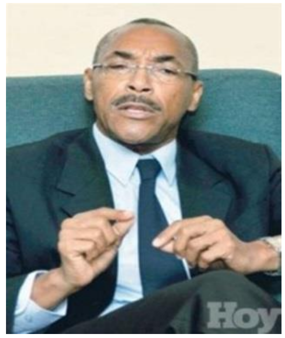
Dr. Manuel de Jesús Linares Jiménez



Obras Completas

Tomo 90

***Estudiando el libro Métodos fundamentales de economía matemática de Alpha Chiang*. Tercer Volumen. Publicada en el mes de octubre del año 2022.**

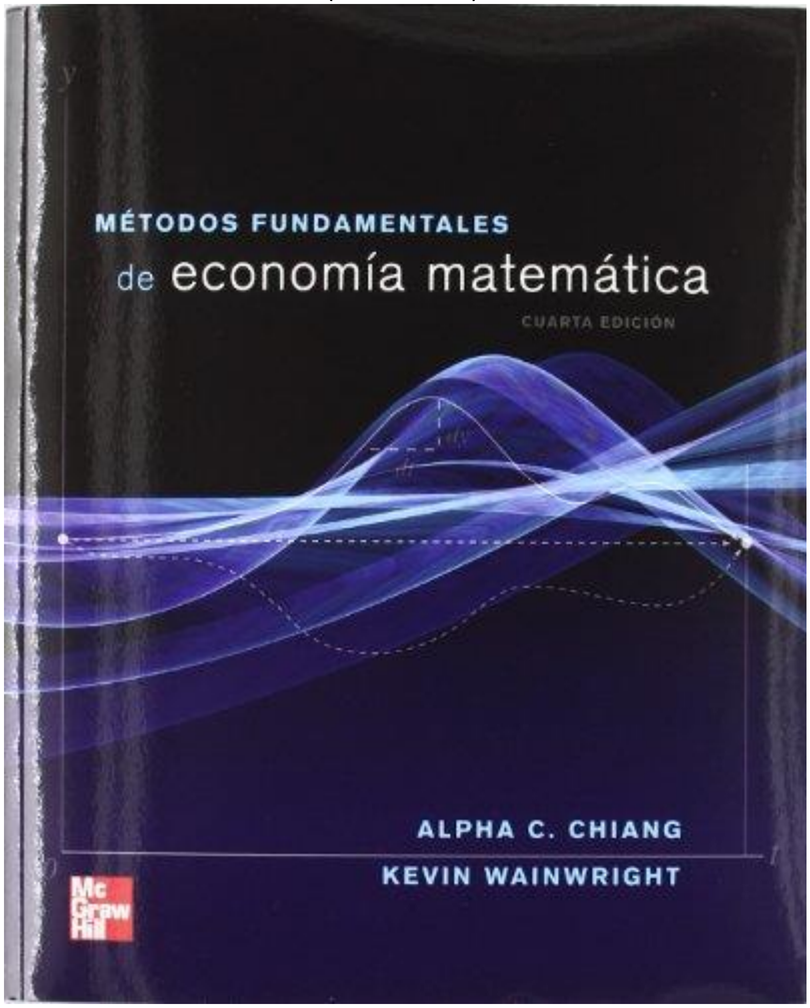
ESTUDIANDO EL LIBRO MÉTODOS FUNDAMENTALES DE ECONOMÍA MATEMÁTICA DE ALPHA CHIANG Y KEVIN WAINWRIGHT. (VOLUMEN III)

Autor: Dr. Manuel Linares
profesormanuellinares@gmail.com
829-637-9303

Preparación y difusión edición digital:
Octubre 2022.

Nueva preparación y difusión edición digital:
2023.

Estudiando el libro Métodos fundamentales de economía matemática de Chiang y Wainwright.
(Volumen III).



Dedico con particular afecto el volumen III de mis estudios del magnífico libro "MÉTODOS FUNDAMENTALES DE ECONOMÍA MATEMÁTICA" DE ALPHA CHIANG Y KEVIN WAINWRIGHT, a dos compañeros de la educación secundaria, Luis Cabral y Luis Rodríguez, que siempre se mantuvieron en la cúspide de la inteligencia y en la obtención de las máximas calificaciones en cada una de las materias del bachillerato.

ÍNDICE

¡LOOR ETERNO A LA UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO, MI TERCERA MADRE NUTRICIA DE SABIDURÍA!

PREFACIO AL TOMO 90

El tomo 90 de nuestras Obras Completas para el período 1976-2023, se encuentra constituido por la investigación *Estudiando el libro Métodos fundamentales de economía matemática de Alpha Chiang*. Tercer Volumen. Publicada en el mes de octubre del año 2022.

Respecto a la presentación de fecha 27/10/2022, relacionada con el Volumen III, hemos decidido incorporarla al prefacio. Hela aquí:

“Estamos presentando el Volumen III de los ejercicios, que he podido resolver, de la obra *Métodos fundamentales de economía matemática* de Alpha Chiang y Kevin Wainwright.

“Hasta el momento vamos bien, debido a que estamos estudiando un libro muy didáctico.

“Alpha Chiang y Kevin Wainwright se parecen mucho al gran maestro cubano Baldor, debido a que parieron una obra que para asimilar su contenido no se necesita ir a una universidad, en consecuencia, exhorto a mis colegas economistas a que adquieran y estudien el libro *Métodos fundamentales de economía matemática* de Alpha Chiang y Kevin Wainwright.

“En la resolución de ejercicios, que hemos expuesto en nuestro Volumen III, del libro citado, nos sentimos muy contentos porque ya entramos directamente en el cálculo diferencial; y, obviamente estamos aprendiendo muchísimo.

“Algunos se preguntarán, ¿por qué Linares publica, en formato digital, las resoluciones de ejercicios de la obra *Métodos fundamentales de economía matemática*? Porque me exige rigor en la solución de los mismos. Debo recordar que algo igual estoy haciendo con los tres libros del gran maestro Baldor: Geometría y Trigonometría, Álgebra, y Aritmética; libros que estoy estudiando y que ya he publicado resultados de ejercicios que he resuelto. Mi objetivo no es pecuniario, es estrictamente académico. Pero también procuramos desafiar las matemáticas hasta domesticarlas totalmente y usarlas como herramientas en el estudio del fenómeno económico.

“No estamos haciendo investigaciones matemáticas. Estamos estudiando las exposiciones que otros académicos hacen, en el campo matemático, para nutrirnos y avanzar como economista. He aquí el objeto central de mis estudios matemáticos. Por esto, no nos cansamos de congratular la obra imperecedera de académicos de la dimensión de Baldor, Chiang, Wainwright, entre otros, que nos facilita el tránsito del camino matemático, el cual es escabroso”. (FIN).

Dr. Manuel de Jesús Linares Jiménez
Enero 2023.

¡LOOR ETERNO A LA PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA MADRE Y MAESTRA, MI SEGUNDA MADRE NUTRICIA DE SABIDURÍA!

5.5

CONTINUACIÓN DEL EJERCICIO 5.5

2. Para cada uno de los sistemas de ecuaciones del problema 1, encuentre la inversa de la matriz de coeficientes y obtenga la solución por la formula $x^*= A^{-1}d$.

a) $3x_1-2x_2= \;\; 6$
$\quad 2x_1+ x_2= 11$

Mi respuesta:

Para afrontar con éxito este problema, Chiang y Wainwright, en su libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, en la página 99, nos dicen: *"Si la matriz A en el sistema de ecuaciones lineales Ax= d es no singular, entonces existe la inversa A^{-1} y la solución del sistema será $x^*= A^{-1}d$…"* (Comillas, cursiva y puntos suspensivos son nuestros). El procedimiento que vamos a utilizar es el siguiente:

Primero, conformamos la matriz A con los coeficientes de las variables de las dos ecuaciones dadas, que será del orden de dos filas por dos columnas (2x2):

$$A= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Segundo, calculamos el determinante de la matriz A, para ver si es no singular:

$|A|$ = 3+4= 7, ciertamente es no singular pues el determinante es distinto de cero.

Tercero, calculamos la matriz de cofactores:

$$A= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Cuarto, calculamos la matriz adjunta de A, que es la matriz transpuesta de la matriz de cofactores:

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} =$$

Quinto, calculamos la matriz inversa con esta fórmula $A^{-1} = 1/|A|\,Adj.\ A$:

$$(1/7)\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/7 & 2/7 \\ -2/7 & 3/7 \end{bmatrix}$$

Sexto, hacemos la comprobación multiplicando la matriz dada con la matriz inversa; si el resultado es una matriz identidad la respuesta es correcta.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/7 & -4/7 \\ -2/7 & 3/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obviamente la respuesta es correcta.

Pasemos ahora a calcular los valores de x_1, x_2, sabiendo que $d = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \end{bmatrix}$

por lo que usaremos esta fórmula $x_1^* = A^{-1}d = \begin{bmatrix} 1/7 & 2/7 \\ -2/7 & 3/7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 11 \end{bmatrix} = 4$

Asimismo, usaremos esta fórmula $x_2^* = A^{-1}d = \begin{bmatrix} 1/7 & 2/7 \\ -2/7 & 3/7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 11 \end{bmatrix} = 3$

También sustituyendo en la primera ecuación dada, podemos encontrar x_2^*:

$3(4)-2(x_2)= 6$

$x_2^*= 3$

(b) $-x_1+3x_2= -3$

$4x_1 - x_2 = 12$

Mi respuesta:

Para afrontar con éxito este problema, Chiang y Wainwright, en su libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, en la página 99, dicen: *"Si la matriz A en el sistema de ecuaciones lineales Ax= d es no singular, entonces existe la inversa* A^{-1} *y la solución del sistema será* $x^* = A^{-1}d$*…"* (Comillas, cursiva y puntos suspensivos son nuestros). El procedimiento que vamos a utilizar es el siguiente:

Primero, conformamos la matriz B con los coeficientes de las variables de las dos ecuaciones dadas, que será del orden de dos filas por dos columnas (2x2):

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Segundo, calculamos el determinante de la matriz B, para ver si es no singular:

$|B| = 1-12= -11$, ciertamente es no singular pues el determinante es distinto de cero.

