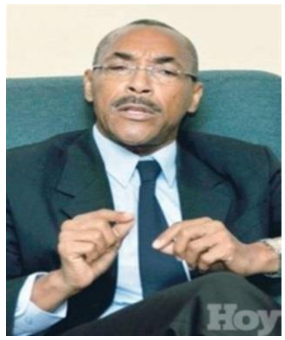
Dr. Manuel de Jesús Linares Jiménez



Obras
Completas

Tomo
93

***Estudiando el libro Geometría y Trigonometría de Baldor (Primer Volumen)*. Publicada en el mes de julio del año 2022.**

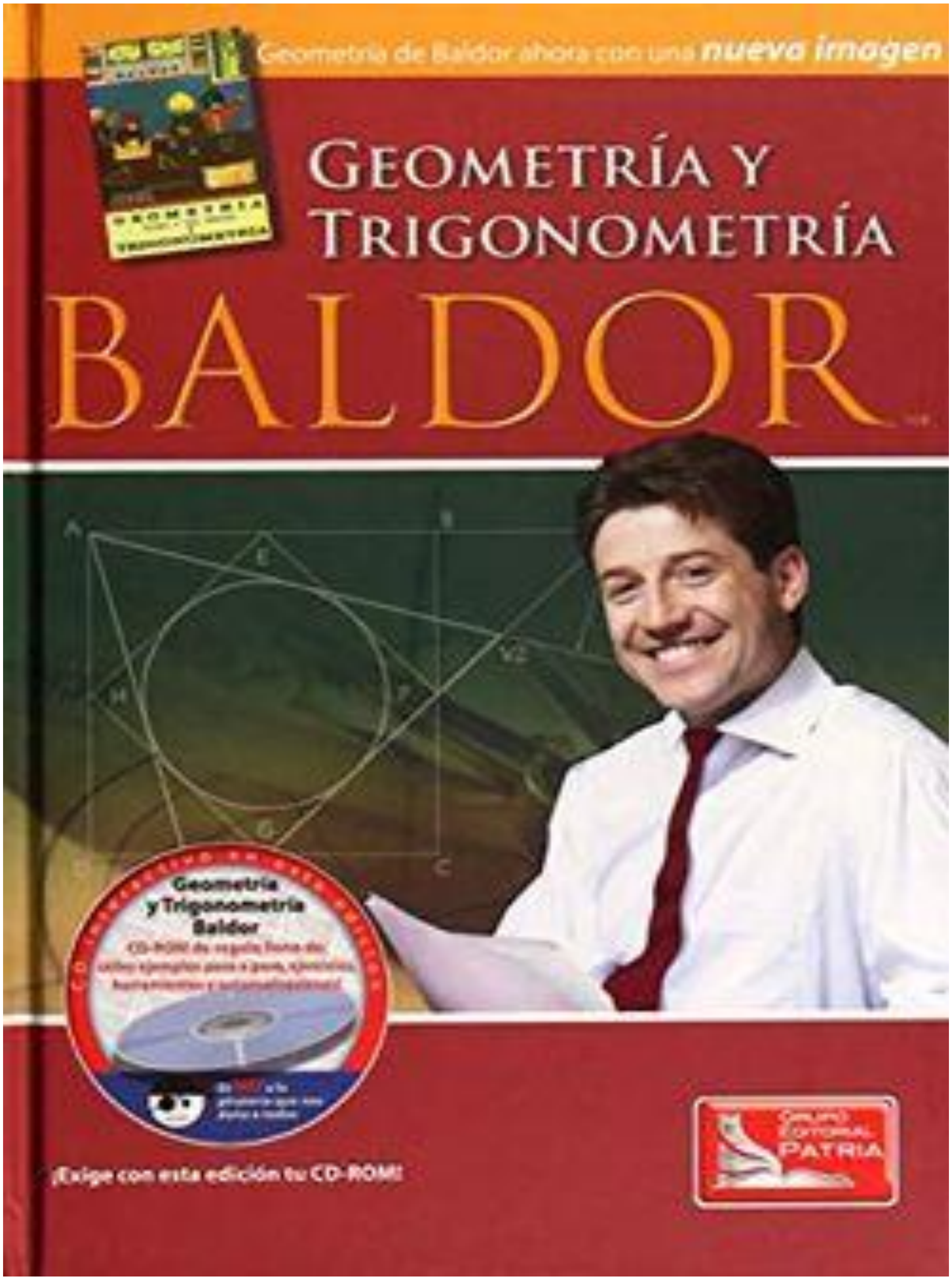
ESTUDIANDO EL LIBRO GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA DE BALDOR (Primer Volumen)

Autor: Dr. Manuel Linares
profesormanuellinares@gmail.com
829-637-9303

Preparación y difusión edición digital:
Julio, 2022.

Nueva preparación y difusión edición digital:
2023.

PORTADA DEL LIBRO GEOMETRIA Y TRIGONOMETRIA DE BALDOR



DEDICATORIA

Dedico este libro al distinguido profesor universitario Aridio Moya, un hombre de bien, de ciencia y solidaridad; merece respeto y consideración.

“El problema no es comenzar; el mérito radica en concluir la estancia en el mundo de los vivos sirviéndole a la clase social oprimida, a la dignidad y al decoro”.

ÍNDICE

PREFACIO AL TOMO 93

El tomo 93 de nuestras Obras Completas para el período 1976-2023, se encuentra integrado por la obra *Estudiando el libro Geometría y Trigonometría de Baldor*. Primer volumen. Publicada en julio de 2022.

Respecto a la presentación de *Estudiando el libro Geometría y Trigonometría de Baldor*, escrita en fecha 17/07/2022, hemos decidido acogerla como prefacio, la cual transcribimos a continuación:

"Con particular emoción ponemos a disposición del público lector la obra *Estudiando el libro Geometría y Trigonometría de Baldor*, #93, Primer Volumen, en formato digital; con éste se cierra el primer ciclo reciente de libros matemáticos bajo la denominación de "Estudiando". Así, hemos publicado *Estudiando el libro de Economía Matemática de Alpha Chiang*, Primer Volumen; *Estudiando el libro de Álgebra de Baldor*, Primer Volumen; *Estudiando el libro de Aritmética de Baldor*, Primer Volumen; y, *Estudiando el libro de Geometría y Trigonometría de Baldor*, Primer Volumen.

"Es bueno recordar, que hace un tiempecito, ya habíamos publicado dos libros matemáticos, a saber: *Explorando el camino de la Economía Matemática*; y, *Estudiando el libro de Álgebra Superior de S. Moyer*.

"Los cuatro libros citados, más arriba, expresan el cierre del primer ciclo y, por consiguiente, el inicio de un segundo ciclo que corresponderá al Segundo Volumen de cada uno de ellos.

"Pero regresemos a *Estudiando el libro de Geometría y Trigonometría de Baldor*, que es el objeto de esta presentación. Me siento fascinado con la Geometría porque nos enseña a formular hipótesis, tesis y la demostración de esta última.

"Claro, debemos recordar que estamos en una etapa de estudiando libros de matemáticas que otros han escrito; estamos aprendiendo, lo que implica que las respuestas que proporcionamos hay que verlas en un contexto de discusión. Las mismas podrían ser correctas o podrían ser erradas. Lo importante es hacer un esfuerzo propio.

"Advertirá el lector que alternamos la solución de ejercicios que el libro denomina adicionales, con la solución de ejercicios que van apareciendo en cada capítulo en la medida que se va avanzando en el contenido de cada uno de ellos. Los ejercicios adicionales aparecen a partir de la página E-5 del libro, que nos parecen son un poco más sencillos que los contenidos propiamente por cada capítulo.

"La solución de los ejercicios adicionales es muy importante, puesto que sirve para afianzar los conocimientos que vamos obteniendo.

"En algunos casos no pude resolver ejercicios propuestos. Hice el esfuerzo, pero no fue posible. Me interné en Google, más nadie pudo ayudarme. De todos modos, la cantidad de ejercicios resueltos fue apreciable". (FIN).

Dr. Manuel de Jesús Linares Jiménez
Enero 2023.

1

EJERCICIO ADICIONAL 1
(Breve reseña histórica, pp. 1-6)

“Breve reseña histórica” del libro *Geometría y Trigonometría Baldor*, va desde la página tres (3) hasta la seis (6).

Introducción

Curiosamente comenzamos a desarrollar el primer ejercicio adicional que presenta el libro que estamos estudiando, *Geometría y Trigonometría de Baldor*, en la página E-5, debido a que se fundamenta en sus primeras seis (6) páginas, las cuales están relacionadas con una “Breve reseña histórica”. Estas páginas las leímos atentamente para responder correctamente las preguntas que nos plantearon.

Preguntas y respuestas

El libro, en la página expuesta arriba, cita estos tópicos:

Babilonia, Egipto, Grecia
Tales de Mileto
Pitágoras de Samos
Euclides *(Elementos)*
Platón
Arquímedes de Siracusa
Apolonio de Perga
Herón de Alejandría
Geometrías no euclidianas
Lobatchevsky
Riemann

Y luego formula dos preguntas:

a) ¿Cómo contribuyeron estos científicos en la formación de la Geometría?

b) Ejemplos sobre la aplicación de la Geometría en los problemas prácticos.

Mi respuesta a la pregunta a):

Al leer las páginas citadas arriba, de los elementos introductorios que hace el libro que estamos estudiando, aprendí que los babilonios contribuyeron de manera notable al surgimiento de la

Geometría como ciencia; insistieron en descubrir las propiedades de la circunferencia; postularon que la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro era igual a 3; obtuvieron el grado sexagesimal y conocieron una fórmula para hallar el área del trapecio rectángulo.

Por su parte los egipcios, aportaron a la formación de la Geometría, que significa medición de la tierra, precisamente en la problemática agrícola, referida a la ocupación del río Nilo a la ocupación de tierra cultivable; para ellos era importante medir la tierra, para tener idea de pago de impuestos; igualmente los egipcios necesitaban de la Geometría para el impulso de la construcción. Asimismo, contribuyeron al estudio científico del área del triángulo isósceles, área del trapecio isósceles y del área del círculo.

Los griegos efectuaron un aporte grandioso al desarrollo de la Geometría, pues impulsaron la Geometría deductiva.

Tales de Mileto, representa los comienzos de la Geometría como ciencia racional; Pitágoras, funda la escuela pitagórica; Euclides, pasó a la historia a partir de su magnífico libro denominado *Elementos*. Euclides construyó la Geometría partiendo de definiciones, postulados y axiomas; Platón, dividió la Geometría en elemental y superior; Arquímedes de Siracusa, fue una especie de genio técnico, sus descubrimientos los puso al servicio de la técnica; finalmente, la Geometría no euclidiana, se fundamentó en algunas críticas que les hicieron a los fundamentos de la Geometría euclidiana.

