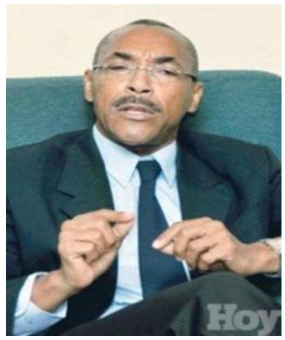
Dr. Manuel de Jesús Linares Jiménez



Obras
Completas

Tomo
88

***Estudiando el libro Métodos fundamentales de economía matemática de Alpha Chiang*.**
Primer Volumen. Publicada en el mes de febrero del año 2022.

ESTUDIANDO EL LIBRO MÉTODOS FUNDAMENTALES DE ECONOMÍA MATEMÁTICA DE ALPHA CHIANG (Primer Volumen)

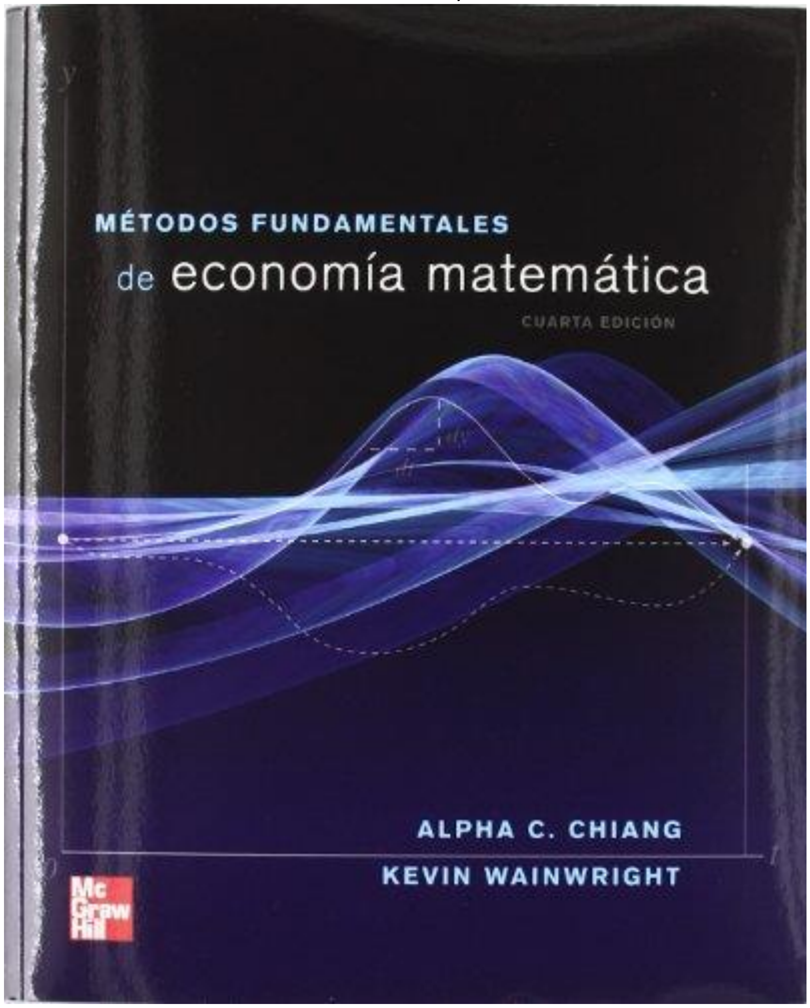
Autor: Dr. Manuel Linares
profesormanuellinares@gmail.com
829-637-9303

Preparación y difusión edición digital:
Febrero, 2022.

Nueva preparación y difusión edición digital:
2023.

Manuel Linares es el único responsable
de las enmiendas introducidas para la edición digital.

Estudiando el libro Métodos Fundamentales de Economía Matemática de Alpha Chiang (Primer Volumen)



DEDICATORIA

Dedicamos este libro al personal docente de la Escuela de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma de Santo Domingo.

ÍNDICE

PREFACIO AL TOMO 88 7

EJERCICIO PROPUESTO 2.3……….9

EJERCICIO PROPUESTO 2.4……….17

EJERCICIO PROPUESTO 2.5……….23

EJERCICIO PROPUESTO 3.2……….33

EJERCICIO PROPUESTO 3.3……….39

EJERCICIO PROPUESTO 3.4……….49

EJERCICIO PROPUESTO 3.5……….57

EJERCICIO PROPUESTO 4.1……….61

EJERCICIO PROPUESTO 4.2……….69

Métodos fundamentales de economía matemática de Alpha Chiang, ya es una obra imperecedera. ¡Seguiremos estudiándola!

PREFACIO AL TOMO 88

El tomo 88 de nuestras Obras Completas para el período 1976-2023, se encuentra constituido por nuestra investigación *Estudiando el libro Métodos fundamentales de economía matemática de Alpha Chiang*. Primer Volumen. Publicada en el mes de febrero del año 2022.

Respecto a la INTRODUCCIÓN a la edición digital, que habíamos escrito en fecha 1/11/2021, hemos decidido incorporarla al prefacio. Hela aquí:

“En el lapso 1982-1984 cursé la maestría en Economía Aplicada, en la entonces Universidad Católica Madre y Maestra (UCMM), hoy pontificia (PUCMM), en el Recinto Santo Tomas de Aquino, en la ciudad de Santo Domingo, bajo la conducción de mis inolvidables profesores, el dominicano Jaime Moreno y el cubano José Antonio Herrero. Estaré eternamente endeudado con estos dos extraordinarios académicos.

“Después de concluir la maestría estudié, página por página, el libro *Métodos fundamentales de economía matemática* de Chiang y les proporcioné respuestas a la casi totalidad de los ejercicios propuestos.

“Hoy he vuelto sobre esa magnífica e imperecedera obra, con el fin de ir publicando mis respuestas a los ejercicios propuestos.

“Naturalmente, debo pedir permiso para estas publicaciones, respetando el derecho de autor y sin incurrir en la mercantilización de lo publicado. Manuel Linares no ejerce negocio alguno con la ciencia.

“Espero que esta publicación periódica, enteramente científica, sea de utilidad a mis lectores (as)”. (FIN).

Igualmente con motivo a nuevas publicaciones teniendo como base el citado libro de Chiang, informamos que también ha sido incorporada al prefacio la presentación redactada en fecha 15/02/2022, que de inmediato transcribimos:

“Mi opúsculo, *Estudiando el libro métodos fundamentales de economía matemática* de Alpha Chiang, constituye el #88, de mis Obras Completas para el período 1976-2023. No puedo vaticinar el número de libros digitales que publicaré de mis estudios personales de tan memorable obra.

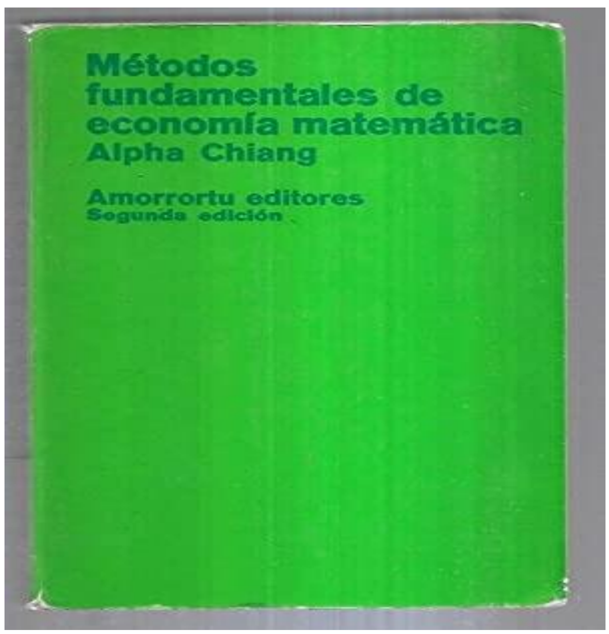
“El libro consta de 20.4 ejercicios propuestos; y en este primer volumen solamente abarco hasta la mitad del ejercicio 4.2; es probable que me vea obligado a publicar no menos de cuatro nuevos volúmenes.

“Mis estudios de las matemáticas, no solamente incluirán textos propios de la educación superior, sino que también descenderé a textos de Baldor, propios de la educación secundaria y finalmente estudiaré textos que se usan en programas de doctorado en ciencias matemáticas.

“Todo ello, naturalmente, si la salud no continúa deteriorándose. Recuerden que ya cumplí 72 años el 25 de diciembre de 2021.

“El incremento de mi producción bibliográfica, ¿hasta dónde llegará? No lo sé”. (FIN).

Dr. Manuel de Jesús Linares Jiménez,
Enero 2023.



2.3

EJERCICIO PROPUESTO 2.3[1]

1. Escriba lo siguiente en notación de conjuntos:

(a) El conjunto de los números reales mayores que 34.

Mi respuesta:

La notación de los elementos del conjunto de los números reales mayores que 34, se podría expresar del modo siguiente: R= {x | x representa los números reales mayores que 34}, es decir, $\{x \mid x > 34\}$.

(b) El conjunto de los números reales mayores que 8 pero menores que 65.

Mi respuesta:

La notación de los elementos del conjunto de los números reales mayores que 8, pero menores que 65, se podría expresar del modo siguiente: $R= \{x \mid 8 < x < 65\}$.

2. Dados los conjuntos $S_1= \{2, 4, 6\}$, $S_2= \{7, 2, 6\}$, $S_3= \{4, 2, 6\}$ y $S_4= \{2, 4\}$, ¿cuáles de los enunciados siguientes son verdaderos?

a) $S_1= S_3$

Mi respuesta:

El enunciado a) es verdadero, pues siendo $S_1= \{2, 4, 6\}$ y $S_3= \{4, 2, 6\}$, se ve que sus elementos son idénticos, por tanto, $S_1= S_3$.

b) $S_1= R$ (conjunto de los números reales)

Mi respuesta:

El enunciado b) no es verdadero, pues siendo $S_1= \{2, 4, 6\}$, ciertamente estos tres elementos forman parte de los números enteros positivos, que a su vez son parte de los números reales. Estos, sin embargo, son el resultado de una confluencia mucho más amplia de números que incluye enteros y fracciones (números racionales), y estos últimos más los irracionales.

[1] Estos mandatos aparecen en la página 14 de la obra “*Métodos fundamentales de economía matemática*” de Alpha Chiang, editado por la McGraw Hill, cuarta edición, México, 2006.

c) $8 \varepsilon S_2$

Mi respuesta:

El enunciado c) no es verdadero, pues afirma que el elemento 8 forma parte de los elementos del conjunto S_2. Pero cuando observamos a S_2, advertimos que sus elementos son {7, 2, 6}, en los que no aparece el elemento 8.

d) $3 \notin S_2$

Mi respuesta: el enunciado d) es verdadero, pues siendo S_2= {7, 2, 6}, no aparece el 3 como parte de sus elementos.

e) $4 \notin S_3$

Mi respuesta:

El enunciado e) no es verdadero, pues indica que el elemento 4 no forma parte de los elementos del conjunto S_3. Pero cuando observamos a S_3, advertimos que sus elementos son S_3 = {4, 2, 6} en los que aparece el número 4.

f) $S_4 \subset R$

Mi respuesta:

El enunciado f) es verdadero, pues siendo S_4= {2, 4}, quiere decir que está integrado por dos números enteros positivos, que de hecho forman parte del conjunto de los números reales, por tanto podemos decir que el conjunto S_4 es un subconjunto del conjunto de los números reales, es decir, R.

g) $S_1 \supset S_4$

Mi respuesta:

El enunciado g) es verdadero; ciertamente, el conjunto S_1 = {2, 4, 6}, incluye al conjunto S_4= {2, 4}, por tanto, el conjunto S_4 es un subconjunto del conjunto S_1.

h) $\emptyset \subset S_2$

Mi respuesta:

El enunciado h) es verdadero; ciertamente, el conjunto ∅ se encuentra contenido en el conjunto S_2= {7, 2, 6}. ¿Por qué? Si ∅ no estuviera contenido por el conjunto S_2, entonces ∅ debe contener por lo menos un elemento que no esté contenido en S_2, pero por definición sabemos que ∅ carece de elemento alguno, entonces se confirma que ∅ es un subconjunto de S_2.

i) $S_3 \supset \{1, 2\}$

Mi respuesta:

el enunciado i) no es verdadero, debido a que indica que el conjunto integrado por los elementos 1 y 2, está supuestamente contenido en el conjunto $S_3= \{4, 2, 6\}$; como se ve el conjunto $\{1, 2\}$ tiene un elemento que no se encuentra en el conjunto S_3. ¿Cuál? El entero positivo 1, por tanto, es errado sustentar el enunciado i).

3. En relación con los cuatro conjuntos dados en el problema 2, $S_1= \{2, 4, 6\}$, $S_2= \{7, 2, 6\}$, $S_3= \{4, 2, 6\}$ y $S_4= \{2, 4\}$, determine:

a) $S_1 \cup S_2$

Mi respuesta:

$S_1 \cup S_2= \{2, 4, 6\} \cup \{7, 2, 6\}= \{2, 4, 6, 7\}$.

b) $S_1 \cup S_3$

Mi respuesta:

$S_1 \cup S_3= \{2, 4, 6\} \cup \{4, 2, 6\}= \{2, 4, 6\}$.

c) $S_2 \cap S_3$

Mi respuesta:

$S_2 \cap S_3= \{7, 2, 6\} \cap \{4, 2, 6\}= \{2, 6\}$.

d) $S_2 \cap S_4$

Mi respuesta:

$S_2 \cap S_4 = \{7, 2, 6\} \cap \{2, 4\}= \{2\}$.

e) $S_4 \cap S_2 \cap S_1$

Mi respuesta:

$S_4 = \{2, 4\} \cap \{7, 2, 6\}\cap \{2, 4, 6\}= \{2\} \cap \{2, 4, 6\}= \{2\}$.

f) $S_3 \cup S_1 \cup S_4$

Mi respuesta:

{4, 2, 6} ∪ {2, 4, 6} ∪ {2, 4}= {2, 4, 6} ∪ {2, 4}= {2, 4, 6}.

4. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son válidos?

a) A ∪ A = A

Mi respuesta:

Ese enunciado es válido. Verbigracia, si tenemos que A= {9, 10, 11}, entonces es muy evidente que A ∪ A= {9, 10, 11} ∪ {9, 10, 11}= {9, 10, 11}.

b) A ∩ A = A

Mi respuesta:

Ese enunciado es válido, pues si A= {9, 10, 11}, si buscamos los elementos comunes que posee consigo mismo, no son otros que 9, 10 y 11, que precisamente son los elementos del conjunto A.

c) A ∪ ∅ = A

Mi respuesta:

Ese enunciado igualmente es válido, puesto ∅ carece de elemento alguno, el resultado de la unión con dicho conjunto vacío, es igual al otro conjunto, en el caso que nos ocupa, es decir, el conjunto A.

d) A ∪ U= U

Mi respuesta:

Ese enunciado es válido, en razón de que siendo U un conjunto universal, esto implica que los elementos del conjunto A están contenidos en U, por tanto, la unión de ambos da como resultado U, es decir, el conjunto universal.

e) A ∩ ∅= ∅

Mi respuesta:

Ese enunciado es válido. El ∅ carece de elemento, por tanto el conjunto A no puede poseer elementos comunes con el conjunto vacío, por tanto, es correcto afirmar que A ∩ ∅= ∅.

f) A ∩ U= A

Mi respuesta:

Ese enunciado es válido. Y es que U es un conjunto universal; los elementos integrantes del conjunto A están contenidos en U, por tanto, los elementos que van a constituir al conjunto que surja de A ∩ U, serán idénticos a los que incorporan a A.

g) El complemento de A^c = A

Mi respuesta:

Ese enunciado es válido, atendiendo a la propiedad involutiva, es decir, $(A^c)^c$= A.