Tercero, calculamos la matriz de cofactores:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Cuarto, calculamos la matriz adjunta de B, que es la matriz transpuesta de la matriz de cofactores:

$$\text{Adj } B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} =$$

Quinto, calculamos la matriz inversa con esta fórmula $B^{-1} = 1/|B|$ Adj. B:

$$(1/-11) \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/11 & 3/11 \\ 4/11 & 1/11 \end{bmatrix}$$

Sexto, hacemos la comprobación multiplicando la matriz dada con la matriz inversa; si el resultado es una matriz identidad la respuesta es correcta.

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/11 & 3/11 \\ 4/11 & 1/11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obviamente la respuesta es correcta.

Pasemos ahora a calcular los valores de x_1, x_2, sabiendo que $d = \begin{bmatrix} -3 \\ 12 \end{bmatrix}$

por lo que usaremos esta fórmula $x_1^* = B^{-1}d = \begin{bmatrix} 1/11 & 3/11 \\ 4/11 & 1/11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 12 \end{bmatrix} = 3$

Asimismo, usaremos esta fórmula $x_1^* = B^{-1}d = \begin{bmatrix} 1/11 & 3/11 \\ 4/11 & 1/11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 12 \end{bmatrix} = 0$

También podemos obtener x_2^* sustituyendo x_1^*, por su valor, en la primera ecuación dada:

$-3+3x_2= -3$

$x_2^*= 0$

© $8x_1-7x_2= 9$
$x_1+ x_2= 3$

Mi respuesta:

Para afrontar con éxito este problema, Chiang y Wainwright, en su libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, en la página 99, dicen: *"Si la matriz A en el sistema de ecuaciones lineales Ax= d es no singular, entonces existe la inversa A^{-1} y la solución del sistema será $x^*= A^{-1}d$…"* (Comillas, cursiva y puntos suspensivos son nuestros). El procedimiento que vamos a utilizar es el siguiente:

Primero, conformamos la matriz C con los coeficientes de las variables de las dos ecuaciones dadas, que será del orden de dos filas por dos columnas (2x2):

$$C=\begin{bmatrix} 8 & -7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Segundo, calculamos el determinante de la matriz C, para ver si es no singular:

$|C| = 8+7= 15$, ciertamente es no singular pues el determinante es distinto de cero.

Tercero, calculamos la matriz de cofactores:

$$C=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Cuarto, calculamos la matriz adjunta de C que es la matriz transpuesta de la matriz de cofactores:

$$\text{Adj } C=\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$$

Quinto, calculamos la matriz inversa con esta fórmula $C^{-1}= 1/|C|$ Adj. C:

$$(1/15)\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/15 & 7/15 \\ -1/15 & 8/15 \end{bmatrix}$$

Sexto, hacemos la comprobación multiplicando la matriz dada con la matriz inversa; si el resultado es una matriz identidad la respuesta es correcta.

$$\begin{bmatrix} 8 & -7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/15 & 7/15 \\ -1/15 & 8/15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obviamente la respuesta es correcta.

Pasemos ahora a calcular los valores de x_1, x_2, sabiendo que $d=\begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$

por lo que usaremos esta fórmula $x_1^*= C^{-1}d= \begin{bmatrix} 1/15 & 7/15 \\ -1/15 & 8/15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix} = 2$

Asimismo, usaremos esta fórmula $x_2^*= C^{-1}d= \begin{bmatrix} 1/15 & 7/15 \\ -1/15 & 8/15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix} = 1$

También podemos calcular x_2^* sustituyendo x_1^*, por su valor, en la primera ecuación dada:

$8(2)-7x_2= 9$

$16-7x_2= 9$

$x_2^*= 1$

(d) $5x_1+9x_2= 14$
$7x_1 -3x_2= 4$

Mi respuesta:

Para afrontar con éxito este problema, Chiang y Wainwright, en su libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, en la página 99, dicen: *"Si la matriz A en el sistema de ecuaciones lineales Ax= d es no singular, entonces existe la inversa A^{-1} y la solución del sistema será $x^*= A^{-1}d$…"* (Comillas, cursiva y puntos suspensivos son nuestros). El procedimiento que vamos a utilizar es el siguiente:

Primero, conformamos la matriz C con los coeficientes de las variables de las dos ecuaciones dadas, que será del orden de dos filas por dos columnas (2x2):

$D= \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$

Segundo, calculamos el determinante de la matriz D, para ver si es no singular:

$|D|$ = -15-63= -78, ciertamente es no singular pues el determinante es distinto de cero.

Tercero, calculamos la matriz de cofactores:

$$C= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -7 \\ -9 & 5 \end{bmatrix}$$

Cuarto, calculamos la matriz adjunta de C que es la matriz transpuesta de la matriz de cofactores:

$$\text{Adj. } C= \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

Quinto, calculamos la matriz inversa con esta fórmula $D^{-1}= 1/|D|$ Adj. C:

$$(1/-78)\begin{bmatrix} -3 & -9 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/78 & 9/78 \\ 7/78 & 5/-78 \end{bmatrix}$$

Sexto, hacemos la comprobación multiplicando la matriz dada con la matriz inversa; si el resultado es una matriz identidad la respuesta es correcta.

$$\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/78 & 9/78 \\ 7/78 & 5/-78 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obviamente la respuesta es correcta.

Pasemos ahora a calcular los valores de x_1, x_2, sabiendo que $d= \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \end{bmatrix}$

por lo que usaremos esta fórmula $x_1^*= D^{-1}d= \begin{bmatrix} 3/78 & 9/78 \\ 7/78 & 5/-78 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \end{bmatrix} = 1$

Asimismo, usaremos esta fórmula $x_2^*= D^{-1}d= \begin{bmatrix} 3/78 & 9/78 \\ 7/78 & 5/-78 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \end{bmatrix} = 1$

También podemos calcular x_2* sustituyendo x_1*, por su valor, en la primera ecuación dada:

$5(1)+9x_2= 14$

$5+9x_2= 14$

$x_2^*= (14-5)/9= 1$

3. Utilice la regla de Cramer para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

(a)
$$\begin{aligned} 8x_1 - x_2 \quad &= 16 \\ 2x_2+5x_3 &= 5 \\ 2x_1 \quad +3x_3 &= 7 \end{aligned}$$

Primero, calculamos el determinante de los coeficientes del sistema de ecuaciones lineales dado:

$$|A| = \begin{vmatrix} 8 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8(6)-10= 38$$

Segundo, calculamos A_1:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 16 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 5 \\ 7 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 16 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 16(6)+(-20)= 76$$

Tercero, calculamos A_2:

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 8 & 16 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} -16 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8(-20)-16(-10)= -160+160= 0$$

Cuarto, calculamos A_3:

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 8 & -1 & 16 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 8 & 16 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} -5 \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2(56-32)-5(2)= 48-10= 38$$

Quinto, calculamos x_1:

$x^*_1 = |A_1| / |A| = 76/38 = 2$

Sexto, calculaos x_2:

$x^*_2 = |A_2| / |A| = 0/38 = 0$

Séptimo, calculamos x_3:

$x^*_3 = |A_3| / |A| = 38/38 = 1$

Comprobación:

$8x_1 \;\; -x_2 \qquad = 16$
$8(2) \;\; -(0) \qquad = 16$

$2x_2+5x_3 = \;\; 5$
$2(0)+5(1) = 5$

$2x_1 \qquad +3x_3 = \;\; 7$
$2(2) \qquad +3(1) = \;\; 7$

Las respuestas son correctas.

b) $-x_1+3x_2+2x_3 = 24$
$x_1 \qquad + \; x_3 = \;\; 6$
$5x_2 - \; x_3 = \;\; 8$

Primero, calculamos el determinante de los coeficientes del sistema de ecuaciones lineales dado:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \quad -1 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -1(-3-10) -1(-5) = 13+5 = 18$$

Segundo, calculamos A_1:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 24 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \\ 8 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 24 & 3 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = -6(-3-10)-1(120-24)= 78-96= -18$$

Tercero, calculamos A_2:

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -1 & 24 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -8 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} -1 \begin{vmatrix} -1 & 24 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -8(-1-2)-1(-6-24)= 24+30= 54$$

Cuarto, calculamos A_3:

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 24 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} -1 & 24 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} +8 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5(-6-24)+8(-3)= 150-24= 126$$

Quinto, calculamos x_1:

$x^*_1 = |A_1| / |A| = -18/18 = -1$

Sexto, calculamos x_2:

$x^*_2 = |A_2| / |A| = 54/18 = 3$

Séptimo, calculamos x_3:

$x^*_3 = |A_3| / |A| = 126/18 = 7$

Comprobación:

$$–x_1+3x_2+2x_3= 24$$
$$-(-1)+3(3)+2(7)= 24$$

$$x_1 \quad + x_3= \quad 6$$
$$(-1) \quad +7= \quad 6$$

$$5x_2 - x_3 = 8$$
$$5(3)-(7) = 8$$

Las respuestas son correctas.

c) $4x+3y-2z= 1$
$x+2y \quad = 6$
$3x \quad +z= 4$

Primero, calculamos el determinante de los coeficientes del sistema de ecuaciones lineales dado:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} +2\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1(3) +2(4+6)= -3+20+5= 17$$

