) = 1, -3 Difiere del resultado del libro.

Vértices	(1, -3+2)	y	(1, -3-2)
	V(1, -1)	y	V'(1, -5)
Focos	F(1, 0)	y	F'(1, -6)

c) $3x^2-y^2-18x+10y-10 = 0$

$3x^2-18x-y^2+10y-10 = 0$

$3(x^2-6x)-(y^2-10y) = 10$

$3(x^2-6x+9)-(y^2-10y+25) = 10+3(9)-25$

$3(x-3)^2-(y+5)^2 = 12$

Dividimos por 12,

$(x-3)^2/4 - (y+5)^2/12 = 1 \rightarrow$ forma estándar

$c^2 = a^2+b^2 = 4+12 = 16$

$c = 4$

$a = 2$

$b = \sqrt{12}$

Centro (h, k)	= (3, -5)		
Vértices	(h+a, k)	y	(h-a, k)
	V(3+2, -5)	y	V'(3-2, -5)
	V(5, -5)	y	V'(1, -5)
Focos	(h+c, k)	y	(h-c, k)
	F(3+4, -5)	y	F'(3-4, -5)
	F(7, -5)	y	F'(-1, -5)

d) $4x^2-y^2+8x+6y+11 = 0$

$4x^2+8x-y^2+6y+11 = 0$

$4(x^2+2x)-(y^2-6y) = -11$

$4(x^2+2x+1)-(y^26y+9) = -11+4(1)-9$

$4(x+1)^2-(y-3)^2 = -16$

Dividimos por 16,

$(x+1)^2/+4–(y-3)^2/+16 = -1$

$(y-3)^2/16–(x+1)^2/4= 1 \rightarrow$ forma estándar
$c^2 = a^2+b^2 = 16+4 = 20$

$c = \sqrt{20}$

$a = 4$

$b = 2$

Centro (h, k) = (-1, 3)

Vértices	$(h, k+a)$	y	$(h, k-a)$
	$V(-1, 3+4)$	y	$V'(-1, 3+4)$
	$V(-1, 7)$	y	$V'(-1, -1)$
Focos	$(h, k+c)$	y	$(h, k-c)$
	$F(-1, 3+\sqrt{20})$	y	$F'(-1, 3-\sqrt{20})$,
	es decir,		
	$F(-1, 3+\sqrt{4.5})$	y	$F'(-1, 3-\sqrt{4.5})$
	$F(-1, 3+2\sqrt{5})$	y	$F'(-1, 3-2\sqrt{5})$

17

RESOLUCIÓN DE ALGUNOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 18 DEL LIBRO *ÁLGEBRA SUPERIOR* DE SPIEGEL-MOYER

Introducción

Spiegel-Moyer desarrollan el capítulo 18, denominado SISTEMAS DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO, desde la página 191 hasta la 198. Tratan allí los siguientes puntos: Solución gráfica y solución algebraica.

Probables errores:

En la página 197, sección **18.18** d), es posible que las respuestas ofrecidas por el libro tengan algunas equivocaciones con relación a los signos; asimismo en la e), la última expresión no es $(\sqrt{7}, -3)$, es $(-\sqrt{7}, -3)$.

Resolviendo los problemas propuestos (página 197)

18.18 Resuelva los sistemas de ecuaciones siguientes de manera algebraica:

a) $2x^2-y^2 = 14$; $x-y = 1$ Aquí tenemos una ecuación lineal y una de segundo grado; Spiegel-Moyer nos orientan a resolver la ecuación lineal para encontrar las incógnitas y sustituimos en la ecuación de segundo grado. Procedemos:

$x-y = 1$

$-y= 1-x$
$y = x-1$

Sustituir en la ecuación de segundo grado:

$2x^2-(x-1)^2 = 14$

$2x^2-(x^2-2x+1) = 14$

$2x^2-x^2+2x-1 = 14$

$x^2+2x-1-14 = 0$

$x^2+2x-15 = 0$

$(x+5)(x-3) = 0$

$x = -5, 3$

Sustituir

Cuando $x = -5$

$y = x-1$

$y = -5-1 = -6$

Cuando $x = 3$

$y = x-1$

$y = 3-1 = 2$

Soluciones simultáneas:

$(-5, -6)$ y $(3, 2)$

Verificación:

$2x^2-y^2 = 14$

$2(-5)^2-(-6)^2 = 14$

$x-y = 1$

$3-2 = 1$

$1= 1$

b) $xy+x^2 = 24$; $y-3x+4 = 0$

Despejamos en la ecuación lineal:

$y = 3x-4$

Sustituir en la ecuación de segundo grado:

$x(3x-4)+x^2 = 24$

$3x^2-4x+x^2 = 24$

$4x^2-4x-24 = 0$

Dividimos entre 4:

$x^2-x-6 =0$

Factorizamos:

$(x-3)(x+2) = 0$

$x = 3, -2$

Sustituir:

Cuando $x = 3$

$y = 3(3)-4 = 9-4 = 5$

Cuando $x = -2$

$y = 3(-2)-4 = -6-4 = -10$

Soluciones simultáneas:

$(3, 5)$ y $(-2, -10)$

c) $3xy-10x = y$; $2-y+x = 0$

Despejamos:

$2+x = y$

$y = x+2$

Sustituir:

$3x(x+2)-10x = x+2$

$3x^2+6x-10x = x+2$

$3x^2+6x-10x-x-2 = 0$

$3x^2-5x-2 = 0$

Factorizamos:

$3(x-2)(x+1/3) = 0$

$x = 2, -1/3$

Sustituir:

Cuando $x = 2$

$y = x+2$

$y = 2+2 = 4$

Cuando $x = -1/3$

$y = x+2$

$y = -1/3+2 = 5/3$

Soluciones simultáneas:

$(2, 4)$ y $(-1/3, 5/3)$

d) $4x+5y = 6$, $xy= -2$

Despejamos:

$y = -2/x$

Sustituir:

$4x+5(-2/x) = 6$

$4x-10/x = 6$

$4x-10/x= (4x^2-10)/x$

$(4x^2-10)/x = 6$

$4x^2-10 = 6x$

$4x^2-6x-10 = 0$

Factorizamos:

$4(x-1)\,(x+5/2)$

$x= 1, -5/2$

Sustituir:

$y = -2/1= -2$

$y= -2/-5/2= 4/5$

Soluciones simultáneas:

(1, -2) y (-5/2, 4/5) (Diferencia de signos con respecto a respuesta del libro).

e) $2x^2-y^2 = 5$; $3x^2+4y^2 = 57$

Estas ecuaciones son de la forma $ax^2+by^2 = c$; Spiegel-Moyer recomiendan el uso de los métodos de suma y resta.