5. Dados A= {4, 5, 6}, B= {3, 4, 6, 7} y C= {2, 3, 6}, compruebe la ley distributiva.

Mi respuesta:

La ley distributiva se aplica en condiciones en que hay combinaciones de uniones e intersecciones de conjuntos. Veamos:

Primera parte:

A ∪ (B ∩ C)= (A ∪ B) ∩ (A ∪ C)

Lado izquierdo: A ∪ (B ∩ C)

{4, 5, 6} ∪ {3, 4, 6, 7} ∩ {2, 3, 6}= {4, 5, 6} ∪ {3, 6}= {3, 4, 5, 6}

Lado derecho: (A ∪ B) ∩ (A ∪ C)

{4, 5, 6} ∪ {3, 4, 6, 7} ∩ {4, 5, 6} ∪ {2, 3, 6}= {3, 4, 5, 6, 7} ∩ {2, 3, 4, 5, 6}= {3, 4, 5, 6}.

Puesto que los dos lados producen el mismo resultado, se verifica la ley.

Segunda parte:

A ∩ (B ∪ C)= (A ∩ B) ∪ (A ∩ C).

Lado izquierdo: A ∩ (B ∪ C)

{4, 5, 6} ∩ {3, 4, 6, 7} ∪ {2, 3, 6}= {4, 5, 6}∩{2, 3, 4, 6, 7}= {4, 6}

Lado derecho: (A ∩ B) ∪ (A ∩ C)

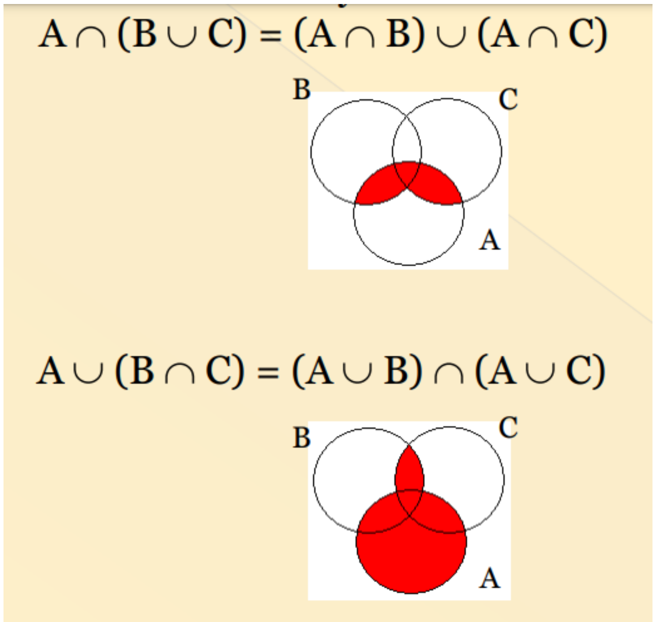
{4, 5, 6} ∩ {3, 4, 6, 7} ∪ {4, 5, 6} ∩ {2, 3, 6}= {4, 6} ∪ {6}= {4, 6}.

Nuevamente queda verificada la ley.

6. Compruebe la ley distributiva por medio de diagramas de Venn, con diferentes órdenes de sombreado sucesivo.

Mi respuesta:

Tengo algunas limitaciones en el campo de la informática, por lo que me vi precisado a buscar en Internet, vía Google, la ley distributiva con diagramas de Venn, y encontré en *Conjuntos.PDF*, el tratamiento adecuado de la citada ley, como se muestra a continuación.



La parte superior del diagrama ilustra, en el lado izquierdo, la intersección del conjunto A con la unión de los conjuntos B y C; mientras que su lado derecho, pone de manifiesto el conjunto que resulta de la unión de dos conjuntos que a su vez resultan de la intersección entre el conjunto A y el conjunto B, por un lado, y de la intersección entre el conjunto A y el conjunto C.

La parte inferior del diagrama ilustra, en el lado izquierdo, la unión del conjunto A con la intersección de los conjuntos B y C; mientras que su lado derecho, pone de manifiesto el conjunto que resulta de la intersección de dos conjuntos que a su vez resultan de la unión entre el conjunto A y el conjunto B, por un lado, y de la unión entre el conjunto A y el conjunto C.

7. Enumere los subconjuntos del conjunto {5, 6, 7}.

Mi respuesta:

Primero, denominemos el conjunto dado, es decir, A= {5, 6, 7}; segundo, listamos los siguientes subconjuntos: {Ø}, {5}, {6}, {7}, {5, 6}, {5, 7}, {6, 7}, {5, 6, 7}, o sea, 8 subconjuntos; ahora hacemos el cálculo con la siguiente fórmula: 2^n, donde n= al número de elementos del conjunto A y hacemos la sustitución de lugar, 2^3, por tanto, tendremos (2)(2)(2)= 8 subconjuntos.

8. Enumere los subconjuntos del conjunto S= {a, b, c, d}. ¿Cuántos subconjuntos hay?

Mi respuesta:

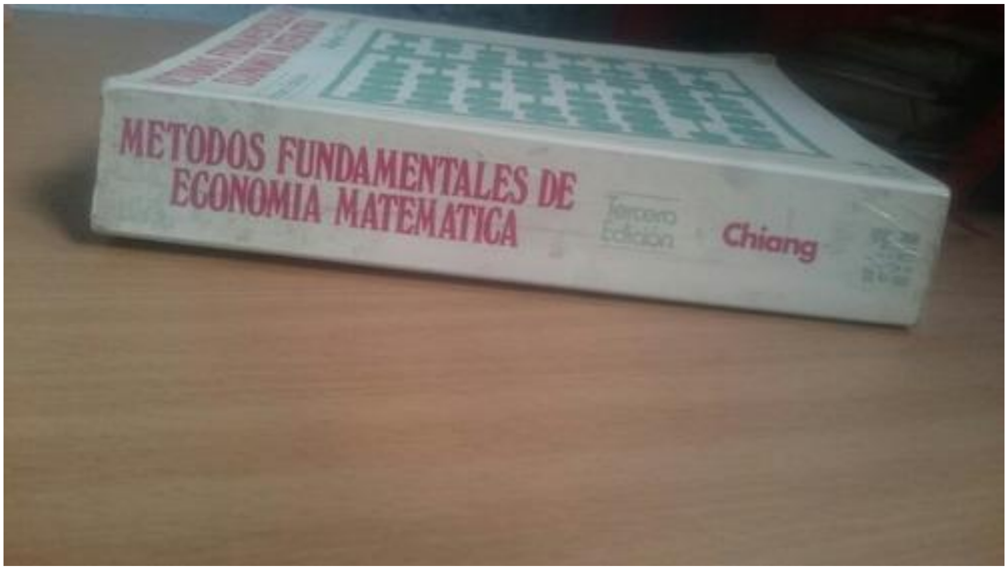
Primero, denominemos el conjunto dado, es decir, S= {a, b, c, d}; segundo, listamos los siguientes subconjuntos: {∅}, {a}, {b}, {c}, {d}, {a, b}, {a, c}, {a, d}, {b, c}, {b, d}, {c, d}, {a, b, c}, {a, b, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, {a, b, c, d}; hacemos el cálculo con la siguiente fórmula: 2^n, donde n= al número de elementos del conjunto S y hacemos la sustitución de lugar, 2^4, por tanto, tendremos (2)(2)(2)(2)= 16 subconjuntos.

9. En el ejemplo 6 se muestra que ∅ es el complemento de U. Pero puesto que el conjunto vacío es un subconjunto de cualquier conjunto, ∅ debe ser un subconjunto de U. En vista de que el término "complemento de U" indica la idea de no estar en U, mientras que el término "subconjunto de U" indica la idea de estar en U, parece paradójico que ∅ sea ambas cosas. ¿Cómo resuelve esta paradoja?

Mi respuesta:

Me parece que el contenido paradójico de esta problemática, no sólo reside en el punto sugerido en el enunciado 9. Entiendo que concebir la existencia del conjunto vacío, de por sí ya constituye una paradoja, pues cómo concebir un conjunto que carece de elemento alguno. Si no tiene elemento probablemente no sea un conjunto, pues el conjunto contiene o reúne cosas, objetos. Todo conjunto reúne elementos que dimanan de la realidad objetiva; pero resulta que el conjunto vacío, se queda en el aire, sin soporte objetivo. Recordemos esta cita: *"Para que una colección de objetos se considere como un conjunto no debe haber ambigüedad ni subjetividad".* (Conjuntos.PDF, en Google). (Comillas y cursiva son nuestras). Por tanto, la paradoja en discusión es probable que desde el punto de vista científico no alcance solución.

Manuel Linares,
4/11/2021


METODOS FUNDAMENTALES DE
ECONOMIA MATEMATICA
Tercera
Edición
Chiang

2.4

EJERCICIO PROPUESTO 2.4

1. Dados S_1= {3, 6, 9}, S_2= {a, b}, y S_3= {m, n}, determine los productos cartesianos:

a) S_1 x S_2.

Mi respuesta:

S_1 x S_2= {(3, a), (3, b), (6, a), (6, b), (9, a), (9, b)}.

b) S_2 x S_3

Mi respuesta:

S_2 x S_3= {(a, m), (a, n), (b, m), (b, n)}.

c) S_3 x S_1

Mi respuesta:

S_3 x S_1= {(m. 3), (m, 6), (m, 9), (n, 3), (n, 6), (n, 9)}.

2. De la información del problema 1, encuentre el producto cartesiano S_1 x S_2 x S_3.

Mi respuesta:

S_1 x S_2 x S_3= {(3, a, m), (3, b, n), (6, a, m), (6, b, n), (9, a, m), (9, b, n)}.

3. En general, ¿se cumple que S_1 x S_2= S_2 x S_1? ¿En qué condiciones estos dos productos cartesianos son iguales?

Mi respuesta:

Respondamos haciendo un ejemplo con los datos del enunciado 1, es decir, S_1= {3, 6, 9}, S_2= {a, b}. Veamos:

S_1 x S_2= {(3, a), (3, b), (6, a), (6, b), (9, a), (9, b)}

S_2 x S_1= {(a, 3), (a, 6), (a, 9), (b, 3), (b, 6), (b, 9)}

Los conjuntos resultantes de S_1 x S_2 y S_2 x S_1 lucen que son iguales, salvo en el orden que aparecen los elementos que los integran, pero son desiguales a partir del concepto de pares ordenados, que como explica Chiang, en la página 15 de su *Métodos fundamentales de economía matemática*, en estos el orden sí importa; por tanto, no se cumple la aseveración $S_1 \times S_2 = S_2 \times S_1$.

Mi respuesta a la segunda interrogante del enunciado 3:

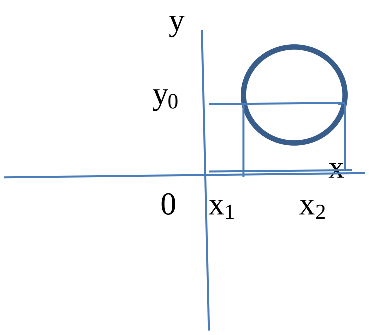
La condición que se debe cumplir, para que productos cartesianos sean iguales, es que sus conjuntos sean iguales. En el ejemplo que nos incumbe, se debieran presentar las siguientes igualdades: (3, a)= (a, 3); (3, b)= (b, 3); (6, a)= (a, 6); (6, b)= (b, 6); (9, a)= (a, 9); (9, b)= (b, 9).

4. ¿Alguna de las siguientes representaciones, dibujadas en un plano coordenado rectangular, representa una función?

a) Un círculo

Mi respuesta:

Dibujamos un sistema coordenado rectangular y trabajamos en el primer cuadrante; representamos un círculo en dicho cuadrante; el vínculo que vemos aquí, no es de una función, puesto que presenciamos los valores x_1 y x_2 en el conjunto x, relacionándose con el mismo valor y_0 en el conjunto y mediante la función $y = f(x)$.

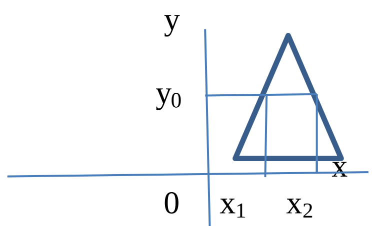


.

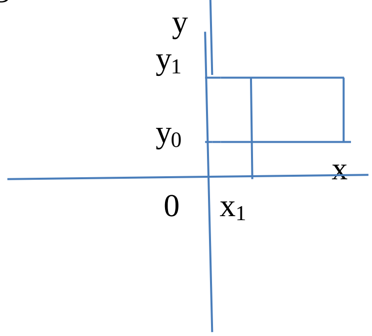
b) Un triángulo

Mi respuesta:

Dibujamos un sistema coordenado rectangular y trabajamos en el primer cuadrante; representamos un triángulo en dicho cuadrante; el vínculo que vemos aquí, no es de una función, puesto que presenciamos los valores x_1 y x_2 en el conjunto x, relacionándose con el mismo valor y_0 en el conjunto y mediante la función $y = f(x)$; el triángulo tampoco garantiza la representación de una función, porque como dijimos a un mismo valor de x pueden corresponder más de un valor de y.



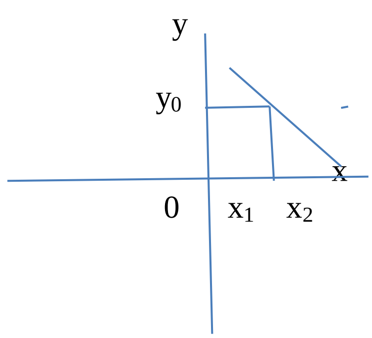
c) Un rectángulo



Mi respuesta:

Dibujamos un sistema coordenado rectangular y trabajamos en el primer cuadrante; representamos un rectángulo en dicho cuadrante; el vínculo que vemos aquí, no es de una función, puesto que presenciamos el valor x_1, en el conjunto x, dando lugar a dos valores y_0 y y_1 en el conjunto *y*, mediante la función $y= f(x)$; el rectángulo tampoco garantiza la representación de una función, porque como dijimos a un mismo valor de *x* pueden corresponder más de un valor de *y*.

d) Una recta con pendiente descendente



.

Mi respuesta:

Dibujamos un sistema coordenado rectangular y trabajamos en el primer cuadrante; representamos una recta descendente, en dicho cuadrante; el vínculo que vemos aquí, es de una función, puesto que presenciamos el valor x_1, en el conjunto x, dando lugar a un valor único y_0 en el conjunto *y*, mediante la función $y= f(x)$.

5. Si el dominio de la función $y= 5+3x$ es el conjunto $\{x \mid 1 \leq x \leq 9\}$, determine la imagen

de la función y expréselo como un conjunto.

