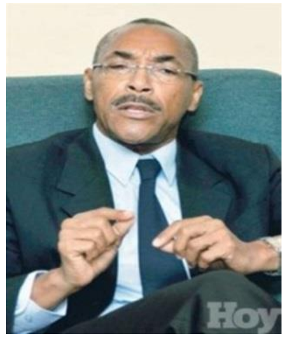
Dr. Manuel de Jesús Linares Jiménez



Obras Completas

Tomo 89

***Estudiando el libro Métodos fundamentales de economía matemática de Alpha Chiang*. Segundo Volumen. Publicada en el mes de febrero del año 2022.**

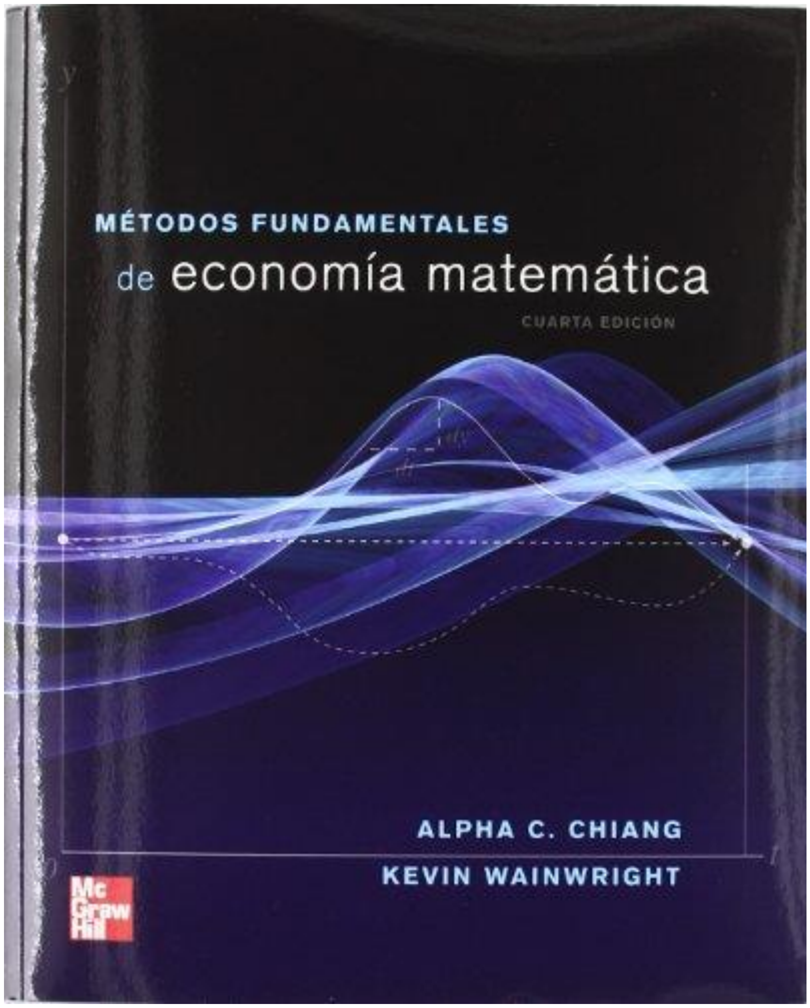
ESTUDIANDO EL LIBRO MÉTODOS FUNDAMENTALES DE ECONOMÍA MATEMÁTICA DE ALPHA CHIANG. (VOLUMEN II)

Autor: Dr. Manuel Linares
profesormanuellinares@gmail.com
829-637-9303

Preparación y difusión edición digital:
Agosto 2022.

Nueva preparación y difusión edición digital:
2023.

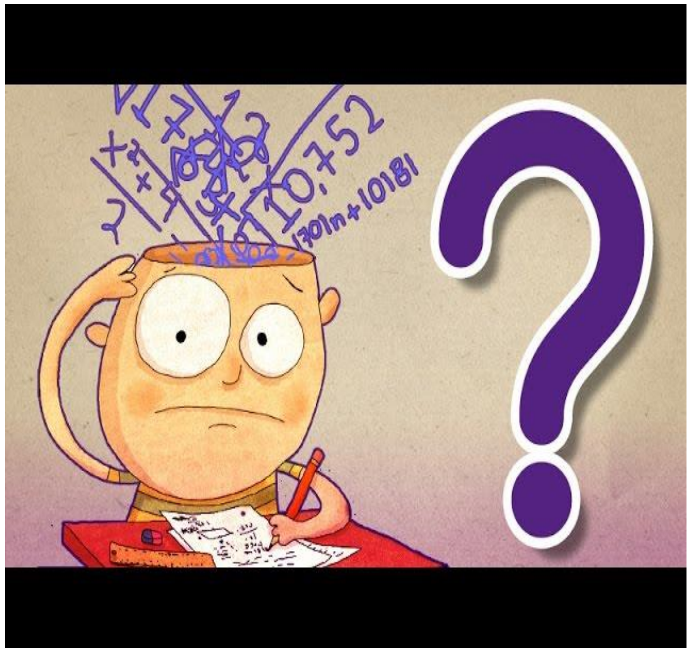
Manuel Linares es el único responsable
de las enmiendas introducidas para la edición digital.


MÉTODOS FUNDAMENTALES
de economía matemática
CUARTA EDICIÓN
ALPHA C. CHIANG
KEVIN WAINWRIGHT
Mc
Graw
Hill

DEDICATORIA

Dedicamos este libro a la UASD del Movimiento Renovador, sustituida por la UASD de la contrarreforma, hoy en pleno proceso de desintegración.

ÍNDICE


10,752
1701n+10181

PREFACIO AL TOMO 89

El tomo 89 de nuestras Obras Completas para el período 1976-2023, se encuentra constituido por la investigación *Estudiando el libro Métodos fundamentales de economía matemática de Alpha Chiang*. Segundo Volumen. Publicada en el mes de febrero del año 2022.

Respecto a la presentación del Volumen II, elaborada en fecha 30/08/2022, la acogemos y de inmediato la reproducimos:

“El 27 de agosto de 2022 concluimos el segundo volumen, en formato digital, de *Estudiando el libro Métodos Fundamentales de Economía Matemática*, de la autoría de Alpha Chiang, mi obra digital #89.

“Como se sabe mis publicaciones, en los más variados campos de la ciencia, no persiguen fines pecuniarios; simplemente constituyen una forma muy especial de esforzarme para no dejar inconcluso el proceso de formación en que permanentemente estoy inmerso, a pesar de que voy rumbo a los 73 años.

“Una publicación, como la presente, lo que hace es atestiguar el interés que tengo de dominar bien el libro de Chiang, *Métodos Fundamentales de Economía Matemática*.

“Cada capítulo que estudio me va fortaleciendo y haciéndome un mejor economista. Incluso muchas de sus enseñanzas la he aplicado con éxitos en investigaciones de carácter económico. Por tanto, no puedo menos que exhortar a mis colegas economistas a que adquieran la citada obra de Chiang y la estudien con esmero”. (FIN).

Dr. Manuel de Jesús Linares Jiménez
Enero 2023.

4.2

CONTINUACIÓN DEL EJERCICIO 4.2

Introducción

Como indicamos en el volumen I de *Estudiando el libro Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Alpha Chiang, los problemas contenidos en el ejercicio 4.2, comienzan en la página 58 y concluyen en la página 59.

Preguntas y respuestas

5. En el ejemplo 7, si se disponen las cantidades y precios como vectores columna en lugar de vectores renglón, ¿está definido Q.P? ¿Es posible expresar el costo total de compra como Q.P, Q'.P, Q.P'?

Mi respuesta:

La respuesta es afirmativa siempre y cuando se satisfaga la condición de conformabilidad, tal como se establece en el libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Alpha Chiang, en el mismo ejemplo 7, página 54.

6. Desarrolle las siguientes expresiones de suma:

a) $\sum_{i=2}^{5} x_i$

Mi respuesta:

Para responder correctamente el mandato 6) del ejercicio 4.2, es conveniente leer atentamente las orientaciones trazadas por el libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de Alpha Chiang, páginas 56-58.

a) $\sum_{i=2}^{5} x_i = x_2+x_3+x_4+x_5$

b) $\sum_{i=5}^{8} a_i x_i$

Mi respuesta:

b) $\sum_{i=5}^{8} a_i x_i = a_5x_5+a_6x_6+a_7x_7+a_8x_8$

c) $\sum_{i=1}^{4} bx_i$

Mi respuesta:

c) $\sum_{i=1}^{4} bx_i = bx_1+bx_2+bx_3+bx_4 = b(x_1+x_2+x_3+x_4)$

d) $\sum_{i=1}^{n} a_i x^{i-1}$

Mi respuesta:

d) $\sum_{i=1}^{n} a_i x^{i-1} = a_1x^{1-1}+a_2x^{2-1}+\ldots+a_nx^{n-1} = a_1x^0+a_2x+\ldots+a_nbx^{n-1} = a_1+a_2x+\ldots+a_nbx^{n-1}$

e) $\sum_{i=0}^{3} (x+i)^2$

Mi respuesta:

e) $\sum_{i=0}^{3} (x+i)^2 = (x+0)^2+(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2$

7. Reescriba lo siguiente en notación de Σ:

a) $x_1(x_1-1)+2x_2(x_2-1)+3x_3(x_3-1)$

Mi respuesta:

Para responder correctamente el mandato 7) del ejercicio 4.2, es conveniente leer atentamente las orientaciones trazadas por el libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de Alpha Chiang, páginas 56-58.

$$\sum_{i=1}^{3} a_i x_i = a_i x_i(x_i-1) + a_i x_i(x_i-1) + a_i x_i(x_i-1)$$

b) $a_2(x_3+2)+a_3(x_4+3)+a_4(x_5+4)$

Mi respuesta:

$$\sum_{i=2}^{4} a_{i(}x_{i+1}+i) = a_i x_i(x_i-1)+a_i x_i(x_i-1)+a_i x_i(x_i-1)$$


$a^n + b^n = c^n$, $n, a, b, c \in \mathbb{N}$, $n > 2$
$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) \sqrt{2}\, \varphi(2x k)$
$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(\xi / 2^j)$
$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$
$\langle \psi_{j,k} - \psi_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} - \delta_{k,m}$
©Walt Disney Co.