Mi respuesta al punto b):

La geometría permitió que los egipcios pudieran incidir para resolver el problema de la división de la tierra y su cultivo; igualmente, a través de la Geometría, los egipcios pudieron incidir sobre la construcción de monumentos.

El libro, más adelante va hacia los ejercicios adicionales.

Pregunta:

1. ¿A quién se debe el descubrimiento y la demostración de la relación $a^2= b^2+c^2$ para cualquier triangulo rectángulo?

Mi respuesta:

En la página 4 del libro que estamos estudiando, aprendimos que ese descubrimiento se debe a Pitágoras. Por cierto, en dicha página, parece que hay un error, en el epígrafe referido a Pitágoras, colocaron la siguiente fórmula: $a^2= b^2+c^1$, cuando debieron poner $a^2= b^2+c^2$.

2. Señalar, dice el libro, qué aportaciones dio Euclides a la Geometría.

Mi respuesta:

El libro que estamos estudiando, en la página cuatro (4), nos dice que Euclides *"Escribió una de las obras más famosas de todos los tiempos, llamada Elementos, que consta de 13 capítulos titulados libros"*. (Comillas y cursiva son nuestras).

3. Pregunta el libro: ¿Quién demostró la fórmula para hallar el área de un triángulo en función de sus lados?

Mi respuesta:

El libro que estamos estudiando, en la página seis (6), nos dice lo siguiente: *"Herón de Alejandría (Siglo II d. C.). Demostró la conocida fórmula que lleva su nombre, para hallar el área de un triángulo en función de sus lados"*. (Comillas y cursiva son nuestras).

4. Pregunta el libro: ¿En dónde comienza a formarse la Geometría como ciencia deductiva?

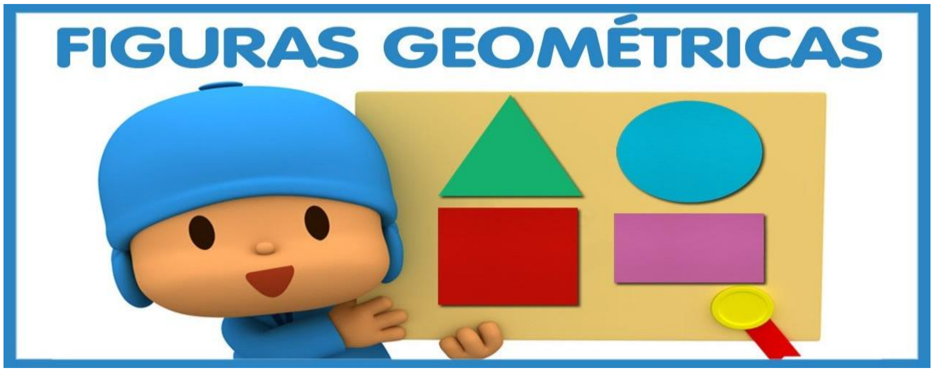
Mi respuesta:

El libro que estamos estudiando, en la página cuatro (4), nos dice lo siguiente: *"En Grecia comienza la Geometría como ciencia deductiva"*. (Comillas y cursiva son nuestras).

5. Pregunta el libro: ¿En qué principios se basa la Geometría euclidiana?

Mi respuesta:

El libro que estamos estudiando, en la página cinco (5), nos dice lo siguiente: *"Euclides construyó la Geometría partiendo de definiciones, postulados y axiomas con los cuales demostró teoremas que, a su vez, le sirvieron para demostrar otros teoremas"*. (Comillas y cursiva son nuestras).


FIGURAS GEOMÉTRICAS

2

EJERCICIO ADICIONAL 2
(Generalidades, pp. 7-10)

Introducción

Las generalidades constituyen el capítulo I del libro que estamos estudiando, *Geometría y Trigonometría de Baldor*.

Esas generalidades van desde la página 7 hasta la 21, pero el segundo ejercicio adicional, que versa precisamente sobre generalidades, solamente abarca desde la página 7 hasta la 10. En efecto, estas páginas las leí muy bien para poder responder las preguntas que integran el segundo ejercicio adicional.

El contenido del segundo ejercicio adicional se encuentra la página E-6. Aquí, precisamente en la página E-6, el libro indica las secciones principales plasmadas en las paginas 7-10, a saber: Método deductivo, Axioma, Postulado, Teorema, Corolario, Teorema reciproco, Lema, Nota y Problema.

Preguntas y respuestas

De inmediato el libro señala que esos son puntos importantes y al respecto formula dos mandatos:

a) Diferencia fundamental entre los conceptos citados arriba;

b) Aplicación de los conceptos citados arriba por medio de ejemplos.

Mi respuesta al mandato a):

Axioma y postulado tienen un gran parecido. El primero, dice el libro que estamos estudiando, *Geometría y Trigonometría Baldor*, en la página 7, que *"Es una proposición tan sencilla y evidente que se admite sin demostración"*. (Comillas y cursiva son nuestras). Igualmente, sobre el postulado, en la página 8, dice: *"Es una proposición no tan evidente como un axioma, pero que también se admite sin demostración"*. (Comillas y cursiva son nuestras). ¿Dónde radica la diferencia? Simplemente en que el postulado es un poco menos evidente que el axioma.

El teorema, en cambio, difiere del axioma y del postulado en el hecho de que se amerita demostrar su veracidad. El corolario, a su vez, derívase del teorema, es una consecuencia del teorema. Éste es lo primario, el corolario es una consecuencia de teorema. Asimismo el teorema recíproco depende del teorema primario, sin éste es imposible que existiera el recíproco. El lema mantiene una relación estrecha con el teorema, es como si fuera su avanzada, para ir tras la demostración del teorema. Mientras que nota o escolio es una especie de observación a un teorema que previamente ha sido demostrado. (Véase *Geometría y Trigonometría de Baldor*, pp.7-9).

Mi respuesta al mandato b):

a) Ejemplo de un axioma: El todo es mayor que cualquiera de sus partes; b) ejemplo de postulado: Hay infinitos puntos; c) ejemplo de un teorema: La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos; d) ejemplo de un corolario: La suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es igual a un ángulo recto; e) ejemplo de un teorema recíproco: el recíproco del teorema, "La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos", es el siguiente: Si la suma de los ángulos interiores de un polígono es igual a dos ángulos rectos, el polígono es un triángulo; f) ejemplo de un lema: Un prisma triangular se puede descomponer en tres tetraedros equivalentes; g) ejemplo de una nota: Después de demostrar el teorema que dice: en una misma circunferencia o en circunferencias iguales, a mayor arco corresponde mayor cuerda, se podría añadir como nota, lo siguiente: Si no se consideran arcos menores a una semicircunferencia, a mayor arco corresponde menor cuerda. (Véase *Geometría y Trigonometría de Baldor*, pp.7-9).

Los autores del libro, más adelante van hacia los que ellos denominan ejercicios adicionales.

Exigen:

1. Explicar en qué consiste el método deductivo.

Mi respuesta:

Se fundamenta en proposiciones anteriores para deducir nuevas proposiciones.

2. Decir si todo teorema recíproco es verdadero. Dar un ejemplo de acuerdo con su respuesta.

Mi respuesta:

Algunos no son verdaderos. Las diagonales de un cuadrado son iguales. Recíproco: si las diagonales de un paralelogramo son iguales, la figura es un cuadrado.

3. ¿Es posible que de un Corolario se deduzca un teorema? Dar razones.

Mi respuesta:

El Corolario depende del teorema. Es una proposición que se deduce del teorema. Luego, el teorema no se puede deducir del Corolario.

4. De los siguientes enunciados, señalar cuál es teorema, axioma, postulado o problema:

a) Construir la circunferencia que pasa por tres puntos dados.

Mi respuesta:

Es un problema.

b) El todo es mayor que sus partes.

Mi respuesta:

Es un axioma.

c) Hay infinitos puntos.

Mi respuesta:

Es un postulado.

d) La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.

Mi respuesta:

Es un teorema.

5. ¿Qué entiende por lema y por escolio?

Mi respuesta:

Lema: es una proposición que sirve a la demostración de un teorema.

Escolio: es una observación que se le hace a un teorema previamente demostrado.


a = cos

EJERCICIO ADICIONAL 3
(Generalidades, pp. 10-12)

Introducción

Las generalidades constituyen el capítulo I del libro que estamos estudiando, *Geometría y Trigonometría Baldor*.

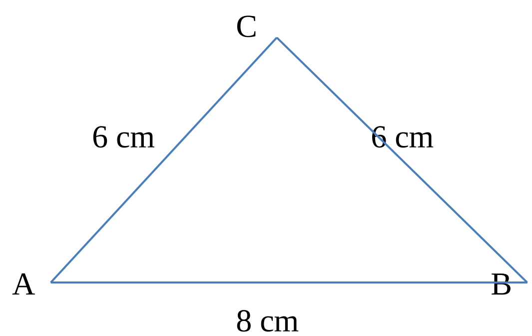
Esas generalidades van desde la página 7 hasta la 21, pero el tercer ejercicio, que versa precisamente sobre generalidades, solamente abarca desde la página 10 hasta la 12. En efecto, estas páginas las leí muy bien para poder responder las preguntas que integran el tercer ejercicio adicional.

El contenido del tercer ejercicio adicional se encuentra la página E-8. Aquí, precisamente en la página E-8, el libro indica las secciones principales plasmadas en las páginas 10-12, a saber: Punto, Línea, Cuerpos físicos y cuerpos geométricos y Superficies; en cambio, los puntos importantes serían: a) Concepto de punto y línea; b) Ejemplos de línea recta, curva, quebrada y cerrada; c) Dimensiones de punto y línea; d) Cuerpos geométricos. Sus dimensiones; e) Superficies de los cuerpos. Sus dimensiones.

Ejercicios adicionales:

1. trazar dos puntos a 8 cm de distancia uno del otro. Trazar un tercer punto que diste 6 cm de cada uno de los dos puntos anteriores. ¿Qué observas?

Mi respuesta:



Observo las siguientes características: a) Un segmento de recta AB, que mide 8 cm; b) Un segmento de recta AC, que mide 6 cm; c) Un segmento de recta BC, que mide 6 cm; d) De hecho estamos ante un triángulo isósceles, que tiene dos lados con la misma longitud. Asimismo, los dos ángulos que están frente a los lados iguales también deben medir lo mismo.

2. Trazar dos puntos sobre el papel. Trazar una línea recta que pase por ellos. ¿Puede trazarse otra línea recta que pase por dichos puntos, diferente de la anterior?

Mi respuesta:

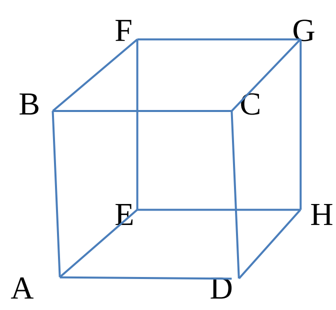
¿Puede trazarse otra línea recta que pase por dichos puntos, diferente de la anterior? No. El libro que estamos estudiando, *Geometría y Trigonometría de Baldor*, en la página 10, leemos el postulado siguiente: *"Por dos puntos pasa una recta y solamente una"*. (Comillas y cursiva son nuestras).