Mi respuesta:

Cuando x= 1

y= 5+3(1)= 5+3= 8

Cuando x= 9

y= 5+3(9)= 5+27= 32

Por tanto, Imagen= $\{y \mid 8 \leq y \leq 32\}$.

6. Para la función $y = - x^2$, si el dominio es el conjunto de los números reales no negativos, ¿cuál es la imagen?

Mi respuesta:

Dominio $\{x \mid x$ es R no negativo$\}$; como x está precedida del signo negativo, el resultado de x^2, derivará en un valor negativo, por consiguiente, la imagen será el conjunto de números reales negativos.

7. En la teoría de la empresa, los economistas consideran el costo total C como una función del nivel de producción Q: C= f(Q).

a) De acuerdo con la definición de una función, ¿se debe relacionar cada cifra de costo con un nivel de producción único?

Mi respuesta:

Ciertamente, y generalmente estaremos ante funciones de pendiente positiva.

b) ¿Cada nivel de producción debe determinar una cifra de costo única?

Mi respuesta:

Si nos atenemos a nuestra respuesta al enunciado 7a), expuesta arriba, la respuesta es aseverativa. *"No obstante tenga en cuenta la posibilidad de que los valores extremos de la imagen no ocurran siempre donde se obtienen los valores extremos del dominio"*. (Chiang, p. 19). (Comillas y cursiva son nuestras).

8. Si un nivel de producción Q_1 se puede producir a un costo de C_1, entonces también debe ser posible (por ser menos eficaz) producir Q_1 a un costo de C_1 + \$1, o C_1 + \$2, etc. Así, parecería que el producto Q no sólo determina el costo total C. Si así fuera, escribir C= f(Q) violaría la

definición de una función. ¿Cómo, a pesar de este razonamiento, justificaría el uso de la función C= f(Q)?

Mi respuesta:

Se podría justificar si nos pusiéramos de acuerdo en que C es determinada por diversas variables independientes, pero probablemente la fundamental es el nivel de producción (Q).

Manuel Linares,
5/11/2021

Linares


METODOS FUNDAMENTALES DE
ECONOMIA MATEMATICA
Tercera Edición
Alpha C. Chiang
Chiang

EJERCICIO PROPUESTO 2.5

Nota introductoria:

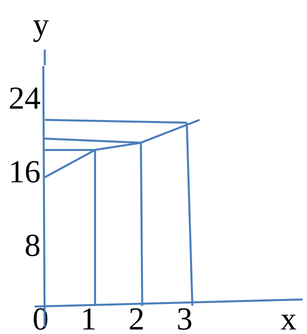
El ejercicio propuesto 2.5, se encuentra en las páginas 24 y 25 del libro *Métodos fundamentales de economía matemática*, de Alpha Chiang.

1. Grafique las funciones:

a) y= 16 + 2x

Mi respuesta:

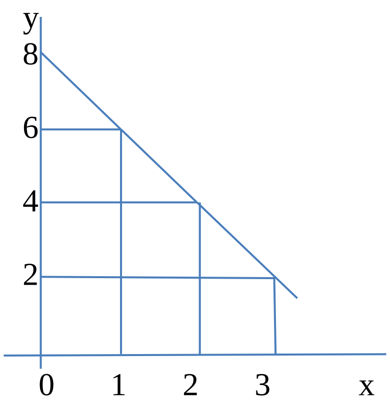
X	y
0	16
1	18
2	20
3	22



b) y= 8 – 2x

Mi respuesta:

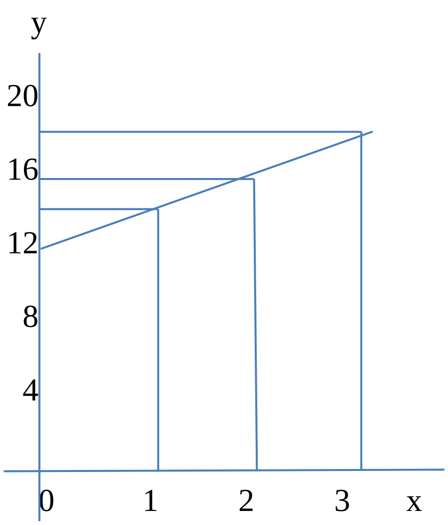
x	y
0	8
1	6
2	4
3	2



c) y= 2x + 12

Mi respuesta:

x	y
0	12
1	14
2	16
3	18



(En cada caso considere que el dominio consiste sólo en los números reales no negativos).

2. ¿Cuál es la diferencia principal entre (a) y (b) en el problema 1? ¿Cómo se refleja esta diferencia en las gráficas? ¿Cuál es la diferencia principal entre (a) y (c)? ¿Cómo la reflejan sus gráficas?

Mis respuestas:

Las ecuaciones a) y b) difieren en el signo del coeficiente del termino x; un coeficiente positivo significa una pendiente positiva (ascendente), y uno negativo significa una pendiente negativa (descendente).

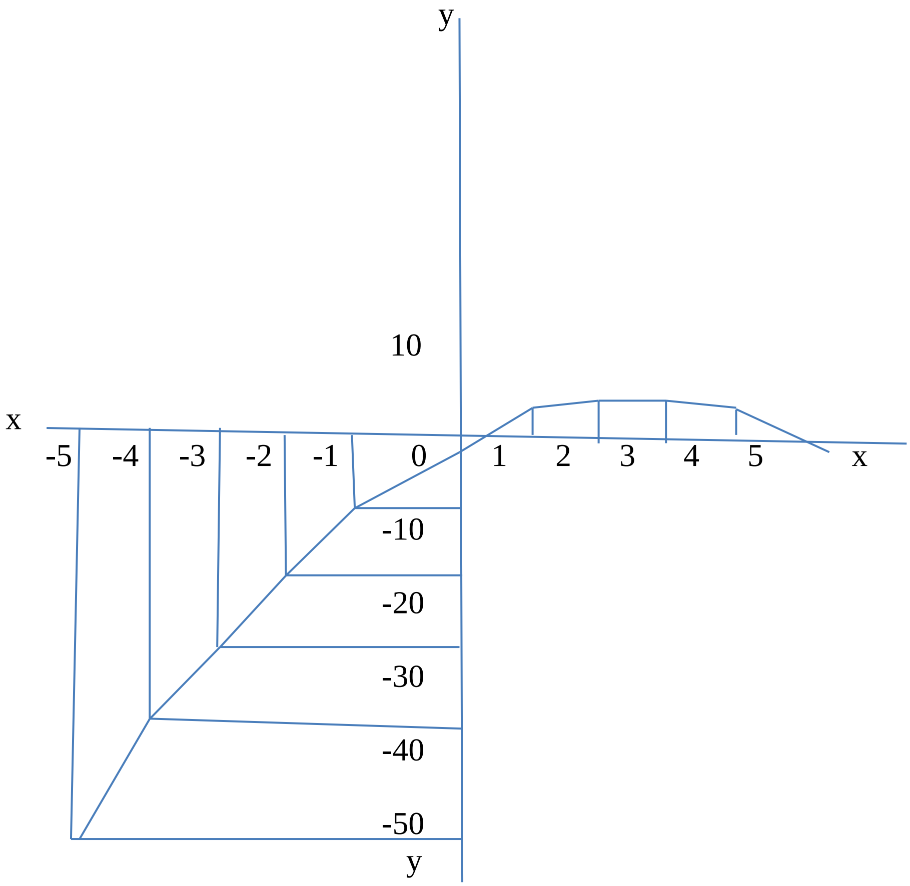
Las ecuaciones a) y c) difieren en la constante de la función; una constante mayor significa una intersección más elevada con el eje y. En efecto la constante de la función a) es mayor que la de la función c), es decir, 16 es mayor que 12.

3. Gráficas de funciones, a) $y = - x^2 + 5x – 2$, b) $y= x^2 + 5x – 2$, con el conjunto de valores $- 5 \leq x \leq 5$ que constituye el dominio. Es bien sabido que el signo del coeficiente del término x^2 determina si la gráfica de la función cuadrática tendrá una "colina" o un "valle". Con base en el presente problema, ¿qué signo se relaciona con la colina? Proporcione una explicación intuitiva para esto.

a) $y = - x^2 + 5x – 2$

Mi respuesta gráfica:

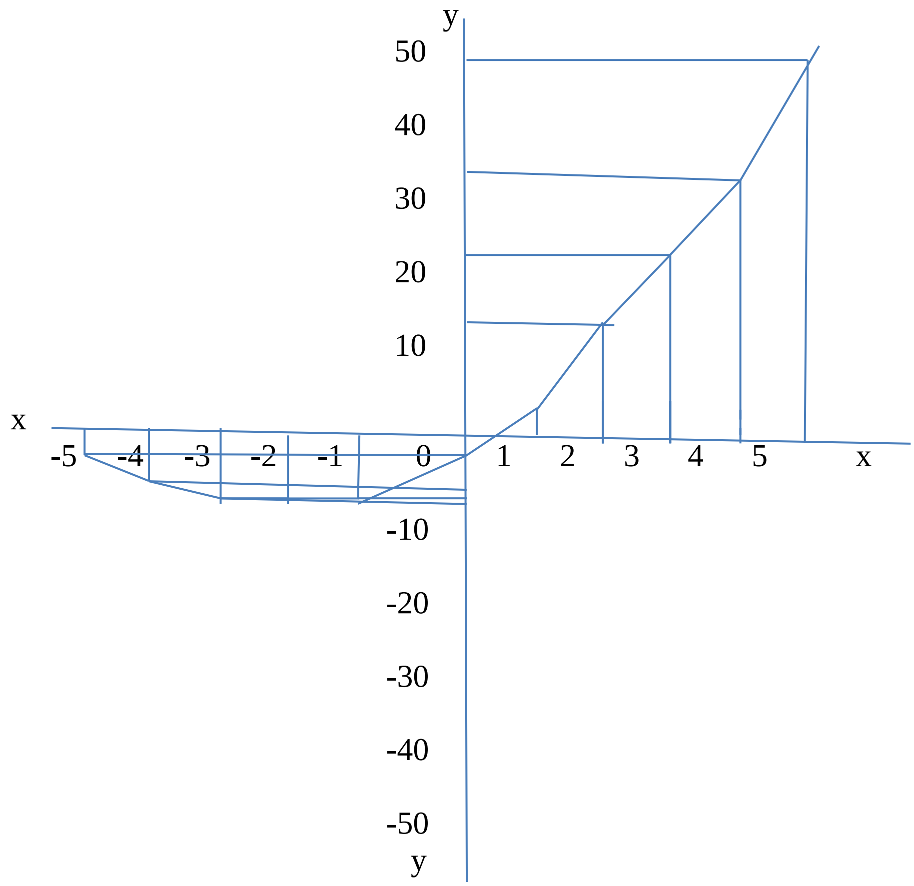
x	y
-5	-52
-4	-38
-3	-27
-2	-16
-1	-8
0	-2
1	3
2	4
3	-2



b) $y= x^2 + 5x - 2$

Mi respuesta gráfica:

x	y
-5	-2
-4	-6
-3	-8
-2	-8
-1	-7
0	-2
1	4
2	12
3	22
4	34
5	48



Mi respuesta analítica:

a) $y = - x^2 + 5x – 2$, b) $y= x^2 + 5x – 2$

El punto 3, que estamos trabajando, nos refiere, obviamente al tratamiento de la función cuadrática, es decir, $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$, que Chiang la examina de una manera muy detallada y clara en la página 21 de su libro.

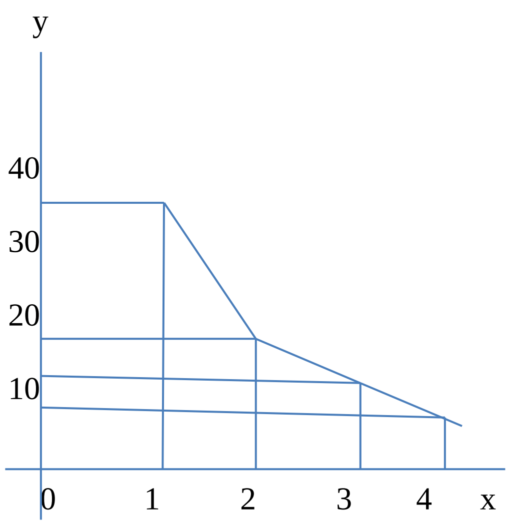
En el caso de a) $y = - x^2 + 5x – 2$, tenemos que $a_0= -2$, $a_1= 5$ y $a_2= -1$, es decir, $a_2 < 0$, va a expresar, entonces, una pendiente negativa (descendente), como se ve en la figura que construimos arriba. Estamos ante una colina.

En el caso de b) $y= x^2 + 5x – 2$, tenemos que $a_0= -2$, $a_1= 5$ y $a_2= 1$, es decir, $a_2 > 0$, va a expresar, entonces, una pendiente positiva (ascendente), como se ve en la figura que construimos arriba. Estamos ante un valle.

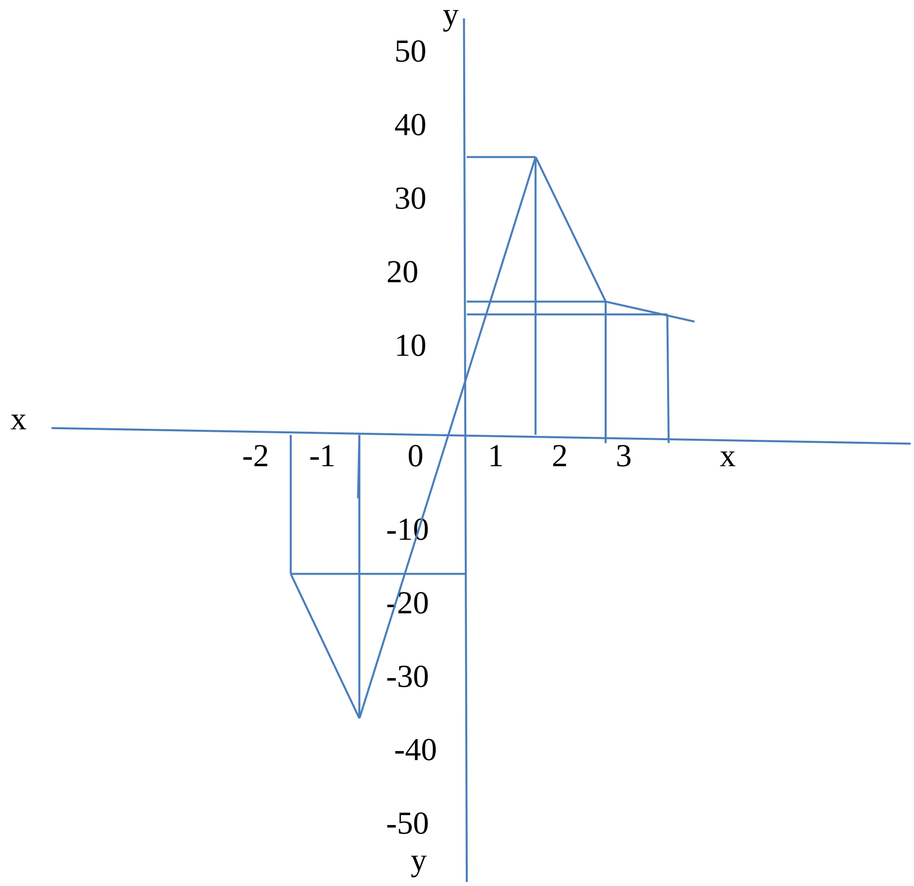
4. Grafique la función $y = 36/x$, suponiendo que x y y pueden tomar valores positivos solamente. A continuación, suponga que ambas variables pueden tomar valores negativos también; ¿cómo se debe modificar la gráfica para reflejar este cambio?