1) $2x^2-y^2 = 5$
2) $3x^2+4y^2 = 57$

Multiplicamos 1) por 4:

$$\begin{array}{l} 8x^2-4y^2 = 20 \\ \underline{3x^2+4y^2 = 57} \\ 11x^2 \qquad = 77 \end{array}$$

$x^2 = 77/11 = 7$
$x = \pm\sqrt{7}$

$x = +\sqrt{7},\ -\sqrt{7}$

Sustitución en 1):

Cuando $x = \sqrt{7}$

$2(\sqrt{7})^2-y^2 = 5$

$2(\sqrt{7})^2-5 = y^2$

$y^2 = 2(\sqrt{7})^2-5= 2(7^{1/2})^2-5= 2(7^{2/2})-5= 2(7)-5= 14-5= 9$

$y= \pm\sqrt{9}= 3, -3$

Cuando $x = -\sqrt{7}$

$2(-\sqrt{7})^2-y^2 = 5$

$2(-\sqrt{7})^2-5 = y^2$

$y^2 = 2(-\sqrt{7})^2-5= 2(\sqrt{7})^2-5= 2(7^{1/2})^2-5= 2(7^{2/2})-5= 2(7)-5= 14-5= 9$

$y= \pm\sqrt{9}= \pm 3$

$y= 3, 3$

Soluciones:

$(\sqrt{7}, 3), (\sqrt{7}, -3), (-\sqrt{7}, 3), (-\sqrt{7}, -3)$

f) (1) $9/x^2+16/y^2 = 5$,
(2) $18/x^2-12/y^2 = -1$

Multiplicamos (1) por 3

Multiplicamos (2) por 4

$27/x^2+48/y^2 = 15$
$\underline{72/x^2-48/y^2 = -4}$
$99/x^2 \qquad = 11$

$99 = 11x^2$

$x^2 = 99/11 = 9$

$x= \pm\sqrt{9}$

$x = +\sqrt{9}, \; -\sqrt{9}$

$x = 3, -3$

Sustituir:

Cuando $x = 3$

$9/(3)^2+16)/y^2 = 5$

$9/9+16)/y^2 = 5$

$1+16/y^2 = 5$

$(y^2+16) / y^2 = 5$

$y^2+16 = 5y^2$

$y^2-5y^2+16 = 0$

$-4y^2+16 = 0$

$4y^2-16 = 0$

$y^2 = 16/4 = 4$

$y = \pm\sqrt{4}$

$y = 2, -2$

cuando $x = -3$

$9/(-3)^2+16/y^2 = 5$

$9/9+16/y^2 = 5$

$1+16/y^2 = 5$

$y^2+16/y^2 = 5$

$y^2+16 = 5y^2$

$y^2-5y^2+16 = 0$

$-4y^2+16 = 0$

$4y^2-16 = 0$

$y^2 = 16/4 = 4$

$y = \pm\sqrt{4}$

$y = 2, -2$

Soluciones simultáneas:

(3, 2), (3, -2), (-3, 2), (-3, -2)

g) $x^2-xy = 12$; $xy-y^2 = 3$

Estas ecuaciones son de la forma $ax^2+bxy+cy^2 = d$; Spiegel-Moyer sugieren, entre varios métodos, eliminar el término constante en ambas ecuaciones. Procedemos: multiplicamos la (2) por -4.

$$
\begin{array}{lrl}
(1) & x^2-xy & = 12 \\
 & \underline{-4xy+4y^2} & \underline{= -12} \\
 & x^2-5xy+4y^2 & = 0
\end{array}
$$

Factorizamos:

$(x-4y)(x-y) = 0$

$x = 4y$, y

Sustituir:

Cuando $x = 4y$

$(4y)^2-(4y)y = 12$
$16y^2-4y^2 = 12$

$12y^2 = 12$

$y^2 = 12/12 = 1$

$y = \pm\sqrt{1}$

$y = 1, -1$

Por tanto, cuando

$y = 1$, $x = 4(1) = 4$

Cuando $y = -1$,
$x = 4(-1) = -4$

De ahí que las dos soluciones son:

$x = 4$, $y = 1$;

$x = -4$, $y = -1$

$(4, 1)$, $(-4, -1)$

Augustin Louis Cauchy (1789-1857): pionero en el análisis y la teoría de permutación de grupos. También investigó la convergencia y la divergencia de

las series infinitas, ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidad y física matemática. Cauchy, trabajó como un ingeniero militar y en 1810 llegó a Cherbourg a trabajar junto a Napoleón en la invasión a Inglaterra. En 1813 retornó a París y luego fue persuadido por Laplace y Lagrange para convertirse en un devoto de las matemáticas. Él ayudó ocupando diversos puestos en la Facultad de Ciencia de París, El Colegio de Francia y La Escuela Politécnica. En 1814 él publicó la memoria de la integral definida que llegó a ser la base de la teoría de las funciones complejas.
Gracias a Cauchy, el análisis infinitesimal adquiere bases sólidas.

Numerosos términos matemáticos llevan su nombre: el teorema integral de Cauchy, la teoría de las funciones complejas, las ecuaciones de Cauchy-Riemann y Secuencias de Cauchy. Cauchy, produjo 789 escritos, pero fue desaprobado por la mayoría de sus colegas. El mostró una obstinada rectitud a sí mismo y un agresivo fanatismo religioso. Como un apasionado del realismo pasó algún tiempo en Italia después de rechazar tomar un juramento de lealtad. Dejó París después de la Revolución de 1830 y después de un corto tiempo en Suiza aceptó una oferta del Rey de Piedmont para realizar una cátedra en Turín donde estuvo hasta 1832. En 1833 se marchó de Turín a Praga en atención de acompañar a Charles X y ser el tutor de su hijo. Cauchy retornó a París en 1838 y retomó su cargo en la academia pero no su posición de profesor por haber rechazado tomar el juramento de lealtad. Cuando Louis Philippe fue destronado en 1848 Cauchy retomó su cátedra en Sorbonne. El ayudo en los postgrados hasta la hora de su muerte.

18

RESOLUCIÓN DE ALGUNOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 19 DEL LIBRO *ÁLGEBRA SUPERIOR* DE SPIEGEL-MOYER

Introducción

Spiegel-Moyer desarrollan el capítulo 19, denominado DESIGUALDADES, desde la página 199 hasta 213. Tratan aquí los siguientes puntos: Teoremas de las desigualdades, desigualdades con valor absoluto, desigualdades de grado superior, sistemas de desigualdades lineales y programación lineal.

Problemas propuestos (página 210)

19.22 Encuentre que los valores de *x* para los que las siguientes desigualdades son verdaderas.

a) $2(x+3) > 3(x-1)+6$

$2x+6 > 3x-3+6$

$2x-3x > -3+6-6$

$-x > -3$

$x < 3$

b) $x/4+2/3 < 2x/3-1/6$

Multiplicamos ambos miembros de la desigualdad por 12, y queda:
$3x+8 < 8x-2$

$3x-8x < -2-8$

$-5x < -10$

$x > 2$

c) $1/x+3/4x > 7/8$

Multiplicamos por x:

$1+3/4 > (x)7/8$
$8(1+3/4) > 7x$

$8+6 > 7x$

$14/7 > x$

$2>x$

$x< 2$ Este resultado difiere de la respuesta que otorga el libro.

d) $x^2 > 9$

$x > \pm\sqrt{9}$

$x > \pm 3$, es decir, $x< -3$ o $x> 3$

19.23 Para qué valores de *a* será $(a+3) < 2(2a+1)$?

$(a+3)< 2(2a+1)$

$(a+3) < 4a+2$

$a-4a < 2-3$
$-3a< -1$

$a > 1/3$

19.30 Determine los valores de *x* para los que las desigualdades siguientes son válidas:

a) $x^2+2x-24 > 0$

$(x+6)(x-4) > 0$

Luego

$x < -6$

$x > 4$

b) $x^2-6 < x$

$x^2-x-6 < 0$

$(x-3)(x+2) < 0$

Luego,

$x < 3$

$x > -2$

Es decir,

$-2 < x < 3$

c) $3x^2-2x < 1$

$3x^2-2x-1 < 0$
$x^2-2/3x-1/3 < 0$

$(x-1)\ (x+1/3) < 0$

Luego,

$x < 1$

$x > -1/3$

$-1/3 < x < 1$

19

RESOLUCIÓN DE ALGUNOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 20 DEL LIBRO *ÁLGEBRA SUPERIOR* DE SPIEGEL-MOYER

Introducción

Spiegel-Moyer desarrollan el capítulo 20, denominado FUNCIONES POLINOMIALES, desde la página 214 hasta 234. Tratan aquí los siguientes puntos: Ecuaciones polinomiales, Raíces de las ecuaciones polinomiales, Resolución de ecuaciones polinomiales y Aproximación de raíces reales.