3. Trazar un punto en una hoja de papel. Trazar una línea recta que pase por el punto. ¿Cuántas líneas rectas se pueden trazar que pasen por dicho punto?

Mi respuesta:

Tenemos el punto A por donde pasa la línea recta MN. Indiscutiblemente por el punto A se pueden trazar infinitas rectas.

4. ¿Cuántas superficies tiene el siguiente cuerpo geométrico? Señale por medio de letras dichas superficies.

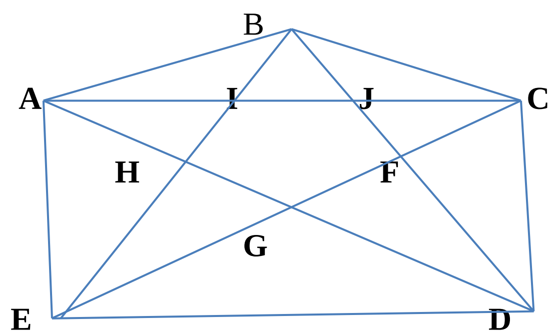


Mi respuesta:

En la página 12, el libro que estamos estudiando, *Geometría y Trigonometría de Baldor*, leemos que la *"Superficies son los límites que separan a los cuerpos del espacio que los rodea"*.

(Comillas y cursiva son nuestras). Y añade: *"Las superficies tienen dos dimensiones: largo y ancho"*. (Comillas y cursiva son nuestras). Por tanto, las superficies que presenta el cuerpo geométrico presentado arriba son las siguientes: ABCD, AEHD, EFGH, ABFE y CDHG.

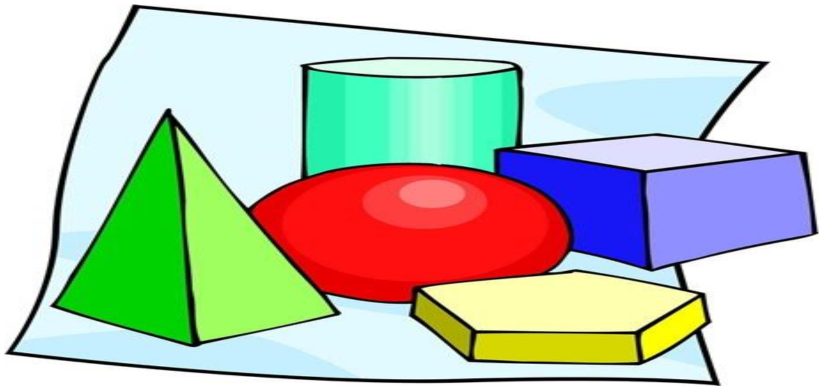
5. ¿Cuántas líneas rectas tiene la siguiente figura geométrica? ¿Es correcto decir que la figura es un cuerpo geométrico? ¿Por qué?



Esa figura geométrica tiene 20 líneas rectas, que son: AB, BC, CD, DE, AE, AH, HG, GD, BI, IH, HE, CJ, JI, IA, CF, FG, GE, DF, FJ y JB.

Evidentemente es correcto afirmar que dicha figura es un cuerpo geométrico. El libro que estamos estudiando, *Geometría y Trigonometría de Baldor*, en su página 11 dice: *"Hay esquemas ideales de ciertos cuerpos físicos de los cuales la Geometría considera solamente su forma y tamaño. Son los cuerpos geométricos o sólidos… Son los prismas, conos, esferas, etcétera"*. (Comillas y cursiva son nuestras).

Linares



4

EJERCICIO ADICIONAL 4
(Generalidades, pp. 12-14)

Introducción

El ejercicio adicional 4 se encuentra en la página E-10 y comprende las páginas 12-14 del libro que estamos estudiando, *Geometría y Trigonometría de Baldor*.

Los ejercicios adicionales propuestos por el libro son los siguientes:

Preguntas y respuestas

1. ¿Es posible que por tres puntos diferentes pasen dos planos diferentes?

Mi respuesta:

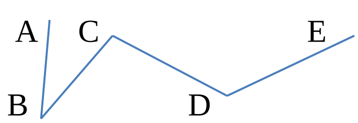
La respuesta a la pregunta 1 es no, puesto que como nos indica el postulado que aparece en la página 13 del libro que estamos estudiando, *Geometría y Trigonometría de Baldor*: *"Por tres puntos no alineados pasa un plano y solamente uno"*. (Las comillas y cursiva son nuestras).

2. ¿En cuántas formas se podría representar un plano?

Mi respuesta:

El plano se suele representar por intermedio de un paralelogramo; de extensión podría el plano ser ilimitado, particularmente desde el punto de vista matemático. (Ver página 13 de *Geometría y Trigonometría de Baldor*).

4. Medir la poligonal siguiente y dar su longitud total en centímetros.



Mis respuestas:

AB= 1 cm

BC= 1.7 cm

CD= 2 cm

DE= 1.8 cm

Longitud total= 1+1.7+2+1.8= 6.5 cm.
Nota: La medición de los segmentos no fue en función de la figura dibujada por mí en la página de arriba. Fue en función de la figura que aparece en el libro en la página E-10.

5. ¿Cuántos lados tiene la poligonal anterior? ¿Cuántos vértices?

Mis respuestas:

Tiene cuatro lados (AB, BC, CD y DE); además tiene tres vértices (B, C y D). El libro que estamos estudiando, *Geometría y Trigonometría de Baldor*, nos orienta al respecto en la página 14: *"A las líneas quebradas se les llama también poligonales y, en este caso, los segmentos que las forman reciben el nombre de lados y a los puntos comunes de los lados se les nombran vértices"*. (Comillas, cursiva y el subrayado son nuestros).

5

EJERCICIO ADICIONAL 5
(Generalidades, pp. 14-17)

Introducción

El ejercicio adicional 5 se encuentra en la página E-11 y comprende las páginas 14-17 del capítulo I del libro.

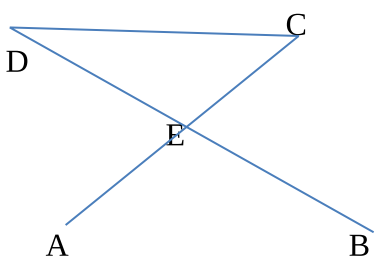
Ejercicios adicionales:

2. Con base en la figura de más abajo, completar lo siguiente:

BD= DE+

AC= AE+

EB= BD-



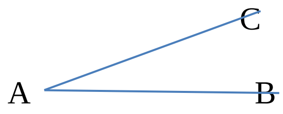
Mi respuesta:

BD= DE+EB

AC= AE+EC

EB= BD-ED

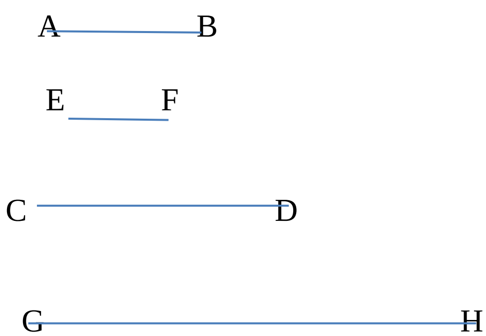
3. El segmento AB mide 4 cm. Dividir el segmento AC en las mismas partes que el segmento AB. ¿Cuánto mide cada parte de AC?



Mi respuesta:

En el libro la figura que estamos discutiendo el segmento AB está dividido en cuatro partes iguales; cada parte mide un centímetro. Si el segmento AC es dividido igualmente en las mismas cuatro partes que el segmento AB, obviamente cada parte de AC medirá un centímetro. En la página 16 del libro *Geometría y Trigonometría de Baldor*, después de explicar el proceso de división de un segmento en partes iguales, hace la siguiente observación: *"Las operaciones anteriores se pueden efectuar midiendo los segmentos y operando con las medidas obtenidas"*. (Comillas y cursiva son nuestras). En efecto, este fue el procedimiento que usamos.

4. Dados los segmentos siguientes, completar lo que a continuación se expresa, con los signos =, < o >:



a) AB<CD

b) AB>EF

c) GH>AB

d) EF<CD

5. ¿En cuántas partes podría dividir un segmento dado?

Mi respuesta:

En Google encontré la siguiente orientación: La división de un segmento en partes iguales, consiste en fraccionar un segmento de longitud conocida en varias de la misma longitud. Para ello se suele utilizar el teorema de Tales que dice *"cuando dos rectas paralelas cortan a dos rectas secantes, determinan en éstas segmentos proporcionales"*. (Comillas y cursiva son nuestras).

I

EJERCICIOS CORRESPONDIENTES AL CAPÍTULO I GENERALIDADES (pp.. 7-18)

Introducción

El capítulo I, Generalidades, del libro *Geometría y Trigonometría de Baldor*, va desde la página 7 hasta la 21.

Los ejercicios correspondientes a ese primer capítulo comienzan en la página 18 y concluyen en la 21. Estos ejercicios se caracterizan por el hecho de que muchos de ellos poseen sus respuestas en la misma página en que aparece el mandato o pregunta.

Preguntas o mandatos y respuestas:

1. Señalar cuál es el axioma:

a) En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

b) La suma de las partes es igual al todo.

c) En todo triangulo isósceles, los ángulos de la base son iguales.

Respuesta del libro: b).

Mi respuesta:

Coincidimos con el libro, la respuesta es la b), puesto que si estamos buscando un axioma, tenemos que recordar que el libro que estamos estudiando, *Geometría y Trigonometría de Baldor*, dice en la página 7, que axioma *"Es una proposición tan sencilla y evidente que se admite sin demostración".* (Comillas y cursiva son nuestras). En efecto, la proposición la suma de las partes es igual al todo, es extremadamente evidente, no necesita demostración. No así, las otras alternativas que aparecen allí. La alternativa a) debe ser demostrada pues no es un axioma, es un teorema pitagórico. La alternativa c), debe ser demostrada pues no es un axioma, es un teorema. En Google encuentro que *"Por el teorema de ángulos base, conocemos que ángulos opuestos a lados congruentes en un triángulo isósceles son congruentes. Entonces, si los tres lados del triángulo son congruentes, entonces todos los ángulos son congruentes también"*. (Comillas y cursiva son nuestras).

2. Señalar cuál es el postulado:

a) El todo es mayor que cualquiera de las partes.

b) Todo punto en la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo.

c) Hay infinitos puntos.

Respuesta del libro: c).