Segundo, calculamos A_1:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 6 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} +1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 4(4)+1(2-18)= 16-16= 0$$

Tercero, calculamos A_2:

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} +6\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1(1+8)+6(4+6)= -1(9)+6(10)= -9+60= 51$$

Cuarto, calculamos A_3:

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} +4\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3(18-2)+4(8-3)= 3(16)+4(5)= 68$$

Quinto, calculamos x*:

$x^* = A_1 / \;\; A = 0/17 = 0$

Sexto, calculaos y^*:

$y^* = |A_2| / |A| = 51/17 = 3$

Séptimo, calculamos z^*:

$z^* = |A_3| / |A| = 68/17 = 4$

Comprobación:

$4x+3y-2z = 1$
$4(0)+3(3)-2(4) = 1$
$0 \quad +9 \qquad -8 = 1$

$x+2y \quad = 6$
$0+2(3) \;\; = 6$
$\quad 6 \quad = 6$

$3x \qquad +z = 4$
$3(0) \quad +4 = 4$
$\qquad 4 = 4$

Las respuestas son correctas.

d) $-x+y+z = a$
$\quad x-y+z = b$
$\quad x+y-z = c$

Primero, calculamos el determinante de los coeficientes del sistema de ecuaciones lineales dado:

$$|D| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \; -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \; +1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1(1-1)-1(-1-1)+1(1+1) = -1(0)-1(-2)+1(2) = 2+2 = 4$$

Segundo, calculamos A_1:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & -1 & 1 \\ c & 1 & -1 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} -1\begin{vmatrix} b & 1 \\ c & -1 \end{vmatrix} +1\begin{vmatrix} b & -1 \\ c & 1 \end{vmatrix} = a(1-1)-1(-b-c)+1(b+c)= 0+b+c+b+c= 2b+2c$$

Tercero, calculamos A_2:

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & -1 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} b & 1 \\ c & -1 \end{vmatrix} -a\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} +1\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix} = -1(-b-c)-a(-1-1+1(c-b)= b+c+a+a+c-b= 2a+2c$$

Cuarto, calculamos A_3:

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & a \\ 1 & -1 & b \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix} -1\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix} +a\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1(-c-b)-1(c-b)+a(1+1)= 2a+2b$$

Quinto, calculamos x*:

$x^* = |A_1| / |A| = 2b+2c/4= b+c/2$

Sexto, calculamos y*:

$y^* = |A_2| / |A| = 2c+2^{a}/4= a+c/2$

Séptimo, calculamos z*:

$z^* = |A_3| / |A| = 2^{a}+2b/4= a+b/2$

Comprobación:

-x+y+z= a
-(b+c/2)+(a+c/2)+(a+b/2)= a

$(-b-c+a+c+a+b)/2= a$
$2^a/2= a$
$a= a$

$x-y+z= b$
$(b+c/2)-(a+c/2)+(a+b/2)= b$
$(b+c-a-c+a+b)/2= b$
$2b/2= b$
$b= b$

$x+y-z= c$
$(b+c/2)+(a+c/2)-(a+b/2)= c$
$(b+c+a+c-a-b)/2)= c$
$2c/2= c$
$c= c$

Las respuestas son correctas.

5.6

EJERCICIO 5.6

Introducción

El ejercicio 5.6 se encuentra ubicado en la página 111 y concluye en la 112, del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de Chiang y Wainwright, y contiene nueve (9) problemas que debemos resolver.

Problemas y respuestas

1. Resuelva el modelo de ingreso nacional del ejercicio 3.5-1:

(a) Por inversión de matriz
(Enumere las variables en el orden Y, C, T).

(b) Por la regla de Cramer

Mi respuesta:

El modelo de ingreso nacional del ejercicio 3.5-1, se encuentra en la página 47 del libro *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright, el cual consta de las siguientes ecuaciones:

$Y= C+I_0+G_0$

$C= a+b(Y-T)$ $(a> 0, \quad 0< b< 1)$ [T: impuestos]

$T= d+tY$ $(d> 0, \quad 0< t< 1)$ [t: tasa de impuesto sobre la renta]

Solución del modelo por inversión de matriz:

Primero, Chiang y Wainwright, en su libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, página 101, nos indican los pasos que debemos dar para obtener la inversión de una matriz cuadrada*: "(1) halle* $|A|$ *[debemos proceder con los pasos posteriores si y sólo si* $|A|$ *no es igual a 0, porque si* $|A|$ *es igual a 0 la inversa…estará indefinida]; (2) determine los cofactores de los elementos de A y ordénelos como una matriz* $C= [\,|C_{ij}|\,]$*; (3) tome la transpuesta de C para obtener la adj A, y (4) divida adj A entre el determinante* $|A|$*. El resultado será la inversa deseada* A^{-1}. (Comillas, cursiva y puntos suspensivos son nuestros).

Segundo, procedemos a calcular el determinante de la matriz A, que es una matriz de coeficientes. Esta matriz la obtenemos pasando al primer miembro de cada ecuación dada, los coeficientes con su respectiva variable y luego extraemos los coeficientes para formar la matriz que buscamos. Naturalmente, dejamos en el segundo miembro los términos constantes:

$Y - C = I_0 + G_0$

$-bY + C + bT = a$

$-tY + T = d$

Matriz de coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -b & 1 & b \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de terminos constantes:

$$\begin{bmatrix} I_0+G_0 \\ a \\ d \end{bmatrix}$$

Cálculo del determinante de la matriz de coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -b & 1 & b \\ -t & 0 & 1 \end{vmatrix} = -b \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -t & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{vmatrix} = -b(-t)+1(1-b)= bt-b+1= b(t-1)+1=1-b+bt$$

Cálculo de la matriz de cofactores:

$$\begin{bmatrix} C11 & C12 & C13 \\ C21 & C22 & C23 \\ C31 & C32 & C33 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -b & b \\ -t & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -b & 1 \\ -t & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -t & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & b \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -b & b \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & b-bt & t \\ 1 & 1 & t \\ -b & -b & 1-b \end{bmatrix}$$

Cálculo de la matriz adj. de A, que es la transposición de la matriz de cofactores:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -b \\ b-bt & 1 & -b \\ t & t & 1-b \end{bmatrix}$$

Cálculo de la matriz inversa:

$A^{-1}= 1/ |A|$ Adj A

$$= 1/\ 1\text{-}b\text{+}bt \begin{bmatrix} 1 & 1 & -b \\ b-bt & 1 & -b \\ t & t & 1-b \end{bmatrix} =$$

Ahora podemos decir que:

$Y^{*}= A^{-1}d$

Donde: A^{-1}= matriz inversa; d= matriz de términos constantes.

$$= 1/\ 1\text{-}b\text{+}bt \underset{3x3}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -b \\ b-bt & 1 & -b \\ t & t & 1-b \end{bmatrix}} \underset{3x1}{\begin{bmatrix} I_0+G_0 \\ a \\ d \end{bmatrix}} = (I_0+G_0+a-bd)/1-b+bt$$

También podemos decir que:

$C^{*}= A^{-1}d$

Donde: A^{-1}= matriz inversa; d= matriz de términos constantes.

$$= 1/\ 1\text{-}b\text{+}bt \underset{3x3}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -b \\ b-bt & 1 & -b \\ t & t & 1-b \end{bmatrix}} \underset{3x1}{\begin{bmatrix} I_0+G_0 \\ a \\ d \end{bmatrix}} = (b-bt)(I_0+G_0)+a-bd)/1-b+bt$$

Finalmente también podemos decir que:

$T^* = A^{-1}d$

Donde: A^{-1}= matriz inversa; d= matriz de términos constantes.

$$= 1/\ 1-b+bt \underset{3x3}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -b \\ b-bt & 1 & -b \\ t & t & 1-b \end{bmatrix}} \underset{3x1}{\begin{bmatrix} I_0+G_0 \\ a \\ d \end{bmatrix}} = (b-bt)(I_0+G_0)+a-bd)/1-b+bt$$

Resumiendo (enumeración de las variables en el orden Y, C y T):

$$\begin{bmatrix} Y^* \\ C^* \\ T^* \end{bmatrix} = A^{-1}d$$

Donde: Y*= ingreso nacional; C*= consumo agregado; T*= impuestos; A^{-1}; = matriz inversa; d= matriz de términos constantes.

$$\begin{bmatrix} Y^* \\ C^* \\ T^* \end{bmatrix} = 1/1-b+bt \underset{3x3}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -b \\ b-bt & 1 & -b \\ t & t & 1-b \end{bmatrix}} \underset{3x1}{\begin{bmatrix} I_0+G_0 \\ a \\ d \end{bmatrix}} = \underset{3x1}{\begin{bmatrix} (I_0+G_0+a-bd)/1-b+bt \\ (b-bt)(I_0+G_0)+a-bd)/1-b+bt \\ (b-bt)(I_0+G_0)+a-bd)/1-b+bt \end{bmatrix}}$$

Solución del modelo por la regla de Cramer:

Primero, calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -b & 1 & b \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -b & 1 & b \\ -t & 0 & 1 \end{vmatrix} = -b \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -t & 0 \end{vmatrix} +1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{vmatrix} = -b(-t)+1(1-b)= bt-b+1= b(t-1)+1=1-b+bt$$

Segundo, calculamos A_1:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} I_0+G_0 & -1 & 0 \\ a & 1 & b \\ d & 0 & 1 \end{vmatrix} = -b \begin{vmatrix} I_0+G_0 & -1 \\ d & 0 \end{vmatrix} +1 \begin{vmatrix} I_0+G_0 & -1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = -b(+d)+1(I_0+G_0+a)= -bd+I_0+G_0+a=$$