Problemas propuestos (página 231)

20.43 Si $p(x) = 2x^3-x^2-x+2$, encuentre:

a) $p(0)$

$p(0) = 2(0)^2-(0)^2-0+2 = 2$

b) $p(2)$

$p(2) = 2(2)^3-(2)^2-x+2 = 16-4-2+2 = 12$

c) $p(-1)$

$p(-1) = 2(-1)^3-(-1)^2-(-1)+2 = -2-1+1-2 = 0$

d) $p(-1/2)$

$p(-1/2) = 2(-1/2)^3-(-1/2)^2-(-1/2)+2 =$

$2(-1/8)(-(1/4)+1/2+2 = -1/4-1/4+1/2+2/1 = -1-1+2+8/4$

8/4 = 2 (Hay que observar esta respuesta, difiere a la presentada por el libro).

e) $p(\sqrt{2})$

$p(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2})^3-(\sqrt{2})^2-\sqrt{2}+2 = 2(2^{3/2})-2^{2/2}-2^{1/2}+2 = 2^{5/2}-2-2^{1/2}+2= 2^{5/2}-2^{1/2}= \sqrt{2^5} -\sqrt{2}=$

$\sqrt{32}-\sqrt{2}= \sqrt{16.2}-\sqrt{2}= \sqrt{16}\sqrt{2}-\sqrt{2}= 4\sqrt{2}-\sqrt{2}= 3\sqrt{2}$.

20.44 Determine el residuo de cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $(2x^5-7) \div (x+1)$

Partimos del teorema del residuo que reza así: Si r es una constante y se divide el polinomio P(x) entre (x-r), el residuo es P(r).

En el caso que nos ocupa como la constante que se encuentra en el divisor es positiva pasa negativa en la sustitución.

De allí que:

$R = 2(-1)^5-7 = -2-7 = -9$

b) $(x^3+3x^2-4x+2) \div (x-2)$. En este caso como la constante es negativa, pasa positiva en la sustitución.

$R = (2^3+3(2)^2-4(2)+2) = 8+12-8+2 = 14$

c) $(3x^3+4x-4) \div (x-1/2)$

$[3(1/2)^3+4(1/2)-4] = 3(1/8)+2-4 = 3/8-2 = 3-16/8 = -13/8$

d) $(4y^3+y+27) \div (2y+3)$. En este caso dividimos el divisor por 2, para eliminar la constante que acompaña a y, por tanto, la constante ya no es 3, sino 3/2.

$4(-3/2)^3+(-3/2)+27 = (4)(-27/8)-3/2+27= -27/2-3/2+27= -27-3+54/2= 24/2= 12.$

e) $(x^{12}+x^6+1) \div (x-\sqrt{-1})$

$(\sqrt{-1})^{12}+(\sqrt{-1})^6+1 = (-1)^{12/2}+(-1)^{6/2}+1 = 1-1+1 = 1$

f) $(2x^{33}+35) \div (x+1)$

$2(-1)^{33}+35 = -2+35 = 33$

20.45 Demuestre que x+3 es un factor de $x^3+7x^2+10x-6$ y que x = -3 es una raíz de la ecuación $x^3+7x^2+10x-6 = 0$
Sustitución en la ecuación:

$(-3)^3+7(-3)^2+10(-3)-6 = 0$

$-27+63-30-6 = 0$

$63-63 = 0$

$0 = 0$

Sí x = -3 es una raíz de la ecuación; ¿y qué de x+3? Simplemente es un factor de $x^3+7x^2+10x-6$, en función del teorema del factor, que implica lo siguiente, en el problema que estamos analizando: si 3 es una raíz de la ecuación $x^3+7x^2+10x-6 = 0$, es decir si p(3) = 0, entonces x+3 es un factor de $x^3+7x^2+10x-6$.

20.46 Determine cuáles de los siguientes números son raíces de la ecuación $x^4+3y^3+12y-16 = 0$

a) 2

$p(2) = (2)^4+3(2)^3+12(2)-16 = 0$

$16+24+24-16 = 0$

$48 \neq 0$

Por tanto, 2 no lo es.

b) -4

$p(-4) = -4^4+3(-4)^3+12(-4)-16 = 0$

$256-192-48-16 = 0$

$256-256 = 0$

$0 = 0$

Por tanto, -4 es raíz de la ecuación

c) 3

$p(3) = 3^{34}+3(3)^3+12(3)-16 = 0$
$81+81+36-16 = 0$

$132 \neq 0$

Por tanto, 3 no es raíz.

d) 1

$p(1) = 1^4+3(1)^3+12(1)-16 = 0$

$1+3+12-16 = 0$

$16-16 =$

$0 = 0$

Por tanto, 1 es raíz.

e) 2i

$p(2i) = (2i)^4+3(2i)^3+12(2i)-16 = 0$

$16i^4+3(8i^3)+24i-16 = 0$

$(16)i^2\cdot i^2+24i^2\cdot i+24i-16 = 0$

$16(-1)(-1)+24(-1)i+24i-16 = 0$

$16-24i+24i-16 = 0$

$16-16 = 0$

$0 = 0$

Por tanto, 2i es raíz.

20.47 Encuentre los valores de *k* para los cuales:

a) $4x^3+3x^2-kx+6k$ es divisible entre $x+3$ exactamente

$p(-3) = 4(-3)^3+3(-3)^2-k(-3)+6k = 0$

$-108+27+3k+6k = 0$

$-81+9k = 0$

$k = 81/9 = 9 \rightarrow$ respuesta

b) $x^5+4kx-4k^2 = 0$ tiene como raíz $x = 2$

$p(2) = 2^5+4(2)k-4k^2 = 0$

$32+8k-4k^2 = 0$

$-4k^2+8k+32 = 0$

Dividimos por 4 y queda:

$k^2-2k-8 = 0$

$(k-4)(k+2) = 0$

$k = 4$

$k = -2$

20.48 Por división sintética determine el cociente y el residuo de cada una de las expresiones siguientes:

a) $(2x^3+3x^2-4x-2) \div (x+1)$

Primero, escribimos los términos del dividendo en orden descendente:

$2x^3+3x^2-4x-2$

Segundo

$$\begin{array}{l} \underline{-1}\backslash\ 2+3-4-\ 2 \\ \qquad\ \ -2-1+5 \\ \quad\ 2+1-5+3 \end{array}$$

Tercero, formalización del cociente:

El cociente es de grado dos, debido a que el dividendo es de grado tres y el divisor de grado uno, por tanto, tendremos: $2x^2+x-5$.