Mi respuesta:

Para responder correctamente debemos tener bien claro el concepto de postulado. El libro que estamos estudiando, *Geometría y Trigonometría de Baldor*, en la página 8, dice que el postulado *"Es una proposición no tan evidente como un axioma, pero que también se admite sin demostración"*. (Comillas y cursiva son nuestras). La alternativa a) no es un postulado, es un axioma, porque es muy evidente que el todo es mayor que cualquiera de las partes. La alternativa b), sin duda, es un teorema. Por decantación, la alternativa c) es la respuesta correcta; constituye un postulado; precisamente en la página 10, del libro que estamos estudiando, *Geometría y Trigonometría de Baldor*, leemos:

"Ya hemos dicho que el punto no se define. La idea de punto esta sugerida por la huella que deja en el papel un lápiz bien afilado.

"Un punto geométrico es imaginario tan pequeño que arece de dimensión.

"Admitamos el siguiente postulado:

"Hay infinitos puntos". (Comillas y cursiva son nuestras).

3. Señalar cuál es el teorema:

a) Las diagonales de un rectángulo se cortan en su punto medio.

b) Dos cantidades iguales a una tercera, son iguales entre sí.

c) La parte es menor que el todo.

Respuesta del libro, a).

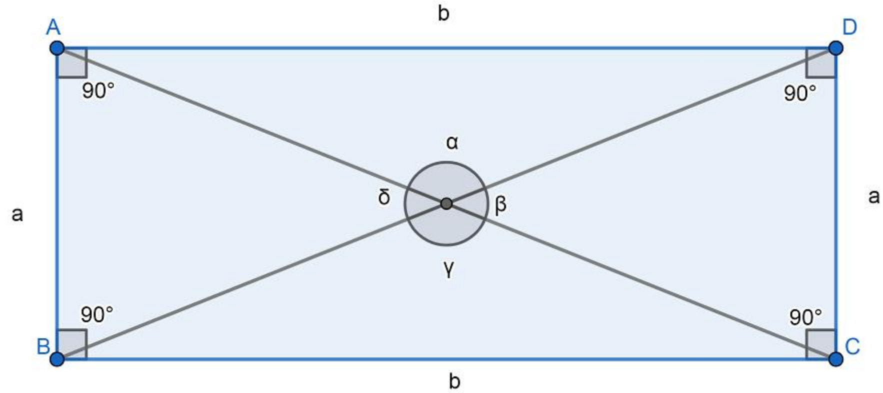
Mi respuesta:

Ciertamente la alternativa a) constituye la respuesta correcta. No puede ser la alternativa c), debido a que encierra una proposición muy evidente que no necesita demostración, es un axioma. No puede ser la alternativa b), porque si bien no es tan evidente como un axioma, en verdad no necesita demostración, es un postulado. Luego, la respuesta es la alternativa a).

En Google, encontramos esta explicación:

"La diagonal de un rectángulo es aquel segmento que une dos aristas no consecutivas de la figura. De ese modo, todo rectángulo tiene dos diagonales.

*"Para explicarlo de otra forma, las diagonales son líneas inclinadas que unen dos **vértices** opuestos de la figura. En la imagen inferior, las diagonales son AC y DB.*



"Al cruzarse, las diagonales del rectángulo forman dos pares de ángulos iguales. Así, los ángulos que son iguales son aquellos opuestos por el vértice. Es decir, α es igual a γ β es igual a δ.

*"Recordemos que el rectángulo es un **cuadrilátero** que se caracteriza porque sus lados opuestos miden lo mismo. Como observamos en la imagen superior, AD tiene la misma longitud que BC, mientras que AB y CD también son iguales, y su longitud es menor que la de los otros dos lados.*

"Para ser más específico, un rectángulo es un tipo de paralelogramo, que es un tipo de cuadrilátero donde los opuestos son paralelos, es decir, no se cruzan ni en su prolongación.

*"Además, es importante recordar que todos los **ángulos interiores** del rectángulo son rectos, es decir, miden 90º".* (Comillas y cursiva son nuestras).

4. Representar los segmentos y sumarlos gráficamente.

a) AB= 1.5 cm.

b) CD= 2 cm.

c) EF= 3 cm.

Mis respuestas:

A ——— B

C ———— D

E F

Ahora procedemos a sumar los segmentos AB, CD y EF, siguiendo la orientación del libro que estamos estudiando, *Geometría y Trigonometría de Baldor*, y que se encuentra en la página 15. Veamos:

P C D
M N
A B E F

¿Qué hicimos? Lo que indica el libro, en la página 15: *"Sobre una recta indefinida MN y a partir de un punto cualquiera P, se llevan los segmentos que se van a sumar, en un sentido determinado, uno a continuación de otro, haciendo que el extremo de cada sumando coincida con el origen del siguiente. El segmento AF, que tiene por origen el origen del primero y por extremo el extremo del último, representa la suma: AB+CD+EF= AF"*. (Comillas y cursiva son nuestras).

5. Representar los segmentos y restarlos gráficamente.

a) MN= 8 cm.

b) PQ= 3 cm.

Mis respuestas:

Supongamos que el segmento MN sea de 8 cm.; y que el segmento PQ sea de 3 cm.

M N

P Q

Ahora procedemos a restar los segmentos MN y PQ, siguiendo la orientación del libro que estamos estudiando, *Geometría y Trigonometría de Baldor*, y que se encuentra en la página 15. Veamos:

M N

P Q

M N
P Q

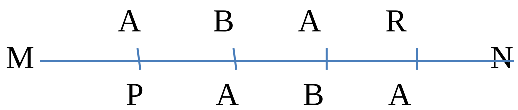
Sobre el segmento minuendo MN se lleva el segmento sustraendo PQ, de manera tal que coincidan M y P. El segmento resultante QN representa la diferencia, es decir, MN-PQ= QN.

6. Multiplicar de manera gráfica el segmento AB= 2 cm por 3.

Mi respuesta:

Supongamos que el segmento de 2 cm es el siguiente:

A——B= AB= 2cm.
¿Cómo multiplicamos ese segmento por un número real? El libro *Geometría y Trigonometría de Baldor*, en la página 16 orienta sobre el procedimiento que debemos emplear para hacer la multiplicación. Dice: El producto del segmento AB por un número natural, 3, se obtiene llevando sobre una recta cualquiera MN y a partir de un punto cualquiera de ella, P, el segmento AB, tantas veces como indica el número, 3, por el cual se va a multiplicar. Así: PR= 3AB. Veamos el gráfico:

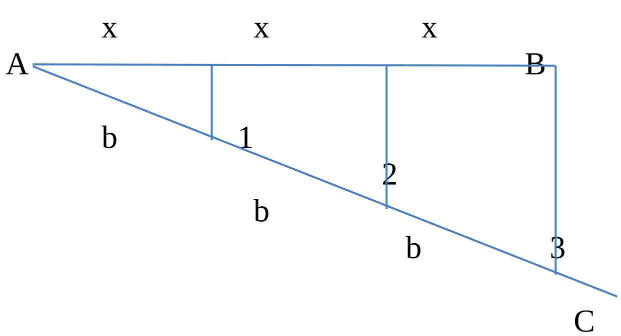


7. Dividir de manera gráfica el segmento AB= 9 cm en tres partes iguales.

Mi respuesta:

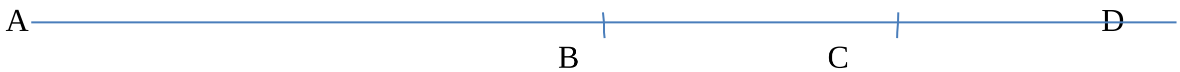
En la página 16 de *Geometría y Trigonometría de Baldor*, tenemos la orientación para efectuar la división del segmento AB. Aquí leemos: "A partir de uno de los extremos del segmento AB, se traza una semirrecta AC, con cualquier inclinación. Sobre AC y a partir de A, se lleva un segmento de cualquier longitud b, tantas veces (3 en nuestro caso) como indica el divisor. El extremo del último segmento b, se une con B y se trazan paralelas al segmento B3 por los puntos 1, 2, 3, etc. Tendremos:

X= AB/3= 9/3= 3



8. Si B es el punto medio de AD, C es el punto medio de BD y AD= 20 cm; hallar AB, BC y CD.

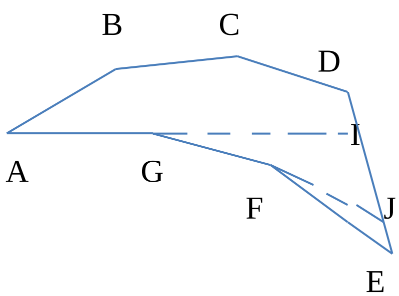
El libro tiene las siguientes respuestas: AB= 10cm; DC=BC= 5 cm.



Mi respuesta:

Si AD= 20 cm, y B es el punto medio de AD, entonces AB= 10 cm. Igualmente BD= 10 cm, y siendo C el punto medio de BD, entonces BC= 5 cm e igualmente CD= 5 cm. Por tanto, las respuestas dadas por el libro son correctas.

9. Demostrar que AB+BC+CD+DE >AG+GF+FE



Mi respuesta:

Teorema:
En dos poligonales convexas, de extremos comunes, la envolvente es mayor que la envuelta.

Hipótesis:
ABCDE poligonal envolvente.
AGFE poligonal envuelta.
A y E extremos comunes.

Tesis:
La sumatoria de los segmentos AB+BC+CD+DE es mayor que la sumatoria de los segmentos AG+GF+FE, es decir, AB+BC+CD+DE > AG+GF+FE.

Construcción auxiliar:
Prolonguemos AG hasta cortar a DE en I.
Prolonguemos GF hasta cortar a DE e J.

Demostración:
Podemos iniciar la demostración usando el postulado de la menor distancia entre dos puntos.

En ABCDIG:

AB+BC+CD+DI > AG+GI (1)

En GIJF:
GI+IJ > GF+FJ (2)

En FJE:
FJ+JE > FE (3)
Sumando (1)+(2)+(3), tendremos:
(AB+BC+CD+DI)+(GI+IJ)+(FJ+JE) > (AG+GI)+(GF+FJ)+(FE) (4)

Acudimos a la suma de segmentos:
DI+IJ+JE= DE (5)

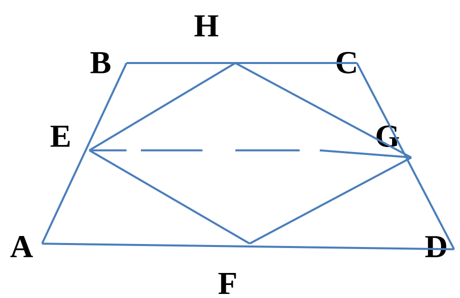
Sustituyendo (5) en (4), tenemos:

AB+BC+CD+DE+GI+FJ > AG+GI+GF+FJ+FE

Simplificando quedan suprimidos los segmentos GI y FJ, que aparecen en ambos lados de la desigualdad y tenemos:

AB+BC+CD+DE > AG+GF+FE como se quería demostrar.