4.3

EJERCICIO 4.3

Introducción

El ejercicio 4.3 se encuentra ubicado en la página 65 y concluye en la 66, del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Alpha Chiang, y contiene nueve (9) problemas que debemos resolver.

Problemas y respuestas

1. Dado u'= [5 1 3], v'= [3 1-1], w'= [7 5 8] y x'= [x_1 x_2 x_3], escriba los vectores columna, u, v, w y x, y encuentre:

a) uv´; b) uw'; c) xx'; d) v'u; e) u'v; f) w'x; g) u'u; h) x'x.

Mi respuesta a):

En la página 59 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Alpha Chiang, dice que *"... los vectores se consideran como un tipo especial de matriz. Como tales, califican para la aplicación de todas las operaciones algebraicas analizadas..."* (Comillas, cursiva y puntos suspensivos son nuestros). Luego, en la página citada, nos muestra cómo se hace una multiplicación de dos vectores. Usaremos el mismo procedimiento expuesto por Chiang.

Procedamos a efectuar la multiplicación que nos indica el libro. El vector u es de orden 3x1, mientras que el vector v' es de orden 1x3; existe pues la conformabilidad ya que el número de columnas del vector u es exactamente igual al número de filas del vector v'. La multiplicación aportará una expresión matricial del orden 3x3. Hela aquí:

$$uv' = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} [\,3\ 1\ -1\,] = \begin{bmatrix} 5(3) & 5(1) & 5(-1) \\ 1(3) & 1(1) & 1(-1) \\ 3(3) & 3(1) & 3(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 9 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Mi respuesta b):

Procedamos a efectuar la multiplicación que nos indica el libro. El vector u es de orden 3x1, mientras que el vector w’ es de orden 1x3; existe pues la conformabilidad ya que el número de columnas del vector u es exactamente igual al número de filas del vector w’. La multiplicación aportará una expresión matricial del orden 3x3. Hela aquí:

$$uw' = \underset{3x1}{\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}} \underset{1x3}{[7\ 5\ 8]} = \begin{bmatrix} 5(7) & 5(5) & 5(8) \\ (7) & 1(5) & 1(8) \\ 3(7) & 3(5) & 3(8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & 25 & 40 \\ 7 & 5 & 8 \\ 21 & 15 & 24 \end{bmatrix}$$

Mi respuesta c):

Procedamos a efectuar la multiplicación que nos indica el libro (xx’). El vector x es de orden 3x1, mientras que el vector x’ es de orden 1x3; existe pues la conformabilidad ya que el número de columnas del vector x es exactamente igual al número de filas del vector x’. La multiplicación aportará una expresión matricial del orden 3x3. Hela aquí:

$$xx' = \underset{3x1}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} \underset{1x3}{[x_1\ x_2\ x_3]} = \begin{bmatrix} x_1(x_1) & x_1(x_2) & x_1(x_3) \\ x_2(x_1) & x_2(x_2) & x_2(x_3) \\ x_3(x_1) & x_3(x_2) & x_3(x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_2x_1 & x_2^2 & x_2x_3 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & x_3^2 \end{bmatrix}$$

Mi respuesta d):

Procedamos a efectuar la multiplicación que nos indica el libro (v’u). El vector v’ es de orden 1x3, mientras que el vector u es de orden 3x1; existe pues la conformabilidad ya que el número de columnas del vector v’ es exactamente igual al número de filas del vector u. La multiplicación aportará un escalar. Hela aquí:

$$v'u = \underset{1x3}{[3\ 1\ {-1}]} \underset{3x1}{\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}} = 3(5)+1(1)+(-1)(3) = 15+1-3 = 13$$

Mi respuesta e):

Procedamos a efectuar la multiplicación que nos indica el libro (u'v). El vector u' es de orden 1x3, mientras que el vector v es de orden 3x1; existe pues la conformabilidad ya que el número de columnas del vector u' es exactamente igual al número de filas del vector v. La multiplicación aportará un escalar. Hela aquí:

$$u'v = \underset{1x3}{[5\ 1\ 3]} \underset{3x1}{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}} = 5(3)+1(1)+3(-1) = 15+1-3 = 13$$

Mi respuesta f):

Procedamos a efectuar la multiplicación que nos indica el libro (w'x). El vector w' es de orden 1x3, mientras que el vector x es de orden 3x1; existe pues la conformabilidad ya que el número de columnas del vector w' es exactamente igual al número de filas del vector x.

$$w'x = \underset{1x3}{[7\ 5\ 8]} \underset{3x1}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} = 7(x_1)+5(x_2)+8(x_3) = 7x_1+5x_2+8x_3$$

Mi respuesta g):

Procedamos a efectuar la multiplicación que nos indica el libro (u'u). El vector u' es de orden 1x3, mientras que el vector u es de orden 3x1; existe pues la conformabilidad ya que el número de columnas del vector u' es exactamente igual al número de filas del vector u. La multiplicación aportará un escalar. Hela aquí:

$$u'u = \underset{1x3}{[5\ 1\ 3]} \underset{3x1}{\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}} = 5(5)+1(1)+3(3) = 25+1+9 = 35$$

Mi respuesta h):

Procedamos a efectuar la multiplicación que nos indica el libro (x'x). El vector x' es de orden 1x3, mientras que el vector x es de orden 3x1; existe pues la conformabilidad ya que el número de columnas del vector x' es exactamente igual al número de filas del vector x.

$$\underset{1x3}{x'x = [x_1\ x_2\ x_3]} \underset{3x1}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} = x_1(x_1) + x_2(x_2) + x_3(x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

2. Dados $w = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 16 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ y $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$:

a) ¿Cuáles de los siguientes están definidos: w'x, x'y', xy', y'y, zz', yw', x.y?

Mi respuesta a):

Como w'x sería el resultado de la multiplicación de un vector del orden de 1x3 por un vector del orden 2x1, el producto no está definido puesto que el número de columnas de w, que es 3, no es igual al número de filas de x, que es 2.

Como x'y' sería el resultado de la multiplicación de un vector del orden de 1x2 por un vector del orden 1x2, el producto no está definido puesto que el número de columnas de x', que es 2, no es igual al número de filas de x, que es 1.

Como xy' sería el resultado de la multiplicación de un vector del orden de 2x1 por un vector del orden 1x2, el producto está definido puesto que el número de columnas de x, que es 1, es igual al número de filas de y, que es 1, dando lugar a una matriz del orden 2x2.

Como y'y sería el resultado de la multiplicación de un vector del orden de 1x2 por un vector del orden 2x1, el producto está definido puesto que el número de columnas de y', que es 2, es igual al número de filas de y, que es 2, dando lugar a un vector del orden 1x1, o un escalar.

Como zz' sería el resultado de la multiplicación de un vector del orden de 2x1 por un vector del orden 1x2, el producto está definido puesto que el número de columnas de z, que es 1, es igual al número de filas de z', que es 1, dando lugar a una matriz del orden 2x2.

Como yw' sería el resultado de la multiplicación de un vector del orden de 2x1 por un vector del orden 1x3, el producto está definido puesto que el número de columnas de y, que es 1, es igual al número de filas de z', que es 1, dando lugar a una matriz del orden 2x3.

Como x.y sería el resultado de la multiplicación de un vector del orden de 2x1 por un vector del orden 2x1, el producto no está definido puesto que el número de columnas de x, que es 1, es distinto al número de filas de y, que es 2.

b) Encuentre los productos que están definidos.

Mi respuesta b):

$$xy' = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} [y_1\ y_2] = \begin{bmatrix} x_1(y_1) & x_1(y_2) \\ x_2(y_1) & x_2(y_2) \end{bmatrix}$$

2x1 1x2 2x2

$$y'y = [y_1\ y_2] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = y_1(y_1)+y_2(y_2) = y_1^2+y_2^2$$

1x2 2x1 1x1

$$zz' = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} [z_1\ z_2] = \begin{bmatrix} z_1(z_1) & z_1(z_2) \\ z_2(z_1) & z_2(z_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1^2 & z_1z_2 \\ z_2z_1 & z_2^2 \end{bmatrix}$$

2x1 1x2 2x2

$$yw' = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} [3\ \ 2\ \ 16] = \begin{bmatrix} y1(3) & y1(2) & y1(16) \\ y2(3) & y2(2) & y2(16) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 3 & y_1 2 & y_1 16 \\ y_2 3 & y_2 2 & y_2 16 \end{bmatrix}$$

2x1 1x3 2x3

3. Habiendo vendido n artículos de mercancía en cantidades Q1,…, Qn y precios P1,…, Pn, ¿cómo expresaría el ingreso total en (a) notación de sumatoria y (b) notación vectorial?

Mi respuesta a):

a) $\sum_{i=1}^{n} PiQi$

Mi respuesta b):

b) P.Q ó P'Q ó Q'P

4. Dados dos vectores no nulos w_1 y w_2, el ángulo θ (0º menor o igual θ menor o igual 180º) que forman, se relaciona con el producto escalar w'_1w_2 ($=w'_2w_1$) como sigue:

θ es un ángulo agudo, si y solo si w'_1w_2 es > 0.

θ es un ángulo recto, si y solo si w'_1w_2 es = 0.

θ es un ángulo obtuso, si y solo si w'_1w_2 es < 0.

Compruebe esto calculando el producto escalar de cada uno de los pares de vectores siguientes (véanse las figuras 4.2 y 4.3):

a) $w_1= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $w_2= \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

Mi respuesta a):

$w'_1w_2= [3\ \ 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = [3(1)+2(4)]= [11]$

Como w'_1w_2 es > 0, θ es un ángulo agudo.

b) $w_1= \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$

Mi respuesta b):

$w'_1w_2= [1\ \ 4] \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} = [1(-3)+4(-2)]=[-3-8]=[-11]$

Como w'_1w_2 es < 0, θ es un ángulo obtuso.

c) $w_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$

Mi respuesta c):

$w'_1 w_2 = [3\ 2] \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} = [3(-3)+2(-2)] = [-9-4] = [-13]$

Como $w'_1 w_2$ es < 0, θ es un ángulo obtuso.

d) $w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Mi respuesta d):

$w'_1 w_2 = [1\ 0\ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = [1(0)+0(2)+0(0)] = [0+0+0] = [0]$

Como $w'_1 w_2$ es$= 0$, θ es un ángulo recto.

e) $w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Mi respuesta e):

$w'_1 w_2 = [122] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = [1(1)+2(2)+2(0)] = [1+4+0] = [5]$

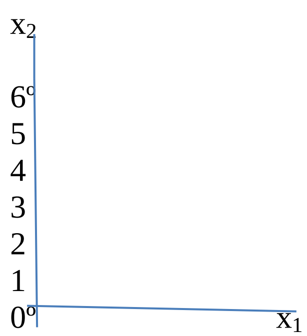
Como $w'_1 w_2 > 0$, θ es un ángulo agudo.