Mi respuesta gráfica:

x	y
1	36
2	18
3	12
4	9



x	y
-2	-18
-1	-36
1	36
2	18
3	12



Mi respuesta analítica:

¿Cómo se debe modificar la gráfica para reflejar este cambio? Respondo. Mientras en la primera gráfica, solamente usamos el primer cuadrante, pues la restricción era el uso exclusivo de valores positivos, ahora, con el uso de valores negativos, habría que usar también el tercer cuadrante del sistema coordenado rectangular.

5. Condense las expresiones siguientes:

a) x^4 x x^{15}

Mi respuesta:

$(x^4)\ (x^{15}) = x^{4+15} = x^{19}$

b) x^a x x^b x x^c

Mi respuesta:

$(x^a)\ (x^b)\ (x^c) = x^{a+b+c}$

c) x^3 x y^3 x z^3

Mi respuesta:

$(x^3)\ (y^3)\ (z^3) = (xyz)^3$

6. Determine:

a) x^3/x^{-3}

Mi respuesta:

$x^3/x^{-3} = (x^3)\ (x^3) = x^{3+3} = x^6$

b) $(x^{1/2}$ x $x^{1/3})/x^{2/3}$

Mi respuesta:

$(x^{1/2})\ (x^{1/3})/x^{2/3} = (x^{1/2})\ (x^{1/3})\ (x^{-2/3}) = x^{1/2+1/3-2/3} = x^{1/6}$

7. Demuestre que $x^{m/n} = {}^n\sqrt{x^m} = ({}^n\sqrt{x})^m$. Especifique las reglas aplicadas en cada paso.

Mis respuestas:

Chiang, en la página 24 de su libro, que estamos estudiando, indica que en las funciones exponenciales, el exponente es una variable que puede tomar igualmente valores no enteros. Verbigracia, si tenemos $x^{1/2}$ y la multiplicáramos por ella misma, es decir, $x^{1/2}$x $x^{1/2}$, aplicamos la regla I, obteniendo como resultado $x^{1/2}$x $x^{1/2} = x^{1/2+1/2} = x^1 = x$; de donde se infiere que $x^{1/2}$ debe ser la raíz cuadrada de x. Si tenemos $x^{1/3}$ y la multiplicamos por ella misma, es decir, $x^{1/3}$x $x^{1/3}$, aplicamos la regla I, obteniendo como resultado $x^{1/3}$x $x^{1/3} = x^{1/3+1/3} = x^{2/3}$; de donde se infiere que $x^{1/3}$ debe ser la raíz cúbica de x. Por tanto, Chiang sugiere una V regla: $x^{1/n} = {}^n\sqrt{x}$; de aquí, entonces, que $x^{m/n} = {}^n\sqrt{x^m}$. Ahora bien, ¿es cierto que ${}^n\sqrt{x^m} = ({}^n\sqrt{x})^m$? Claro, de inmediato lo demuestro; lo primero que debemos hacer es suprimir el radical de la expresión ${}^n\sqrt{x^m}$, así: ${}^n\sqrt{x^m} = x^{m/n}$, que a su vez es $=(x^{1/n})^m$, puesto que (1/n)(m) es igual a (m/n); en la expresión $(x^{1/n})^m$ restablecemos el radical para obtener $({}^n\sqrt{x})^m$. En suma, pues, demostramos que $x^{m/n} = {}^n\sqrt{x^m} = ({}^n\sqrt{x})^m$. Enunciemos las reglas utilizadas: I, IV, V y VI.

8. Pruebe la regla VI y la regla VII

Mis respuestas:

Regla VI: $(x^m)^n = x^{mn}$

La regla VI, pauta el camino para resolver la potencia de una potencia; con este fin dejamos la misma base y multiplicamos los exponentes. Ejemplo: $(3^2)^3 = 3^{2 \text{ x } 3} = 3^6$ = 3x3x3x3x3x3= 729.
Regla VII: $(xy)^m = (x^m)(y^m)$

Demostremos esta ley con un ejemplo que aparece en Google (http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/telesec/curso3/htmlb/sec_27.html):

L**ey**: Potencia de un producto

Ejemplo: $(ab)^3$

Al aplicar la definición de potencia:

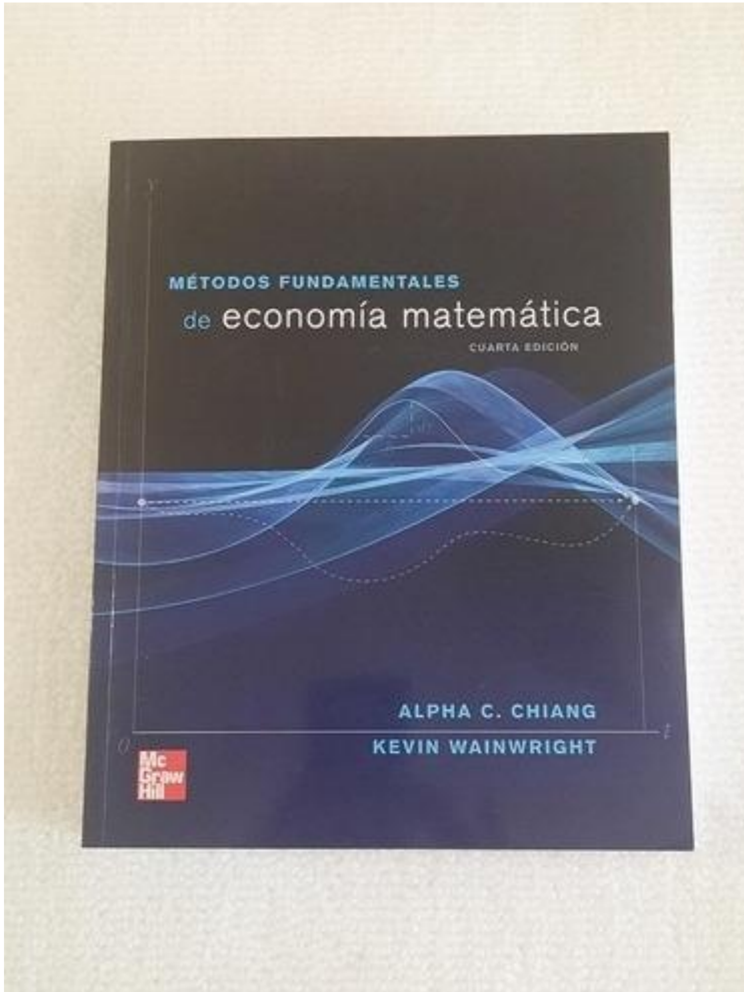
$(ab)^3 = ab \bullet ab \bullet ab$

Aplicando la ley conmutativa:

$(ab)^3 = a \bullet a \bullet a \bullet b \bullet b \bullet b$

Y como la potencia es una multiplicación abreviada, queda: a^3b^3.

Manuel Linares,
21/12/2021
8:00 p.m.


MÉTODOS FUNDAMENTALES
de economía matemática
CUARTA EDICIÓN
ALPHA C. CHIANG
KEVIN WAINWRIGHT
Mc
Graw
Hill

EJERCICIO PROPUESTO 3.2

1. Dado el modelo de mercado

$Q_d = Q_s$

$Q_d= 21-3P$

$Q_s = -4+8P$

Obtenga P* y Q* por (a) eliminación de variables y (b) por medio de las fórmulas (3.4) y (3.5). (Use fracciones en vez de decimales).

Mi respuesta:

Obtenemos a P* y Q* por eliminación de variables,

$Q= Q_d= Q_s$

Reescribimos el modelo,

Q= 21-3P
Q= -4+8P

El modelo lo reducimos a una sola ecuación,

21-3P= -4+8P

-3P-8P= -25

-11P= -25

Multiplicamos por -1 y tendremos:

11P= 25

P^*= 25/11= 2.27

Luego, Q*= 21- 3P= 21- 3(2.272727)= 21-6.818181= 14.18

Ahora procederemos a obtener P* y Q* por medio de las fórmulas (3.4) y (3.5).

Aplicando la fórmula (3.4), es decir, P*= (a+c)/(b+d)= (21+4)/(3+8)= 25/11= 2.27.

Aplicando la fórmula (3.5), es decir, Q*= (ad-bc)/(b+d)= (21)(8)-(3)(4)/(3+8)= 168-12/11= 156/11= 14.18.

2. Sean las funciones de la oferta y la demanda como sigue:

a) Qd = 51-3P; Qs= 6P-10

b) Qd= 30-2P; Qs= -6+5P

Determine P* y Q* mediante eliminación de variables. (Use fracciones en vez de decimales).

Mi respuesta:

Obtenemos a P* y Q* por eliminación de variables.

$Q = Q_d = Q_s$

Reescribimos el modelo:

Q= 51-3P
Q= 6P-10

El modelo lo reducimos a una sola ecuación:

51-3P= 6P-10

-3P-6P= -10-51

-9P= -61

Multiplicamos por -1 y tendremos:

9P= 61

P*= 61/9= 6.7777

Luego, Q*= 51-3P= 51-3(6.77777)= 51-20.33333= 30.66666

Ahora procederemos a resolver el enunciado b).

Qd= 30-2P; Qs= -6+5P

30-2P= -6+5P

-2P-5P= -6-30
-7P= -36

Multiplicamos por -1 y obtenemos

7P= 36

P*= 36/7= 5.14285

Q*= -6+5(5.14285)= 19.71428

3. Según la ecuación (3.5), para que Q* sea positiva, es necesario que la expresión (ad - bc) tenga el mismo signo algebraico que (b + d). Compruebe que esta condición se satisface en realidad en los modelos de los problemas 1 y 2.

Mis respuestas:

De hecho lo que vamos a comprobar es que (a)(d)> (b)(c); comencemos con el problema 1. Enunciado a); tenemos que a= 21; b= -3; c= -4; y d= 8; por tanto, (21)(8)>(-3)(-4), es decir, 168>12.

En el problema 2, enunciado a), tenemos que a= 51; b= -3; c= -10; y d= 6; por tanto, (51)(6)> (-3)(-10)= 306>30. En el enunciado b), tenemos que a= 30; b= -2; c= -6; d= 5; por tanto, (30)(5)> (-2)(-6), es decir, 150>12.

En los modelos de los problemas 1 y 2, quedó comprobada la condición (a)(d)>(b)(c).

4. Si (b + d)= 0 en el modelo de mercado lineal, ¿se puede encontrar una solución de equilibrio al usar (3.4) y (3.5)? ¿Por qué?

Mi respuesta:

No se podrá encontrar una solución de equilibrio al usar las formulas (3.4) y (3.5), que se encuentran en la página 33 del libro de Chiang, *Métodos fundamentales de economía matemática*, porque en el campo de los números reales la división entre 0 no está definida.

5. Si (b + d)= 0 en el modelo de mercado lineal, ¿qué se puede concluir en relación con las posiciones de las curvas de demanda y equilibrio en la figura 3.1? ¿Qué concluye entonces con respecto a la solución de equilibrio?

Mis respuestas:

La figura 3.1, se encuentra en la página 32 del libro de Chiang, *Métodos fundamentales de economía matemática*, ahora bien, si tuviéramos que (b + d)= 0, esto significa que el valor de la pendiente (b) de la curva de demanda ha sido alterado o que el valor de la pendiente (d) de la curva de oferta ha sido alterado.

Supongamos que el valor de la pendiente de la curva de oferta se reduce para igualarlo al valor de la pendiente de la curva de demanda y garantizar que b+d= 0, y si partimos de la situación original plasmada en el figura 3.1 que se encuentra en el libro de Chiang, página 32, que estamos estudiando, dicha curva de oferta tenderá a aplanarse dando lugar a lo siguiente: para que Qs alcance la positividad, ahora el precio tiene que ser más elevado porque, reiteramos, la curva se aplana un poco más; también la intersección entre las curvas de oferta y demanda, se lograría en una Q inferior a la prevista en la situación primaria u original. Obviamente estaríamos ante una rara situación de equilibrio del mercado, pues se habría logrado en base a una reducción de la cantidad ofrecida y a un aumento del precio de equilibrio. Pienso, que el mercado no logra limpiarse, no logra vaciarse.

Si en cambio, presumimos que fuera el valor de la pendiente negativa de la curva de demanda que se alterara, incrementándose de manera absoluta, entonces en empinaría un poco más, reclamando un precio de equilibrio menor al estipulado en la gráfica 3.1 de referencia, pero al mismo tiempo esto engendrará una Q, en correspondencia al nuevo precio de equilibrio, menor que la Q originaria. Habría, pues, una insatisfacción de parte de los oferentes; forzaríamos una situación de equilibrio que no limpia el mercado.

El planteamiento efectuado arriba, conforme a la figura 3.1 del libro *Métodos fundamentales de economía matemática*, también lo sustentamos en un ejemplo numérico. Tomamos el problema 1 abordado al inicio del ejercicio 3.2 que nos ocupa. Recordemos que nos aportaron el siguiente modelo:

$Q_d = Q_s$

$Q_d= 21-3P$

$Q_s = -4+8P$

Donde, b+d= -3+8= 5; para que nos arroje un valor igual a 0, supongamos que la pendiente positiva de la curva de oferta, se reduce de 8 a 3; ahora tendremos b+d= -3+3= 0. De hecho, tendremos una nueva Qs= -4+3P ¿Qué ocurrirá con el equilibrio en el mercado? Veamos:

$21-3P= -4+3P$

$-3P-3P= -4-21$

$-6P= -25$

Multiplicamos por -1

6P= 25

P*= 25/6= 4.16666

Q*= -4+3P

Q*= -4+3(4.16666)

Q*= 8.5

Si comparamos estos resultados con los obtenidos antes de forzar (b+d)= 0, veremos que:

P* antes de la alteración: 2.27
P* después de la alteración: 4.16666

Q* antes de la alteración: 14.18
Q* después de la alteración: 8.5

Conclusión: incremento del precio de equilibrio y decremento de la cantidad de equilibrio.