$= I_0+G_0-bd+a$

Tercero, calculamos A_2:

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & I_0+G_0 & 0 \\ -b & a & b \\ -t & d & 1 \end{vmatrix} = -b \begin{vmatrix} 1 & I_0+G_0 \\ -t & d \end{vmatrix} +1 \begin{vmatrix} 1 & I_0+G_0 \\ -b & a \end{vmatrix} = -b[d+t(I_0+G_0)]+1(a+b(I_0+G_0)]$$

Cuarto, calculamos A_3:

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & I_0+G_0 \\ -b & 1 & a \\ -t & 0 & d \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -b & a \\ -t & d \end{vmatrix} +1 \begin{vmatrix} 1 & I_0+G_0 \\ -t & d \end{vmatrix} = 1(-bd+at)+1[(d+t(I_0+G_0)]= -bd+at+d+t(I_0+G_0)$$

Quinto, ahora procedemos a calcular a Y*, haciendo esta operación: $Y^* = A_1 / |A|$

$=I_0+G_0-bd+a/1-b+bt$

Sexto, ahora procedemos a calcular a C*, haciendo esta operación: $C^* = A_2 / |A|$

$= -b[d+t(I_0+G_0)]+1(a+b(I_0+G_0)]/1-b+bt$

Séptimo, ahora procedemos a calcular a T*, haciendo esta operación: T*= A_3 / $|A|$

$= -bd+at+d+t(I_0+G_0)/1-b+bt$

2. Resuelva el modelo de ingreso nacional del ejercicio 3.5-2:

(a) Por inversión de matriz
(Enumere las variables en el orden Y, C, G).

(b) Por la regla de Cramer

Mi respuesta:

El modelo de ingreso nacional del ejercicio 3.5-2, se encuentra en la página 47 del libro *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright, el cual consta de las siguientes ecuaciones:

$Y= C+I_0+G$

$C= a+b(Y-T_0)$ (a> 0, 0< b< 1)

$G= gY$ 0< g< 1)

Solución del modelo por inversión de matriz:

Primero, Chiang y Wainwright, en su libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, página 101, nos indican los pasos que debemos dar para obtener la inversión de una matriz cuadrada*: "(1) halle* $|A|$ *[debemos proceder con los pasos posteriores si y sólo* $|si|$ *A no es igual a 0, porque si* $|A|$ *es igual a 0 la inversa…estará indefinida]; (2) determine los cofactores de los elementos de A y ordénelos como una matriz C= [* $|C_{ij}|$ *]; (3) tome la transpuesta de C para obtener la adj A, y (4) divida adj A entre el determinante* $|A|$ *. El resultado será la inversa deseada* A^{-1}. (Comillas, cursiva y puntos suspensivos son nuestros).

Segundo, procedemos a calcular el determinante de la matriz A, que es una matriz de coeficientes. Esta matriz la obtenemos pasando al primer miembro de cada ecuación dada, los coeficientes con su respectiva variable y luego extraemos los coeficientes para formar la matriz que buscamos. Naturalmente, dejamos en el segundo miembro los términos constantes:

$Y \quad -C \quad -G= I_0$

$-bY + C \qquad = a - bT_0$

$-gY \qquad + G = 0$

Matriz de coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -b & 1 & 0 \\ -g & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de términos constantes:

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ a-bT_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cálculo del determinante de la matriz de coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -b & 1 & 0 \\ -g & 0 & 1 \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -g & 1 \end{vmatrix} = b(-1)+1(1-g) = -b+1-g = 1-b-g$$

Cálculo de la matriz de cofactores:

$$\begin{bmatrix} C11 & C12 & C13 \\ C21 & C22 & C23 \\ C31 & C32 & C33 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -b & 0 \\ -g & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -b & 1 \\ -g & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -g & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -g & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -b & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & b & g \\ 1 & 1-g & g \\ 1 & b & 1-b \end{bmatrix}$$

Cálculo de la matriz adj. de A, que es la transposición de la matriz de cofactores:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 1-g & b \\ g & g & 1-b \end{bmatrix}$$

Cálculo de la matriz inversa:

$A^{-1} = 1/ |A| \text{Adj } A$

$$= 1/1-b-g \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 1-g & b \\ g & g & 1-b \end{bmatrix}$$

Ahora podemos decir que:

$Y^* = A^{-1}d$

Donde: A^{-1}= matriz inversa; d= matriz de términos constantes.

$$= 1/\ 1\text{-}b\text{-}g \underset{3x3}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 1-g & b \\ g & g & 1-b \end{bmatrix}} \underset{3x1}{\begin{bmatrix} I_0 \\ a-bT_0 \\ 0 \end{bmatrix}} = (I_0+a-bT_0/1-b-g$$

También podemos decir que:

$C^* = A^{-1}d$

Donde: A^{-1}= matriz inversa; d= matriz de términos constantes.

$$= 1/1\text{-}b\text{-}g \underset{3x3}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 1-g & b \\ g & g & 1-b \end{bmatrix}} \underset{3x1}{\begin{bmatrix} I_0 \\ a-bT_0 \\ 0 \end{bmatrix}} = (bI_0+(1-g)(a-bT_0)/\ 1-b-g$$

Finalmente, también podemos decir que:

$G^* = A^{-1}d$

Donde: A^{-1}= matriz inversa; d= matriz de términos constantes.

$$= 1/1\text{-}b\text{-}g \underset{3x3}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -b \\ b & 1-g & -b \\ g & g & 1-b \end{bmatrix}} \underset{3x1}{\begin{bmatrix} I_0 \\ a-bT_0 \\ 0 \end{bmatrix}} = gI_0+g(a-bT_0)/\ 1-b-g$$

Resumiendo (enumeración de las variables en el orden Y, C y G):

$$\begin{bmatrix} Y^* \\ C^* \\ G^* \end{bmatrix} = A^{-1}d$$

Donde: Y*= ingreso nacional; C*= consumo agregado; G*= gasto agregado; A^{-1}; = matriz inversa; d= matriz de términos constantes.

$$\begin{bmatrix} Y^* \\ C^* \\ G^* \end{bmatrix} = 1/1\text{-}b\text{-}g \underset{3x3}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -b \\ b & 1-g & -b \\ g & g & 1-b \end{bmatrix}} \underset{3x1}{\begin{bmatrix} I_0 \\ a-bT_0 \\ 0 \end{bmatrix}} = \underset{3x1}{\begin{bmatrix} (I_0+a-bT_0/1-b-g \\ (bI_0+(1-g)(a-bT_0)/\ 1-b-g \\ gI_0+g(a-bT_0)/\ 1-b-g \end{bmatrix}}$$

Solución del modelo por la regla de Cramer:

Primero, calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

Cálculo del determinante de la matriz de coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -b & 1 & 0 \\ -g & 0 & 1 \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -g & 1 \end{vmatrix} = b(-1)+1(1-g)= -b+1-g= 1-b-g$$

Segundo, calculamos A_1:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} I_0 & -1 & -1 \\ a-bT_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} I_0 & -1 \\ a-bT_0 & 1 \end{vmatrix} = 1(I_0+a-bT_0)$$

Tercero, calculamos A_2:

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & I_0 & -1 \\ -b & a-bT_0 & 0 \\ -g & 0 & 1 \end{vmatrix} = -g \begin{vmatrix} I_0 & -1 \\ a-bT_0 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & I_0 \\ -b & a-bT_0 \end{vmatrix} = -g(a-bT_0)+1(a-bT_0+bI_0)$$

Cuarto, calculamos A_3:

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & I_0 \\ -b & 1 & a-bT_0 \\ -g & 0 & 0 \end{vmatrix} = -g \begin{vmatrix} -1 & I_0 \\ 1 & a-bT_0 \end{vmatrix} = -g[-(a-bT_0)-I_0]$$

Quinto, ahora procedemos a calcular a Y*, haciendo esta operación: $Y^* = A_1 / |A|$

$=1(I_0+a-bT_0)/1-b-g$

Sexto, ahora procedemos a calcular a C*, haciendo esta operación: $C^* = A_2 / |A|$

$= -g(a-bT_0)+1(a-bT_0+bI_0)/1-b-g= (bI_0+(1-g)(a-bT_0)/1-b-g$
Séptimo, ahora procedemos a calcular a G*, haciendo esta operación: $G^*= A_3/ |A|$

$= -g[-(a-bT_0)-I_0]/1-b-g= gI_0+g(a-bT_0)/1-b-g$

¡LOOR ETERNO A LA UASD, MI PRIMERA MADRE NUTRICIA DE SABIDURÍA!

5.7

EJERCICIO 5.7

Introducción

El ejercicio 5.7 se encuentra ubicado en la página 120 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright, y contiene seis (6) problemas que debemos resolver.

Problemas y respuestas

1. Con base en el modelo en (5.24), si las demandas finales son d_1= 30, d_2= 15 y d_3= 10 (todas en miles de millones de dólares), ¿cuáles son los niveles de producción correctos para las tres industrias? (Redondee las respuestas a dos decimales).

Mi respuesta:

Para resolver correctamente el problema 1, propuesto por el libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de Chiang y Wainwright, es conveniente estudiar a fondo el ejemplo numérico que se encuentra en las páginas 115-116, el cual nos proporciona el procedimiento para abordar el problema que nos ocupa. Este procedimiento podría estar integrado por los pasos siguientes:

Primer paso, debemos tener una matriz A de coeficientes de insumo; en este ejemplo es de dimensión 3x3.

Segundo paso, inmediatamente estructuramos una matriz identidad, igualmente 3x3.

Tercer paso, debemos tener un vector columna de demanda final; en este caso de dimensión 3x1.