5. Dado $u = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, obtenga en forma gráfica lo siguiente:

a) 2v; b) u+v; c) u-v; d) v-u; e) 2u+3v; f) 4u-2v

Mi respuesta a):

$2v = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$; ahora hacemos la gráfica:

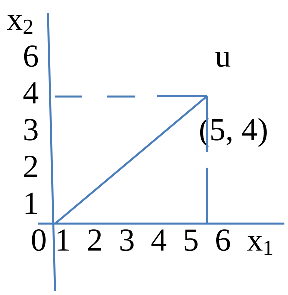


¿Qué hicimos? Simplemente encontramos los siguientes productos: 2x0= 0; y, 2x3= 6. El 0 corresponde a x_1 y el 6 a x_2.

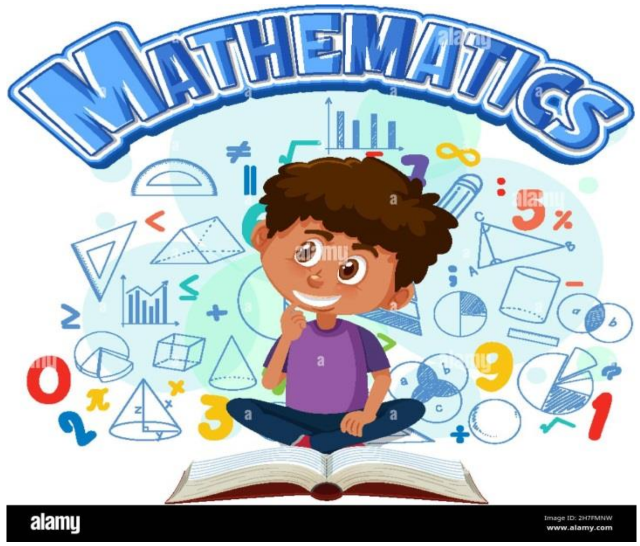
Mi respuesta b):

$$u+v=\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

¿Qué hicimos? Los dos vectores que el libro nos proporcionó en el punto 5, que son u y v, los sumamos de este modo: 5+0= 5 (primera fila) y 1+3= 4 (segunda fila). Hagamos la gráfica:



La recta que parte del origen (0) hasta el punto u se denomina radio vector.


MATHEMATICS

4.4

EJERCICIO 4.4

Introducción

Este ejercicio se inicia en la página 69 y concluye en la 70; y contiene ocho (8) problemas referidos al álgebra matricial, haciendo énfasis en las leyes conmutativa, asociativa y distributiva.

Preguntas y respuestas:

1. Dadas:

$A=\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$, compruebe que

a) (A+B)+C= A+(B+C)

b) (A+B)-C= A+(B-C)

Mi respuesta a):

¿Qué hice? Me cercioré de que las matrices implicadas en el problema fueran del mismo orden; al chequearlas en la página 69 del libro de Chiang que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, y en el mandato del punto 1), arriba explicitado, me di cuenta de que efectivamente tenían el mismo orden, en este caso, 2x2 (dos filas por dos columnas), porque en caso contrario no se podía ejecutar la suma o sustracción de matrices. Y, obviamente busqué en el libro la orientación de cómo se efectúa la suma o la sustracción de matrices. La encontré en la página 67 de *Métodos fundamentales de economía matemática*, de Chiang: *"…la suma de matrices solo requiere la suma de los elementos correspondientes de dos matrices y de que poco importa el orden en el que se suma cada par de elementos correspondientes. En este contexto, por cierto, la operación de resta A-B se puede considerar simplemente como la operación suma A+(-B) y, por tanto, es innecesaria cualquier otra explicación".* (Comillas, cursiva y puntos suspensivos son nuestros).

Las matrices dadas están identificadas por las letras A cuyas filas son 3 6 y 2 4 (orden 2x2), B cuyas filas son -1 7 y 8 4 (orden 2x2) y C, cuyas filas son 3 4 y 1 9 (orden 2x2).

Ejecuté la operación (A+B)+C= A+(B+C) y obtuve el siguiente resultado:

$$(A+B)+C=\begin{bmatrix} 5 & 17 \\ 11 & 17 \end{bmatrix} = A+(B+C)=\begin{bmatrix} 5 & 17 \\ 11 & 17 \end{bmatrix}$$

Fue comprobada la ley asociativa de la adición.

Mi respuesta b):

Ejecute la operación (A+B)-C= A+(B-C) y obtuve el siguiente resultado:

$$(A+B)-C=\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A+(B-C)=\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$$

Fue comprobada la ley asociativa de la sustracción.

3. Pruebe la ley asociativa de la multiplicación

Mi respuesta:

Para realizar este problema el libro nos aporta tres matrices; la matriz A que tiene dos filas y dos columnas y que por tanto es orden 2x2:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

La matriz B que tiene dos filas y tres columnas y que por tanto es de orden 2x3:

$$\begin{bmatrix} -8 & 0 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

La matriz C que tiene tres filas y dos columnas y que por tanto es de orden 3x2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Para verificar la citada ley, tengo que demostrar que (AB)C= A(BC).

En esta ocasión tengo que recurrir a la multiplicación de matrices, por tanto, tengo que observar que el número de columnas de la matriz primaria sea igual al número de filas de la matriz secundaria; si no ocurre esta igualdad no se puede efectuar la multiplicación.

Ya sabemos que la matriz A es del orden 2x2; sabemos también que la matriz B es del orden 2x3; como el número de columnas de la matriz primaria (matriz A) es exactamente igual al número de filas de la matriz secundaria (matriz B), debido a que es del orden 2x3, está garantizada la conformabilidad, se puede hacer la multiplicación y obtendremos una matriz AB del orden de 2x3. Procedamos:

$$\begin{matrix} 5(-8)+3(1) & 5(0)+3(3) & 5(7)+3(2) \\ 0(-8)+5(1) & 0(0)+5(3) & 0(7)+5(2) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -40+3 & 0+9 & 35+6 \\ 0+5 & 0+15 & 0+10 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} -37 & 9 & 41 \\ 5 & 15 & 10 \end{bmatrix} = \underset{2X3}{(AB)}$$

Ya obtuvimos el producto que resultó de multiplicar A por B, obteniendo una matriz del orden de 2x3, estamos preparados para encontrar el producto que habrá de resultar de multiplicar (AB)C. ¿Podemos hacer esta multiplicación? Claro, porque (AB) es una matriz del orden 2x3, matriz primaria, mientras que C, la matriz secundaria, es de orden 3x2, la conformabilidad está garantizada y obtendremos una matriz (AB)C de orden 2x2. Procedamos:

$$\begin{matrix} (-37)(1)+9(0)+41(7) & (-37)(0)+9(3)+41(1) \\ 5(1)+15(0)+10(7) & 5(0)+15(3)+10(1) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -37+0+287 & 0+27+41 \\ 5+0+\ 70 & 0+45+10 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 250 & 68 \\ 75 & 55 \end{bmatrix} = (AB)C$$

Ahora debo encontrar este producto: A(BC). Como tenemos como dato la matriz A de orden 2x2, procedemos a obtener el producto BC. ¿Podemos? Sí, debido a que la matriz B es 2x3, mientras que C es 3x2, está garantizada la conformabilidad y obtendremos una matriz de 2x2. Procedamos:

-8(1)+0(0)+7(7)   -8(0)+0(3)+7(1)

1(1)+3(0)+2(7)   1(0)+3(3)+2(1)

$$\begin{bmatrix} 41 & 7 \\ 15 & 11 \end{bmatrix} = BC$$

Estamos preparados para obtener A(BC). Siendo A una matriz 2x2 y BC una matriz 2x2, la conformabilidad está garantizada y obtendremos una matriz 2x2. Procedamos:

5(41)+3(15)   5(7)+3(11)

0(41)+5(15)   0(7)+5(11)

$$\begin{bmatrix} 250 & 68 \\ 75 & 55 \end{bmatrix} = A(BC)$$

Por tanto, (AB)C= A(BC).

4. Pruebe que para dos escalares cualesquiera g y k

a) k(A+B)= kA+kB
b) (g+k)A= gA+kA

Mi respuesta:

(a) k(A+B)= k[aij+bij]= [kaij+kbij]= [kaij]+[kbij]= k[aij]+k[bij]= kA+kB

Justificación de cada paso:

k(A+B). Aquí tenemos una suma de dos matrices; la matriz A y la matriz B; para que estas matrices de pueda sumar tienen que poseer la misma dimensión; cuando se cumple este requisito dice Chiang que las matrices son conformables para la suma; adicionalmente debemos destacar en la expresión que estamos discutiendo que una vez se produce la suma de matrices, dicha suma se debe multiplicar por un escalar.

k[aij+bij]. Ahora, la suma de las matrices A y B, dice Chiang, se define como la suma de cada par de elementos correspondientes, en otras palabras, la suma de las matrices A y B, se define como la suma no de cualquier par de elementos, sino de cada par de elementos correspondientes, puesto que si se intenta sumar el elemento correspondiente a la primera fila y la primera columna de A, con el elemento correspondiente a la segunda fila y la tercera columna de B, indudablemente la suma no aplica.

[kaij+kbij]. En este punto el escalar k se ha multiplicado por los elementos que se encuentran dentro del signo de agrupación única y exclusivamente.

[kaij]+[kbij]. La suma del escalar k multiplicado por cada uno de los elementos correspondientes que se están sumando, también se puede expresar como parte de los elementos correspondientes de las matrices A y B.

k[aij]+k[bij]. Igualmente, se puede expresar la suma de los elementos correspondientes presentándolos pre multiplicados por el escalar k.

kA+kB. Simplemente, como sabemos que aij son los elementos que integran a la matriz A y que bij son los elementos que integran a la matriz B, los hemos sustituidos por sus iguales, es decir, A y B.