Supongamos ahora que el valor de la pendiente negativa de la curva de demanda, pasa de -3 a -8; ahora tendremos b+d= -8+8= 0. De hecho, tendremos una nueva Qd= 21-8P. ¿Qué ocurrirá con el equilibrio en el mercado? Veamos:

21-8P= -4+8P

-8P-8P= -4-21

-16P= -25

Multiplicamos por -1

16P= 25

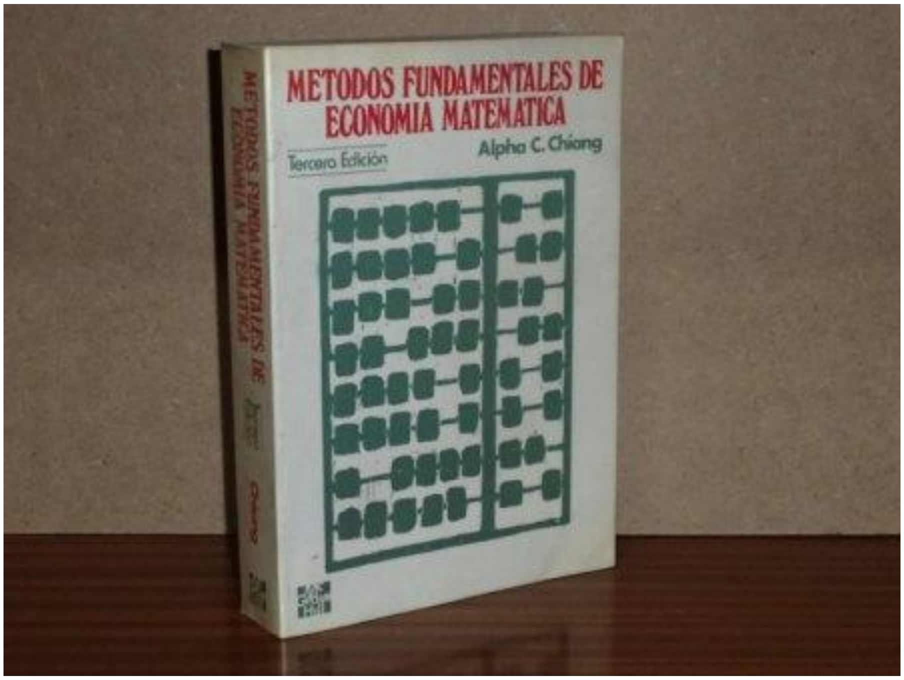
P*= 25/16= 1.5625

Q*= -4+8(1.5625)= 8.5

Conclusión: decremento del precio de equilibrio y decremento de la cantidad de equilibrio.

Dr. Manuel Linares,
10/11/2021

10:30 p.m.


METODOS FUNDAMENTALES DE
ECONOMIA MATEMATICA
Tercera Edición
Alpha C. Chiang

EJERCICIO PROPUESTO 3.3

Nota introductoria

El quinto ejercicio propuesto 3.3 se encuentra en la página 40 del libro de Chiang, *Métodos fundamentales de economía matemática*, que de inmediato resolvemos.

1. Determine en forma gráfica los ceros de las siguientes funciones:

a) $f(x)= x^2-8x+15$

Mi respuesta:

Cuando x= 0, tendremos:

$f(x)= (0)^2-8(0)+15= 15$

Cuando x= 1, tendremos:

$f(x)= (1)^2-8(1)+15= 1-8+15= 8$

Cuando x= 2, tendremos:

$f(x)= (2)^2-8(2)+15= 4-16+15= 3$

Cuando x= 3, tendremos:

$f(x)= (3)^2-8(3)+15= 9-24+15= 0$

Cuando x= 4, tendremos

$f(x)= (4)^2-8(4)+15= 16-32+15= -1$
Cuando x= 5, tendremos:

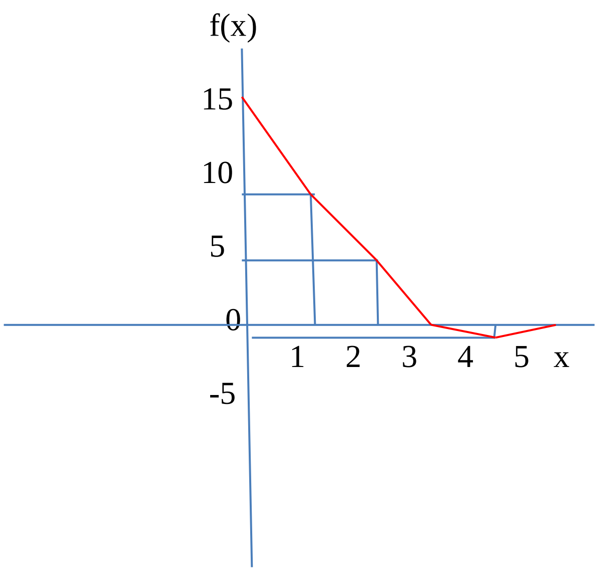
$f(x)= (5)^2-8(5)+15= 25-40+15= 0$

Fueron alcanzadas dos soluciones, $x^*_1=3$, $x^*_2= 5$.

Hagamos la tabla:

X	f(x)
0	15
1	8
2	3
3	0
4	-1
5	0

Hagamos la gráfica:



b) $g(x)= 2x^2-4x-16$

Mi respuesta:

Cuando x= -2, tendremos

$g(x)= 2(-2)^2-4(-2)-16= 0$

Cuando x= -1, tendremos

$g(x)= 2(-1)^2-4(-1)-16= -10$

Cuando x= 0, tendremos:

$g(x)= 2(0)^2-4(0)-16= -16$

Cuando x= 1, tendremos:

$g(x)= 2(1)^2-4(1)-16= 2-4-16= -18$

Cuando x= 2, tendremos:

$g(x)= 2(2)^2-4(2)-16= 8-8-16= -16$

Cuando x= 3, tendremos:

$g(x)= 2(3)^2-4(3)-16= 18-12-16= -10$

Cuando x= 4, tendremos:

$g(x)= 2(4)^2-4(4)-16= 32-16-16= 0$

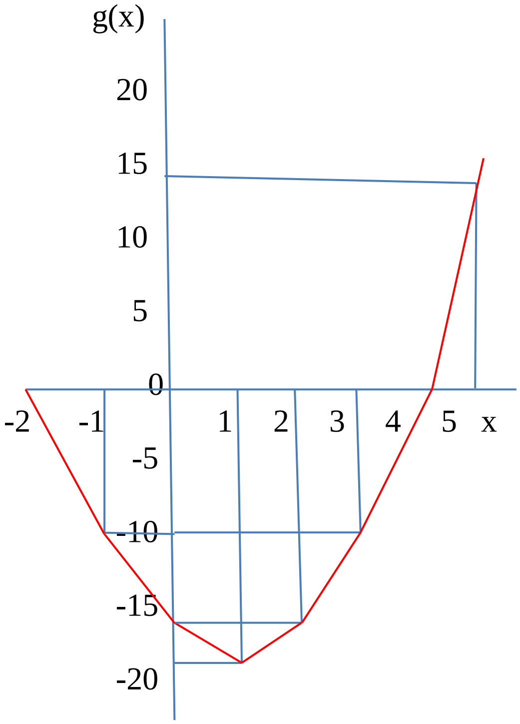
Cuando = 5, tendremos:

$g(x)= 2(5)^2-4(5)x-16= 50-20-16= 14$

Hagamos la tabla:

X	g(x)
-2	0
-1	-10
0	-16
1	-18
2	-16
3	-10
4	0
5	14

Hagamos la gráfica:



Fueron alcanzadas estas soluciones: x^*_1= 4, x^*_2= -2.

2. Resuelva el problema 1 mediante la fórmula cuadrática.

a) f(x)= x^2-8x+15

Mi respuesta:

La fórmula que usaremos es la siguiente:

$x= -b\pm(b^2-4ac)^{1/2}/2a$

Para el ejercicio que nos toca resolver, a= 1, b= -8, c= 15.

Sustitución:

$x= -(-8)\pm ((-8)^2-4(1)(15))^{1/2}/2(1)= 8\pm(64-60)^{1/2}/2= (8\pm2)/2= 8+2/2=$ 5 que se corresponde con el valor de x^*_1; ahora calculamos a x^*_2= (8-2)/2= 3; ambos valores se corresponden con los obtenidos, por la solución gráfica, en el problema 1.

b) g(x)= $2x^2$-4x-16

Mi respuesta:

La fórmula que usaremos es la siguiente:

$X= -b\pm(b^2-4ac)^{1/2}/2a$

Para el ejercicio que nos toca resolver, a= 2, b= -4, c= -16.

Sustitución:

$x= -(-4) \pm(-4)^2-4(2)(-16))^{1/2}/2(2)= (4\pm(16+128)^{1/2}/4= (4\pm12)/4= (4+12)/4= 16/4= 4$, que se corresponde con el valor de x^*_1; ahora calculamos a $x^*_2= (4-12)/4= -2$; ambos valores se corresponden con los obtenidos, por la solución gráfica, en el problema 1.

3. a) Encuentre una ecuación cúbica con raíces 6, -1 y 3; b) Obtenga una ecuación cuártica con raíces 1, 2, 3 y 5.

Mi respuesta al requerimiento a):

Si las raíces de la ecuación cúbica que queremos encontrar son, 6, -1 y 3, esto quiere decir que cuando acudimos a su descomposición en factores, se obtuvieron los siguientes binomios: $(x - 6)(x +1)(x – 3)= 0$. Si hacemos la multiplicación de estos binomios, tendremos la ecuación cúbica requerida:
$(x - 6)(x + 1)= x^2-6x+x-6= x^2-5x-6$

$(x^2-5x-6)(x – 3)= x^3-5x^2-6x-3x^2+15x+18=$

$x^3-8x^2+9x+18= 0$ (Respuesta).

Mi respuesta al requerimiento b):

Si las raíces de la ecuación cuártica que deseamos encontrar son, 1, 2, 3 y 5, esto quiere decir que cuando acudimos a su descomposición factorial, se obtuvieron los siguientes binomios: $(x -1)(x - 2)(x – 3)(x – 5)= 0$. Si hacemos la multiplicación de estos binomios, tendremos la ecuación cuártica requerida:

$(x - 1)(x - 2)= x^2-3x +2$

$(x^2 - 3x +2)(x -3)= x^3-6x^2+11x-6$

$(x^3-6x^2+11x-6)(x -5)=$

$x^4-11x^3+8x^2-61x+30= 0$ (Respuesta).

4. Para cada una de las siguientes ecuaciones polinomiales, determine si x= 1 es una raíz.

Mis respuestas:

x= 1, será una raíz de las ecuaciones, siempre y cuando al sustituir su valor en x, tengamos un resultado igual a 0. Veamos:
a) $(1)^3 – 2(1)^2 + 3(1)-2 = 0$
1-2+3-2= 0, para la ecuación a), 1 es una raíz.

b) $2 (1)^3 -1/2(1)^2 + (1)- 2 = 0$
1/2 no = 0, por tanto, en este caso, 1 no es raíz de la ecuación b).

c) $3(1)^4 – (1)^2 + 2(1) - 4 = 0$
3-1+2-4= 0, en este caso, 1 constituye una raíz de dicha ecuación.

5. Halle las raíces racionales, si existen, de las siguientes ecuaciones.

a) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

b) $8x^3 + 6x^2 - 3x - 1 = 0$

c) $x^3 + 3/4x^2 – 3/8x -1/8= 0$

d) $x^4 - 6x^3 + 73/4x^2 – 3/2x - 2 = 0$

Mis respuestas:

5a) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$; este polinomio, que constituye una ecuación cubica, lo sometemos a la descomposición de un polinomio en factores por el método de evaluación, explicado en el Álgebra de Baldor, en las páginas 175-179; en efecto, el primer paso que debemos dar es tomar el valor cuantitativo del término constante del polinomio, a saber, 6, y de inmediato lo descomponemos en sus factores primos que son: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6.

Luego los factores primos son sustituidos en el polinomio dado con el fin de determinar con cuál el polinomio arroja un resultado igual a 0. En este caso el polinomio sería dividido entre x menos el factor primo para el que el polinomio arrojó un valor 0, obteniéndose un cociente de segundo grado, que sometido a una descomposición de factores, nos aportaría dos binomios, de los cuales provendrían las raíces racionales segunda y tercera, mientras que la primera provendría del divisor arriba precisado. Veamos:

Iniciemos con x= 1. Sustitución:

$(1)^3 – 4(1)^2 + (1) + 6 = 0$
1-4+1+6= 4, por tanto el polinomio no se anula; veamos con x= -1. Sustitución:
$(-1)^3 – 4(-1)^2 + (-1) + 6 = 0$
-1+-4-1+6= 0, por tanto el polinomio ahora se anula; tomemos como divisor del polinomio x-(-1)= x+1.

$x^3 - 4x^2 + x + 6/x+1= x^2-5x+6$.

Como se sabe el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente. Hagamos el planteamiento y procedamos a efectuar la descomposición factorial del cociente para concluir la solución del problema:

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x+1)(x^2-5x+6)$
Factorización: $(x+1)(x-2)(x-3)$.

Por tanto, las raíces racionales son las siguientes:

$(x+1)= 0$
$x= -1$ Respuesta.

$(x-2)= 0$
$x= 2$ Respuesta.

$(x-3)= 0$
$x= 3$ Respuesta.

5b) $8x^3 + 6x^2 - 3x - 1 = 0$; este polinomio, que constituye una ecuación cúbica, lo sometemos a la descomposición de un polinomio en factores por el método de evaluación, explicado en el Álgebra de Baldor, en las páginas 175-179; en efecto, el primer paso que debemos dar es tomar el valor cuantitativo del término constante del polinomio, a saber, 1, y de inmediato lo descomponemos en sus factores primos que son: 1, -1.

Luego los factores primos son sustituidos en el polinomio dado con el fin de determinar con cuál el polinomio arroja un resultado igual a 0. En este caso el polinomio sería dividido entre x menos el factor primo para el que el polinomio arrojó un valor 0, obteniéndose un cociente de segundo grado, que sometido a una descomposición en factores, nos aportaría dos binomios, de los cuales provendrían las raíces racionales segunda y tercera, mientras que la primera provendría del divisor arriba precisado. Veamos:

$8x^3 + 6x^2 - 3x - 1 = 0$

Iniciemos con x= 1. Sustitución:

$8(1)^3 + 6(1)^2 – 3(1)- 1 =$
$8 + 6 – 3- 1 = 10$, por tanto el polinomio no se anula.

Veamos con x= -1:

$8(-1)^3 + 6(-1)^2 – 3(-1)- 1 =$
$-8 + 6+3- 1 = 0$, por tanto el polinomio se anula; tomemos como divisor del polinomio a $x-(-1)= x+1$.

$8x^3 + 6x^2 - 3x – 1 /x+1= 8x^2 -2x-1$

Como se sabe el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente. Hagamos el planteamiento y procedamos a efectuar la descomposición factorial del cociente para concluir la solución del problema:

$8x^3 + 6x^2 - 3x – 1= (x+1)(8x^2 -2x-1)$

Nuestro objeto es descomponer en factores el trinomio $8x^2$-2x-1. En este concreto caso, procedemos a multiplicar el trinomio por el coeficiente de x^2, que es 8, dejando indicado el producto de 8 por 2x y obtenemos el siguiente nuevo trinomio: $64x^2$-8(2x)-8. Pero resulta que $64x^2= (8x)^2$ y 8(2x)= 2(8x), lo que nos permite plantear el trinomio en este formato: $(8x)^2$-2(8x)-8, el cual podemos factorizar de este modo: (8x-4)(8x+2), es decir, -4+2= -2 y (-4)(+2)= -8. Luego, ambos binomios son divididos por 8, para restablecer la condición original del trinomio, sabiendo que (4)(2)= 8, de manera que el primer binomio es dividido por 4, mientras que el segundo binomio es dividido por 2. Veamos: (8x-4)/4= 2x-1 y (8x+2)/2= 4x+1, por tanto, tendremos: (2x-1)(4x+1) Respuesta.