Cuarto, formalización del residuo:

Residuo: 3

Quinto, formalización de la respuesta final:

$2x^2+x-5+(3/x+1)$.

b) $(3x^5+x^3-4) \div (x-2)$

Primero, escribimos los términos del dividendo en orden descendente:

$3x^5+0x^4+x^3+0x^2+0x-4$

Segundo

$\underline{2\backslash}$ 3+0 + 1 + 0 + 0 – 4

+6+12+26+52+104

3+6+13+26+52+100

Tercero, formalización del cociente:

El cociente es de grado cuatro, debido a que el dividendo es de grado cinco y el divisor de grado uno, por tanto, tendremos: $3x^4+6x^3+13x^2+26x+52$

Cuarto, formalización del residuo:

Residuo: 100.

Quinto, formalización de la respuesta final:

Respuesta: $3x^4+6x^3+13x^2+26x+52+(100/x-2)$

c) $(y^6-3y^5+4y-5) \div (y+2)$

Primero, escribimos los términos del dividendo en orden descendente:

$y^6-3y^5+0y^4+0y^3+0y^2+4y-5$

Segundo

-2\ 1-3+ 0+ 0+ 0+ 4- 5

-2+10-20+40-80+152

1-5+10-20+40-76+157

Tercero, formalización del cociente:

El cociente es de grado cinco, debido a que el dividendo es de grado seis y el divisor de grado uno, por tanto, tendremos: $y^5-5y^4+10y^3-20y^2+40y-76$

Cuarto, formalización del residuo:

Residuo: 147.

Quinto, formalización de la respuesta final:

Respuesta: $y^5-5y^4+10y^3-20y^2+40y-76+(147/y+2)$

d) $(4x^3+6x^2-2x+3 \div (2x+1)$

Primero, escribimos los términos del dividendo en orden descendente:

$4x^3+6x^2-2x+3$

Segundo (en este caso hay que normalizar el divisor reduciendo a 1 el coeficiente de x, por tanto dividimos entre 2 y obtenemos (x+1/2)

$$\begin{array}{l|r} \underline{(-1/2)\backslash} & 4+6-2+3 \\ & -2-2+2 \\ & 4+4-4+5 \end{array}$$

Tercero, formalización del cociente:

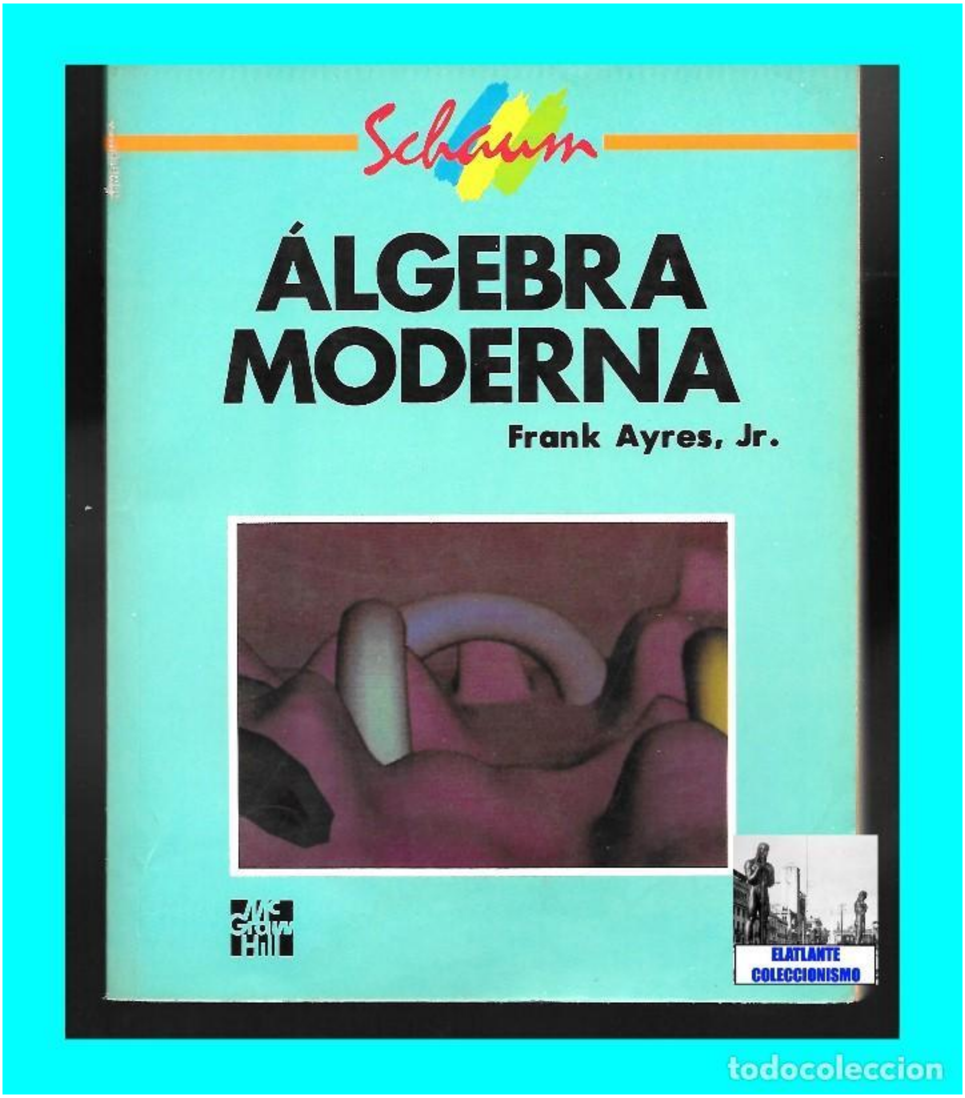
El cociente es de grado dos, debido a que el dividendo es de grado tres y el divisor de grado uno, por tanto, tendremos: $4x^2+4x-4$

Cuarto, formalización del residuo:

Residuo: 5.

Quinto, formalización de la respuesta final:

Respuesta: $4x^2+4x-4$ +(5/2x+1). Este resultado difiere de la respuesta que otorga el libro. Hay que detenerse en este ejercicio.


Schaum
ÁLGEBRA
MODERNA
Frank Ayres, Jr.
ELATLANTE
COLECCIONISMO
todocoleccion

20

RESOLUCIÓN DE ALGUNOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 21 DEL LIBRO *ÁLGEBRA SUPERIOR* DE SPIEGEL-MOYER

Introducción

Spiegel-Moyer desarrollan el capítulo 21, denominado FUNCIONES RACIONALES, desde la página 235 hasta 244. Tratan aquí los siguientes puntos: Funciones racionales, Asíntotas verticales, Asíntotas horizontales, Gráficas de funciones racionales, entre otros temas.

Problemas propuestos (página 240)

21.5 Establezca el dominio de cada función racional:

a) R(x) = 4/x+2, en esta función podemos observar que R(x) no está definida para x=-2; por lo tanto, el dominio de R(x) es {todos los números reales excepto -2}.

b) R(x) = -1/x-2, en esta función se observa que R(x) no está definida para x=2; por lo tanto, el dominio es {todos los números reales excepto 2}.

c) R(x) = $-x/x^2-4$, en esta función se observa que R(x) no está definida para x=2, -2; por lo tanto, el dominio es {todos los números reales excepto 2 y -2}.

d) R(x) = $4/x^2+x-2$, en esta función se observa que R(x) no está definida para x=-2, 1; por lo tanto, el dominio es {todos los números reales excepto -2 y 1}.

e) $R(x) = 6\text{-}x/x+3$, en esta función se observa que R(x) no está definida para x=-3; por lo tanto, el dominio es {todos los números reales excepto -3}.

f) $R(x) = 2x\text{-}5/x+4$, la función no está definida para x=-4, luego el dominio es {todos los números reales excepto -4}.

g) $R(x) = x^3+2/x^2$, la función no está definida para x= 0, luego el dominio es {todos los números reales excepto 0}.

h) $R(x) = x^2+4/27x^3\text{-}3x$, la función no está definida para x=-1/3, 0, luego el dominio es {todos los números reales, excepto -1/3 y 0}.

i) $R(x) = \text{-}x^2+x/x^2\text{-}5x+6$, la función no está definida para x=2, 3, luego el dominio es {todos los números reales, excepto 2 y 3}.