5. Para (a) a (d) obtenga C= AB

(a) Para la solución de este problema el libro *Métodos fundamentales de economía matemática* de Chiang, aporta los datos siguientes:

- Una matriz A 2x2:

$$\begin{bmatrix} 12 & 14 \\ 20 & 5 \end{bmatrix}$$

Y una matriz B 2x2:

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

El producto de AB, nos dará la matriz C de 2x2.

Mi respuesta:

12(3)+14(0)   12(9)+14(2)
20(3)+ 5(0)   20(9)+5(2)

36+0   108+28
60+0   180+10

$$\begin{bmatrix} 36 & 136 \\ 60 & 190 \end{bmatrix}$$

(b) Para la solución de este problema el libro *Métodos fundamentales de economía matemática* de Chiang, aporta los datos siguientes:

Una matriz A 2x2:

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Y una matriz B de orden 2x3:

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

El producto de AB, nos dará la matriz C de orden 2x3.

Mi respuesta:

$$\begin{matrix} 4(3)+7(2) & 4(8)+7(6) & 4(5)+7(7) \\ 9(3)+1(2) & 9(8)+1(6) & 9(5)+1(7) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 12+14 & 32+42 & 20+49 \\ 27+\ 2 & 72+6 & 45+7 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 26 & 72 & 69 \\ 29 & 78 & 52 \end{bmatrix}$$

Orden 2x3.

(c) Para la solución de este problema el libro *Métodos fundamentales de economía matemática* de Chiang, aporta los datos siguientes:

Una matriz A de orden 3x2

$$\begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 2 & 9 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$$

Una matriz B de orden 2x3

$$\begin{bmatrix} 12 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

El producto AB nos dará una matriz C de orden 3x3.

Mi respuesta:

$$\begin{matrix} 7(12)+11(3) & 7(4)+11(6) & 7(5)+11(1) \\ 2(12)+9(3) & 2(4)+9(6) & 2(5)+9(1) \\ 10(12)+6(3) & 10(4)+6(6) & 10(5)+6(1) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 84+33 & 28+66 & 35+11 \\ 24+27 & 8+54 & 10+9 \\ 120+18 & 40+36 & 50+6 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 117 & 94 & 46 \\ 51 & 62 & 19 \\ 138 & 76 & 56 \end{bmatrix}$$

Orden 3x3

(d) Para la solución de este problema el libro *Métodos fundamentales de economía matemática* de Chiang, aporta los datos siguientes:

Una matriz A de orden 2x3

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 7 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

Una matriz B de orden 3x2

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 11 & 3 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

El producto AB nos dará una matriz C de orden 2x2.

Mi respuesta:

6(10)+2(11)+5(2)   6(1)+2(3)+5(9)
7(10)+9(11)+4(2)   7(1)+9(3)+4(9)

60+22+10   6+6+45
70+99+8   7+27+36

$$\begin{bmatrix} 92 & 57 \\ 177 & 70 \end{bmatrix}$$

Orden 2x2

(e) Determine (i) C= AB e (ii) D= BA, si

A= $\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

B= [3 6 -2]

Mi respuesta (i):

Como la matriz A es de orden 3x1 y la matriz B es de orden 1x3, la conformabilidad está garantizada y se puede efectuar la multiplicación. Obtendremos un producto (AB) de orden 3x3. Comencemos:

(-2)(3)   (-2)(6)   (-2)(-2)
4(3)   4(6)   4(-2)

7(3)   7(6)   7(-2)

$$\begin{bmatrix} -6 & -12 & 4 \\ 12 & 24 & -8 \\ 21 & 42 & -14 \end{bmatrix}$$

De orden 3x3.

Mi respuesta (ii):

¿Se puede obtener el producto BA? Siempre y cuando el número de columnas de la matriz primaria, que es B, sea exactamente igual al número de filas de la matriz secundaria, que es A. Y como la matriz B es de orden 1x3 y la A es de orden 3x1, efectivamente la conformabilidad está garantizada y se puede llevar a cabo la multiplicación. La multiplicación BA arrojará una matriz D de orden 1x1. Hagámosla:

[3(-2)+6(4)+(-2)(7)]= [-6+24-14]= [4], de orden 1x1, es decir, es un escalar.

4.5

EJERCICIO 4.5

Introducción

En este ejercicio, que comienza en la página 72 y concluye en la 73, Chiang plantea la necesidad de resolver cuatro (4) problemas referidos al álgebra matricial, haciendo énfasis en la matriz identidad y en la matriz nula.

Preguntas y respuestas:

Una matriz identidad, Chiang en su libro *Métodos fundamentales de economía matemática*, en la página 70, la define del modo siguiente: *"…se define como una matriz cuadrada con unos en la diagonal principal y ceros en cualquier otra parte. Se denota mediante el símbolo I, o* I_n*…"* (Comillas, cursiva y puntos suspensivos son nuestros). Por su parte, una matriz nula, en la página 71, la define así: *"…es simplemente una matriz cuyos elementos son cero…"* (Comillas, cursiva y puntos suspensivos son nuestros).

Comencemos a resolver los problemas:

En el ejercicio 4.5, página 72, antes de enunciar los cuatro (4) problemas que lo constituyen, el libro otorga tres matrices, en las que debemos apoyarnos para dar las respuestas a las interrogantes. Tenemos estas matrices:

Matriz A de orden 2x3:

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Una matriz b de orden 3x1:

$$b=\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Y una matriz x de orden 2x1:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

1. Calcule: (a) AI; (b) IA; (c) Ix; (d) x'I. Indique la dimensión de la matriz identidad utilizada en cada caso.

Mi respuesta a):

El primer producto que debemos encontrar es AI; sabemos que la matriz A es de dimensión 2x3, por tanto, la matriz identidad, que debe ser cuadrada, para garantizar la conformabilidad tendrá que ser de 3x3 y tendremos una matriz resultante del orden 2x3. Veamos:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Orden 3x3

Matriz A de orden 2x3:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

(A)(I_3)

-1(1)+5(0)+7(0)   -1(0)+5(1)+7(0)   -1(0)+5(0)+7(1)
0(1) -2(0)+4(0)   0(0)+-2(1)+4(0)   0(0)-2(0)+4(1)

Resultado:

$$(A)(\ I_3) = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Orden 2x3

Mi respuesta b):

El segundo producto que debemos calcular es IA, sabiendo que la matriz A es de dimensión 2x3, por tanto, la matriz identidad que tiene que ser cuadrada, su dimensión será de 2x2, para garantizar la conformabilidad (2x2 2x3) y de este modo hacer viable dicha multiplicación. La matriz resultante, IA, será de dimensión 2x3. Veamos:

$$I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Orden 2x2

1(-1)+0(0)   1(5)+0(-2)   1(7)+0(4)
0(-1)+1(0)   0(5)+1(-2)   0(7)+1(4)

$$IA=\begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Orden 2x3

Mi respuesta c):

El tercer producto que debemos calcular es Ix, sabiendo que la matriz x es de dimensión 2x1, por tanto, la matriz identidad que tiene que ser cuadrada, su dimensión será de 2x2, para garantizar la conformabilidad (2x2 2x1) y de este modo hacer viable dicha multiplicación. La matriz resultante, Ix, será de dimensión 2x1. Veamos:

$$I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

2x2   2x1

$1(x_1)+0(x_2)$
$0(x_1)+1(x_2)$

$$Ix=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

2x1

Mi respuesta d):

El cuarto producto que debemos calcular es x'I, sabiendo que la matriz x' es de dimensión 1x2, por tanto, la matriz identidad que tiene que ser cuadrada, su dimensión será de 2x2, para garantizar la conformabilidad (1x2 2x2) y de este modo hacer viable dicha multiplicación. La matriz resultante, x'I, será de dimensión 1x2. Veamos:

$$x'I= [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[x1(1)+x2(0)   x1(0)+x2(1)]

$x'I= [x_1 \quad x_2]$

1x2

2. Calcule (a) Ab; (b) AIb; (c) x'IA; (d) x'A. ¿La inserción de I en (b) afecta el resultado en (a)? ¿La eliminación de I en (d) afecta el resultado en (c)?

El punto 2 que nos ocupa obviamente tiene, por base las matrices que el libro que estamos estudiando nos aportó al inicio del ejercicio 4.5. Comencemos:

Mi respuesta a):

¿Se puede obtener el producto Ab? Siempre y cuando el número de columnas de la matriz primaria, que es A, sea exactamente igual al número de filas de la matriz secundaria, que es b. Y como la matriz A es de orden 2x3 y la b es de orden 3x1, efectivamente la conformabilidad está garantizada y se puede llevar a cabo la multiplicación. La multiplicación Ab arrojará una matriz de orden 2x1. Hagámosla:

-1(9)+5(6)+7(0)

0(9)+(-2)(6)+4(0)

$$\begin{bmatrix} 21 \\ -12 \end{bmatrix}$$

Orden 2x1

Mi respuesta b):

En el pedimento (b) tenemos el producto de tres matrices AIb; la primera, A, y la tercera, b, las conocemos, pero no así la matriz identidad que particularmente depende del orden de A, para garantizar la conformabilidad y de este modo realizar la operación de multiplicación. De este modo, si A es la matriz primaria y es de orden 2x3, la matriz identidad que necesariamente debe ser cuadrada, tendrá que ser de orden 3x3, el producto resultante será una matriz de orden 2x3. Procedamos. Cuando hacemos la multiplicación el resultado fue exactamente igual a la matriz A, es decir, Matriz A de orden 2x3:

$$AI=\begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

por consiguiente, al multiplicar esta matriz, o sea, AI, que es exactamente igual que A, por la matriz b, tuvimos el mismo resultado que ya obtuvimos con el producto Ab en (a), de modo que la inserción de I en (b) no afecta el resultado alcanzado en (a). He aquí el resultado final:

$$\begin{bmatrix} 21 \\ -12 \end{bmatrix} = AIb$$

Orden 2x1

La explicación de lo ocurrido la aporta Chiang, en la página 70 del libro que estamos estudiando *Métodos fundamentales de economía matemática*, cuando escribe: *"La importancia de este tipo especial de matriz radica en el hecho de que desempeña un papel similar al del número 1 en el álgebra escalar. Para cualquier número a, se tiene 1(a)= a(1)= a. de manera similar, para cualquier matriz A, se tiene IA= AI= A"*. (Comillas y cursiva son nuestras).