Por tanto, las raíces racionales son las siguientes:

(x+1)(2x-1)(4x+1)= 0
x+1= 0

x*1= -1 primera raíz racional

2x-1= 0

2x= 1

x*2= 1/2 segunda raíz racional

4x+1= 0

4x= -1

x*3= -1/4 tercera raíz racional

5c) $x^3 + 3/4x^2 – 3/8x -1/8= 0$; este polinomio, que constituye una ecuación cúbica, lo sometemos a la descomposición de un polinomio en factores por el método de evaluación, explicado en el Álgebra de Baldor, en las páginas 175-179; en efecto, el primer paso que debemos dar es tomar el valor cuantitativo del término constante del polinomio, a saber, 1/8, y de inmediato lo descomponemos en sus factores primos que son: 1/8, -1/8, 1/4, -1/4… Después de hacer la sustitución, encontramos que obtuvimos un valor 0 cuando sustituimos a x por -1/4. Veamos:

$(-1/4)^3 + 3/4(-1/4)^2 – 3/8(-1/4)-1/8$

-1/64 + 3/64+ 3/32 – 1/8= 0/64= 0

Ese resultado nos indica que debemos dividir la ecuación cúbica dada, entre x-(-1/4)= x+1/4; de este modo obtuvimos el siguiente cociente: x^2+1/2x-1/2, que al descomponerlo en factores alcanzamos estos binomios (x+1)(x-1/2), que juntos al divisor usado arriba, tendremos:

(x+1/4)(x+1)(x-1/2)= 0

(x+1/4)= 0

x*= -1/4 primera raíz racional

(x+1)= 0

x*= -1 segunda raíz racional

(x-1/2)= 0
x*= 1/2 tercera raíz racional

5d) $x^4 - 6x^3 + 73/4x^2 – 3/2x - 2 = 0$ ESTE EJERCICIO LO RESOLVEREMOS EN OTRA OPORTUNIDAD.

6. Obtenga la solución de equilibrio para cada uno de los siguientes modelos:

a) $Q_d = Q_s$

Q_d= 3-p^2

Q_s = 6p-4

b) $Q_d = Q_s$

Q_d= 8-p^2

Q_s = p^2-2

Mis respuestas:

Q_d= 3-p^2

Q_s = 6p-4

3-p^2= 6p-4

-p^2-6p= -4-3

p^2+6p= 4+3

$p^2+6p= 7$

$p^2+6p-7= 0$

$x_1, x_2= -b\pm(b^2-4ac)^{1/2}/2a$

a=1, b= 6, c= -7

$x_1, x_2= -6\pm(-6)^2-4(1)(-7)^{1/2}/2(1)$

$x_1= 1$

$x_2= -7$

7. La condición de equilibrio de mercado, Qd= Qs, suele expresarse en una forma alternativa equivalente, Qd- Qs= 0, que tiene la interpretación económica "la demanda excedente es cero". ¿Representa la ecuación (3.7) esta última versión de la condición de equilibrio? Si no, provea una interpretación económica apropiada para (3.7).

Veamos:
Qd- Qs= 0

$Qd= 3-p^2$
$=3-(1)^2$
=3-1= 2

$Q_s = 6(1)-4= 6-4= 2$

Como se puede advertir se cumple estrictamente.

Dr. Manuel Linares
27/12/2021

EJERCICIO PROPUESTO 3.4

El ejercicio 3.4 aparece en la página 45 del libro *Métodos fundamentales de economía matemática*, del gran Alpha Chiang, y contiene tres (3) mandatos, los cuales no son muy complicados, pero requieren de un trabajo algebraico verdaderamente trabajoso. Estoy muy contento porque finalmente ya salí del ejercicio 3.4.

Detallemos los frutos que conquisté:

1. Desarrolle la solución de (3 .13'), paso a paso, y de este modo compruebe los resultados en (3.14) y (3.15).

Mi respuesta:

La propuesta (3.13') se encuentra contenida en la página 42, del libro que nos ocupa, en las siguientes ecuaciones:

$c_1P_1+c_2P_2= -c_0$
$\gamma_1P_1+\gamma_2P_2= -\gamma_0$

Mientras que (3.14) y (3.15), son las ecuaciones de precios de equilibrio en los mercados primero y segundo de dos bienes, a saber: $P^*_1= (c_2\gamma_0-c_0\gamma_2)/(c_1\gamma_2-c_2\gamma_1)$ y $P_2^*= (c_0\gamma_1-c_1\gamma_0)/(c_1\gamma_2-c_2\gamma_1)$.

Veremos cómo se llega allí.

Chiang, en la página 41, examina un modelo de dos artículos, explicitándolo en el sistema de ecuaciones, designado con el número (3.12), que de inmediato presentamos:

1) $Qd_1-Qs_1= 0$
El excedente de demanda del primer artículo es igual a cero, en una situación de equilibrio del mercado.

2) $Qd_1=a_0+a_1P_1+a_2P_2$
La ecuación de demanda del primer artículo recibe influencia de su propio precio, más la influencia del precio del segundo artículo. Es bueno consignar que luce razonable que el coeficiente de la variable precio del segundo artículo (P_2), sea +, siempre y cuando los bienes sean sustitutivos.

3) $Qs_1= b_0+b_1P_1+b_2P_2$

La ecuación de oferta del primer artículo recibe influencia de su propio precio, más la influencia del precio del segundo artículo. Es bueno consignar que luce razonable que el coeficiente de la variable precio del segundo artículo (P_2), sea +, en la ecuación de oferta del primer artículo, siempre y cuando los bienes sean sustitutivos.

4) Qd_2-Qs_2= 0
El excedente de demanda del segundo artículo es igual a cero, en una situación de equilibrio del mercado.

5) $Qd_2= \alpha_0+ \alpha_1P_1+ \alpha_2P_2$
La ecuación de demanda del segundo artículo recibe la influencia del precio del primer artículo, más la influencia del precio del segundo artículo. Es bueno consignar que luce razonable que el coeficiente de la variable precio del primer artículo (P_1) sea +, siempre y cuando los bienes sean sustitutivos.

6) $Qs_2= \beta_0+\beta_1P_1+\beta_2P_2$

La ecuación de oferta del segundo artículo recibe influencia del precio del primer artículo más la influencia del precio del segundo artículo. Es bueno consignar que luce razonable que el coeficiente de la variable precio del primer artículo (P_1) sea +, en la ecuación de oferta del segundo artículo, siempre y cuando los bienes sean sustitutivos.

Ahora recurrimos a la eliminación de variables; sustituimos las ecuaciones segunda y tercera en la primera (para el primer artículo) y la quinta y sexta ecuaciones en la cuarta (para el segundo artículo); el modelo pues se reduce a dos ecuaciones con dos variables.

Hagamos la sustitución:

$a_0+a_1P_1+a_2P_2-(b_0+b_1P_1+b_2P_2= 0$

$\alpha_0+ \alpha_1P_1+ \alpha_2P_2-(\beta_0+\beta_1P_1+\beta_2P_2)= 0$

Reordenamos:

$(a_0-b_0)+(a_1-b_1)(P_1)+(a_2-b_2)(P_2)= 0$

$(\alpha_0-\beta_0)+(\alpha_1-\beta_1)(P_1)+(\alpha_2-\beta_2)(P_2)= 0$

Para abreviar o simplificar suponemos:

$c_i= a_i-b_i$
$\gamma_i= \alpha_i- \beta_i$
donde (i= 0, 1, 2).

Ahora, en las dos expresiones de arriba referidas al reordenamiento que hicimos, sustituimos:

$(c_0)+(c_1)(P_1)+(c_2)(P_2)= 0$

$(\gamma_0)+(\gamma_1)(P_1)+(\gamma_2)(P_2)= 0$

Pasemos c_0 y γ_0 al lado derecho y tendremos:
1) $(c_1)(P_1)+(c_2)(P_2)= -c_0$

1) $(\gamma_1)(P_1)+(\gamma_2)(P_2)= -\gamma_0$

Ese último sistema de dos ecuaciones se puede resolver por eliminación de variables. Despejamos a P_2 de la primera ecuación:

$(c_2)(P_2)= -c_0-(c_1)(P_1)$

$(P_2)= (-c_0-(c_1)(P_1)/c_2= -(c_0+c_1P_1)/c_2$

Esa última expresión es sustituida en la segunda ecuación y resolvemos:

$\gamma_1P_1+\gamma_2[-(c_0+c_1P_1)/c_2)]= -\gamma_0$

$\gamma_1P_1+\gamma_2(-c_0-c_1P_1)/c_2= -\gamma_0$

$\gamma_1P_1+(-c_0\gamma_2-c_1P_1\gamma_2)/c_2= -\gamma_0$

Uniformizamos el primer miembro de la última ecuación y tendremos:

$(c_2\gamma_1P_1-c_0\gamma_2-c_1P_1\gamma_2)/c_2$

Pasamos el c_2, que se encuentra en el denominador, al segundo miembro de la ecuación:

$c_2\gamma_1P_1-c_0\gamma_2-c_1P_1\gamma_2= -c_2\gamma_0$

Multiplicamos por -1

$-c_2\gamma_1P_1+c_0\gamma_2+c_1P_1\gamma_2= +c_2\gamma_0$

Pasamos $+c_0\gamma_2$ al segundo miembro de la ecuación:

$-c_2\gamma_1P_1+c_1P_1\gamma_2= c_2\gamma_0-c_0\gamma_2$

Descomposición de factores a partir del factor común y obtenemos el precio de equilibrio, referido al primer artículo:

$P_1(-c_2\gamma_1+c_1\gamma_2)= c_2\gamma_0-c_0\gamma_2$

$P^*_1= (c_2\gamma_0-c_0\gamma_2)/(c_1\gamma_2-c_2\gamma_1)$

Ahora, pasemos a calcular a P_2* a partir de la eliminación de variables:

Como se sabe partimos del siguiente sistema de ecuaciones, constituido por dos ecuaciones, para lograr nuestro objetivo central mediante eliminación de variables:
1) $(c_1)(P_1)+(c_2)(P_2)= -c_0$

2) $(\gamma_1)(P_1)+(\gamma_2)(P_2)= -\gamma_0$

Ahora, diferente al caso anterior, nos apoyamos en la segunda ecuación, de la que despejamos a P_1:

$(\gamma_1)(P_1)+(\gamma_2)(P_2)= -\gamma_0$

$P_1= -(\gamma_0+\gamma_2 P_2)/\gamma_1$

Esa última expresión es sustituida en la primera ecuación:

$(c_1)(P_1)+(c_2)(P_2)= -c_0$

Si usamos el mismo procedimiento algebraico que empleamos en el caso anterior, cuando nos enfrentamos al cálculo de P_1*, obtendremos el siguiente resultado:

$P_2^*= (c_0\gamma_1-c_1\gamma_0)/(c_1\gamma_2-c_2\gamma_1)$

2. Vuelva a escribir (3.14) y (3.15) en términos de los parámetros originales del modelo en (3.12).

Mi respuesta:

En este punto número 2, el libro nos indica que los resultados que obtuvimos, en el punto número 1, es decir, $P^*_1= (c_2\gamma_0-c_0\gamma_2)/(c_1\gamma_2-c_2\gamma_1)$ y $P_2^*= (c_0\gamma_1-c_1\gamma_0)/(c_1\gamma_2-c_2\gamma_1)$, ahora los alcancemos utilizando los parámetros originales del modelo, tal como se expone en la página 41, en la propuesta (3.12), que es esta:

1) $Qd_1-Qs_1= 0$
2) $Qd_1= a_0+a_1P_1+a_2P_2$
3) $Qs_1= b_0+b_1P_1+b_2P_2$
4) $Qd_2-Qs_2= 0$
5) $Qd_2= \alpha_0+ \alpha_1P_1+ \alpha_2P_2$
6) $Qs_2= \beta_0+\beta_1P_1+\beta_2P_2$

De inmediato vamos hacia la sustitución de las ecuaciones 2 y 3, en la ecuación 1; e igualmente, sustitución de las ecuaciones 5 y 6, en la ecuación 4:

$(a_0+a_1P_1+a_2P_2)-(b_0+b_1P_1+b_2P_2)= 0$

$(\alpha_0+\alpha_1P_1+\alpha_2P_2)-(\beta_0+\beta_1P_1+\beta_2P_2)=0$

Luego tendremos:
$(a_0-b_0)+(a_1-b_1)P_1+(a_2-b_2)P_2=0$
$(\alpha_0-\beta_0)+(\alpha_1-\beta_1)P_1+(\alpha_2-\beta_2)P_2=0$

$(a_1-b_1)P_1+(a_2-b_2)P_2=-(a_0-b_0)$

$(\alpha_1-\beta_1)P_1+(\alpha_2-\beta_2)P_2=-(\alpha_0-\beta_0)$

Despeje:

$(a_2-b_2)P_2=-(a_0-b_0)-(a_1-b_1)P_1$
$P_2=-(a_0-b_0)-(a_1-b_1)P_1/(a_2-b_2)$

Sustituimos a P_2 en la segunda ecuación, o sea en $(\alpha_1-\beta_1)P_1+(\alpha_2-\beta_2)P_2=-(\alpha_0-\beta_0)$:

$(\alpha_1-\beta_1)P_1+(\alpha_2-\beta_2)(-(a_0-b_0)-(a_1-b_1)P_1/(a_2-b_2)=-(\alpha_0-\beta_0)$

$(\alpha_1-\beta_1)P_1-(\alpha_2-\beta_2)(a_0-b_0)-(\alpha_2-\beta_2)(a_1-b_1)P_1/(a_2-b_2)=-(\alpha_0-\beta_0)$

$(a_2-b_2)(\alpha_1-\beta_1)P_1-(\alpha_2-\beta_2)(a_0-b_0)-(\alpha_2-\beta_2)(a_1-b_1)P_1=-(\alpha_0-\beta_0)(a_2-b_2)$

$(a_2-b_2)(\alpha_1-\beta_1)P_1-(\alpha_2-\beta_2)(a_1-b_1)P_1=-(\alpha_0-\beta_0)(a_2-b_2)+(\alpha_2-\beta_2)(a_0-b_0)$

Multiplicamos por -1 antes de aplicar factor común:

$-(a_2-b_2)(\alpha_1-\beta_1)P_1+(\alpha_2-\beta_2)(a_1-b_1)P_1=(\alpha_0-\beta_0)(a_2-b_2)-(\alpha_2-\beta_2)(a_0-b_0)$

Factor común:

$P_1(-(a_2-b_2)(\alpha_1-\beta_1)+(\alpha_2-\beta_2)(a_1-b_1)=(\alpha_0-\beta_0)(a_2-b_2)-(\alpha_2-\beta_2)(a_0-b_0)$

Despejamos y obtenemos a P_1*:

$P_1^*=(\alpha_0-\beta_0)(a_2-b_2)-(\alpha_2-\beta_2)(a_0-b_0)/-(a_2-b_2)(\alpha_1-\beta_1)+(\alpha_2-\beta_2)(a_1-b_1)$

Ahora pasemos al cálculo de P_2*:

Como se sabe partimos del siguiente sistema de ecuaciones, constituido por dos ecuaciones, para lograr nuestro objetivo central mediante eliminación de variables:

1) $(a_1-b_1)P_1+(a_2-b_2)P_2=-(a_0-b_0)$

2) $(\alpha_1-\beta_1)P_1+(\alpha_2-\beta_2)P_2=-(\alpha_0-\beta_0)$

Ahora, diferente al caso anterior, nos apoyamos en la segunda ecuación, de la que despejamos a P_1:

P_1=$(\alpha_2-\beta_2)P_2$= $-(\alpha_0-\beta_0)-(\alpha_2-\beta_2)P_2/(\alpha_1-\beta_1)$
Esa última expresión es sustituida en la primera ecuación:

$(a_1-b_1)P_1+(a_2-b_2)P_2= -(a_0-b_0)$

Si usamos el mismo procedimiento algebraico que empleamos en el caso anterior, cuando nos enfrentamos al cálculo de P_1*, obtendremos el siguiente resultado:

P_2*= $[(a_0-b_0)(\alpha_1-\beta_1)-(a_1-b_1)(\alpha_0-\beta_0)]/-(a_2-b_2)(\alpha_1-\beta_1)+(\alpha_2-\beta_2)(a_1-b_1)$.