21.6 Determine las asíntotas de cada función racional:

a) $R(x) = 4/x\text{-}3$, en esta función cuando x=3, hace que el denominador x-3= 0; pero no hace el numerador, que es 4, igual a cero, por lo que x=3 es una asíntota vertical. Por otra parte, el grado del numerador, de nuestra función, como es una constante, es igual a 0, mientras que el grado del denominador es 1, luego R(x) tiene una asíntota horizontal y=0.

b) $R(x) = x/x^2\text{-}16$, en esta función cuando x=±4, hace que el denominador $x^2\text{-}16=0$, pero no hace el numerador, que es x, igual a cero, por lo que x= ±4 es una asíntota vertical. Por otra parte, el grado del numerador es 1, inferior al grado del denominador que es 2, luego R(x) tiene una asíntota horizontal y=0. Resumiendo: asíntota vertical x=±4, horizontal, y=0.

c) $R(x) = 3x+6/x\text{-}1$; x=1 hace cero en el denominador, pero no hace el numerador igual a cero, por lo que x=1 es una asíntota vertical. Por otra parte, el grado del numerador es 1, e igualmente el grado del denominador, de ahí que 3/1=3, que es una asíntota horizontal y=3. Resumiendo: x=1 asíntota vertical, y=3 asíntota horizontal.

d) $R(x) = x^2-6x+9/x$; para x=0 el denominador se hace cero, pero no así el numerador, de ahí que x=0 sea una asíntota vertical. El grado del numerador es 2, del denominador 1, luego no hay asíntota horizontal. Resumiendo: x=0 asíntota vertical.

e) $R(x) = 2x^2-5/x+2$; cuando x= -2 el denominador se hace cero, no así el numerador, de ahí que x= -2 sea una asíntota vertical; el grado del numerador es 2, mayor que el grado del denominador, no hay asíntota horizontal. Resumiendo: x=
-2 asíntota vertical.

f) $R/x) = -x^2+2x/x+3$; cuando x= -3 el denominador se hace cero, no así el numerador, por tanto x= -3 constituye una asíntota vertical. El grado del numerador es 2, que es mayor que 1 el grado del denominador, no hay asíntota horizontal.

g) R(x) = 3/x+4; cuando x= -4 el denominador se hace cero, no así el numerador, de ahí que x= -4 constituye una asíntota vertical. El grado del numerador es cero, del denominador 1, el primero es menor que el segundo; existe una asíntota horizontal y=0.

h) $R(x) = 2/x^2-7x+10$; cuando x= 2, 5 el denominador se hace cero, no así el numerador, luego x=2 y x=5 constituyen asíntotas verticales. El grado del numerador, 0, es menor al grado del denominador, 2, por tanto hay una asíntota horizontal, y=0.

i) R(x) = x+5/5-x; cuando x=5 el denominador se hace cero, no así el numerador, de ahí que x=5 constituye una asíntota vertical. El grado del numerador e 1, igualmente el del denominador, donde 1/-1 = -1, luego estamos frente a una asíntota horizontal, y=1/-1 = -1.

21.7 Determine las raíces y la intersección con el eje *y* de cada función racional.

a) R(x) = 3/x+2; en esta función, si x=0 no hace que el numerador sea cero (0), de inmediato se descarta que haya una raíz cuando x=0. Ahora, si x=0 se produce una intersección con el eje *y* en 3/2, de modo que tendremos el punto (0, 3/2).

b) $R(x) = -x/x^2-4$; si x=0 el numerador es igual a cero, por tanto cuando x=0 habrá alguna raíz. Igualmente, si x=0 se produce una intersección con el eje y. Luego, raíces (0, 0), intersección con el eje y (0, 0).

c) $R(x) = 2x+8/x+3$; si x= -4 el numerador se hace cero (0), hay raíz cuando x=0, equivalente a (-4, 0); hay también una intersección con el eje *y* en 8/3. Raíces: (-4, 0); intersección con *y* (0, 8/3).

d) $R(x) = x^3-27/x^2$; si x=3 el numerador se hace cero, por tanto habrá alguna raíz. En cambio, si x=0, el denominador se hace cero (0), por lo que la función se hace indefinida, no hay intersección con el eje *y*. Raíces: (3, 0); intersección con *y*, ninguna.

e) $R(x) = x^2/x-3$; con x=0 el numerador se hace cero, por tanto x=0 garantiza que hay raíces; también x=0 garantiza un punto de intersección con el eje *y*, pues tendrían 0/-3 = 0. Luego, raíces (0, 0), intersección con *y* (0, 0).

f) $R(x) = x^2-4/x^2-1$; para x=2, x= -2 el numerador se hace cero, por tanto las raíces se corresponden con (2, 0), (-2, 0); para x=0, tendremos la intersección con el eje *y* (0,4).

g) $R(x) = x^2-5x+6/x^2+6x+9$; para x=2, x=3, el numerador se hace cero, hay raíces (2, 0), (3, 0); para x=0 hay una intersección con el eje *y* (0, 2/3).

h) $R(x) = x^3-1/x$; para x=1 el numerador se hace cero, hay raíces (1, 0); para x=0 la función se hace indefinida, no hay intersección con *y*.

i) $R(x) = x+3/x^2+2x+1$; x=-3 garantiza que el numerador sea cero, luego tenemos raíz (-3, 0); cuando x=0 existe intersección con el eje *y* (0, 3).

21

RESOLUCIÓN DE ALGUNOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 22 DEL LIBRO *ÁLGEBRA SUPERIOR* DE SPIEGEL-MOYER

Introducción

Spiegel-Moyer desarrollan el capítulo 22, denominado PROGRESIONES Y SERIES, desde la página 245 hasta 262. Tratan aquí los siguientes puntos: Progresiones, progresión aritmética, progresiones geométricas, progresiones geométricas indefinidas, progresiones armónicas y medias.

Probables errores

En la página 260, respuestas **22.56** b), l≠ 19, l= 79.

Problemas propuestos (página 258)

22.56 Encuentre el valor n-ésimo y la suma de los *n* primeros términos de las progresiones aritméticas siguientes para el valor de *n* que se indica**:**

a) 1, 7, 13,… n = 100

El término n-ésimo o último:

l = a+(n-1)d
a= primer término
d= razón
n= número de términos
l= termino n-ésimo o último término
S= suma de los n primeros términos

Sustitución:

$l = 1+(100-1)d$

$d = 7-1 = 13-7 = 6$

Luego,

$l = 1+(100-1)6$

$l= 1+(99)6$

$l= 1+594 = 595$

La suma de los *n* primeros términos:

$S= n/2(a+l)= 100/2(1+595)= 50(596)= 29,800$

b) 2, 5.5, 9,…n= 23

El término n-ésimo o último:

$l = a+(n-1)d$
a= primer término
d= razón
n= número de términos
l= termino n-ésimo o ultimo termino
S= suma de los n primeros términos

Sustitución:

$l = 2+(23-1)d$

$d = 5.5-2= 9-5.5= 3.5$

Luego,
$l = 2+(23-1)3.5$

l= 79 (El libro tiene una respuesta incorrecta, no es 19, es 79.