Mi respuesta (c):

El libro nos pide que calculemos el producto x'IA. Sabemos que x' es una matriz del orden de 1x2, por consiguiente la matriz identidad, I, tiene que ser igual orden 2x2 para poder realizar la multiplicación y obtener una matriz del orden de 1x2. De modo que x'I es igual a:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} = x'I$$

Orden 1x2

Ahora busquemos el producto x'IA, siendo x'I una matriz de orden 1x2 y la matriz A de orden 2x3, existe la conformabilidad y la operación de multiplicación se puede efectuar y habremos de obtener una matriz de orden 1x3. Hagámosla:

$[-x_1 \;\; 5x_1-2x_2 \;\; 7x_1+4x_2]$= x'IA

Mi respuesta (d):

El pedimento (d) del libro consiste en buscar el producto x'A, sabiendo que x' es una matriz de orden 1x2, mientras que la matriz A es de orden 2x3, existe la conformabilidad, la multiplicación se puede realizar, la cual dará como resultado una matriz 1x3. Mire la prueba aquí:

x'A= $[x_1(-1)+x_2(0) \;\; x_1(5)+x_2(-2) \;\; x_1(7)+x_2(4)]$= $[-x_1 \;\; 5x_1-2x_2 \;\; 7x_1+4x_2]$. En este caso, como se puede ver, la eliminación de la matriz identidad, I, en (d), tampoco produjo una modificación en el resultado que se había obtenido, ahora en (c).

Chiang reitera en la página 71 de *Métodos fundamentales de economía matemática*, lo siguiente: *"La naturaleza especial de las matrices identidad hace posible, durante* el proceso de multiplicación, *insertar o eliminar una matriz identidad sin afectar* el producto de matrices*…"* (Comillas, cursiva, en parte, y puntos suspensivos son nuestros).

3. ¿Cuál es la dimensión de la matriz nula que resulta de cada una de las siguientes operaciones?

(a) Premultiplicar A por una matriz nula de 5x2.

Mi respuesta a):

Dimensión de la matriz nula: 5x2; dimensión de A: 2x3; como existe la conformabilidad se puede producir la multiplicación, resultando una matriz nula de 5x3.

(b) Posmultiplicar A por una matriz nula de 3x6.

Mi respuesta b):

Dimensión de la matriz A: 2x3; dimensión de la matriz nula: 3x6; como como existe la conformabilidad se puede producir la multiplicación, resultando una matriz nula de 2x6.

(c) Premultiplicar b por una matriz nula de 2x3.

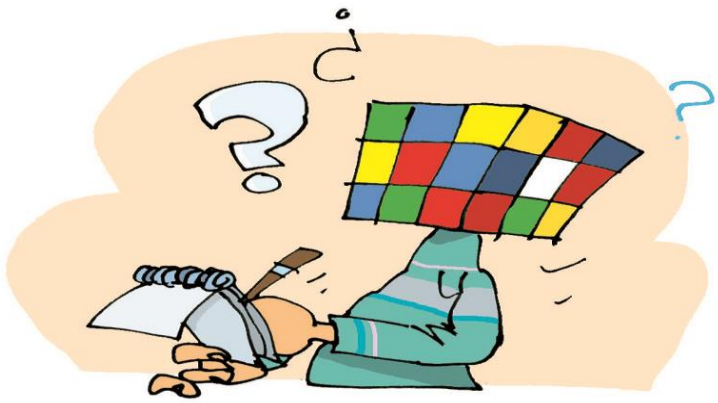
Mi respuesta c):

Dimensión de la matriz nula: 2x3; dimensión de b: 3x1; como existe la conformabilidad se puede producir la multiplicación, resultando una matriz nula de 2x1.

(d) Posmultiplicar x por una matriz nula de 1x5.

Mi respuesta d):

Dimensión de la matriz x: 2x1; dimensión de la matriz nula: 1x5; como existe la conformabilidad se puede producir la multiplicación, resultando una matriz nula de 2x5.



4.6

EJERCICIO 4.6

Introducción

El ejercicio 4.6, que se encuentra en la página 78 del libro *Métodos fundamentales de economía matemática*, consta de seis (6) problemas relacionados con los temas desarrollados desde la página 73 hasta la 78.

Preguntas y respuestas

1. Dada $A=\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$B=\begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

obtenga A’, B’ y C’.

Mi respuesta:

$A'=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$B'=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}$

$C'=\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$

2. Por medio de las matrices del problema 1, compruebe que (a) (A+B)’= A’+B’; (b) (AC)’= C’A’.

Mi respuesta:

Para proporcionar una respuesta correcta en el pedimento (a), lo primero que debemos hacer es ver si las matrices A y B poseen el mismo número de filas y columnas. Efectivamente, ambas son de orden de 2x2, por consiguiente las podemos sumar. Cuando las sumamos obtenemos el siguiente resultado:

$$A+B=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Ahora procedemos a calcular (A+B)’, es decir, la transpuesta de A+B:

$$(A+B)'=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

Calculemos A’+B’:

$$A'+B'=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

Quedó confirmado que (A+B)’= A’+B’.

Procedamos ahora a demostrar el pedimento (b), es decir, (AC)’= C’A’:

Ante todo, en el primer miembro de la ecuación vemos una multiplicación de las matrices A y C, pero para que esta operación se pueda efectuar tenemos que tomar en cuenta que el número de columnas de la matriz A sea igual al número de filas de la matriz C. en efecto la matriz A es del orden de 2x2 y la matriz C es del orden 2x3, por tanto se puede realizar la multiplicación, la cual arrojará una matriz AC del orden de 2x3. Hela aquí:

$$(AC)'=\begin{bmatrix} 0(1)+4(6) & 0(0)+4(1) & 0(9)+4(1) \\ -1(1)+3(6) & -1(0)+3(1) & -1(9)+3(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 4 & 4 \\ 17 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$, luego tendremos: $(AC)'=\begin{bmatrix} 24 & 17 \\ 4 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$

En el segundo miembro de la ecuación dada tenemos C'A', pero para que esta operación se pueda efectuar tenemos que tomar en cuenta que el número de columnas de la matriz C' sea igual al número de filas de la matriz A'. en efecto la matriz C' es del orden de 3x2 y la matriz A' es del orden 2x2, por tanto se puede realizar la multiplicación, la cual arrojará una matriz C'A' del orden de 3x2. Hela aquí:

$$C'A'= \begin{bmatrix} 1(0)+6(4) & 1(-1)+6(3) \\ 0(0)+1(4) & 0(-1)+1(3) \\ 9(0)+1(4) & 9(-1)+1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 17 \\ 4 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$$

Quedó confirmado que (AC)'= C'A'.

3. Generalice el resultado (4.11), es decir, (AB)'= B'A' al caso de un producto de tres matrices al probar que, para matrices conformables cualesquiera A, B y C, se cumple la ecuación (ABC)'= C'B'A'.

Mi respuesta:

El resultado 4.11, se encuentra en la página 74 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Alpha Chiang. Aquí leemos: *"La tercera propiedad es que la transpuesta de un producto es el producto de las transpuestas en orden inverso"*. (Comillas y parte de la cursiva son nuestras). Nuestro autor coloca en cursiva la expresión en orden inverso, con el fin de que el lector comprenda que dicha tercera propiedad de las transpuestas, en gran medida se encuentra sujeta al hecho de que el producto de las transpuestas sea colocado en orden inverso en interés de garantizar la conformabilidad de dimensión de dos productos implicados en la propiedad.

En ese sentido si nos acogemos a la sugerencia de Chiang, página 664, parte donde están las respuestas del ejercicio 4.6, que nos incumbe, en el sentido de que supongamos que D es idéntica a AB, lo que nos permite aplicar 4.11, y, por consiguiente podremos adherirnos a la explicación que en dicha página 74 aporta Chiang. Comencemos: como D es idéntica a AB, hacemos la sustitución y decimos que (DC)'= C'D', pero atendiendo a la conformabilidad. Si se establece que A sea de orden mxn y B, de orden nxp, entonces AB, es decir, D. será de mxp y (AB)', es decir, D', será de orden pxm. Para que se cumpla la igualdad, es necesario que la expresión de la derecha D'C' sea de la misma dimensión.

4. Dada las siguientes cuatro matrices, pruebe si alguna de ellas es la inversa de la otra:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 4 & -1/2 \\ -3 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Mi respuesta:

Por simple observación nos damos cuenta que la matriz F es la inversa de la matriz D, ya que al multiplicarlas alcanzamos la siguiente matriz identidad:

$$\begin{bmatrix} 1+0 & 12-12 \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Igualmente por simple observación nos damos cuenta que la matriz G es la inversa de la matriz E, ya que al multiplicarlas alcanzamos la siguiente matriz identidad:

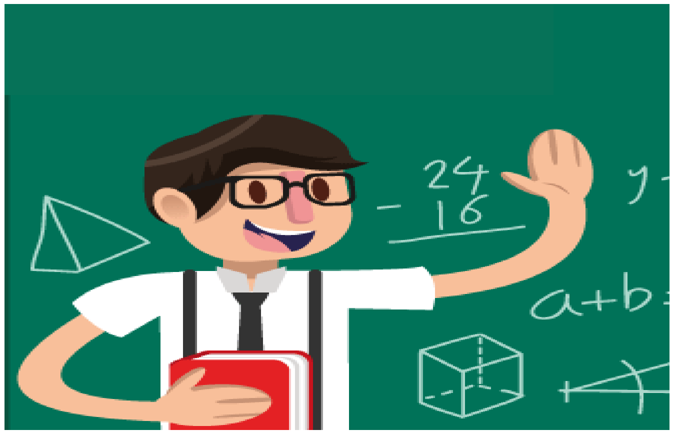
$$\begin{bmatrix} 4-3 & -1/2+1/2 \\ -24+24 & -3+4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Generalice el resultado (4.14) al probar que, para matrices no singulares conformables A, B y C, se cumple la ecuación $(ABC)^{-1}= C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

Mi respuesta

Chiang sugiere que supongamos que D es idéntica a AB y que luego apliquemos (4.14). El resultado (4.14) se encuentra en la página 76 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Alpha Chiang, el cual reza del modo siguiente: $(AB)^{-1}= B^{-1}A^{-1}$**.** Pero si adoptamos la sugerencia de Chiang, entonces ahora tendremos $(DC)^{-1}= C^{-1}D^{-1}$. En la página 76 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Alpha Chiang, leemos: *"…La segunda establece* [se refiere a la segunda propiedad de matrices inversas] *que la inversa de un producto es el producto de las inversas en orden inverso…"* (Comillas, cursiva y corchetes son nuestros). En otra ocasión continuaremos desarrollando esta respuesta.