3. Las funciones de la oferta y la demanda de un modelo de mercado de dos artículos son como sigue:

Q_{d1}= 18-3P_1+P_2

Q_{s1}= -2+4P_1

Q_{d2}= 12+P_1-2P_2

Q_{s2}= -2   +3P_2

Determine P_i* y Q_i* (i= 1,2).

Mis respuestas:

Con los coeficientes que nos otorga el libro, los símbolos abreviados c_i y γ_i tomarán los siguientes valores, conforme con las orientaciones de Chiang, página 42, donde él desarrolla un ejemplo numérico:

c_0= 18-(-2)= 20

c_1= -3-4= -7

c_2= 1-0= 1

γ_0= 12-(-2)= 14

γ_1= 1-0= 1

γ_2= -2-3= -5

Ya sabemos que: P^*_1= $(c_2\gamma_0-c_0\gamma_2)/(c_1\gamma_2-c_2\gamma_1)$, y que P_2*= $(c_0\gamma_1-c_1\gamma_0)/(c_1\gamma_2-c_2\gamma_1)$, por tanto sustituimos por los valores arriba calculados y tendremos:

P_1*= (1)(14)-(20)(-5)/(-7)(-5)-(1)(1)= 14+100/35-1= 114/34= 3.3529411765

P_2*= (20)(1)-(-7)(14)/(-7)(-5)-(1)(1)= 20+98/35-1= 118/34= 3.4705882353
Los valores obtenidos de P_1* y P_2* los sustituimos en el sistema de ecuaciones dado como datos del punto 3 que estamos tratando:

Q_{d1}= 18-3P_1+P_2

Q_{s1}= -2+4P_1

Q_{d2}= 12+P_1-2P_2

Q_{s2}= -2 +3P_2

Trabajaré con estas dos ecuaciones: Q_{d1}= 18-3P_1+P_2 y Q_{d2}= 12+P_1-2P_2, a fin de calcular el Q de equilibrio tanto en el primer mercado, como en el segundo:

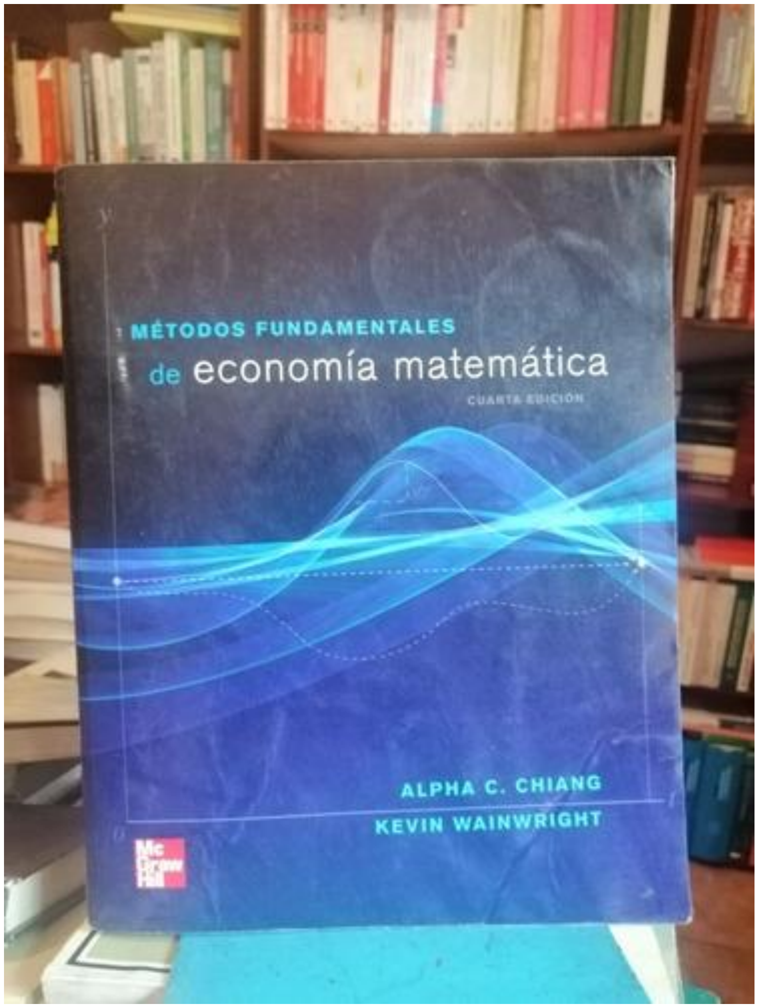
Q_1*= 18-3P_1+P_2= 18-3(3.3529411765)+ 3.4705882353= 11.4117647058

Q_2*= 12+P_1-2P_2= 12+3.3529411765-2(3.4705882353)= 8.4117647059

Los resultados del punto 3 que acabamos de concluir, pueden ser comprobados con las respuestas que proporciona el libro en la página 663.

Dr. Manuel de Jesús Linares Jiménez,
03/01/2022

1:07 P.M.


MÉTODOS FUNDAMENTALES
de economía matemática
CUARTA EDICIÓN
ALPHA C. CHIANG
KEVIN WAINWRIGHT
Mc
Graw
Hill

3.5

EJERCICIO PROPUESTO 3.5

Introducción

El ejercicio propuesto 3.5, que aparece en la página 47 del libro de Chiang, *Métodos fundamentales de economía matemática*, versa sobre el equilibrio en el análisis de ingreso nacional. Mientras el ejercicio propuesto 3.4, se mueve en un ámbito puramente microeconómico, el ejercicio presente se desarrolla en medio del plano macroeconómico, en la perspectiva de la estática comparativa; para resolverlo es conveniente una lectura a fondo de la página 46. Veamos el contenido del ejercicio:

1. Dado el siguiente modelo:

$Y = C + lo + Go$
$C= a+b(Y-T)$
$T= d+tY$

Donde:
($a>0$, $0<b<1$) [T: impuestos]
($d>0$, $0<t<1$) [t: tasa de impuesto sobre la renta]

A. ¿Cuántas variables endógenas hay?
B. Determine Y*, T* y C*

2. Sea el modelo de ingreso nacional:

$Y = C+I_0+G$
$C = a + b(Y - T_0)$
$G= gY$

Donde:
($a>0$, $0<b<1$)
($0<g<1$)

a) Identifique las variables endógenas
b) Dé el significado económico del parámetro g
c) Determine el ingreso nacional de equilibrio
d) ¿Que restricción se requiere en los parámetros para que exista una solución?

3. Determine Y* y C* a partir de lo siguiente:

$Y= C+I_0+G_o$
$C= 25+6y^{1/2}$
$I_0= 16$
$G_0= 14$

Mis respuestas al punto 1:

a) Hay tres variables endógenas, que son: Y, ingreso nacional; C, gasto de consumo agregado; T, impuestos.

b) Determinación de Y*

$Y= C+I_0+G_0$

Sustituimos a C:

$Y= a+b(Y-T)+I_0+G_0$

Sustituimos a T:

$Y= a+b[Y-(d+tY)]+I_0+G_0$

Pasamos los términos relacionados con Y hacia el primer miembro de la ecuación:

$Y- b[Y-(d+tY)]= a+I_0+G_0$

$Y-b[Y-d-tY= a+I_0+G_0$

$Y-bY+bd+btY= a+I_0+G_0$

$Y-bY+btY= a-bd+I_0+G_0$

Factor común en el primer miembro de la ecuación:

$Y(1-b+bt)= a-bd+I_0+G_0$

Despejamos a Y para obtener el ingreso nacional de equilibrio:

$Y^*= (a-bd+I_0+G_{0)}/(1-b+bt)= (a-bd+I_0+G_{0)}/1-b(1-t)$

b) Determinación de T*

$T= d+tY$

Sustituimos Y por el ingreso nacional de equilibrio arriba calculado, es decir, $Y^*= (a-bd+I_0+G_{0)}/1-b(1-t)$; ahora tendremos:

$T= d+t(a-bd+I_0+G_0)/1-b(1-t)$

Convertimos el denominador 1-b(1-t) en el denominador común del segundo miembro de la ecuación, para tener:
$T= d(1-b(1-t)+t(a-bd+I_0+G_0)/1-b(1-t)$

Multiplicamos:

$T= d(1-b+bt)+t(a-bd+I_0+G_0)/1-b(1-t)$

Multiplicamos:

$T= d-bd+bdt+at-bdt+tI_0+tG_0)/(1-b(1-t)$

Reducimos términos semejantes:

$T= d-bd+at+tI_0+tG_0)/1-b(1-t)$

Factor común en los dos primeros términos del segundo miembro de la ecuación y factor común en los tres últimos términos del segundo miembro de la ecuación:

$T^*= [d(1-b)+t(a+I_0+G_0)]/[1-b(1-t)]$

c) Determinación de C*

Sustituimos a Y*, y T*en la ecuación: C= a+b(Y-T), para obtener:

$C= a+b[(a-bd+I_0+G_0)/(1-b(1-t)-(d(1-b)+t(a+I_0+G_0)]/(1-b(1-t)]$

$C= a+b[(a-bd+I_0+G_0)-(d(1-b)+t(a+I_0+G_0)]/(1-b(1-t)]$

$C= a+ab-b^2d+bI_0+bG_0-bd+b^2d-abt-btI_0-btG_0/(1-b(1-t)$

Supresión de términos semejantes:

$C= a+ab+bI_0+bG_0-bd-abt-btI_0-btG_0/(1-b(1-t)$

Mis respuestas al punto 2:

a) Las variables endógenas en el modelo del punto, son las siguientes: Y, ingreso nacional; C, consumo agregado; G, gasto agregado;

Identifique las variables endógenas

b) El significado económico del parámetro g es el siguiente: representa la propensión marginal al gasto y el valor que debe adquirir será mayor que cero, pero menor que uno.
c) Determinación del ingreso nacional de equilibrio

Partimos de estas ecuaciones:
$Y = C+I_0+G$
$C = a + b(Y - T_0)$
$G= gY$

Sustituimos la segunda y la tercera en la primera, para obtener:

$Y = a+I_0+ Y\text{-}bY\text{-}gY= a\text{-}bT_0+I_0$

Factor común: $Y(1\text{-}b\text{-}g)= a\text{-}bT_0+I_0$

Despejamos y obtenemos el ingreso nacional de equilibrio: $Y^*= (a\text{-}bT_0+I_0)/(1\text{-}b\text{-}g)$

d) Las restricciones que se requieren en los parámetros para que exista una solución, son las siguientes:

$a>0;\ 0<b<1;\ 0<g<1$

Mis respuestas al punto 3:

Determinación de Y^*:

Sustitución en $Y= C+I_0+G_o$, para obtener:

$Y= 25+6y^{1/2}+16+14$

$Y= 25+6y^{1/2}+30$

$Y= 55+6y^{1/2}$

$Y\text{-}6y^{1/2}= 55$

Suponemos que:

$6y^{1/2}=w^2$, por tanto:

Determine Y^* y C^* a partir de lo siguiente:

$Y= C+I_0+G_o$
$C= 25+6y^{1/2}$
$I_0= 16$
$G_0= 14$

4.1

EJERCICIO PROPUESTO 4.1

Introducción

El ejercicio propuesto 4.1, que aparece en la página 51 del libro de Chiang, *Métodos fundamentales de economía matemática*, versa sobre matrices y vectores; para resolverlo es conveniente una lectura a fondo de la página 49, 50 y los dos primeros párrafos de la página 51.

Primer punto:

El libro, en la página 51, que reescribamos el modelo de mercado (3.1) en el formato de (4.1), y muestre que, si se disponen las tres variables en el orden Qd, Qs y P, la matriz de coeficientes será:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & -d \end{bmatrix}$$

¿Cómo escribiría el vector de constantes?

Mi respuesta:

El modelo de mercado (3.1) se encuentra en la página 32; mírelo aquí:

$Q_d = Q_s$

$Q_d = a - bP \qquad (a, b > 0)$

$Q_s = -c + dP \qquad (c, d > 0)$

Donde:

Qd= Q_s, quiere decir que la demanda es igual a la oferta.

Qd= a – bP, es la función de demanda.

Qs= -c + dP, es la función de oferta.

Luego, a, b, c y d, son parámetros, que como son mayores que 0, son positivos.

El formato (4.1), Chiang nos lo muestra en la página 49, basado en matrices y vectores. Dicho formato toma en cuenta coeficientes de variables, variables propiamente dichas y términos constantes. De inmediato, en las tres ecuaciones que nos dan como dato, procedemos dejar del lado derecho de la ecuación solamente los términos constantes que son 0, a y –c, el resto lo pasamos al lado izquierdo observando la ley de los signos y tendremos:

$Q_d - Q_s \quad = 0$

$Q_d + \qquad bP = a$

$\qquad Q_s - dP = -c$

De allí obtenemos la matriz de coeficientes, el vector columna de las variables y el vector columna de los términos constantes. Iniciemos con la matriz de coeficientes, de este modo: en la primera fila la variable Q_d tiene a 1 como coeficiente, en la segunda fila nuevamente Q_d tiene a 1 como coeficiente, en la tercera como ya no hay Q_d, sino Q_s, esta última se coloca en la misma columna donde está Q_s arriba en la primera fila, por tanto, como se terminaron las Q_d, allí tenemos que colocar un 0. Resumiendo: en la primera columna de la matriz que estamos formando tendremos 1, 1 y 0. ¿Qué tenemos en la segunda columna? Lo siguiente: como Q_s está precedida del signo -, el coeficiente es -1, en la segunda fila no hay Q_s, por tanto, tendremos 0, en la tercera fila sí tenemos Q_s precedida del signo +, el coeficiente es +1. Resumiendo: en la segunda columna de la matriz que estamos formando, tendremos -1, 0 y 1. ¿Qué tenemos en la tercera columna? Lo siguiente: en la tercera columna tenemos a la variable precio (P), pero en la primera fila no tenemos P, por tanto, colocamos allí un 0, en la segunda fila sí tenemos una P, cuyo coeficiente es +b, y en la tercera fila tenemos también otra P, cuyo coeficiente es –d. Resumiendo: en la tercera columna de la matriz que estamos formando, tendremos 0, +b y –d. Ya tenemos la matriz de coeficientes que es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & -d \end{bmatrix}$$

El vector de variables, obviamente es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} Q_d \\ Q_s \\ P \end{bmatrix}$$

El vector de términos constantes, conforme a los cálculos realizados más arriba, obviamente es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ a \\ -c \end{bmatrix}$$

Segundo punto:

Ahora tenemos que reescribir el modelo de mercado (3.12) en el formato de (4.1) con las variables dispuestas en el siguiente orden: Q_{d1}, Q_{s1}, Q_{d2}, Q_{s2}, P_1, P_2. Escriba la matriz de coeficientes, el vector de variables y el vector de constantes.