La suma de los *n* primeros términos:

S= n/2(a+l)= 23/2(2+79)= 11.5(81)= 931.5

c) -26, -24, -22,… n= 40

El término n-ésimo o último:

l = a+(n-1)d
a= primer término
d= razón
n= número de términos
l= termino n-ésimo o último término
S= suma de los n primeros términos

Sustitución:

l = -26+(40-1)d

d = -24+26= -22+24= 2

Luego,

l = -26+(40-1)2

l= 52

La suma de los *n* primeros términos:

S= n/2(a+l)= 40/2(-26+52)= 20(26)= 520

d) 2, 6, 10,… n= 16
l = a+(n-1)d

a= primer término
d= razón
n= número de términos
l= termino n-ésimo o último término
S= suma de los n primeros términos

Sustitución:

l = 2+(16-1)d

d = 6-2= 10-6= 4

luego,

l = 2+(15)4

l= 62

La suma de los *n* primeros términos:

S= n/2(a+l)= 16/2(2+62)= 8(64)= 512

e) 3, 4.5, 6, … n = 37

El término n-ésimo o último:

l = a+(n-1)d
a= primer término
d= razón
n= número de términos
l= termino n-esimo o último término
S= suma de los n primeros términos

Sustitución:

l = 3+(37-1)d

$d = 4.5-3= 6-4.5= 1.5$

Luego,

$l = 3+(37-1)1.5$

$l= 3+(36)1.5$

$l= 3+54= 57$

La suma de los *n* primeros términos:

$S= n/2(a+l)= 37/2(3+57)= 18.5(60)= 1{,}110$

f) $x-y, x, x+y, \ldots$ $n = 30$

El término n-ésimo o último:

$l = a+(n-1)d$
a= primer término
d= razón
n= número de términos
l= término n-ésimo o último término
S= suma de los n primeros términos

$l = a+(n-1)d$

Sustitución:

$l = (x-y)+(30-1)d$

$d = x-(x-y) = (x+y)-x = x-x+y = x+y-x = y$

$l = (x-y)+(29)y$
$l = x-y+29y = x+28y$

Suma de los *n* primeros términos:

S= n/2(a+l)= 30/2(x-y+x+28y)= 15(2x+27y)= 30x+405y

22.58 El primer término de una progresión aritmética es 4 y el último 34. Sabiendo que la suma de sus términos es 247. Encuentre el número de términos y la razón.

a = 4, l = 34, S = 247

S = n/2(a+l)

247 = n/2(4+34)

247 = n/2(38)

(2) 247 = 38n

n = 2(247)/38 = 494/38 = 13

l = a+(n-1)d

34 = 4+(13-1)d

34 = 4+12d

d = 34-4/12 = 5/2

22.59 El último término de una progresión aritmética, que consta de 49 términos es 28. Sabiendo que la razón es 1/2, encuentre el primer término y la suma de todos ellos.

n = 49, l = 28, d = ½, a= ?, S = ?

l = a+(n-1)d

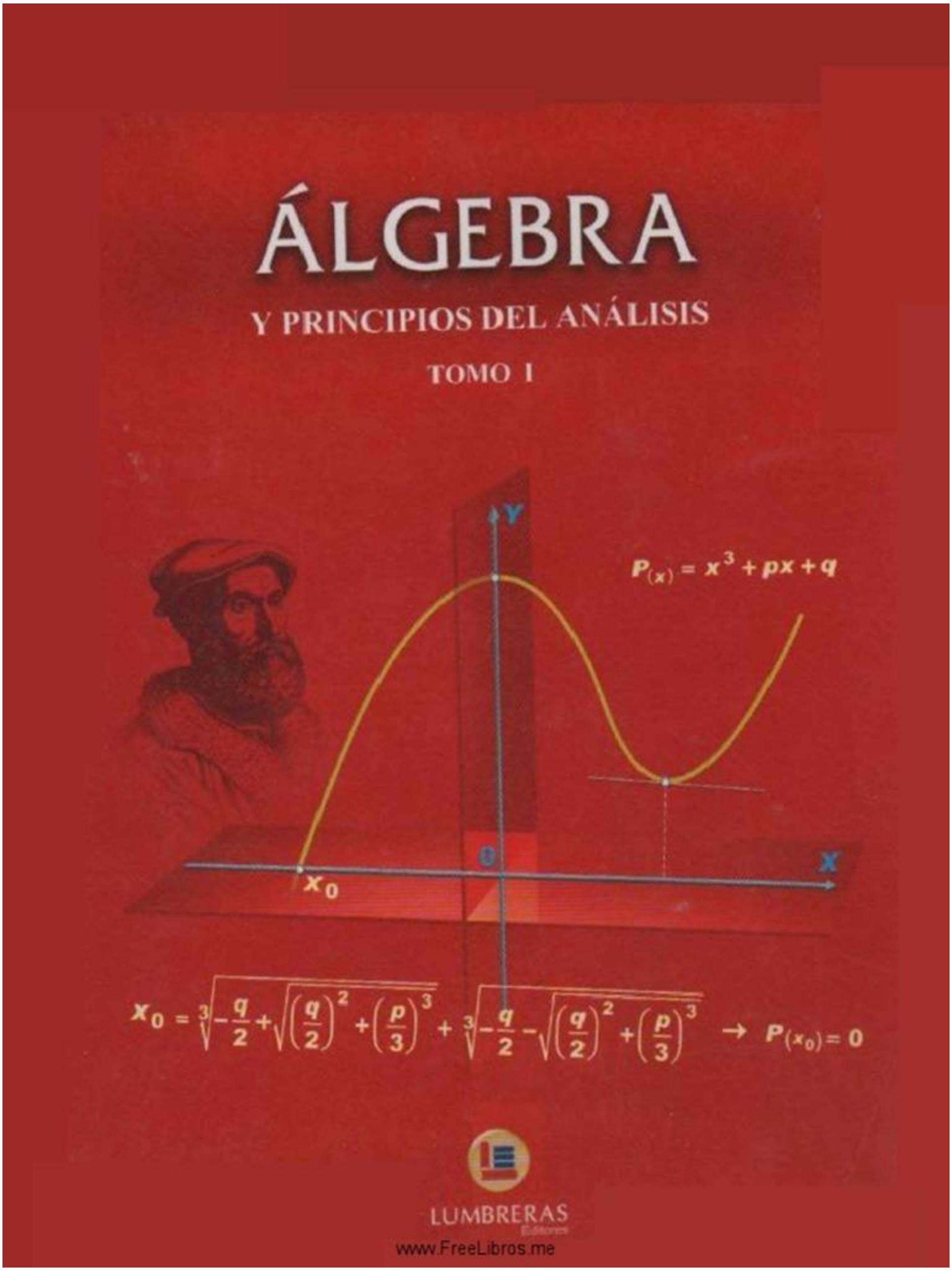
$28 = a+(49-1)1/2$

$28 = a+(48)1/2$

$28-24 = a$

$a = 4$

$S = n/2(a+l)= 49/2(4+28)= 784$


ÁLGEBRA
Y PRINCIPIOS DEL ANÁLISIS
TOMO I
Y
$P_{(x)} = x^3 + px + q$
0
X
x_0
$x_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \rightarrow P_{(x_0)} = 0$
LUMBRERAS
Editores
www.FreeLibros.me

22

RESOLUCIÓN DE ALGUNOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 28 DEL LIBRO *ÁLGEBRA SUPERIOR* DE SPIEGEL-MOYER

Introducción

El capítulo 28 del libro, de Spiegel-Moyer, *Álgebra Superior*, se llama DETERMINANTES. En este capítulo los autores nos enseñan el mundo básico de los determinantes: determinantes de segundo orden, la regla de Cramer, determinantes de tercer orden, determinantes de orden n, propiedades de los determinantes, entre otros temas.