24
- 16
a+b

5.2

EJERCICIO 5.2

.

Introducción

El ejercicio 5.2 trata principalmente del tema relacionado con determinantes de matrices, cuya explicación para resolverlos se verifican desde la página 88 hasta la página 93, y consta de siete (7) problemas, que trataremos de resolver.

Preguntas y respuestas

1. Evalúe los siguientes determinantes:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 8\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} -1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} +3\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0\text{-}1(12\text{-}6)+3(0)= 0\text{-}6+0= \text{-}6 \text{ Respuesta.}$$

b)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} -2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} +3\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 1(63\text{-}30)\text{-}2(36\text{-}15)+$$

+3(24-21)= 33-42+9= 0 Respuesta.

c)

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 8 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \text{-}2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = \text{-}2(12\text{-}12)= 0 \text{ Respuesta.}$$

d) $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 8 & 11 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 1(77-8)-8(7-16)= 69+72=$$

= 141 Respuesta.

e) $$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} c & a \\ a & b \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} b & a \\ c & b \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} b & c \\ c & a \end{vmatrix} = a(bc-a^2)-b(b^2-ac)+$$

$+c(ab-c^2)= abc-a^3-b^3+abc+abc-c^3= 3abc-a^3-b^3-c^3$ Respuesta.

2. Determine los signos que se anexarán a los menores pertinentes a fin de obtener los siguientes cofactores de un determinante: C_{13}, C_{23}, C_{33} y C_{34}.

Mi respuesta:

Partimos de que $Cij= (-1)^{ij}$

De modo que:

$C_{13} = (-1)^{1+3} = (-1)^4$, como el exponente es par el signo es positivo (+).

$C_{23} = (-1)^{2+3} = (-1)^5$, como el exponente es impar el signo es negativo (-).

$C_{33} = (-1)^{3+3} = (-1)^6$, como el exponente es par el signo es positivo (+).

$C_{41} = (-1)^{4+1} = (-1)^5$, como el exponente es impar el signo es negativo (-).

$C_{34} = (-1)^{3+4} = (-1)^7$ como el exponente es impar el signo es negativo (-).

3. Dada $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$, obtenga los menores y cofactores de los elementos a, b y f.

Mi respuesta:

El menor de a:

$$|M_a| = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$$

El menor de b:

$$|M_b| = \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$$

El menor de f:

$$|A_f| = \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$$

Cofactor de a:

$|Ca| = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$, este cofactor lleva signo positivo porque la letra a se encuentra en la primera fila y en la primera columna arrojando un exponente par (1+1= 2), por tanto el signo es +.

5.3

EJERCICIO 5.3

Introducción

El ejercicio 5.3 versa sobre los temas abordados desde la página 94 hasta la 98 y consta de ocho (8) problemas que trataremos de afrontar.

Mandato del libro:

1. Use el determinante $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -7 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ para comprobar las primeras cuatro propiedades de los determinantes.

Mi respuesta:

La primera propiedad de los determinantes queda explicada en la página 94 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Alpha Chiang: *"Propiedad I. El intercambio de renglones y columnas no afecta el valor de un determinante. En otras palabras, el determinante de una matriz A tiene el mismo valor que el de su traspuesta A', es decir, $|A| = |A'|$ ".* (Comillas y cursiva son nuestras).

Por tanto, tendremos que $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -7 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -7 & 9 \end{vmatrix}$

Calculemos el valor del primer determinante tomando como base la primera fila (primer renglón):

$= 4 \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} -1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$ = 4(9+21)-1(6-3)= 120-3= 117 Respuesta.

Calculemos el valor del segundo determinante tomando como base la segunda fila (segundo renglón):

$$= 1\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} -3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} = 1(36+3)-3(-28+2)= 39+78= 117 \text{ Respuesta.}$$

Ambos determinantes tienen por valor 117, queda comprobada la primera propiedad de los determinantes.

La segunda propiedad de los determinantes también queda explicada en la página 94 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Alpha Chiang: *"Propiedad II. El intercambio de dos renglones cualesquiera (o dos columnas cualesquiera) modificará el signo, pero no el valor numérico del determinante…"* (Comillas, cursiva y el punto suspensivo son nuestros).

Para comprobar esta segunda propiedad continuaremos usando como base el determinante que nos han dado, cuyo valor ya calculamos que es 117. Convirtamos la primera columna en segunda columna; y la segunda convirtámosla en primera columna. Usaremos la primera fila como base para calcular el valor de este determinante.

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -7 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} -1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -4(9+21)-1(3-6)= -120+3= -117 \text{ Respuesta.}$$

Efectivamente si intercambiamos la primera columna y la segunda columna, veremos que conduce a un cambio de signo en el valor del determinante, pero sin modificar su cuantía.

La tercera propiedad de los determinantes también queda explicada en la página 94 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Alpha Chiang: *"Propiedad III. La multiplicación de cualquier renglón (o columna) por un escalar cambiará el valor del determinante k veces…"* (Comillas, cursiva y el punto suspensivo son nuestros).

Para comprobar esta tercera propiedad continuaremos usando como base el determinante que nos han dado, cuyo valor ya calculamos que es 117. Multipliquemos la primera fila por 5, para observar qué ocurre con el antiguo valor del determinante. Usaremos la primera fila como base para calcular el valor de este determinante.

$$|C| = \begin{vmatrix} 20 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 20(9+21)-5(6-3)= 600-15=$$

= 585 Respuesta.

Efectivamente, si multiplicamos 5, que es el número por el que multiplicamos la primera fila del determinante, ahora por 117 que es el valor primario del determinante, obtendremos la respuesta que alcanzamos: 585. Hagámosla: 5x117= 585.

La cuarta propiedad de los determinantes queda explicada en la página 95 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Alpha Chiang: *"La suma (resta) de un múltiplo de cualquier renglón a (de) otro renglón dejará sin cambio al determinante. Lo mismo se cumple si se sustituye la palabra renglón por columna en el enunciado anterior…"* (Comillas, cursiva y el punto suspensivo son nuestros).

Verbigracia, multipliquemos la primera fila del determinante dado, por 5, y se la añadimos a la segunda fila del determinante dado y tendremos:

$$|D| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2+(5)4 & 1+(5)0 & -7-(5)1 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 22 & 1 & -12 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & -12 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} (-1) \begin{vmatrix} 22 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

= 4(9+36)-(66-3)= 180-63= 117 Respuesta. Efectivamente, el determinante no sufrió cambio en su valor.

3. ¿Cuáles propiedades de los determinantes nos permiten escribir lo siguiente?

a) $\begin{vmatrix} 9 & 18 \\ 27 & 56 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 18 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 9 & 27 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 18 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

Mi respuesta:

En el caso a) es evidente que estamos ante la propiedad IV, ya que la primera fila del primer determinante fue multiplicada por el escalar 3, es decir, 3x9= 27 y 3x18= 54. Luego, estos productos, fueron restados a la segunda columna, dando como resultado 27-27= 0 y 56-54= 2; a pesar de que la segunda fila del segundo determinante es distinta, en consecuencia, a la segunda fila del primer determinante, sus valores son iguales: cero. Mire la prueba aquí: 9x56= 504; 27x18= 486, por tanto, el valor del primer determinante es 504-486= 18; asimismo el valor del segundo determinante es: 9x2= 18; 0x18= 0, por tanto, 18-0= 18, ambos determinantes son iguales.

4. Pruebe si las siguientes matrices son no singulares:

Mi respuesta:

a) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 19 & 1 & -3 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 19 & 1 & -3 \\ 7 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 19 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} =$ 4(0+3)+(19-7)= 12+12=

= 24. La matriz es no singular.

Mi respuesta:

b) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -5 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -5 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} =$ 1(0-42)+3(24-10)= -42+42=

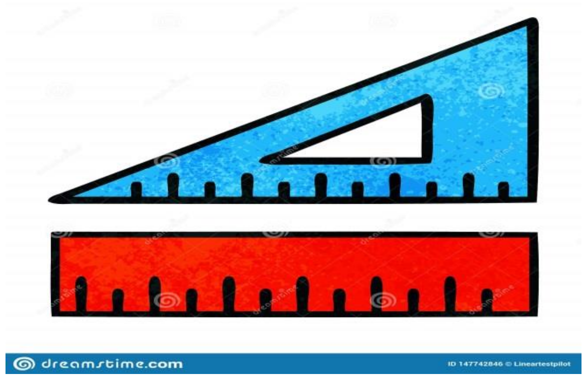
= 0. La matriz es singular.

Mi respuesta:

c) $\begin{bmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 13 & -3 & -4 \end{bmatrix}$; $\begin{vmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 13 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} +1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 13 & -4 \end{vmatrix} = 7(4+12)+1(-4-52)= 112-56=$

=56. La matriz es no singular.

Linares



5.4

EJERCICIO 5.4

Introducción

El ejercicio 5.4 se inicia en la página 102 y concluye en la 103 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática* de Alpha Chiang; y consta de siete (7) problemas que debemos resolver.

Preguntas y respuestas

1. Suponga que expandimos un determinante de cuarto orden por su tercera columna y los cofactores de los elementos de la segunda columna. ¿Cómo escribiría la suma resultante de productos de la notación de Σ? ¿Cuál será la suma de productos en la notación de Σ si la expandimos por el segundo renglón y los cofactores de los elementos del cuarto renglón?

Mi respuesta:

El libro que estamos estudiando *Métodos fundamentales de economía matemática* de Alpha Chiang, en la página 664 nos aporta las respuestas del punto 1). Helas aquí:

$$\sum_{i=1}^{4} a_{i3}|C_{i2}|$$

$$\sum_{j=1}^{4} a_{2j}|C_{4j}|$$

Hagamos una discusión para ver si las respuestas del libro están correctas. Para responder a la primera pregunta, observamos que el libro nos habla de que el determinante será expandido en base a la tercera columna y que los cofactores que vamos a calcular refiérense a los elementos de la segunda columna. Con estos datos nos trasladamos a la página 100 del libro, donde nos suministra las dos fórmulas generales que debemos usar para expandir un determinante ya sea en base a determinada columna o ya sea en base a determinada fila o renglón. Si es en base a la columna usamos la siguiente fórmula:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}|C_{ij'}| = 0$$ [desarrollo por la j-ésima columna y los cofactores de la j-ésima columna].