Cuarto paso, dicen Chiang y Wainwright, que con esas informaciones un sistema abierto de insumo-producto se puede expresar en la forma (I-A)(x)= d.

Quinto paso, invertimos la matriz de Leontief representada por las siglas (I-A) en el paso 4, lo que nos permitirá calcular los valores óptimos de x, es decir, los niveles de producción para las tres industrias.

Naturalmente, antes de obtener la matriz inversa debemos: calcular el determinante de (I-A), la matriz de cofactores y luego la matriz adjunta.

$$|I-A| = \begin{vmatrix} 0.8 & -0.3 & -0.2 \\ -0.4 & 0.9 & -0.2 \\ -0.1 & -0.3 & 0.8 \end{vmatrix} = 0.8 \begin{vmatrix} 0.9 & 0.2 \\ -0.3 & 0.8 \end{vmatrix} + 0.3 \begin{vmatrix} -0.4 & -0.2 \\ -0.1 & 0.8 \end{vmatrix} - 0.2 \begin{vmatrix} -0.4 & 0.9 \\ -0.1 & -0.3 \end{vmatrix} = 0.8(0.72-0.06)+$$

$$+0.3(-0.32-0.02)-0.2(0.12+0.09)= 0.528-0.102-0.042= 0.384$$

La matriz de cofactores aparece calculada en la página 115 del libro que estamos estudiando, puesto que allí está la matriz adjunta (la matriz de cofactores la podemos extraer transponiendo la matriz adjunta).

Esta es la matriz de cofactores:

$$\begin{bmatrix} 0.66 & 0.34 & 0.21 \\ 0.30 & 0.62 & 0.27 \\ 0.24 & 0.24 & 0.60 \end{bmatrix}$$

Cálculo de la matriz adjunta, que es la transposición de la matriz de cofactores:

$$\begin{bmatrix} 0.66 & 0.30 & 0.24 \\ 0.34 & 0.62 & 0.24 \\ 0.21 & 0.27 & 0.60 \end{bmatrix}$$

Cálculo de la matriz inversa:

$(I\text{-}A)^{-1} = 1/|I\text{-}A|\ \mathrm{Adj}\ (I\text{-}A)$

$$= 1/0.384 \begin{bmatrix} 0.66 & 0.30 & 0.24 \\ 0.34 & 0.62 & 0.24 \\ 0.21 & 0.27 & 0.60 \end{bmatrix}$$

Ahora podemos decir que:

$$\begin{bmatrix} x^*_1 \\ x^*_2 \\ x^*_3 \end{bmatrix} = (I-A)^{-1}d = 1/0.384 \begin{bmatrix} 0.66 & 0.30 & 0.24 \\ 0.34 & 0.62 & 0.24 \\ 0.21 & 0.27 & 0.60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Esa multiplicación matricial la hicimos del modo siguiente: la primera fila de la matriz 3x3 fue multiplicada por el vector columna de la demanda, que es de dimensión 3x1, y luego dividimos el resultado por 0.384. Resultado final: 69.53. La segunda fila de la matriz 3x3 fue multiplicada por el vector columna de la demanda, que es de dimensión 3x1, y luego dividimos el resultado por 0.384. Resultado final: 57.03. La tercera fila de la matriz 3x3 fue multiplicada por el vector columna de la demanda, que es de dimensión 3x1, y luego dividimos el resultado por 0.384. Resultado final: 42.58.

Por tanto,

$x^*_1 = 69.53$

$x^*_2 = 57.03$

$x^*_3 = 42.58$

2. Con la información (5.23) calcule la cantidad total de insumo primario requerido para producir los niveles de producción correctos del problema 1.

Mi respuesta:

En la página 115 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de Chiang y Wainwright, tenemos datos adicionales y la orientación correcta para resolver dicho problema. Allí nuestros autores calculan *"la cantidad de dólares del insumo primario usado para producir el valor de un dólar del j-ésimo artículo,…al restar cada suma de* *columna en (5.22) de 1…”,* (comillas, cursiva y puntos suspensivos son nuestros), es decir, 1-0.7= 0.3; 1-0.7= 0.3; 1-0.6= 0.4. Luego estos resultados los multiplicamos, respectivamente, por los niveles óptimos de producción de x_1, x_2 y x_3, arriba calculados. Procedamos: 0.3(69.53)+0.3(57.03)+0.4(42.58)= 20.859+17.109+22.812= 60.78x10^9.

Por lo tanto, la demanda final específica

$$d= \begin{bmatrix} 30 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix}$$

será factible si y solo si la cantidad disponible del insumo primario es por lo menos 60.78x10^9 dólares.

3. En una economía de dos industrias, se sabe que la industria I utiliza 10 centavos de su propio producto y 60 centavos del artículo II para producir una cantidad con valor de un dólar del artículo I; la industria II no utiliza su propio producto pero emplea 50 centavos del artículo I para producir una cantidad con valor de un dólar del artículo II, y el sector abierto demanda 1,000 miles de millones de dólares del artículo I y 2000 miles de millones del artículo II.

a) Escriba la matriz de insumos; la matriz de Leontief y la ecuación matricial específica de insumo-producto para esta economía.

b) Compruebe si los datos de este problema satisfacen la condición de Hawkins-Simon.

c) Determine los niveles de producción correctos mediante la regla de Cramer.

Mi respuesta:

En el problema que nos ocupa, la matriz de insumos es aquella que contiene los datos relacionados con el valor utilizado, por cada industria, de su propio producto o del producto de la otra industria; asimismo, la primera columna está relacionada con el artículo I, mientras que la segunda columna se encuentra relacionada con el artículo II; de aquí entonces emerge esta matriz de insumos:

$$A= \begin{bmatrix} 0.10 & 0.50 \\ 0.60 & 0 \end{bmatrix}$$

Esa es parte de la respuesta a) del problema.

La matriz de Leontief la obtenemos restándole a la matriz identidad la matriz de insumos. Así:

$$\begin{bmatrix} I-A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.10 & 0.50 \\ 0.60 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.90 & -0.50 \\ -0.60 & 1.0 \end{bmatrix}$$ Esta es parte de la respuesta a) del problema.

Luego la ecuación matricial es:

$$\begin{bmatrix} 0.90 & -0.50 \\ -0.60 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}000 \\ 2{,}000 \end{bmatrix}$$ Esta es parte de la respuesta a) del problema.

Procedamos ahora a dar la respuesta b) del problema. Para esto debemos acudir a las páginas 118-119 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright, donde se explica el significado económico de la condiciòn de Hawkins-Simon. Leemos: *"Para el caso de dos industrias, la matriz de Leontief es*

$$I\text{-}A = \begin{bmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{bmatrix}$$

"La primera parte de la condiciòn de Hawkins-Simon, $|B_1| > 0$*, requiere que* $1-a_{11} > 0$ *o* $a_{11} < 1$*.*

"Desde el punto de vista económico, esto requiere que la cantidad del primer artículo usado en la producción del valor de un dólar del primer artículo sea menor que un dólar. La otra parte de la condiciòn, $B_2>0$*, requiere que* $(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}>0$ *o equivalentemente,* $a_{11}+a_{12}a_{21}+(1-a_{11})a_{22}<1$*"*. (Comillas y cursiva son nuestras).

El asunto se encuentra claro.

Primero, comprobemos que $1-a_{11} > 0$ o $a_{11} < 1$. En efecto, en nuestro problema $a_{11} = 0.10$, por tanto, es menor que 1. Igualmente, en la expresión $1-a_{11} > 0$, al sustituir a_{11} por su valor, 0.10, el resultado es igual a 0.90 que es mayor que 0.

Segundo, comprobemos que $(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}>0$ o equivalentemente, $a_{11}+a_{12}a_{21}+(1-a_{11})a_{22}<1$. En efecto, en nuestro problema $a_{11}= 0.10$, $a_{22}= 0$, $a_{12}= 0.50$ y $a_{21}= 0.60$; sustituyamos estos valores en la expresión $(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}>0$ y tendremos el siguiente resultado: $(1-0.10)(1-0)-0.50(0.60)>0 = 0.90(1)-0.3>0= 0.60>0$. En el caso que hagamos las sustituciones en $a_{11}+a_{12}a_{21}+(1-a_{11})a_{22}<1$, que es una expresión equivalente a la que acabamos de comprobar, tendremos este resultado: $0.10+0.50(0.60)+(1-0.10)0<1= 0.40+0<1$. Aquí también hubo una evidente comprobación de la condiciòn Hawkins-Simon.

Vamos ahora a la respuesta c) del problema, relacionada con la Regla de Cramer:

Primero, calculamos el determinante de la matriz de Leontief:

$|A| = 0.9 - 0.3 = 0.6$

Segundo, calculamos A_1:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1{,}000 & -0.5 \\ 2{,}000 & 1.0 \end{vmatrix} = 2{,}000$$

Tercero, calculamos A_2:

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 0.9 & -0.5 \\ -0.6 & 1.0 \end{vmatrix} = 2{,}400$$

Cuarto, calculamos el nivel óptimo de producción del artículo I:

$x_1 = |A_1| / |A| = 2{,}000/0.6 = 3{,}333.33$

Quinto, calculamos el nivel óptimo de producción del artículo II:

$x_2 = |A_2| / |A| = 2{,}400/0.6 = 4{,}000$

4. Dados la matriz de insumos y el vector de demanda final

$$A = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.25 & 0.34 \\ 0.33 & 0.10 & 0.12 \\ 0.19 & 0.38 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} 1{,}800 \\ 200 \\ 900 \end{bmatrix} = d$$

a) Explique el significado económico de los elementos 0.33, 0 y 200.

b) Explique el significado económico (si existe) de la suma de la tercera columna.

c) Explique el significado económico (si existe) de la suma de la tercera columna.

d) Escriba la ecuación matricial específica de insumo-producto para este modelo.

e) Compruebe si los datos de este problema satisfacen la condiciòn Hawkins-Simon.