11. Demostrar: AB+BC+CD+DA > EF+FG+GH+HE



Mi respuesta:

Teorema 1:
En dos poligonales convexas, la envolvente es mayor que la envuelta.

Hipótesis:
ABCD poligonal envolvente.
EFGH poligonal envuelta.

Tesis:
AB+BC+CD+DA > EF+FG++GH+HE

Construcción auxiliar:

Trazamos el segmento EG, desde el punto E hasta el punto G, dividiendo la figura dada en dos partes, superior e inferior, respecto al segmento EG.

Demostración, tomando como base el postulado de la menor distancia entre dos puntos:
EB+BC+CG > EH+HG (1)
EA+AD+DG > EF+FG (2)

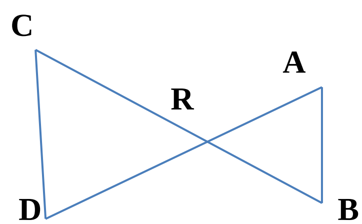
Sumando (1) y (2):
(EB+BC+CG)+(EA+AD+DG) > (EH+HG)+(EF+FG) (3)

Suma de segmentos:
EB+EA= AB (4)
CG+DG= CD (5)

Sustituyendo (4) y (5) en (3), tenemos:

AB+BC+CD+DA > EF+FG+GH+HE lo cual quería demostrar.

13. Demostrar que la suma de dos segmentos que se cortan es mayor que la suma de los segmentos que unen sus extremos.



Mi respuesta:

Teorema:
La suma de dos segmentos que se cortan es mayor que la suma de los segmentos que unen sus extremos.

Hipótesis:
Los segmentos que se cortan, en el punto R, son BC y AD.
Los segmentos que unen los extremos son AB y CD.

Tesis:
BC+AD > AB+CD.

Demostración:
CR+RD > CD (1)
AR+BR > AB (2)

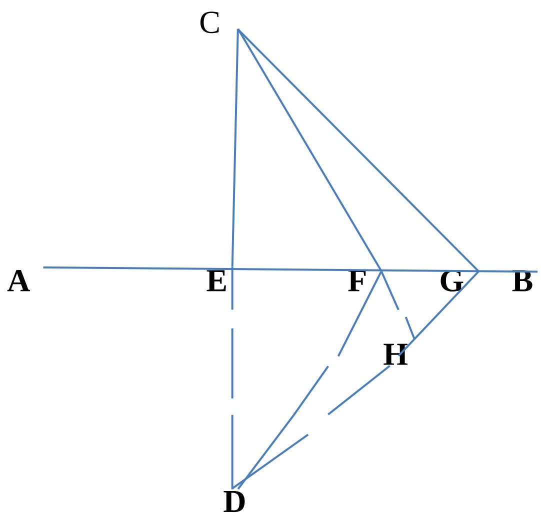
Sumando (1) y (2):

(CR+RD)+ (AR+BR) > (CD)+(AB)

Luego, usando simetría de extremos y suma de segmentos, tenemos:

(CR+BR)+(AR+RD) > (CD)+(AB) lo cual queríamos demostrar.

15. Si E es la intersección de CD con AB y CG= GD, CF= FD, CE= ED. Demostrar que: CG >CF > CE.



Teorema 1:
De hecho estamos nuevamente ante el teorema de dos poligonales convexas, donde la envolvente es mayor que la envuelta.

Hipótesis:
E es la intersección de CD con AB, y CG= GD, CF=FD, CE= ED.
Tesis:
CG > CF > CE.

Construcción auxiliar:
Prolonguemos CF hasta cortar GD en H.

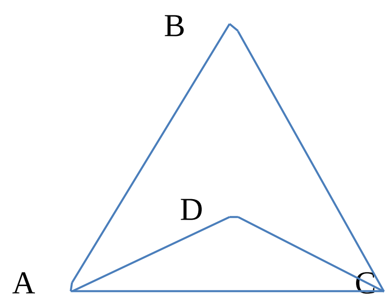
Usando el postulado de la menor distancia entre dos puntos, tenemos:
CG+GH > CF+FH (1)
FH+HD > DF (2)
CF+FD > CE+ED (3)

Procedemos a sumar (1), (2) y (3):
(CG+GH)+(FH+HD)+(CF+FD) > (CF+FH)+(DF)+(CE+ED)

(CG+GH)+HD>CE

Al usar las hipótesis, tenemos:
(GD+GH)+(FH+HD)+(CF+CF) > (CF+FH)+(CF)+(CE+CE)
(GD+GH)+(FH+HD)+2CF > 2CF+FH+2CE
GD+GH+HD > 2CE
CG+GH+HD
Como CG= GD, CF=FD, CE= ED.

17. Demostrar que el perímetro del triángulo ABC es mayor que el perímetro del triángulo ADC.



Mi respuesta:

Teorema 1:
De hecho estamos nuevamente ante el teorema de dos poligonales convexas, de extremos comunes, donde la envolvente es mayor que la envuelta.

Hipótesis:
La hipótesis para resolver este problema es: los triángulos ABC y ADC comparten como base el segmento AC; tienen como extremos comunes A y C; de hecho la poligonal envolvente es ABC y la poligonal envuelta es ADC.
Tesis:
AB+BC+AC> AD+DC+AC.

Demostración:
Como el segmento AC se repite en ambos miembros de la desigualdad, con signo positivo, al pasarlo al primer miembro o al segundo miembro cambia de signo y se puede simplificar, quedando: AB+BC> AD+DC, lo cual queríamos demostrar.

6

EJERCICIO ADICIONAL 6
(Generalidades, pp. 17-21)

Introducción

El ejercicio adicional 6 se encuentra en la página E-13 y comprende las páginas 17-21 del libro que estamos estudiando, *Geometría y Trigonometría de Baldor*.

Preguntas y respuestas

El libro de inmediato procede a desarrollar los denominados ejercicios adicionales.

2. ¿Cómo se llama la Geometría que estudia los cuerpos geométricos?

Mi respuesta:

El libro que estamos estudiando, *Geometría y Trigonometría de Baldor*, en la página 17 dice: La Geometría *"Cuando estudia figuras contenidas en un plano (o sea, de dos dimensiones), se llama Geometría plana. Si estudia cuerpos geométricos (de tres dimensiones), se llama Geometría del espacio"*. (Comillas y cursiva son nuestras). Por tanto, la respuesta es Geometría del espacio.

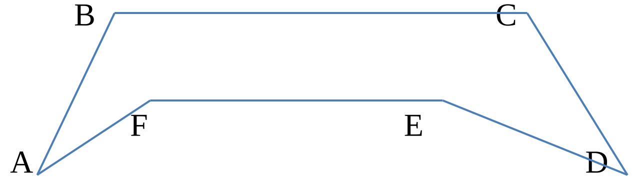
3. Citar tres tipos de Geometría diferentes que se estudian dentro de las Matemáticas.

Mi respuesta:

Geometría analítica, Geometría descriptiva y Geometría proyectiva.

4. Dibujar una poligonal señalando cuál es la envolvente y cuál la envuelta.

Mi respuesta:



La envolvente es la poligonal ABCD y la envuelta es AFED.

5. ¿Por qué las poligonales son convexas? Si no son convexas, ¿es posible que la envuelta sea mayor que la envolvente?

Son convexas porque como dice el libro que estamos estudiando, *Geometría y Trigonometría de Baldor*, en la página 14, *"…al prolongar en los dos sentidos algunos de sus lados, toda la poligonal queda en un mismo semiplano"*, (comillas y cursiva son nuestras), por tanto se facilita la demostración de la tesis que se haya formulado. En caso que las poligonales no fueran convexas, lo que podríamos asegurar sin duda es que la demostración de la tesis se dificultaría.

II

EJERCICIOS CORRESPONDIENTES AL CAPÍTULO II
ÁNGULOS (pp. 22-31)

Introducción

Estos ejercicios comienzan en la página 29 y concluyen en la 31; y, reflejan el contenido del capítulo II (Ángulos) del libro *Geometría y trigonometría de Baldor*. Este capítulo comienza en la página 22 y concluye en la página 31. Comencemos:

1. Expresar los siguientes ángulos en el sistema sexagesimal:
a) 3.14 rad
b) 9.42 rad

El libro suministra la respuesta a) que es 180º; y la respuesta b) que es 540º.

Mis respuestas:

Ante todo precisemos el concepto de ángulo. En la página 22 del libro que estamos estudiando, es decir, *Geometría y Trigonometría de Baldor*, leemos: *"Es la abertura formada por dos semirrectas con un mismo origen llamado vértice. Las semirrectas se llaman lados. El ángulo se designa por una letra mayúscula situada en el vértice…"* (Comillas, cursiva y puntos suspensivos son nuestros). En la página 24 de *Geometría y Trigonometría de Baldor*, advertimos la fórmula que debemos usar para expresar en grados sexagesimales un ángulo cuyas medidas aparecen en radianes. Esta es la fórmula: S/180º= R/π, donde S= medida de un ángulo en grados sexagesimales; R= medida del mismo ángulo en radianes; y, $\pi = 3.1416$. Procedamos:

S/180º= R/π

Sustitución:

S/180º= 3.14/3.14= S/180º= 1

Despejamos:

S= 1(180º)= 180º

Nuestra respuesta coincide con la del libro.

Pasemos a la respuesta b):

S/180º= R/π

Sustitución:

S/180º= 9.42/3.14= S/180º= 3
Despejamos

S= 3(180º)= 540º

Nuestra respuesta coincide con la del libro.

2. Expresar los siguientes ángulos en el sistema circular:
a) 45º
b) 135º

El libro suministra la respuesta a) que es 0.785 rad; y la respuesta b) que es 2.35 rad.

Mis respuestas:

En las páginas 23-24 de *Geometría y Trigonometría de Baldor* leemos: *"Sistema circular. En este sistema se usa como unidad el ángulo llamado radian. "Un radian es el ángulo cuyos lados comprenden un arco cuya longitud es igual al radio de la circunferencia. "Como la longitud de una circunferencia es 2π radios, resulta que un ángulo de 360º equivale a 2π radianes, es decir, 6.28 radianes, dándole a π el valor de 3.14"*. (Comillas y cursiva son nuestras).

Partimos de la fórmula siguiente:

S/180º= R/π

Sustitución:

45º/180º= R/ 3.14

R= (3.14)(45/180)= 0.785 rad.

Nuestra respuesta coincide con la del libro.

Pasemos a la respuesta b):

S/180º= R/π
135º /180º= R/3.14

R= 2.355 Rad.

Nuestra respuesta coincide con la del libro.

5. Hallar los complementos de los siguientes ángulos:
a) 18º
b) 36º52’
c) 48º39’15’’

El libro suministra la respuesta a) que es 72º; la respuesta b) que es 53º8’; y la respuesta c) que es 41º20’45’’.