Efectuemos las sustituciones de lugar para dar respuesta a la primera pregunta. Como el determinante que nos han dado es de cuarto orden, n= 4 y como el determinante lo expandiremos en base a la tercera columna, en a_{ij}, j= 3; asimismo como los cofactores que vamos a calcular refiérense a los elementos de la segunda columna, en Cij, j=2. Por tanto tendremos:

$$\sum_{i=1}^{4} a_{i3}\left|C_{i2}\right|$$; la primera respuesta del libro es correcta.

Ahora, si el determinante es expandido en base a una determinada fila o renglón, usamos la siguiente fórmula:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left|C_{i'j}\right| = 0$$ [desarrollo por el i-ésima fila y los cofactores de la i-ésima fila].

Efectuemos las sustituciones de lugar para dar respuesta a la segunda pregunta. Como el determinante que nos han dado es de cuarto orden, n= 4 y como el determinante lo expandiremos en base a la segunda fila, en a_{ij}, i= 2; asimismo como los cofactores que vamos a calcular refiérense a los elementos de la cuarta fila, en $C_{i'j}$, i'= 4. Por tanto, tendremos:

$$\sum_{j=1}^{4} a_{2j}\left|C_{4j}\right| = 0$$; la segunda respuesta del libro también es correcta.

2. Obtenga la inversa de cada una de las siguientes matrices:

a) $A=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Primero, calculamos el valor del determinante:

$\left|A\right|$ = (5x1)-(0x2)= 5, como el valor del determinante es distinto de 0, la matriz A tiene inversa.

Segundo, calculamos la matriz de cofactores:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Tercero, calculamos la matriz adjunta, que es la matriz transpuesta de la matriz de cofactores:

$$\text{Adj. } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Cuarto, calculamos la matriz inversa usando la fórmula $A^{-1} = 1/|A|(\text{adj. } A)$:

$$(1/5)\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quinto, finalmente comprobamos si la respuesta es correcta, multiplicando la matriz dada por la matriz calculada; si el resultado es una matriz identidad, la respuesta es correcta.

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como obtuvimos una matriz identidad, la respuesta es correcta.

b) $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$

Primero, calculamos el valor del determinante:

$|B|$ = (-1x2)-(9x0)= -2, como el valor del determinante es distinto de 0, la matriz B tiene inversa.

Segundo, calculamos la matriz de cofactores:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -9 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Tercero, calculamos la matriz adjunta, que es la matriz transpuesta de la matriz de cofactores:

$$\text{Adj. B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -9 & -1 \end{bmatrix}$$

Cuarto, calculamos la matriz inversa usando la fórmula $B^{-1} = 1/|B|(\text{adj. B})$:

$$(-1/2)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -9 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 9/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Quinto, finalmente comprobamos si la respuesta es correcta, multiplicando la matriz dada por la matriz calculada; si el resultado es una matriz identidad, la respuesta es correcta.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 9/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como obtuvimos una matriz identidad, la respuesta es correcta.

c) $C=\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

Primero, calculamos el valor del determinante:

$|C|$ = (3x-1)-(3x7)= -3-21= -24, como el valor del determinante es distinto de 0, la matriz B tiene inversa.

Segundo, calculamos la matriz de cofactores:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$$

Tercero, calculamos la matriz adjunta, que es la matriz transpuesta de la matriz de cofactores:

$$\text{Adj. } C=\begin{bmatrix} -1 & -7 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Cuarto, calculamos la matriz inversa usando la fórmula $C^{-1}= 1/|C|(\text{Adj. } C)$:

$$-1/24\begin{bmatrix} -1 & -7 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/24 & 7/24 \\ 1/8 & -1/8 \end{bmatrix}$$

Quinto, finalmente comprobamos si la respuesta es correcta, multiplicando la matriz dada por la matriz calculada; si el resultado es una matriz identidad, la respuesta es correcta.

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/24 & 7/24 \\ 1/8 & -1/8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como obtuvimos una matriz identidad, la respuesta es correcta.

d) $D = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Primero, calculamos el valor del determinante:

$|D|$ = (7x3)-(0x6)= 21=, como el valor del determinante es distinto de 0, la matriz D tiene inversa.

Segundo, calculamos la matriz de cofactores:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$$

Tercero, calculamos la matriz adjunta, que es la matriz transpuesta de la matriz de cofactores:

$$\text{Adj. } D = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Cuarto, calculamos la matriz inversa usando la fórmula $D^{-1} = 1/|D|$ (Adj. D):

$$1/21 \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/7 & -2/7 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Quinto, finalmente comprobamos si la respuesta es correcta, multiplicando la matriz dada por la matriz calculada; si el resultado es una matriz identidad, la respuesta es correcta.

$$\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/7 & -2/7 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como obtuvimos una matriz identidad, la respuesta es correcta.

4. Obtenga la inversa de cada una de las siguientes matrices:

a) $E= \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Primero, calculamos el valor del determinante, en este caso tomaremos como base la tercera fila:

$|E| = 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} +1 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$ = 2(0-3)+1(12+14)= -6+26)= 20, matriz E tiene inversa, es no singular.

Segundo, calculamos la matriz de cofactores:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{33} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -6 \\ 2 & 2 & -4 \\ -3 & 7 & 26 \end{bmatrix}$$

Tercero, calculamos la matriz adjunta, que es la matriz transpuesta de la matriz de cofactores:

$$\text{Adj. } E = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -7 & 2 & 7 \\ -6 & -4 & 26 \end{bmatrix}$$

Cuarto, calculamos la matriz inversa usando la fórmula $E^{-1} = 1/|E|(\text{Adj. } E)$:

$$(1/20)\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -7 & 2 & 7 \\ -6 & -4 & 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/20 & 2/20 & -3/20 \\ -7/20 & 2/20 & 7/20 \\ -6/20 & -4/20 & 26/20 \end{bmatrix}$$

Quinto, finalmente comprobamos si la respuesta es correcta, multiplicando la matriz dada por la matriz calculada; si el resultado es una matriz identidad, la respuesta es correcta.

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/20 & 2/20 & -3/20 \\ -7/20 & 2/20 & 7/20 \\ -6/20 & -4/20 & 26/20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obviamente la respuesta es correcta.

b) $F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Primero, calculamos el valor del determinante, en este caso tomaremos como base la segunda columna.

$|F| = 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 1(2-12) = -10$, la matriz F tiene inversa, es no singular.

Segundo, calculamos la matriz de cofactores:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{33} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & +10 & 0 \\ 2 & -6 & -4 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tercero, calculamos la matriz adjunta, que es la matriz transpuesta de la matriz de cofactores:

$$\text{Adj. F} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 10 & -6 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Cuarto, calculamos la matriz inversa usando la fórmula $F^{-1} = 1/\,|F|\,(\text{Adj. F})$:

$$(-1/10)\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 10 & -6 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2/10 & 3/10 \\ -10/10 & 6/10 & 1/10 \\ 0 & 4/10 & -1/10 \end{bmatrix}$$

Quinto, finalmente comprobamos si la respuesta es correcta, multiplicando la matriz dada por la matriz inversa calculada; si el resultado es una matriz identidad, la respuesta es correcta.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2/10 & 3/10 \\ -10/10 & 6/10 & 1/10 \\ 0 & 4/10 & -1/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obviamente la respuesta es correcta.

c) $G= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Primero, calculamos el valor del determinante, en este caso tomaremos como base la primera fila.

$|G| = 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(0-1) = -1$, la matriz G tiene inversa, es no singular.

Segundo, calculamos la matriz de cofactores:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{33} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tercero, calculamos la matriz adjunta, que es la matriz transpuesta de la matriz de cofactores:

$$\text{Adj. } G= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Cuarto, calculamos la matriz inversa usando la fórmula $G^{-1} = 1/|G|\,(\text{Adj. } G)$:

$$(-1) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Quinto, finalmente comprobamos si la respuesta es correcta, multiplicando la matriz dada por la matriz inversa calculada; si el resultado es una matriz identidad, la respuesta es correcta.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obviamente la respuesta es correcta.

d) $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Primero, calculamos el valor del determinante, en este caso tomaremos como base la primera fila.

$|G| = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(1-0) = 1$, la matriz H tiene inversa, es no singular.

Segundo, calculamos la matriz de cofactores:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{33} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tercero, calculamos la matriz adjunta, que es la matriz transpuesta de la matriz de cofactores:

$$\text{Adj. } G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cuarto, calculamos la matriz inversa usando la fórmula $H^{-1} = 1/|H|\,(\text{Adj. } H)$:

$$(1/1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quinto, finalmente comprobamos si la respuesta es correcta, multiplicando la matriz dada por la matriz inversa calculada; si el resultado es una matriz identidad, la respuesta es correcta.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obviamente la respuesta es correcta.

5. Determine la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Primero, calculamos el valor del determinante, en este caso tomaremos como base la primera fila.

$|A| = 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} -1\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} -5\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 4(13)-1(-8-3)-5(2-9)= 52+11+35= 98$, como el determinante es diferente a cero, la matriz A tiene inversa.

Segundo, calculamos la matriz de cofactores:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 11 & -7 \\ 1 & 31 & 7 \\ 16 & -6 & 14 \end{bmatrix}$$

Tercero, calculamos la matriz adjunta, que es la matriz transpuesta de la matriz de cofactores:

$$\text{Adj. A}= \begin{bmatrix} 13 & 1 & 16 \\ 11 & 31 & -6 \\ -7 & 7 & 14 \end{bmatrix}$$

Cuarto, calculamos la matriz inversa usando la fórmula $A^{-1}= 1/|A|$ (Adj. A):

$$(1/98) \begin{bmatrix} 13 & 1 & 16 \\ 11 & 31 & -6 \\ -7 & 7 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/98 & 1/98 & 16/98 \\ 11/98 & 31/98 & -6/98 \\ -7/98 & 7/98 & 14/98 \end{bmatrix}$$

Quinto, finalmente comprobamos si la respuesta es correcta, multiplicando la matriz dada por la matriz inversa calculada; si el resultado es una matriz identidad, la respuesta es correcta.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13/98 & 1/98 & 16/98 \\ 11/98 & 31/98 & -6/98 \\ -7/98 & 7/98 & 14/98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obviamente la respuesta es correcta.