El modelo de mercado (3.12) se encuentra en la página 41, del libro *Métodos fundamentales de economia matemática* de Chiang; reproduzcámoslos:

$Q_{d1}-Q_{s1}= 0$

$Q_{d1}= a_0+a_1P_1+a_2P_2$

$Q_{s1}= b_0+b_1P_1+b_2P_2$

$Q_{d2} - Q_{s2}= 0$

$Q_{d2}= \alpha_0+ \alpha_1P_1+ \alpha_2P_2$

$Q_{s2}= \beta_0+ \beta_1P_1+ \beta_2P_2$

Mis respuestas:

El formato (4.1), Chiang nos lo muestra en la página 49, basado en matrices y vectores. Dicho formato toma en cuenta coeficientes de variables, variables propiamente dichas y términos constantes. De inmediato, en las seis (6) ecuaciones que nos dan como datos, procedemos dejando del lado derecho de la ecuación solamente los términos constantes que son 0, a_0, b_0, 0, α_0 y β_0, el resto lo pasamos al lado izquierdo observando la ley de los signos y tendremos:

$$\begin{aligned}
&Q_{d1}- Q_{s1} &&= 0\\
&Q_{d1}- \quad a_1P_1 - a_2P_2 &&= a_0\\
&\quad Q_{s1} \quad -b_1P_1- b_2P_2 &&= b_0\\
&\qquad Q_{d2} - Q_{s2} &&= 0\\
&\qquad Q_{d2} \quad -\alpha_1P_1- \alpha_2P_2 &&= \alpha_0\\
&\qquad\quad Q_{s2} \quad -\beta_1P_1- \beta_2P_2 &&= \beta_0
\end{aligned}$$

De allí obtenemos la matriz de coeficientes, el vector columna de las variables y el vector columna de los términos constantes. Iniciemos con la matriz de coeficientes, de este modo: la variable Q_{d1} tiene a 1 como coeficiente en la primera fila, nuevamente Q_{d1} tiene a 1 como coeficiente en la segunda fila, como ya no hay mas Q_{d1}, sino Q_{s1}, ésta se coloca en la misma columna donde está Q_{s1} arriba en la primera fila, por tanto, como se terminaron las Q_{d1}, en la primera columna tenemos que colocar 0 hasta agotar el total de filas. Resumiendo: en la primera columna de la matriz que estamos formando tendremos 1, 1, 0, 0, 0 y 0. ¿Qué tenemos en la segunda columna? Lo siguiente: como Q_{s1} está precedida del signo -, el coeficiente es -1, en la segunda fila no hay Q_{s1}, por tanto, tendremos 0, en la tercera fila sí tenemos Q_{s1} precedida del signo +, el coeficiente es +1. Resumiendo: en la segunda columna de la matriz que estamos formando, tendremos -1, 0, 1, 0, 0 y 0. ¿Qué tenemos en la tercera columna? Tenemos a la variable Q_{d2}, pero en las primera, segunda y tercera filas no tenemos Q_{d2}, por tanto, en las tres colocamos 0, en la cuarta fila sí tenemos una Q_{d2}, cuyo coeficiente es +1, y en la quinta fila tenemos también otra Q_{d2}, cuyo coeficiente también es +1; en la sexta fila no tenemos Q_{d2}, por tanto colocamos 0. Resumiendo: en la tercera columna de la matriz que estamos formando, tendremos 0, 0, 0 +1, +1 y 0. ¿Qué tenemos en la cuarta columna? Tenemos a la variable Q_{s2}, que solamente aparece en las filas cuarta y sexta, con los coeficientes -1 y +1, en el resto de las filas colocamos 0. Resumiendo: en la cuarta columna de la matriz que estamos formando, tendremos 0, 0, 0, -1, 0 y +1. ¿Qué tenemos en la quinta columna? La variable P_1, que se encuentra en las filas segunda, tercera, quinta y sexta, con los coeficientes a_1, $-b_1$, $-\alpha_1$ y $-\beta_1$, respectivamente, por tanto, en las filas restantes colocaremos 0. Resumiendo: en la quinta columna de la matriz que estamos formando, tendremos 0, a_1, $-b_1$, 0, $-\alpha_1$ y $-\beta_1$. ¿Qué tenemos en la sexta columna? La variable P_2, que aparece en las filas segunda, tercera, quinta y sexta, con los coeficientes $-a_2$, $-b_2$, $-\alpha_2$ y $-\beta_2$, respectivamente; en las demás filas ostenta 0. Resumiendo: en la sexta columna de la matriz que estamos formando, tendremos 0, $-a_2$, $-b_2$, 0, $-\alpha_2$ y $-\beta_2$. Ya tenemos la matriz de coeficientes que es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & a_1 & -a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -b_1 & -b_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\beta_1 & -\beta_2 \end{bmatrix}$$

El vector de variables obviamente es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} Q_{d1} \\ Q_{s1} \\ Q_{d2} \\ Q_{s2} \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

El vector de términos constantes, conforme a los cálculos realizados más arriba, obviamente es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ a_0 \\ b_0 \\ 0 \\ \alpha_0 \\ \beta_0 \end{bmatrix}$$

Tercer punto:

El libro nos pregunta: ¿Se puede escribir el modelo de mercado (3.6) en el formato de (4.1)? ¿Por qué?

Mis respuestas:

No. Porque aparece una ecuación cuadrática; en el álgebra matricial solamente se pueden usar ecuaciones lineales.

Cuarto punto:

El libro nos solicita reescribir el modelo de ingreso nacional (3.23) en el formato de (4.1), con Y como la primera variable. Escriba la matriz de coeficientes y el vector de constantes.

Mis respuestas:

El modelo de ingreso nacional (3.23) se encuentra en la página 46 del libro *Métodos fundamentales de economía matemática* de Chiang y se expresa de esta manera:

$$Y = C + I_o + G_o \qquad (a > 0, \quad 0 < b < 1)$$
$$C = a + bY$$

Donde:

Y= variable endógena que representa el ingreso nacional.

C= variable endógena que representa el gasto de consumo.

Io= inversión del gobierno determinada de manera exógena.

Go= gastos del gobierno determinado de manera exógena.

a= gasto de consumo autónomo.

b= propensión marginal al consumo.

Ahora procedemos a trabajar con las dos ecuaciones que nos han suministrado como datos. Trataremos de llevar al primer miembro de ambas ecuaciones, todos los términos que no sean constantes:

Y - C= Io + Go

-bY + C= a

Formemos la matriz de coeficientes:

En la primera fila, pero en la primera columna, tenemos el número 1, como coeficiente; en la segunda fila, pero en la primera columna tenemos el coeficiente –b; en la primera fila pero en la segunda columna tenemos el coeficiente -1; y en la segunda fila y en la segunda columna tenemos como coeficiente 1; por tanto, la matriz de coeficiente es como sigue:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -b & +1 \end{bmatrix}$$

El vector columna de las variables, es como sigue:

$$\begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix}$$

El vector columna de los términos constantes, es como sigue:

$$\begin{bmatrix} Io + Go \\ a \end{bmatrix}$$

Quinto punto:

El libro nos solicita reescribir el modelo de ingreso nacional del ejercicio 3.5-1 (que se encuentra en la página 47 del libro *Métodos fundamentales de economía matemática* de Chiang), en el formato de (4.1), con las variables en el orden Y, T y C. [Sugerencia: tenga cuidado con la expresión multiplicativa b(Y-T) en la función de consumo].

Mis respuestas:

Transcribamos el modelo:

Y = C + Io + Go

C = a + b(Y-T)

T = d + Ty

Donde:

Y = Ingreso nacional.

C = Consumo.

Io = Inversión.

Go = Gasto del gobierno.

T= Impuestos.

t = Tasa de impuesto sobre la renta.

Pasemos a trabajar la matriz de coeficientes, pasando al primer miembro de cada una de las ecuaciones dadas, los términos que no sean constantes.

Y - C = Io + Go

-bY+bT+C = a

-tY +T = d

Trabajemos con la variable Y. En la primera fila y en la primera columna tenemos el coeficiente 1; en la segunda fila y en la primera columna tenemos el coeficiente –b; en la tercera fila y en la primera columna tenemos el coeficiente –t; trabajemos ahora con la variable T, que en la primera fila y en la segunda columna no se encuentra, por tanto, el coeficiente es 0; pero está en la segunda fila y en la segunda columna con el coeficiente +b, y en la tercera fila y en la segunda columna posee el coeficiente 1; finalmente la variable C, tercera columna, se encuentra en las filas primera y segunda, con los coeficientes -1 y 1, mientras que en la última fila su coeficiente será 0.

Esta es la matriz de coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -b & b & 1 \\ -t & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

El vector columna de las variables es este:

$$\begin{bmatrix} Y \\ T \\ C \end{bmatrix}$$

El vector columna de los términos constantes es este:

$$\begin{bmatrix} Io + Go \\ a \\ d \end{bmatrix}$$

4.2

EJERCICIO PROPUESTO 4.2

El ejercicio 4.2 se encuentra en la página 58 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática* de la autoría de Chiang. Desde la página 51 hasta la 58, Chiang nos va aportando los conocimientos para emprender con éxito la solución del citado ejercicio. Comencemos:

Primer punto:

1. Dadas:

$$A=\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtenga:

a) A+B; b) C-A; c) 3A; d) 4B+2C

Mis respuestas:

$$A+B=\begin{bmatrix} 7+0 & -1+4 \\ 6+3 & 9+(-2) \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$$

$$C-A=\begin{bmatrix} 8-7 & 3-(-1) \\ 6-6 & 1-9 \end{bmatrix}$$

$$C-A=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

$$3A=\begin{bmatrix} 3(7) & 3(-1) \\ 3(6) & 3(9) \end{bmatrix}$$

$$3A=\begin{bmatrix} 21 & -3 \\ 18 & 27 \end{bmatrix}$$

$$4B=\begin{bmatrix} 4(0) & 4(4) \\ 4(3) & 4(-2) \end{bmatrix}$$

$$4B=\begin{bmatrix} 0 & 16 \\ 12 & -8 \end{bmatrix}$$

$$2C=\begin{bmatrix} 2(8) & 2(3) \\ 2(6) & 2(1) \end{bmatrix}$$

$$2C=\begin{bmatrix} 16 & 6 \\ 12 & 2 \end{bmatrix}$$

$$4B+2C=\begin{bmatrix} 0+16 & 16+6 \\ 12+12 & -8+2 \end{bmatrix}$$

$$4B+2C=\begin{bmatrix} 16 & 22 \\ 24 & -6 \end{bmatrix}$$

Segundo punto:

2. Dadas:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

a) ¿Está definida AB? Calcule AB. ¿Puede calcular BA? ¿Por qué?

b) ¿Está definida BC? Calcule BC. ¿Puede calcular CB? En caso afirmativo calcule CB. ¿Es cierto que BC es igual a CB?

Mis respuestas:

Comencemos con las interrogantes de a). Si está definida AB, puesto que el libro que estamos estudiando, en la página 53, nos indica que para encontrar un producto entre dos matrices, que es el caso que nos ocupa, se necesita que la dimensión columna de la matriz "primaria" en la expresión AB, que es precisamente la matriz A, debe ser igual a la dimensión fila de la matriz B, que es la matriz "secundaria". En efecto, así acontece, pues la matriz A es de una dimensión igual a 3x2 (tres filas por dos columnas) y la matriz B es de una dimensión igual a 2x2 (dos filas por dos columnas), por consiguiente son conformables, se puede hacer la multiplicación. Calculemos, entonces, AB:

$$\underset{3x2}{A}=\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{2x2}{B}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} 2(2)+8(3) & 2(0)+8(8) \\ 3(2)+0(3) & 3(0)+0(8) \\ 5(2)+1(3) & 5(0)+1(8) \end{bmatrix}$$

$$\underset{3x2}{AB}=\begin{bmatrix} 28 & 64 \\ 6 & 0 \\ 13 & 8 \end{bmatrix}$$

Sin embargo no se puede calcular BA, debido a que la matriz B es de una dimensión igual a 2x2, es decir, dos filas por dos columnas, mientras que la A, es de 3x2, es decir, de tres filas por dos columnas, por tanto, el número de columnas de B, matriz primaria, difiere del número de filas de la matriz secundaria (A). No son conformables.

Pasemos a responder las interrogantes de b). Sí está definida BC, puesto que la matriz primaria, B, es de dimensión 2x2, y la secundaria, C, también es de dimensión 2x2, luego son conformables. Busquemos el producto BC.

$$\underset{2x2}{B}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\underset{2x2}{C}=\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$BC=\begin{bmatrix} 2(7)+0(6) & 2(2)+0(3) \\ 3(7)+8(6) & 3(2)+8(3) \end{bmatrix}$$

$$\underset{2x2}{BC}=\begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 69 & 30 \end{bmatrix}$$

Por otra parte, sí podemos calcular CB, ya que son dos matrices conformables, en virtud de que poseen la misma dimensión, es decir, 2x2.

$$CB=\begin{bmatrix} 7(2)+2(3) & 7(0)+2(8) \\ 6(2)+3(3) & 6(0)+3(8) \end{bmatrix}$$

$$CB=\begin{bmatrix} 20 & 16 \\ 21 & 24 \end{bmatrix}$$

Finalmente BC no es igual a CB, tienen la misma dimensión, pero los productos son distintos.

Tercer punto:

3. Con base a las matrices dadas en el ejemplo 9, ¿está definido el producto BA? Si es así, calcule el producto. ¿En este caso se tiene AB=BA?

Dadas:

$$\underset{3x3}{A}=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{3x3}{B}=\begin{bmatrix} 0 & -1/5 & 3/10 \\ -1 & 1/5 & 7/10 \\ 0 & 2/5 & -1/10 \end{bmatrix}$$

Mis respuestas:

Como en este caso tenemos dos matrices de igual dimensión, 3x3, la multiplicación se puede efectuar, son matrices conformables; por simple inspección, podemos ver que el producto de BA, arroja una matriz identidad.

$$BA=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como el ejemplo 9, que está en la página 55, fue resuelto dando igualmente una matriz identidad, podemos afirmar que AB=BA.

Cuarto punto:

a) Obtenga la matriz producto de:

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{3x2} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Nueva matriz:

$$AB_{3x2} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 36 & 20 \\ 16 & 3 \end{bmatrix}$$

b) Obtenga la matriz producto de:

$$C_{2x3} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D_{3x2} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nueva matriz:

$$CD_{2x2} = \begin{bmatrix} 45 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

c) Obtenga la matriz producto de:

$$E_{2x3} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\underset{3x1}{F} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Nueva matriz:

$$\underset{2x1}{EF} = \begin{bmatrix} 3X+5Y \\ 4X+2Y-7Z \end{bmatrix}$$

d) Obtenga la matriz producto de:

$$\underset{1x3}{G} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$$

$$\underset{3x2}{H} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Nueva matriz:

$$\underset{1x2}{GH} = \begin{bmatrix} 7a+c & 2b+4c \end{bmatrix}$$

CONTINUARÁ EN EL SEGUNDO VOLUMEN…