Mis respuestas

Es conveniente que veamos los conceptos de ángulos complementarios y de complemento de un ángulo. Esta orientación la encontramos en la página 25 del libro *Geometría y Trigonometría de Baldor*. Leemos: *“Son dos ángulos que sumados valen un ángulo recto, es decir, 90º”*. (Comillas y cursiva son nuestras). Y agrega: *“Se llama complemento de un ángulo a lo que le falta a éste para igualar un ángulo recto”*. (Comillas y cursiva son nuestras). Comencemos a formular las respuestas:

90º-18º= 72º

Nuestra respuesta coincide con la del libro.

90º-36º= 54º
Reducimos un grado de los 54, para convertirlo en minutos y tendremos:
54º-1º= 53º
1º= 60’, por tanto,
60’-52’= 8’

Resultado final: 53º8’.

Nuestra respuesta coincide con la del libro.

90º-48º= 42º
Reducimos un grado de los 42, para convertirlo en minutos y tendremos:
42º-1º= 41º
1º= 60’

Reducimos un minuto de los 60’, para convertirlo en segundos y tendremos:
1’= 60’’, por tanto,
59’-39’= 20’

También tendremos 60’’-15’’= 45’’

Resultado final: 41º20’45’’.

Nuestra respuesta coincide con la del libro.

6. Encontrar los suplementos de los siguientes ángulos:

a) 78º
b) 92º15’
c) 123º9’16’’

El libro aporta las siguientes respuestas:
a) 102º;
b) 87º45’
c) 56º50’44’’

Mis respuestas:

Para formular respuestas correctas es conveniente que busquemos algunas orientaciones en el libro que estamos estudiando, *Geometría y Trigonometría de Baldor*. ¿Qué son ángulos suplementarios? En la página 26 leemos: *“Son los ángulos que sumados valen dos ángulos rectos, es decir, 180º”*. (Comillas y cursiva son nuestras). ¿Qué significa suplemento de un ángulo? El libro responde: *“Es lo que le falta al ángulo para valer dos ángulos rectos”.* (Comillas y cursiva son nuestras). Comencemos, pues:

a) 180º-78º= 102º

b) 180º-92º= 88º

88-1= 87º

1= 60’
60’-15’= 45’
Resultado final: 87º45’.

c) 180º-123= 57º
57-1= 56
1= 60’
60’-9’= 51’
51-1= 50’
50’-1’= 49
1’= 60’’
60-16= 44’’
56º 50’44’'.

Nuestras respuestas coinciden con las del libro.

7. Si el ángulo AOB es recto y el ángulo AOC y el ángulo BOC están en la relación 4:5, ¿cuánto vale cada ángulo?

El libro aporta las siguientes respuestas: el ángulo AOC= 40º y el ángulo BOC= 50º.

Mi respuesta:

Como el ángulo AOB es recto, vale 90º; y los otros dos ángulos guardan una relación 4:5, entonces el ángulo AOC vale 40º y el ángulo BOC vale 50º.

Nuestras respuestas coinciden con las del libro.

11. Hallar el ángulo que es igual a su complemento.

Es conveniente que veamos los conceptos de ángulos complementarios y de complemento de un ángulo. Esta orientación la encontramos en la página 25 del libro *Geometría y Trigonometría de Baldor*. Leemos: *"Son dos ángulos que sumados valen un ángulo recto, es decir, 90º"*. (Comillas y cursiva son nuestras). Y agrega: *"Se llama complemento de un ángulo a lo que le falta a éste para igualar un ángulo recto"*. (Comillas y cursiva son nuestras). Comencemos a formular las respuestas:

Mi respuesta:

Si estamos hablando de complemento estamos hablando de un ángulo recto que mide 90º, por tanto, el ángulo es de 90º-45º= 45º, que precisamente es igual a 45º.

12. Encontrar el ángulo que es el doble de su complemento.

Mi respuesta:

Ese ángulo es de 60º que es igual al doble de su complemento (30º). Comprobación: 30x2= 60º.

13. Hallar el ángulo que es igual a la mitad de su complemento.

Mi respuesta:

Ese ángulo es de 30º que es igual a la mitad de su complemento. El complemento es el ángulo de 60º. Comprobación 60/2= 30º.

14. Un ángulo y su complemento están en relación 5:4. Hallar dicho ángulo y su complemento.

Mi respuesta:

Aquí estamos hablando de 90º, donde el ángulo y su complemento están en una relación de 5:4, por tanto, el ángulo vale 50º y su complemento 40º, que sumados totalizan 90º.

15. Hallar el ángulo que es igual a su suplemento.

Para formular respuestas correctas es conveniente que busquemos algunas orientaciones en el libro que estamos estudiando, *Geometría y Trigonometría de Baldor*. ¿Qué son ángulos suplementarios? En la página 26 leemos: *"Son los ángulos que sumados valen dos ángulos rectos, es decir, 180º"*. (Comillas y cursiva son nuestras). ¿Qué significa suplemento de un ángulo? El libro responde: *"Es lo que le falta al ángulo para valer dos ángulos rectos"*. (Comillas y cursiva son nuestras). Comencemos, pues:

Mi respuesta:

Sin son ángulos suplementarios lo que vale uno más lo que vale el otro, el total es 180º; en consecuencia si son iguales, uno será de 90º y el otro también será de 90º.

16. Encontrar el ángulo que es igual a la mitad de su suplemento.

Mi respuesta:

El ángulo es de 60º y el suplemento es de 120º; la suma es 180º.

17. Hallar el ángulo que es igual al doble de su suplemento.

Mi respuesta:

El ángulo es de 120º y el suplemento es de 60º.

18. Un ángulo y su suplemento están en relación 5:1. Hallarlos.

Mi respuesta:

Estamos hablando de 180º. Como la relación es de 5:1, los números son 150 y 30, porque 150/30= 5; por tanto, el ángulo es de 150º y el suplemento es de 30º.

19. Dos ángulos están en relación 3:4 y su suma es igual a 70º. Hallarlos.

Mi respuesta:

Como la relación es 3:4, los números son 30 y 40, por lo que los ángulos valen 30º y 40º, que sumados totalizan 70º.

20. Dos ángulos se encuentran en relación 4:9 y su suma es igual a 130º. Hallarlos.

Mi respuesta:

Como la relación es 4:9 y su suma es 130º, los ángulos valen 40º y 90º, y de este modo 40+90= 130º.

III

EJERCICIOS CORRESPONDIENTES AL CAPÍTULO III PERPENDICULARIDAD Y PARALELISMO (pp. 32-46)

Introducción

El capítulo III comienza en la página 32 y concluye en la 46; mientras que los ejercicios correspondientes a dicho capítulo comienzan en la página 44 y llegan hasta la 46.

Preguntas y respuestas:

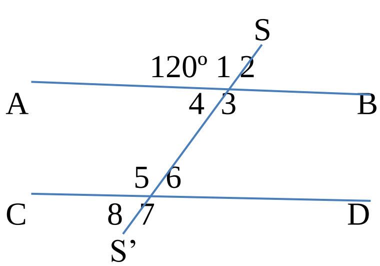
1. ¿Tiene la perpendicularidad la propiedad recíproca? ¿Y la propiedad idéntica?

El libro suministra dos respuestas. La primera, sí; la segunda, no.

Mis respuestas:

¿En qué consiste la propiedad recíproca? El libro *Geometría y Trigonometría de Baldor*, en la página 33 dice: *"CARÁCTER RECÍPROCO DE LA PERPENDICULARIDAD: Si una recta es perpendicular a otra, ésta es perpendicular a la primera"*. (Comillas y cursiva son nuestras). Indiscutiblemente la primera respuesta es sí. Coincidimos con la respuesta del libro. Para la segunda respuesta partiremos de un ejemplo. Si tenemos una figura, como la 33, de la página 33 del libro que estamos estudiando, *Geometría y Trigonometría de Baldor*, y la denominamos AB y un punto P fuera de ella. Entre todas rectas que pasan por P y cortan a la recta AB, admitimos que solo una, CD, es perpendicular a AB, por consiguiente no puede ser idéntica a otra recta que no es perpendicular, es más bien oblicua. Desde este punto de vista, la respuesta es no; coincidimos nuevamente con la respuesta del libro.

2. Si AB es paralela a CD, SS' es una secante y el ángulo 1= 120º; hallar los otros ángulos.



El libro presenta las siguientes respuestas:

Ángulo 2= ángulo 4= ángulo 6= ángulo 8= 60º.

Ángulo 3= ángulo 5= ángulo 7= 120º.

Mis respuestas:

Hagamos una discusión. El libro, en la página 44, nos muestra una figura que justamente corresponde al ejercicio 2 que nos ocupa. Allí vemos la recta AB que es paralela a la recta CD. Tengo la impresión que en el ejercicio 2 estamos ante ángulos llanos. El libro que estamos estudiando, *Geometría y Trigonometría de Baldor*, en la página 25, nos dice respecto al ángulo llano que éste*: "Es aquel en el cual un lado es la prolongación del otro. Mide 180º"*. (Comillas y cursiva son nuestras). Estas características las advertimos en los ángulos llanos engendrados tanto en la recta AB, como en la recta CD. Igualmente la figura contiene la recta secante SS'. ¿Qué es una secante? En la página 40 del libro leemos: *"Al cortar dos rectas, con una tercera recta llamada secante, se forman ocho ángulos. Cuatro en cada punto de intersección".* (Comillas y cursiva son nuestras). ¿Cuántos ángulos hay en la figura dada? Efectivamente ocho (8). Más adelante, pero en la misma página 40, el libro va identificando los ángulos internos, los externos, los alternos, los conjugados y los correspondientes. Identifiquémoslos en la figura que nos han dado para el ejercicio 2, en la página 44. Comencemos:

Ángulos internos: ángulo 4 y ángulo 3, ángulo 6 y ángulo 5;

Ángulos externos: ángulo 1 y ángulo 2, ángulo 7 y ángulo 8;

Ángulos alternos: ángulo 3 y ángulo 5, ángulo 4 y ángulo 6, ángulo 1 y ángulo 7, ángulo 2 y ángulo 8;

Los ángulos alternos pueden ser:

Alternos internos (ángulo 3 y ángulo 5; ángulo 4 y ángulo 6) y alternos externos (ángulo 1 y ángulo 7; ángulo 2 y ángulo 8).

Ángulos correspondientes: ángulo 1 y ángulo 5, ángulo 2 y ángulo 6; ángulo 4 y ángulo 8, ángulo 3 y ángulo 7.

Ángulos conjugados internos: ángulo 4 y ángulo 5; ángulo 3 y ángulo 6.

Ángulos conjugados externos: ángulo 1 y ángulo 8, ángulo 2 y ángulo 7.