Problemas propuestos (página 345)

28.36 Calcule los determinantes siguientes:

a) $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$= (4)(2)-(-1)(-3) = 8-3 = 5

b) $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$= (-2)(7)-(-3)(4) = -14+12 = -2

c) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$= (2)(0)-(-1)(4) = 0+4 = 4

d) $\begin{vmatrix} -2x & -3y \\ 4x & -y \end{vmatrix}$= (-2x)(-y)-(4x)(-3y) = 2xy+12xy = 14xy

e) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a & -b \end{vmatrix}$= (a+b)(-b)-(a)(a-b) = -ab-b^2-a^2+ab = -a^2-b^2

f) $\begin{vmatrix} 2x-1 & x+1 \\ x+2 & x-2 \end{vmatrix}$ = (2x-1)(x-2)-(x+2)(x+1) = $2x^2$-4x-x+2-x^2-2x-2x-2 = x^2-8x

28.37 Demuestre que si los elementos de un renglón o columna de un determinante de segundo orden se multiplican por un mismo número, el determinante queda multiplicado por dicho número.

$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$ = (2)(3)-(6)(4) = 6-24 = -18

Multipliquemos la primera fila por 2.

$\begin{vmatrix} 2(2) & 2(4) \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$= 12-48= -36

Quiere decir que el valor del determinante (-18) se vio multiplicado por la constante 2, quedando demostrada la propiedad *v* de un determinante, enunciada en la página 327 del libro *Álgebra superior* de Spiegel-Moyer.

28.38 Encuentre el valor de las incógnitas en los sistemas siguientes:

a) 5x+2y = 4
2x -y = 7

D =$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$= (5)(-1)-(2)(2) = -5-4 = -9

D_x=$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}$= (4)(-1)-(7)(2) = -4-14 = -18

D_y =$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ = (5)(7)-(2)(4) = 35-8 = 27

x = D_x/D = -18/-9 = 2

y = D_y/D = 27/-9 = -3

(2, -3)

b) 3r-5s = -6
4r+2s = 5

D = $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ = (3)(2)-(4(-5) = 6+20 = 26

Dr= $\begin{vmatrix} -6 & -5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$ = (-6)(2)-(5)(-5) = -12+25 = 13

Ds = $\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ = (3)(5)-(-6)(4) = 15+24 = 39

r = Dr/D = 13/26 = 1/2

s = Ds/D = 39/26 = 3/2

(1/2, 3/2)

c) 28+4x+5y = 0
-3x+4y+10 = 0

Reordenando:

4x+5y = -28
-3x+4y = -10

D= $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$ = (4)(4)-(-3)(5) = 16+15 = 31

Dx= $\begin{vmatrix} -28 & 5 \\ -10 & 4 \end{vmatrix}$ = (-28)(4)-(-10)(5) = -112+50 = -62

Dy= $\begin{vmatrix} 4 & -28 \\ -3 & -10 \end{vmatrix}$ = (4)(-10)-(-3)(-28) = -40-84 = -124

x = Dx/D = -62/31 = -2

y = Dy/D = -124/31 = -4

(-2, -4)

d) 5x-4y = 16
2x+3y = -10

D= $\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ = (5)(3)-(2)(-4) = 15+8 = 23

Dx= $\begin{vmatrix} 16 & -4 \\ -10 & 3 \end{vmatrix}$ = (16)(3)-(-10)(-4) = 48-40 = 8

Dy= $\begin{vmatrix} 5 & 16 \\ 2 & -10 \end{vmatrix}$ = (5)(-10)-(2)(16) = -50-32 = -82

x = Dx/D = 8/23

y = Dy/D = -82/23

(8/23, -82/23)

e) 1) x-3/3 + y+4/5 = 7
2) x+2/7 – y-6/2 = -3

Tratemos de tachar los denominadores, por tanto, multiplicamos 1) por 15 y 2) por 14.

(15) (x-3/3) + (15) (y+4/5) = 15(7)

(14) (x+2/7) – (14) (y-6/2) = 14(-3)

5(x-3)+3(y+4) = 105
2(x+2)-7(y-6) = -42

5x-15+3y+12 = 105

2x+4-7y+42 = -42

5x+3y = 105+15-12
2x-7y = -42-4-42

5x+3y = 108
2x-7y = -88

D=$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}$ = (5)(-7)-(2)(3) = -35-6 = -41

Dx=$\begin{vmatrix} 108 & 3 \\ -88 & -7 \end{vmatrix}$= (108)(-7)-(-88)(3) = -756+264 = -492

Dy=$\begin{vmatrix} 5 & 108 \\ 2 & -88 \end{vmatrix}$= (5)(-88)-(2)(108) = -440-216 = -656

x = Dx/D = -492/-41 = 12

y = Dy/D = -656/-41 = 16

(12, 16)

f) 1) 3x+2y+1⁄x+y = 4
   2) 5x+6y-7⁄x+y = 2

Tratemos de tachar los denominadores, por tanto, multiplicamos ambas ecuaciones por (x+y) y tachamos términos semejantes:

(x+y) (3x+2y+1)⁄(x+y) = 4(x+y)
(x+y) (5x+6y-7)⁄x+y = 2(x+y)

3x+2y+1 = 4x+4y
5x+6y-7 = 2x+2y

3x+2y-4x-4y = -1
5x+6y-2x-2y = +7

-x-2y = -1
3x+4y = 7

Aplicamos regla de Cramer:

D=$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$= (-1)(4)-(3)(-2) = -4+6 = 2

Dx=$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}$ = (-1)(4)-(7)(-2) = -4+14 = 10

Dy=$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$= (-1)(7)-(3)(-1) = -7+3 = -4

x = Dx/D = 10/2 = 5

y = Dy/D = -4/2 = -2

(5, -2)

28.39 Calcule los determinantes siguientes:

a) $\begin{vmatrix} -2\ 1\ 2 \\ 3-1\ 3 \\ 1\ 3-2 \end{vmatrix}$= +(-2) (2-9)-1(-6-3)+2(9+1) = 14+9+20 = 43

b) $\begin{vmatrix} 1\ 0-2 \\ 0-3\ 4 \\ -4\ 2-1 \end{vmatrix}$= $\begin{vmatrix} 1\ \ 0\ -2\ \ 1\ \ 0 \\ 0\ -3\ \ 4\ \ 0\ -3 \\ -4\ \ 2\ -1\ -4\ \ 2 \end{vmatrix}$= (1)(-3)(-1) + /0)(4)(-4) + (-2)(0)(2)
–