Mi respuesta:

Trabajemos la respuesta a):

El elemento 0.33 forma parte de la matriz de insumos y se encuentra situado en la fila segunda y en la primera columna; por tanto, forma parte de la industria I, la cual produce el artículo I, entonces, 0.33 significa que la industria I usa 33 centavos de su propio producto I, que combinado con 10 centavos del artículo II y 12 centavos del articulo III, para producir una cantidad con valor de un dólar del articulo I.

El elemento 0 forma parte de la matriz de insumos y se encuentra situado en la fila tercera y en la columna tercera; por tanto, forma parte de la industria III, la cual no utiliza su propio producto III, pero emplea 19 centavos del artículo I y 38 centavos del artículo II, para producir una cantidad con valor de un dólar del artículo III.

El elemento 200 se encuentra en el vector columna de demanda final, de dimensión 3x1, y representa precisamente la demanda final que experimenta el artículo II generado por la industria II.

Trabajemos la respuesta b):

La tercera columna de la matriz de insumos está constituida por, 0.34, 0.12 y 0, que sumados nos arroja un total de 0.46 que, naturalmente, es inferior a 1. Si hacemos la sustracción 1-0.46, tendremos el siguiente resultado: 0.54, el cual deberemos multiplicar por el nivel óptimo de producción del artículo III, para ver la cantidad de insumos requerido para alcanzar dicho nivel óptimo de producción.

Trabajemos la respuesta c):

Se repite la misma pregunta formulada en b); hay un error.

Trabajemos la respuesta d):

La ecuación matricial es obtenida del modo siguiente:

Primero obtenemos la matriz de Leontief, restándole a la matriz identidad la matriz de insumos. Así:

$$\begin{bmatrix} I-A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.05 & 0.25 & 0.34 \\ 0.33 & 0.10 & 0.12 \\ 0.19 & 0.38 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.95 & -0.25 & -0.34 \\ -0.33 & 0.90 & -0.12 \\ -0.19 & -0.38 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego la ecuación matricial es:

$$\begin{bmatrix} 0.95 & -0.25 & -0.34 \\ -0.33 & 0.90 & -0.12 \\ -0.19 & -0.38 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}800 \\ 200 \\ 900 \end{bmatrix}$$

Trabajemos la respuesta e):

Procedamos ahora a dar la respuesta e) del problema. Para esto debemos acudir a las páginas 118-119 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright, donde se explica el significado económico de la condiciòn de Hawkins-Simon. Chiang dice: *"Para el caso de dos industrias, la matriz de Leontief es*

$$I\text{-}A = \begin{bmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{bmatrix}$$

"La primera parte de la condiciòn de Hawkins-Simon, $|B_1| > 0$*, requiere que* $1-a_{11} > 0$ *o* $a_{11} < 1$*.*

"Desde el punto de vista económico, esto requiere que la cantidad del primer artículo usado en la producción del valor de un dólar del primer artículo sea menor que un dólar. La otra parte de la condiciòn, $B_2>0$*, requiere que* $(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}>0$ *o equivalentemente,* $a_{11}+a_{12}a_{21}+(1-a_{11})a_{22}<1$*"*. (Comillas y cursiva son nuestras).

El asunto se encuentra claro.

Primero, comprobemos que $1-a_{11} > 0$ o $a_{11} < 1$. En efecto, en nuestro problema $a_{11} = 0.05$, por tanto, es menor que 1. Igualmente, en la expresión $1-a_{11} > 0$, al sustituir a_{11} por su valor, 0.05, el resultado es igual a 0.95 que es mayor que 0.

Segundo, comprobemos que $(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}>0$ o equivalentemente, $a_{11}+a_{12}a_{21}+(1-a_{11})a_{22}<1$. En efecto, en nuestro problema $a_{11} = 0.05$, $a_{22} = 0.10$, $a_{12} = 0.25$ y $a_{21} = 0.33$; sustituyamos estos valores en la expresión $(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}>0$ y tendremos el siguiente resultado: $(1-0.05)(1-0.10)-0.25(0.33)>0 = 0.95(0.90)-0.0825>0 = 0.8025>0$. En el caso que hagamos las sustituciones en $a_{11}+a_{12}a_{21}+(1-a_{11})a_{22}<1$, que es una expresión equivalente a la que acabamos de comprobar, tendremos este resultado: 0.05+0.25(0.33)+(1-0.05)0.10<1= 0.2275<1. Aquí también hubo una evidente comprobación de la condiciòn Hawkins-Simon.

5. (a) Dada una matriz B= [bij] de 4x4, escriba los menores principales.
(b) Escriba los menores principales directores.

Mi respuesta:

Trabajemos la respuesta (a):

$$B = \underset{4x4}{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}}$$

Para determinar los menores principales tenemos que ver el procedimiento que plantean Chiang y Wainwright, en las páginas 116-117 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática:*

"Para explicar esta condiciòn, [la condiciòn Hawkins-Simon] *es necesario introducir el concepto matemático de menores principales de una matriz, porque los signos algebraicos de los menores principales proporcionan pistas importantes que sirven de guías para llegar a conclusiones analíticas. Ya se sabe que, dada una matriz cuadrada, por ejemplo* $|B|$*, con determinante B, un menor es un subdeterminante obtenido al eliminar el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de* $|B|$ *donde i y j no son necesariamente iguales. Si ahora se impone la restricción de que i=j, entonces el menor resultante se conoce como menor principal…"* (Comillas, cursiva, corchetes y puntos suspensivos son nuestros). Y finalmente, en la página 117, Chiang y Wainwright aseveran, respecto a una matriz B de orden 3x3, lo siguiente: *"La eliminación simultanea del i-ésimo renglón y la i-ésima columna (i= 3, 2, 1, sucesivamente) da como resultado los tres menores principales de 2x2…"* (Comillas, cursiva y puntos suspensivos son nuestros).

Si aplicamos dicha orientación a la matriz B de dimensión 4x4, expuesta arriba, tendremos:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{24} \\ b_{41} & b_{42} & b_{44} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} & b_{14} \\ b_{31} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix}$$

Esos cuatro (4) determinantes, de orden 3x3, constituyen los cuatro menores principales, obviamente de tercer orden.

Trabajemos la respuesta (b):

En la página 117 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, Chiang y Wainwright afirman: *"Si bien ciertas aplicaciones económicas requieren la comprobación de los signos algebraicos de todos los menores principales de una matriz B, con bastante frecuencia la conclusión depende solo del patrón de signos de un subconjunto particular de los menores principales a los que se denomina menores principales directores,…"* (Comillas, cursiva y puntos suspensivos son nuestros).

He aquí los menores principales directores:

$$|B_1| = |b_{11}|$$

$$|B_2| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$|B_3| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$|B_4| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix}$$

¡LOOR ETERNO AL INOLVIDABLE DR. MAXIMILIEN ESPINAL, DIRECTOR HISTÓRICO DEL LICEO NOCTURNO TIBURCIO MILLÁN LÓPEZ DE LA CIUDAD DE LA ROMANA!

7.1

EJERCICIO 7.1

Introducción

El ejercicio 7.1 se encuentra ubicado en la página 152 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Alpha Chiang y Kevin Wainwright, y contiene cuatro (4) problemas que debemos resolver.

Problemas y respuestas:

1. Obtenga la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $y= x^{12}$

b) $y= 63$

c) $y= 7x^{5}$

d) $w= 3u^{-1}$

e) $w= -4u^{1/2}$

f) $w= 4u^{1/4}$

Mi respuesta a):

$dy/dx= 12x^{12-1}= 12x^{11}$

Mi respuesta b):

$dy/dx= 0$

Mi respuesta c):

$dy/dx= (5)7x^{5-1}= 35x^{4}$

Mi respuesta d):

$dw/du= (-1)3u^{-1-1}= -3u^{-2}$

Mi respuesta e):

dw/du= $(-1/2)4u^{1/2-1}= -2u^{-1/2}$

2. Encuentre lo siguiente:

a) $d/dx(-x^{-4})$

Mi respuesta:

$d/dx(-x^{-4})= 4x^{-5}$

b) $d/dx(9x^{1/3})= 3x^{-2/3}$

Mi respuesta:

$d/dx(9x^{1/3})= 3x^{-2/3}$

c) $d/dw(5w^{4})$

Mi respuesta:

$d/dw(5w^{4})= 20w^{3}$

d) $d/dx(cx^{2})$

Mi respuesta:

$d/dx(cx^{2})= 2cx$

e) $d/du(au^{b})$

Mi respuesta:

$d/du(au^{b})=$

$d/du(au^{b})= (b)au^{b-1}$

f) $d/du(-au^{-b})$

Mi respuesta:

$d/du(-au^{-b})= (b)au^{-b-1})$

3. Halle f´(1) y f’(2) de las siguientes funciones:

a) $y= f(x)= 18x$

Mi respuesta:

$y= f'(x)= 18$

$y= f(1)= 18$

$y= f(2)= 18$

b) $y= f(x)= cx^3$

Mi respuesta:

$y= f'(x)= 3cx^2= 3c(1)^2= 3c$

$y= f'(x)= 3cx^2= 3c(2)^2= 12c$

c) $f(x)= -5x^{-2}=$

Mi respuesta:

$f'(x)= 10x^{-3}= 10/x^3= 10/(1)^3= 10$

$f'(x)= 10x^{-3}= 10/x^3= 10/(2)^3= 10/8= 5/4$

d) $f(x)= 3/4x^{4/3}$

Mi respuesta:

$f'(x)= x^{1/3}= (1)^{1/3}$

$f'(x)= x^{1/3}= (2)^{1/3}$

e) $f(w)= 6w^{1/3}$

$f'(w)= 2w^{-2/3}= 2(1)^{-2/3}$

$f'(w)= 2w^{-2/3}= 2(2)^{-2/3}$

f) $f(w)= -3w^{-1/6}$

$f'(w)= 1/2w^{-7/6}= 1/2(1)^{-7/6}$

$f'(w)= 1/2w^{-7/6}= 1/2(2)^{-7/6}$

!LOOR ETERNO PARA MI PROFESORA DE MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA, DOÑA ELENA!