Respecto a los ángulos correspondientes, el libro que estamos estudiando, *Geometría y Trigonometría de Baldor*, en la página 41, nos orienta del modo siguiente: *"Toda secante forma con dos paralelas ángulos correspondientes iguales"*. (Comillas y cursiva son nuestras). Y como este postulado dice que los ángulos correspondientes son iguales, tendremos:

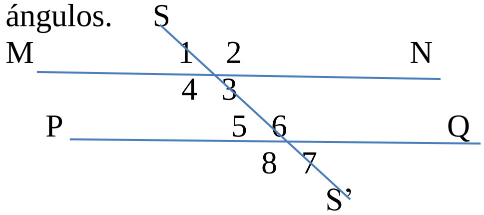
Ángulo 1= ángulo 5; ángulo 2= ángulo 6.
Ángulo 4= ángulo 8; ángulo 3= ángulo 7.

Continuemos la discusión. La primera respuesta del libro implica: Ángulo 2= ángulo 4= ángulo 6= ángulo 8= 60º.
¿Por qué el ángulo 2= ángulo 4, en la respuesta del libro? ¿Es correcto este planteamiento? Claro, porque tales ángulos son opuestos por el vértice. Oigamos el libro que estamos estudiando, *Geometría y Trigonometría de Baldor*, página 26: *"Son dos ángulos tales que los lados de uno de ellos son las prolongaciones de los lados del otro".* (Comillas y cursiva son nuestras). Y en la página 27, el libro agrega el teorema 3: *"Los ángulos opuestos por el vértice son iguales"*. (Comillas y cursiva son nuestras). Este teorema fue demostrado en la misma página 27, acudiendo al criterio de lo adyacente y al carácter transitivo de la igualdad. Discutamos ahora el planteo consistente en la igualdad de los ángulos 4 y 6. Estos ángulos son alternos internos, de los que se deriva el teorema 8, página 41: *"Toda secante forma con dos paralelas ángulos alternos internos iguales".* (Comillas y cursiva son nuestras). Este teorema aparece demostrado en las páginas 41-42, apoyándose en la igualdad de ángulos a partir de ser opuestos por el vértice, ángulos correspondientes y la transitividad. Finalmente la respuesta del libro incluye que el ángulo 6 es igual al ángulo 8, esto es correcto en virtud de que son ángulos opuestos por el vértice.

Quiere decir, entonces, que los ángulos 2, 4, 6 y 8, representan los restantes 60º, que sumados a los 120º del ángulo 1 nos proporciona un total de 180º, que es lo que mide un ángulo llano. De hecho ya sabemos cuánto miden cinco (5) ángulos de la figura del ejercicio 2, que son los siguientes ángulos: 1, 2, 4, 6 y 8; solamente nos faltan los tres (3) ángulos siguientes: 3, 5 y 7.

El libro, precisamente, en la segunda respuesta nos ha indicado que esos tres ángulos son iguales. Veamos: ¿Es cierto que el ángulo 3 es igual que el ángulo 5? Sí es cierto, debido a que son ángulos alternos internos, de los que se deriva el teorema 8, página 41: *"Toda secante forma con dos paralelas ángulos alternos internos iguales".* (Comillas y cursiva son nuestras). Este teorema aparece demostrado en las páginas 41-42, apoyándose en la igualdad de ángulos a partir de ser opuestos por el vértice, ángulos correspondientes y la transitividad. ¿Es cierto que el ángulo 5 es igual que el ángulo 7? Si es cierto. En la página 27, el libro plantea el teorema 3: *"Los ángulos opuestos por el vértice son iguales"*. (Comillas y cursiva son nuestras). Este teorema fue demostrado en la misma página 27, acudiendo al criterio de lo adyacente y al carácter transitivo de la igualdad. ¿Por qué estos tres (3) ángulos miden 180º? Porque debemos recordar que estamos trabajando con dos ángulos llanos; ya resolvimos el primero con un total de 180º e igualmente, en el segundo caso estaríamos hablando de otro ángulo llano que mide 180º. Las respuestas aportadas por el libro son correctísimas.

3. Si MN es paralela a PQ, SS’ es una secante y el ángulo 7= (ángulo 8)/2, hallar los otros ángulos.



El libro aporta las respuestas siguientes:

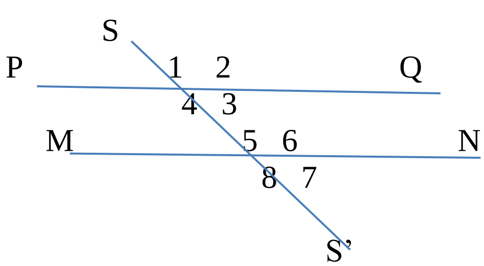
Ángulo 1= ángulo 3= ángulo 5= ángulo 7= 60º.

Ángulo 2= ángulo 4= ángulo 6= ángulo 8= 120º.

Mis respuestas:

Hagamos una discusión. La respuesta del libro, *Geometría y Trigonometría de Baldor*, indica que el ángulo 1 es igual al ángulo 3. ¿Es cierto? Claro, porque son dos ángulos opuestos por el vértice. ¿Es cierto que el ángulo 3 es igual al ángulo 5? Sí, puesto que son ángulos alternos internos. ¿Podemos afirmar que el ángulo 5 es igual al ángulo 7? Sí, ya que son ángulos opuestos por el vértice. Estos cuatro (4) ángulos, según el libro, miden en total 60º. Y como se trata de ángulos llanos, equivalentes a 180º, tendremos 180-60= 120º, es decir, los restantes cuatro ángulos deberán medir un total de 120º. Respecto a la segunda respuesta, el libro dice que el ángulo 2 es igual al ángulo 4. ¿Es correcta esta aseveración? Sí, puesto que son dos ángulos opuestos por el vértice. Dice el libro que el ángulo 4 es igual al ángulo 6. ¿Acaso es cierta esta afirmación? Sí, debido a que son ángulos alternos internos. Finalmente, ¿es verdad que el ángulo 6 es igual al ángulo 8? Correcto, son ángulos opuestos por el vértice. Estos últimos cuatro (4) ángulos deberán medir 120º, que sumados a los 60º ya calculados, tenemos los 180º del ángulo llano.

4. Si PQ es paralela a MN, SS´es una secante l y el ángulo 1 es igual 5x, el ángulo 6 es igual 13x, hallar todos los ángulos.



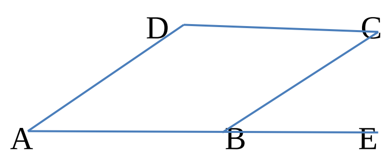
El libro aporta las respuestas siguientes:

Ángulo 1= ángulo 3= ángulo 5= ángulo 7= 50º.
Ángulo 2= ángulo 4= ángulo 6= ángulo 8= 130º.

Mis respuestas:

Hagamos una discusión. ¿Es cierto que el ángulo 1 es igual al ángulo 3? Sí, porque son ángulos opuestos por el vértice. ¿Es verdad que el ángulo 3 es igual al ángulo 5? Sí, debido a que son ángulos alternos internos. ¿Es correcto decir que el ángulo 5 es igual al ángulo 7? Sí, porque son ángulos opuestos por el vértice. Y como el ángulo 1 es igual a 5x, esto quiere decir que la relación es de 5 a 1, por tanto, dichos ángulos se ven asociados con 50º. En la segunda respuesta el libro dice que el ángulo 2= ángulo 4= ángulo 6= ángulo 8, ¿es cierto? Claro, puesto que son ángulos opuestos por el vértice, ángulos alternos internos, y opuestos por el vértice. Y como estamos hablando de ángulos llanos, teniendo copado 50 grados en los primeros cuatro ángulos, entonces el suplemento sería de 130º para los restantes cuatro ángulos.

7. Si AD es paralela BC, CD es paralela AB, el ángulo BAD= 2x y el ángulo ABC= 6x, hallar: el ángulo ABC, el ángulo BCD, el ángulo CDA, el ángulo DAB.



El libro suministra las siguientes respuestas:

Primera, el ángulo ABC= al ángulo CDA= 135º.

Segunda, el ángulo BCD= al ángulo DAB= 45º.

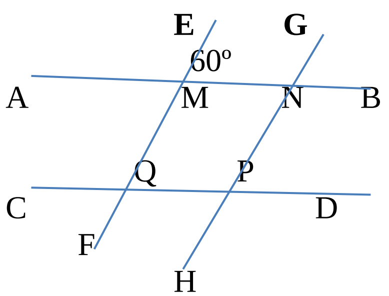
Mis respuestas:

Hagamos una discusión.

Pareciera que los ángulos BCD y DAB están relacionados con ángulos que en total miden 90º; luego podemos afirmar que BCD= DAB= 45º; en cambio, los ángulos ABC y CDA están referidos a ángulos que miden 180º; por consiguiente, 180-45= 135º. Esto es lo que miden ABC=CDA= 135º.

Coincidimos con las respuestas del libro.

8. Si AB es paralela a CD, EF es paralela GH y el ángulo EMN= 60º, hallar el ángulo HPD.



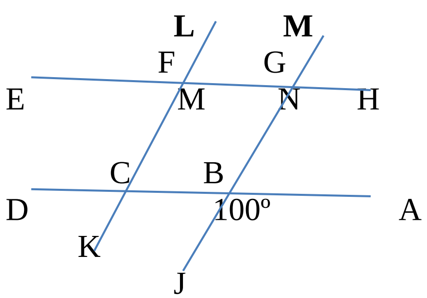
Respuesta del libro:

Angulo HPD= 120º.

Mi respuesta:

Si el ángulo EMN= 60º y HPD es el suplemento de EMN, entonces HPD= 120º, porque 60+120= 180º.

9. Si EH es paralela DA, LX es paralela MJ y el ángulo ABJ= 100º, hallar el ángulo FGB y el ángulo CFG.



Respuesta del libro:

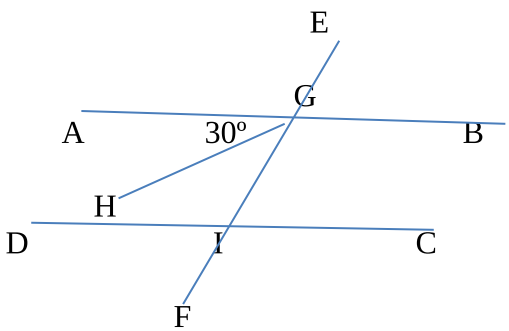
Ángulo FGB= 80º.
Ángulo CFG= 100º.

Mis respuestas:

El ángulo ABJ= 100º y como estamos ante un paralelogramo, es igual al ángulo CFG, por lo que CFG= 100º, mientras que ángulo FGB, adyacente al ABJ, medirá 180-100= 80º.

Mis respuestas coinciden con las del libro.

10. Si AB es paralela CD, EF es una secante, GH es una bisectriz del ángulo AGI y el ángulo AGH= 30º, hallar el ángulo CIF.