6. Resuelva la matriz Ax= d, por inversión de matriz donde:

a) 4x+3y= 28
2x+5y= 42

Para afrontar con éxito este problema, Chiang en su libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, en la página 99, dice: *"Si la matriz A en el sistema de ecuaciones lineales Ax= d es no singular, entonces existe la inversa* A^{-1} *y la solución del sistema será x*=* $A^{-1}d$*…"* (Comillas, cursiva y puntos suspensivos son nuestros). El procedimiento que vamos a utilizar es el siguiente:

Primero, conformamos la matriz A con los coeficientes de las variables de las dos ecuaciones dadas, que será del orden de dos filas por dos columnas (2x2):

$$A= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Segundo, calculamos el determinante de la matriz A, para ver si es no singular:

$|A|$ = 20-6= 14, ciertamente es no singular pues el determinante es distinto de cero.

Tercero, calculamos la matriz de cofactores:

$$A= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Cuarto, calculamos la matriz adjunta de A, que es la matriz transpuesta de la matriz de cofactores:

$$\text{Adj } A= \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} =$$

Quinto, calculamos la matriz inversa con esta fórmula A-1= 1/ $|A|$ Adj. A:

$$(1/14) \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/14 & -3/14 \\ -2/14 & 4/14 \end{bmatrix}$$

Sexto, hacemos la comprobación multiplicando la matriz dada con la matriz inversa; si el resultado es una matriz identidad la respuesta es correcta.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/14 & -3/14 \\ -2/14 & 4/14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obviamente la respuesta es correcta.

Pasemos ahora a calcular los valores de x, y, sabiendo que $d= \begin{bmatrix} 28 \\ 42 \end{bmatrix}$

por lo que usaremos esta fórmula $x^*= A^{-1}d= \begin{bmatrix} 5/14 & -3/14 \\ -2/14 & 4/14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 28 \\ 42 \end{bmatrix} =$

(5/14)(28)-(3/14)(42)= 1

Sustitución:

4(1)+3y= 28
y= (28-4)/3= 8

sustitución:

2(1)+5y=42
y= (42-2)/5= 40/5= 8, la respuesta es correcta.

b) $4x_1+ x_2- 5x_3= 8$
$-2x_1+3x_2+ x_3= 12$
$3x_1- x_2+4x_3= 5$

Primero, conformamos la matriz B con los coeficientes de las variables de las tres ecuaciones dadas, que será del orden de tres filas por tres columnas (3x3):

$$B= \begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Segundo, calculamos el determinante de la matriz B, para ver si es no singular:

$$|B| = 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} -5\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 4(12+1)-(-8-3)-5(2-9)= 52+11+35= 98$$

Segundo, calculamos la matriz de cofactores:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 11 & -7 \\ 1 & 31 & 7 \\ 16 & -6 & 14 \end{bmatrix}$$

Tercero, calculamos la matriz adjunta, que es la matriz transpuesta de la matriz de cofactores:

$$\text{Adj. } B = \begin{bmatrix} 13 & 1 & 16 \\ 11 & 31 & -6 \\ -7 & 7 & 14 \end{bmatrix}$$

Cuarto, calculamos la matriz inversa usando la fórmula $B^{-1} = 1/|B|\,(\text{Adj. } B)$:

$$(1/98)\begin{bmatrix} 13 & 1 & 16 \\ 11 & 31 & -6 \\ -7 & 7 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/98 & 1/98 & 16/98 \\ 11/98 & 31/98 & -6/98 \\ -7/98 & 7/98 & 14/98 \end{bmatrix}$$

Quinto, finalmente comprobamos si la respuesta es correcta, multiplicando la matriz dada por la matriz inversa calculada; si el resultado es una matriz identidad, la respuesta es correcta.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13/98 & 1/98 & 16/98 \\ 11/98 & 31/98 & -6/98 \\ -7/98 & 7/98 & 14/98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obviamente la respuesta es correcta.

Pasemos ahora a calcular los valores de x_1, x_2, x_3; sabiendo que:

$$d= \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

por lo que usaremos esta fórmula $x^* = A^{-1}d = \begin{bmatrix} 13/98 & 1/98 & 16/98 \\ 11/98 & 31/98 & -6/98 \\ -7/98 & 7/98 & 14/98 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$

Cálculo de x_1:

(13/98)(8)+(1/98)(12)+(16/98)(5)=
1.0612244896+0.1224489792+0.8163265305= 2

Cálculo de x_3:

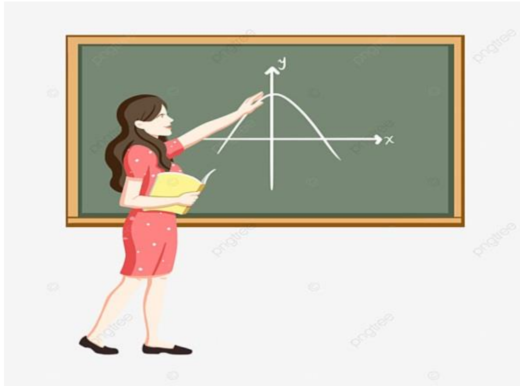
(-7/98)(8)+(7/98)(12)+14/98(5)=
-0.5714285712+0.8571428568+0.7142857145= 1

Cálculo de x_2:

$4x_1 + x_2 - 5x_3 = 8$

Sustitución:

$4(2)+x_2-5(1)= 8$
$8+x_2-5= 8$
$x_2= 8+5-8= 5$


y
x

5.5

EJERCICIO 5.5

Introducción

El ejercicio 5.5 se encuentra en la página 107 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática* de Alpha Chiang; y consta de cuatro (4) problemas que debemos resolver.

Preguntas y respuestas

1. Use la regla de Cramer para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $3x_1-2x_2= 6$
$2x_1+ x_2= 11$

Mi respuesta

Desde la página 103 hasta la 105, del libro que estamos estudiando, Chiang nos va explicando cómo usar la regla de Cramer para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

Primero, calculamos el valor del determinante que se encuentra conformado por los coeficientes de las variables que forman las ecuaciones.

Segundo, luego formamos otro determinante reemplazando los coeficientes de la primera variable, por los términos constantes y así sucesivamente.

Tercero, con los resultados obtenidos en el segundo paso, procedemos a calcular los valores de las variables endógenas.

Comencemos:

$$A= \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3+4= 7$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 11 & 1 \end{vmatrix} = 6+22= 28$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 33-12= 21$$

Ahora procedemos a calcular los valores de las incógnitas:

$x^*_1= |A_1| / |A| = 28/7= 4$

$x^*_2= |A_2| / |A| = 21/7= 3$

b) $-x_1+3x_2= -3$
$4x_1-x_2= 12$

Mi respuesta

Desde la página 103 hasta la 105, del libro que estamos estudiando, Chiang nos va explicando cómo usar la regla de Cramer para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

Primero, calculamos el valor del determinante que se encuentra conformado por los coeficientes de las variables que forman las ecuaciones.

Segundo, luego formamos otro determinante reemplazando los coeficientes de la primera variable, por los términos constantes y así sucesivamente.

Tercero, con los resultados obtenidos en el segundo paso, procedemos a calcular los valores de las variables endógenas.

Comencemos:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 1-12= -11$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 12 & -1 \end{vmatrix} = 3-36= -33$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = -12+12= 0$$

Ahora procedemos a calcular los valores de las incógnitas:

$x^*_1= |A_1|/ |A| = -33/-11= 33/11= 3$

$x^*_2= |A_2|/ |A| = 0/-11= 0$

Comprobación en la primera ecuación:

$-x_1+3x_2= -3$

$-3+3(0)= -3$

$-3= -3$

Comprobación en la segunda ecuación:

$4x_1-x_2= 12$

$4(3)-0= 12$

$12= 12$

c) $8x_1-7x_2= 9$
$x_1+ x_2= 3$

Mi respuesta

Desde la página 103 hasta la 105, del libro que estamos estudiando, Chiang nos va explicando cómo usar la regla de Cramer para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

Primero, calculamos el valor del determinante que se encuentra conformado por los coeficientes de las variables que forman las ecuaciones.

Segundo, luego formamos otro determinante reemplazando los coeficientes de la primera variable, por los términos constantes y así sucesivamente.

Tercero, con los resultados obtenidos en el segundo paso, procedemos a calcular los valores de las variables endógenas.

Comencemos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 8 & -7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 8+7= 15$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 9 & -7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 9+21= 30$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 24-9= 15$$

Ahora procedemos a calcular los valores de las incógnitas:

$x^*_1 = |A_1| / |A| = 30/15= 2$

$x^*_2 = |A_2| / |A| = 15/15= 1$

Comprobación en la primera ecuación:

$8x_1-7x_2= 9$

$8(2)-7(1)= 9$

$16-7= 9$

$9= 9$

Comprobación en la segunda ecuación:

$x_1+ x_2= 3$

$2+1= 3$

$3= 3$

d) $5x_1+9x_2= 14$
$7x_1-3x_2= 4$

Mi respuesta

Desde la página 103 hasta la 105, del libro que estamos estudiando, Chiang nos va explicando cómo usar la regla de Cramer para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

Primero, calculamos el valor del determinante que se encuentra conformado por los coeficientes de las variables que forman las ecuaciones.

Segundo, luego formamos otro determinante reemplazando los coeficientes de la primera variable, por los términos constantes y así sucesivamente.

Tercero, con los resultados obtenidos en el segundo paso, procedemos a calcular los valores de las variables endógenas.

Comencemos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -15-63= -78$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 14 & 9 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -42-36= -78$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 5 & 14 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 20-98= -78$$

Ahora procedemos a calcular los valores de las incógnitas:

$x^*_1= |A_1|/ |A| = -78/-78= 1$

$x^*_2= |A_2|/ |A| = -78/-78= 1$

Comprobación en la primera ecuación:

$5x_1+9x_2= 14$

$5(1)+9(1)= 5+9= 14$

Comprobación en la segunda ecuación:

$7x_1-3x_2= 4$

$7(1)-3(1)= 4$

$7-3= 4$

$4= 4$