7.2

EJERCICIO 7.2

Introducción

El ejercicio 7.2 se encuentra ubicado en la página 160 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Alpha Chiang y Kevin Wainwright, y contiene diez (10) problemas que debemos resolver.

Problemas y respuestas

1. Dada la función de costo total $C= Q^3-5Q^2+12Q+75$, escriba la función de costo variable (CV). Encuentre la derivada de la función CV e interprete el significado económico de esa derivada.

Mi respuesta:

Función de costo variable y su derivada:

$CV= Q^3-5Q^2+12Q$

$dCV/dQ= 3Q^2-10Q+12$

Significado económico de dCV/dQ:

Simplemente que constituye la función de costo marginal.

2. Dada la función de costo promedio $CP= Q^2-4Q+174$, encuentre la función CM. ¿La función dada es más apropiada como una función de largo o corto plazo? ¿Por qué?

Mi respuesta:

Función de costo marginal:

Primero, calculamos la función de costo total:

$CT= CP(Q)$

$CT= (Q^2-4Q+174)(Q)= (Q^3-4Q^2+174Q)$

Segundo, derivamos la función de costo total:

$dCT/dQ= 3Q^2-8Q+174$

Tercero, la derivación efectuada arriba constituye el costo marginal:

$MC= 3Q^2-8Q+174$.

Si la función tiene costos fijos y costos variables es porque fue concebida en el marco del corto plazo, donde por ejemplo los costos de capital en maquinarias y edificaciones se podrían concebir como fijos; no así en el largo plazo.

3. Diferencie las siguientes funciones por medio de la regla del producto:

a) $(9x^2-20(3x+1)$;

b) $(3x+10)(6x^2-7x)$;

c) $x^2((4x+6)$;

d) $(ax-b)(cx^2)$;

e) $(2-3x)(1+x)(x+2)$;

f) $(x^2+3)(x-1)$

Mi respuesta:

Como nos han pedido que diferenciemos funciones por medio de la regla del producto, debemos decir que tal regla es definida por el libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright, en la página 155, del modo siguiente: *“La derivada del producto de dos funciones (diferenciables) es igual a la primera función por la derivada de la segunda función más la segunda función por la derivada de la primera función”*. (Comillas y cursiva son nuestras).

Apliquemos la regla citada arriba:

$d/dx[(9x^2-2)(3x+1)]=$

$(9x^2-2)d/dx(3x+1)+(3x+1)d/dx(9x^2-2)=$

$(9x^2-2)(3)+(3x+1)(18x)=$

$(27x^2-6)+(54x^2+18x)=$

$81x^2+18x-6$ Respuesta a).

$d/dx[(3x+10)(6x^2-7x)]=$

$(3x+10)d/dx(6x^2-7x)+(6x^2-7x)d/dx(3x+10)=$

$(3x+10)(12x-7)+(6x^2-7x)(3)=$

$36x^2+120x-21x-70+18x^2-21x=$

$54x^2+78x-70= 3(27x^2+6x-2)$ Respuesta b).

$d/dx[x^2(4x+6)]=$

$(x^2)d/dx(4x+6)+(4x+6)d/dx(x^2)=$

$(x^2)(4)+(4x+6)(2x)=$

$4x^2+8x^2+12x=$

$12x^2+12x= 12x(x+1)$ Respuesta c).

$d/dx[(ax-b)(cx^2)]=$

$(ax-b)(2cx)+(cx^2)(a-1)=$ a

$x2cx-2bcx+ acx^2-cx^2)=$

$3acx^2- cx^2-2bcx$ Respuesta d).

$d/dx[(2-3x)(1+x)(x+2)]$. En este caso tenemos la derivada del producto de tres funciones, en consecuencia, predomina una regla distinta a la que hemos usado cuando se trataba de la derivada del producto de dos funciones; el libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright, en la página 156 dice: *"…la derivada del producto de tres funciones es igual al producto de las funciones segunda y tercera por la derivada de la primera, más el producto de las funciones primera y tercera por la derivada de la segunda, más el producto de las funciones primera y segunda por la derivada de la tercera…"* (Comillas, cursiva y puntos suspensivos son nuestros).

$d/dx[(2-3x)(1+x)(x+2)]=$

$g(x)h(x)f'(x)+f(x)h(x)g'(x)+f(x)g(x)(h')(x)=$

$(1+x)(x+2)(-3)+(2-3x)(x+2)(1)+(2-3x)(1+x)(1)=$

$-9x^2-14x= -x(9x+14)$ Respuesta e)

$d/dx(x^2+3)(x^{-1})=$

$(x^2+3)(-1x^{-2})+(x^{-1})(2x)=$

$(x^2+3)(-1x^{-2})+(x^{-1})(2x)=$

$1-3x^{-2}$ Respuesta f).

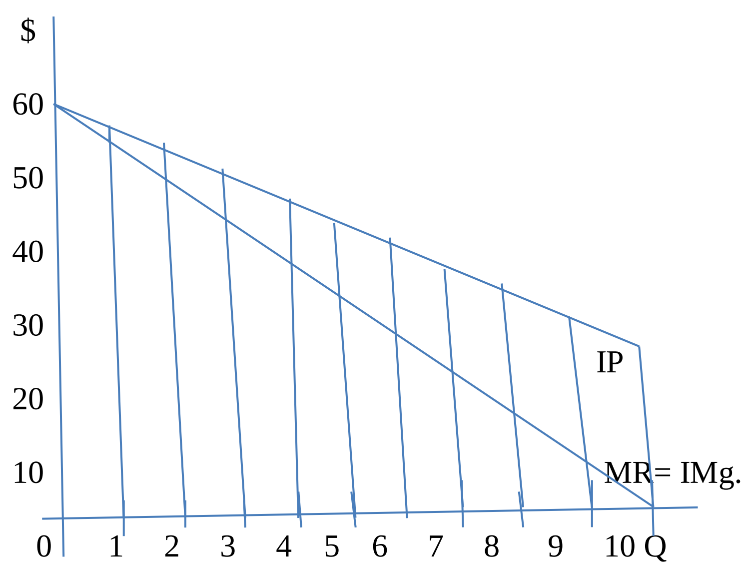
4. (a) Dado un AR= 60-3Q grafique la curva de ingreso promedio; después, determine la curva de MR por el método usado en la figura 7.2.

Mi respuesta:

Respuesta a):

La ecuación de ingreso promedio es AR=IP= 60-3Q. Si en esta ecuación vamos sustituyendo los diferentes niveles de producción, podemos obtener el ingreso promedio ante cada nivel de producción y de este modo podemos trazar su gráfica. Veamos:

Q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
IP	60	57	54	51	48	45	42	39	36	33	30



¿Cómo trazamos la curva del ingreso marginal? Lo hicimos conforme a la figura 7.2 que aparece en la página 157 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright. En efecto, en la citada página leemos: *"Por otro lado, en la competencia imperfecta la curva AR* [es decir, ingreso promedio], *por lo común, tiene pendiente descendente, como en la figura 7.2, de tal manera que f'Q<0 y, de (7.7), MR-AR<0 para todos los niveles positivos de producción. En este caso, la curva MR debe quedar debajo de la curva AR* [es decir, de la curva de ingreso promedio]". (Comillas, cursiva y corchetes son nuestros).

4 b): Encuentre matemáticamente la función de ingreso total y la función de ingreso marginal correspondiente a la función dada AR.

Mi respuesta b):

La función de ingreso total (R): es igual a la función de ingreso promedio (AR) multiplicada por el nivel de producción (Q). Una vez que obtenemos dicha función la podemos derivar y así alcanzar la función de ingreso marginal; todo esto conforme a las orientaciones trazadas por el libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright, página 156. Helas aquí:

$R= AR(Q)= (60-3Q)(Q)= 60Q-3Q^2$

$dR/dQ= 60-6Q=$ MR= Ingreso marginal.

4.c): ¿La curva MR obtenida de forma gráfica en (a) coincide con la función MR obtenida matemáticamente en (b)?

Mi respuesta c):

Coincide totalmente, puesto que la curva MR queda por debajo de la curva de ingreso promedio, como se puede ver en los datos expuestos abajo.

Q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
IP	60	57	54	51	48	45	42	39	36	33	30
MR	60	54	48	42	36	30	24	18	12	6	0

7. Encuentre las derivadas de:

a) $(x^2+3)/x$

Mi respuesta:

Para afrontar los problemas contenidos en el punto 7, es menester que tengamos una idea acerca de la regla de la derivada del cociente de dos funciones. En el libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright, página 158, encontramos la expresión matemática de dicha regla, que podemos exponer en forma teórica del modo siguiente: la derivada del cociente de dos funciones, es igual a la derivada de la función que se encuentra en el numerador por la función que se encuentra en el denominador, menos la función que se encuentra en el numerador por la derivada de la función que se encuentra en el denominador, dividido entre el cuadrado de la función que se encuentra en el denominador.