(0)(0)(-1) – (1)(4)(2) – (-2)(-3)(-4) =3+0+0-0-8+24 = 19

c) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$ (3)(1)(-2) + (-1)(-3)(1) + (4)(-2)(3) – (-1)(-2)(-2) – (3)(-3)(3) – (4)(1)(1)= -6+3-24+4+27-4 = 0

d) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z & x & y \\ -2 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} =$ (x)(3)(2) + (y)(1)(4) + (z)(-2)(1) – (y)(-2)(2) –

(x)(1)(1) – (z)(3)(4) = 6x+4y-2z+4y-x-12z = 5x+8y-14z

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a.a & b.b & c.c \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} b & c \\ b.b & c.c \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} a & c \\ a.a & c.c \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} a & b \\ a.a & b.b \end{vmatrix} =$ bc^2-b^2c-(ac^2-

z^2c)+ab^2-a^2b = bc^2-b^2c-ac^2+a^2c+ab^2-a^2b = bc^2-cb^2+a^2c-ac^2+ab^2-ba^2

28.42 Resuelva los sistemas siguientes:

a) 3x+y-2z = 1
2x+3y-z = 2
x -2y+2z = -10

D= $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$ (3)(6-2)-1(4+1) +(-2)(-4-3)

= 12-5+14= 21

Dx= $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -10 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -10 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -10 & -2 \end{vmatrix} =$ 1(6-2)-1(4-10)-2(-

4+30) = 4+6-52 = -42

x= Dx/D = -42/21 = -2

Dy= $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -10 & 2 \end{vmatrix}$= 3$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -10 & 2 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$+(-2)$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -10 \end{vmatrix}$=1(4-10)-

1(4+1)-2(-20-2) = -18-5+44 = 21

y = Dy/D = 21/21 = 1

Dz= $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -10 \end{vmatrix}$= 3$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -10 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -10 \end{vmatrix}$+1$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$= (3)(-30+4) + (-1)(-20-

2) + 1(-4-3) = -78+22-7 = 63

z = Dz/D = -63/21 = -3

(-4, 2, 3)

28.44 a) Demuestre la propiedad I: Si se intercambian los renglones por las columnas en un determinante, su valor no se modifica; b) Demuestre la propiedad II: Si todos los elementos de un renglón o columna son nulos, el determinante vale cero. Comencemos:

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$= 4-6 = -2

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$= 4-6 = -2

Se confirma la propiedad I, intercambiamos filas por columnas y el valor del determinante no se alteró.

$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} =$ 0-0 = 0, se confirma propiedad II.

28.45 Demuestre que el determinante:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 8 & 12 & 2 \\ 4 & 16 & 24 & 1 \end{vmatrix}$ es igual a cero.

Comencemos. La columna segunda tiene al número 2 como factor común y la tercera tiene al 3, por tanto la columna dos es dividida entre 2, y la columna tres, es dividida entre 3. Luego tendremos:

$$(2)(3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

Como se ve las dos columnas, arriba citadas, han sido transformadas, ahora siendo iguales el valor del determinante es igual a cero.

28.48 Dado el determinante:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

a) Escriba los menores complementarios y los cofactores de los elementos del tercer renglón.

Solución: los elementos del tercer renglón son: -3 1 2 -1

Menor del elemento -3 = $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ Cofactor = + menor

Menor del elemento 1 = $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ Cofactor = – menor

Menor del elemento 2 = $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ Cofactor = + menor

Menor del elemento -1 = $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ Cofactor = – menor

b) Exprese el valor del determinante en términos de los menores o cofactores.

Solución: Valor de determinante = suma de los elementos multiplicados por el cofactor asociado.

$$= (-3)\left\{+\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}\right\} + (1)\left\{-\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}\right\}$$

$$+ (2)\left\{+\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}\right\} + (-1)\left\{-\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}\right\}$$

c) Después de desarrollar cada uno de los determinantes de tercer orden, el resultado obtenido es -38, según el libro que estamos estudiando.

28.50 Calcule el valor de los determinantes

a) $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 2\left\{+\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}\right\} + (-1)\left\{-\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}\right\} +$$

$$+3\left\{+\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}\right\} +2\left\{-\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}\right\}$$

Después de desarrollar cada uno de los determinantes de tercer orden aquí establecidos, el resultado obtenido es 38, según se observa en el libro que estamos estudiando.

b) $$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3\left\{+\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}\right\} + 4\left\{-\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}\right\} +$$

$$+(-2)\left\{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}\right\} +(1)\left\{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}\right\}$$

Después de desarrollar cada uno de los determinantes de tercer orden aquí establecidos, el resultado obtenido es -143, según se observa en el libro que estamos estudiando.

c) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & -4 \\ -1 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\left\{+\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix}\right\} + 4\left\{-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}\right\} +$$

$$+(-3)\left\{+\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}\right\} +(2)\left\{-\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}\right\} + 0$$

Después de desarrollar cada uno de los determinantes de tercer orden aquí establecidos, el resultado obtenido es -108, según se observa en el libro que estamos estudiando.

28.52 Resuelva los sistemas siguientes:

a) $x-2y+z-3w = 4$
$2x+3y-z-2w = -4$
$3x-4y+2z-4w = 12$
$2x-y-3z+2w = -2$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} =+(1)\left\{+\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -4 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}\right\} +(-2)\left\{-\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}\right\}$$

$$+(1)\left\{+\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}\right\} +(-3)\left\{-\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}\right\}$$

Resolviendo los determinantes de tercer orden, se determina el valor del determinante de cuarto orden.

$$Dx=\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 & -3 \\ -4 & 3 & -1 & -2 \\ 12 & -4 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} =+(4)\left\{+\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & -4 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}\right\}+(-2)\left\{-\begin{vmatrix} -4 & -1 & -2 \\ 12 & 2 & -4 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}\right\}$$

$$+(1)\left\{+\begin{vmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 12 & -4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}\right\}+(-3)\left\{-\begin{vmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 12 & -4 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}\right\}$$

Resolviendo los determinantes de tercer orden, se determina el valor de Dx, que dividido entre D, se obtiene x = 2

$$Dy=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & -1 & -2 \\ 3 & 12 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} =+(1)\left\{+\begin{vmatrix} -4 & -1 & -2 \\ 12 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}\right\}+(4)\left\{-\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix}\right\}$$

$$+(1)\left\{+\begin{vmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 3 & 12 & -4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}\right\}+(-3)\left\{-\begin{vmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 3 & 12 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}\right\}$$

Resolviendo los determinantes de tercer orden, se determina el valor de Dy, que dividido entre D se obtiene y = -1

$$Dz = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = +(1)\left\{+\begin{vmatrix} 3 & -4 & -2 \\ -4 & 12 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}\right\} +(-2)\left\{-\begin{vmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 3 & 12 & -4 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix}\right\}$$

$$+(4)\left\{+\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}\right\} +(-3)\left\{-\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}\right\}$$

Resolviendo los determinantes de tercer orden, se determina el valor de Dz, que dividido entre D se obtiene z = 3.

$$Dw = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & -4 \\ 3 & -4 & 2 & 12 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = +(1)\left\{+\begin{vmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -4 & 2 & 12 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix}\right\} +(-2)\left\{-\begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix}\right\}$$

$$+(1)\left\{+\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 12 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix}\right\} +(4)\left\{-\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}\right\}$$

Resolviendo los determinantes de tercer orden, se determina el valor de Dw, que dividido entre D se obtiene w = 1.