$d/dx(x^2+3)/x= [2x(x)- (x^2+3)(1)]/(x)^2=$

$[2x^2-x^2-3]/x^2=$

$(x^2-3)/x^2$ Respuesta.

b) (x+9)/x

Mi respuesta:

$d/dx(x+9)/x= [(1)(x)-(x+9)(1)]/x^2=$

$(x-x-9)/x^2= -9/x^2$ Respuesta.

c) 6x/(x+5)

Mi respuesta:

$d/dx(6x)/(x+5)= [(6)(x+5)-(6x)(1)]/(x+5)^2=$

$(6x+30-6x)/(x+5)^2=$

$30/(x+5)^2=$ Respuesta.

d) $(ax^2+b)/(cx+d)$

Mi respuesta:

$d/dx(ax^2+b)/(cx+d)= [(2ax)(cx+d)-(ax^2+b)(c)]/(cx+d)^2=$

$[(2ax)(cx+d)-(ax^2+b)(c)]/(cx+d)^2= (2acx^2+2adx-acx^2-bc)/(cx+d)^2=$

$(acx^2+2adx-bc)/(cx+d)^2$ Respuesta.

8. Dada la función f(x)= ax+b, encuentre las derivadas de:

a) f(x)

Mi respuesta:

f(x)= ax+b

f’(x)= a Respuesta.

b) xf(x)

Mi respuesta:

$f(x)= xf(x)= x(ax+b)= ax^2+bx=$

$f'(x)= 2ax+b$ Respuesta.

Mi respuesta:

c) $1/f(x)= 1/ax+b$

$f'(x)= [(0)(ax+b)-(1)(a)]/(ax+b)^2=$

$-a/(ax+b)^2$ Respuesta.

d) $f(x)/x= (ax+b)/x=$

$f'(x)= [(a)(x)-(ax+b)(1)]/x^2=$

$(ax-ax-b)/x^2=$

$-b/x^2$ Respuesta.

10. Encuentre las funciones marginal y promedio de las siguientes funciones totales y grafique los resultados.

Función de costo total:

a) $C= 3Q^2+7Q+12$

Mi respuesta:

La función de costo promedio es igual a la función de costo total dada entre el nivel de producción, es decir:

$CP= CT/Q= (3Q^2+7Q+12)/Q$ Respuesta.

La función de costo marginal es igual a la derivada de la función de costo total, es decir:

$Cmg= d/dQ\ (3Q^2+7Q+12)= 6Q+7$ Respuesta.

Función de ingreso total:

b) $R= 10Q-Q^2$

Mi respuesta:

La función de ingreso promedio es igual a la función de ingreso total dada entre el nivel de producción, es decir:

AR= R/Q= $(10Q-Q^2)/Q$ Respuesta.

La función de ingreso marginal es igual a la derivada de la función de ingreso total, es decir:

MR= $d/dq\ (10Q-Q^2)= 10-2Q$ Respuesta.

Función de producto total:

c) $Q= aL+bL^2-cL^3$ $(a, b, c> 0)$

La función de producto promedio es igual a la función de producto total entre L es decir:

PP= PT/L= $(aL+bL^2-cL^3)/L$

La función de producto marginal es igual a la derivada de la función de producto total, es decir:

PMg= $d/dL(aL+bL^2-cL^3)=$

$A+2bL-3cL$ Respuesta.

EJERCICIO 7.3

Este ejercicio se encuentra ubicado en la página 165 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Alpha Chiang y Kevin Wainwright, el cual consta de seis (6) problemas que debemos resolver.

Problemas y respuestas

1. Dada $y= u^3+2u$, donde $U= 5-x^2$, encuentre dy/dx por la regla de la cadena.

Mi respuesta:

En la página 162 de *Métodos fundamentales de economía matemática*, libro que estamos estudiando, de la autoría de Alpha Chiang y Kevin Wainwright, aparece una fórmula, como expresión de la regla de la cadena, que debemos aplicar. Veamos:

$dy/dx= (dy/du)(du/dx)=$

$(3u^2+2)(-2x)=$

Sustitución:

$[3(5-x^2)^2+2)(-2x)]=$

$-2x[3(5-x^2)^2+2]$ Respuesta del libro, con la que estoy de acuerdo.

2. Dada $w= ay^2$, $y= bx^2+cx$, obtenga dw/dx por la regla de la cadena.

Mi respuesta:

$dw/dx= (dw/dy)(dy/dx)=$

$(2ay)(2bx+c)= 2a(bx^2+cx)(2bx+c)$ Respuesta.

3. Use la regla de la cadena para hallar dy/dx para las siguientes funciones:

a) $y= (3x^2-13)^3$

Mi respuesta:

El libro que estamos estudiando Métodos fundamentales de economía matemática, de la autoría de Alpha Chiang y Kevin Wainwright, en la página 162, nos explican cómo acomodar una función como la dada para derivarla conforme a la regla de la cadena. Leamos:

"La utilidad de esta regla se aprecia mejor cuando debemos diferenciar una función como [y= $(3x^2-13)^3$]. Sin la regla de la cadena a la mano, [dy/dx] se obtiene solo a través de la laboriosa ruta de desarrollar primero la expresión a la [tercera] potencia. Sin embargo, con la regla de la cadena, podemos tomar un atajo definiendo una nueva variable intermedia [z= $3x^2$-13], de tal manera que se obtienen dos funciones enlazadas en una cadena:

"$y= z^3$ y $z= 3x^2-13$

"Entonces, la derivada [deseada] se puede hallar como sigue…" (Comillas, cursiva y corchetes son nuestros).

dy/dx= (dy/dz)(dz/dx)=

$(3z^2)(6x)= 3(3x^2-13)^2(6x)=$

$18x(3x^2-13)^2$ Respuesta.

3b) $y= (7x^3-5)^9$

Mi respuesta:

dy/dx= (dy/dz)(dz/dx)

$z= 7x^3-5$

$y= z^9$

por tanto,

$dy/dx= (9z^8)(21x^2)=$

Sustitución:

$(9)(7x^3-5)^8(21x^2)$ Respuesta.

3c) $y= (ax+b)^5$

Mi respuesta:

dy/dx= (dy/dz)(dz/dx)

z= (ax+b)

y= z^5

dy/dx= $(5z^4)$(a)=

Sustitución:

$[(5)(ax+b)^4(a)]=$

$(5a)(ax+b)^4$ Respuesta.

4. Dada y= $(16x+3)^{-2}$, use la regla de la cadena para hallar dy/dx. Después exprese la función como y= $1/(16x+3)^2$ y encuentre dy/dx por la regla del cociente. ¿Son idénticas las respuestas?

Mi respuesta:

dy/dx= (dy/dz)(dz/dx)

z= (16x+3)

y= z^{-2}

dy/dx= $(-2z^{-3})(16)=$

Sustitución:

$[(-2)(16x+3)^{-3}(16)]=$

$(-32)(16x+3)^{-3}$ Respuesta conforme a la regla de la cadena.

Apliquemos la regla de la derivada de un cociente:

dy/dx= $0(16x+3)^2-(1)[2(16x+3)(16)]/(16x+3)^4=$

$-32(16x+3)/(16x+3)^4=$

$-32(16x+3)(16x+3)^{-4}=$

$-32(16x+3)^{-3}$ Respuesta conforme a la regla del cociente, por tanto, es idéntica a la obtenida por la regla de la cadena.

5. Dada y= 7x+21, determine su función inversa. Luego, halle dy/dx y dx/dy, y compruebe la regla de la derivada de la función inversa. Asimismo verifique que las gráficas de las dos funciones guardan una relación de imagen especular entre sí.

Mi respuesta:

En la página 164 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática* de Alpha Chiang y Kevin Wainwright, nos dice que para determinar la función inversa, por ejemplo, de y= 7x+21, despejamos la variable x. Veamos:

x= (y-21)/7= (1/7)y-3 Respuesta.

¿Qué hallemos dy/dx? Mírela aquí:

dy/dx= 7 Respuesta

¿Qué hallemos dx/dy? Mírela aquí:

dx/dy= 1/7 Respuesta.

¿Qué comprobemos la regla de la derivada de la función inversa? Mírela aquí:

La regla de la función inversa, dice el libro que estamos estudiando, es decir, *Métodos fundamentales de economía matemática* de Alpha Chiang y Kevin Wainwright, en la página 164, consiste en esta expresión: dx/dy= 1/dy/dx. Luego, si sustituimos obtendremos el resultado siguiente: 1/7= 1/7.

6. ¿Las siguientes funciones son estrictamente monótonas?

a) $y= -x^6+5$ (x>0)

b) $y= 4x^5+x^3+3x$

Mi respuesta:

En la página 163 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática* de Alpha Chiang y Kevin Wainwright, aparece la orientación para dar una respuesta correcta a la pregunta seis (6). Leemos: *"Una forma práctica de determinar la monotonía estricta de una determinada función y= f(x) es comprobar si la derivada f'(x) conserva siempre el mismo signo algebraico (no cero) para todos los valores de x…"* (Comillas, cursiva y puntos suspensivos son nuestros).

Procedamos a derivar la función a):

$dy/dx= -6x^5$, y como el problema coloca como condición que (x>0), en la medida que vamos sustituyendo a x por valores mayores que cero, en la función derivada, tendremos resultados estrictamente decrecientes. La función es monotónica o monótona y obviamente su función inversa existe. ¿Cuál es? dx/dy= 1/dy/dx; dy/dx= $1/-6x^5$.

Procedamos a derivar la función b):

y'= $20x^4+3x^2+3$, aquí estamos también ante una función monotónica o monótona, usando argumentos similares a los blandidos en el caso de arriba y obviamente su función inversa existe. Mírela: dx/dy= $1/20x^4+3x^2+3$.

CONTINUARÁ…