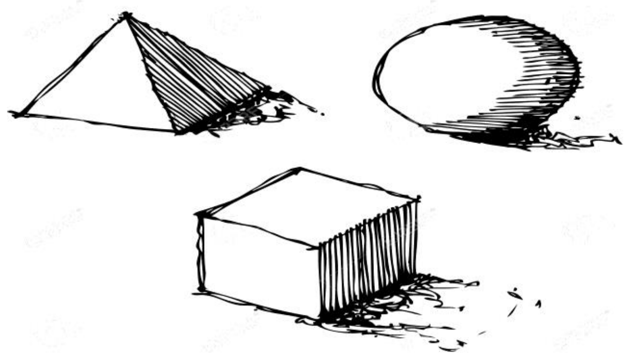
Respuesta del libro:

Ángulo CIF= 120º.

Mi respuesta:

Como la bisectriz divide el ángulo AGI en dos partes iguales, esto quiere decir que si el ángulo AGH= 30º, entonces el ángulo AGI= 60º. De modo, que el ángulo CIF será igual a 180-60= 120º, puesto que son ángulos suplementarios.

Mi respuesta coincide con la del libro.



IV

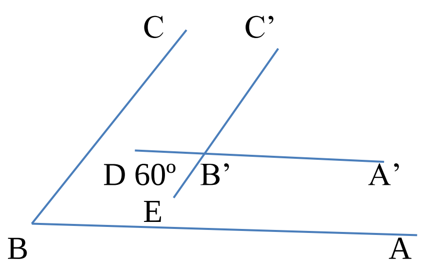
EJERCICIOS CORRESPONDIENTES AL CAPÍTULO IV
ÁNGULOS CON LADOS PARALELOS O PERPENDICULARES (pp.47-54)

Introducción

El capítulo IV comienza en la página 47 y concluye en la 54; mientras que los ejercicios correspondientes a dicho capítulo comienzan en la página 51 y llegan hasta la 53.

Preguntas y respuestas

1. AB paralela a A'B', BC paralela B'C', ángulo EB'D= 60º. Hallar el ángulo ABC.



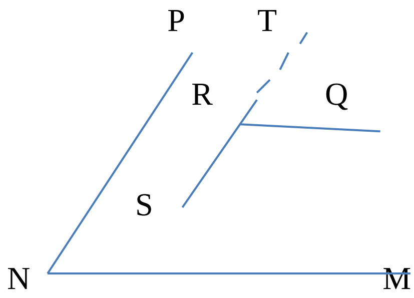
Respuesta del libro: ángulo ABC= 60º.

Mi respuesta:

Como la respuesta del libro es que el ángulo ABC= 60º, nos quiere decir que el ángulo ABC= al ángulo EB'D; por tanto, nuestra respuesta tiene que ir dirigida a demostrar la igualdad de ambos ángulos. Usaré un camino relativamente corto. Resulta que el ángulo A'B'C' es igual al ángulo EB'D, debido a son ángulos opuestos por el vértice; pero también el ángulo ABC es igual al ángulo A'B'C', si nos atenemos a la orientación del libro que estamos estudiando, *Geometría y Trigonometría de Baldor*, página 47: *"Teorema 12. Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en el mismo sentido son iguales"*. (Comillas y cursiva son nuestras). En efecto, el lado BA es paralelo al lado B'A' y van dirigidos en el mismo sentido e igualmente, el lado BC es paralelo al lado B'C' y van dirigidos en el mismo sentido. Por consiguiente si:

Ángulo A'B'C'= ángulo EB'D Por ser ángulos opuestos por el vértice.
Ángulo ABC= ángulo A'B'C' Por tener lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido.
Ángulo ABC= ángulo EB'D Carácter transitivo.

2. PN es paralela RS, MN es paralela RQ, el ángulo MNP= 60º, hallar el ángulo QRS.



La respuesta del libro es la siguiente: el ángulo QRS= 120º.

Mi respuesta:

Cuando observamos atentamente la figura del ejercicio 2, advertimos que el ángulo MNP es agudo, mientras que el ángulo QRS es obtuso. Pero también vemos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares. Pareciera que estamos ante el teorema 16 que se encuentra en la página 50 del libro que estamos estudiando, *Geometría y Trigonometría de Baldor*, en la que leemos: *"Dos ángulos, uno agudo y otro obtuso, que tienen sus lados respectivamente perpendiculares, son suplementarios".* (Comillas y cursiva son nuestras).

Después de hacer esas precisiones, procedamos a prologar SR hasta formar el ángulo QRT.

El ángulo MNP es igual al ángulo QRT, ya que poseen lados perpendiculares y son ángulos agudos.

El ángulo QRS + ángulo QRT= 180º, puestos que son ángulos adyacentes.

Como los ángulos MNP y QRT son iguales, por el carácter transitivo podemos aseverar:

QRS+MNP= 180º.

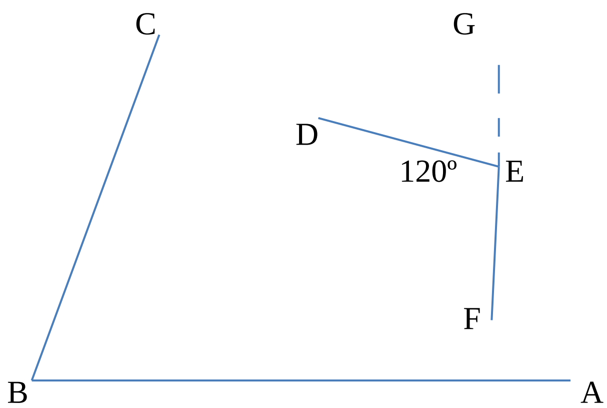
Sustitución:

QRS+60º= 180º

QRS= 180-60= 120º.

La respuesta del libro es correcta.

3. EF es perpendicular a AB, DE es perpendicular BC, el ángulo DEF= 120º. Hallar el ángulo ABC.



La respuesta del libro es la siguiente: el ángulo ABC= 60º.

Mi respuesta:

Cuando observamos atentamente la figura del ejercicio 3, advertimos que el ángulo ABC es agudo, mientras que el ángulo DEF es obtuso. Pero también vemos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares. Pareciera que estamos ante el teorema 16 que se encuentra en la página 50 del libro que estamos estudiando, *Geometría y Trigonometría de Baldor*, en la que leemos: *"Dos ángulos, uno agudo y otro obtuso, que tienen sus lados respectivamente perpendiculares, son suplementarios".* (Comillas y cursiva son nuestras).

Después de hacer esas precisiones, procedamos a prologar FE hasta formar el ángulo DEG.

El ángulo ABC es igual al ángulo DEG, ya que poseen lados perpendiculares y son ángulos agudos.

El ángulo DEF + ángulo DEG= 180º, puestos que son ángulos adyacentes.

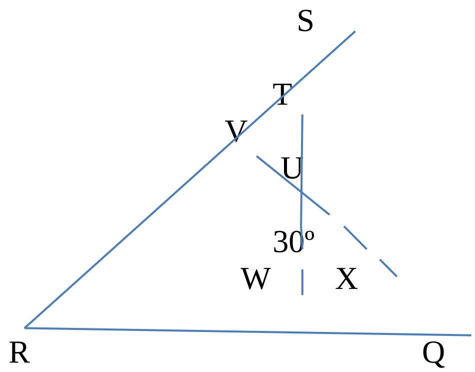
Como los ángulos ABC y DEG son iguales, por el carácter transitivo podemos aseverar:

ABC+DEG= 180º.

ABC= 180-120= 60º.

La respuesta del libro es correcta.

4. TU es perpendicular RQ, UV es perpendicular RS, el ángulo WUX= 30º. Hallar el ángulo QRS.



La respuesta del libro es que el ángulo QRS= 30º.

Mi respuesta:

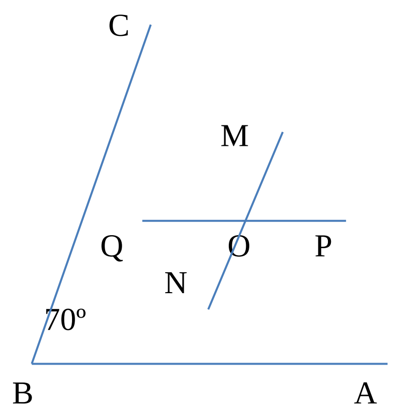
En primer lugar, cuando observamos atentamente la figura de arriba notamos que el ángulo QRS es un ángulo agudo, es decir, que mide menos de 90 grados, es el mismo caso de los ángulos WUX y TUV. Por cierto, el ángulo WUX es el resultado de una construcción auxiliar, pues el segmento TU fue extendido hasta W, mientras que el segmento VU fue extendido hasta X. En segundo lugar, notamos que los ángulos TUV y WUX son opuestos por el vértice, por tanto, conforme al teorema 3, página 27 del libro que estamos estudiando, *Geometría y Trigonometría de Baldor*, son iguales: *"Los ángulos opuestos por el vértice son iguales".* (Comillas y cursiva son nuestras); por tanto, el ángulo TUV también es igual a 30º. Ahora tenemos dos ángulos iguales a 30º, que son WUX y el TUV.

En tercer lugar, tenemos que el segmento TU es perpendicular a RQ, mientras que el segmento UV es perpendicular a RS, por lo que conforme al teorema 15, página 49 del libro que estamos estudiando, *Geometría y Trigonometría de Baldor*, los ángulos QRS y TUV son iguales: ¨*Dos ángulos agudos cuyos lados son respectivamente perpendiculares son iguales*¨. (Comillas y cursiva son nuestras). De aquí que si TUV= 30º, también lo será QRS, lo cual quería demostrar.

La respuesta del libro es correcta.

5. AB es paralela a PQ, BC es paralela a MN, el ángulo ABC= 70º. Hallar el ángulo MOP, el ángulo NOP, el ángulo NOQ y el ángulo MOQ.

Gráfica:



Las respuestas del libro son las siguientes:

El ángulo MOP= 70º

El ángulo NOP= 110º

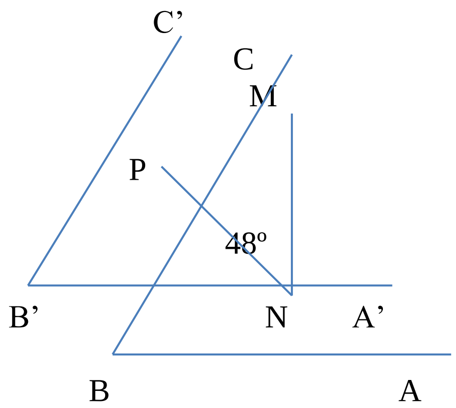
El ángulo NOQ= 70º

El ángulo MOQ= 110º

Mis respuestas:

El primer ángulo que nos pide el libro que encontremos es el MOP. Observemos la figura que nos aporta el libro y veremos que el ángulo MOP es igual al ángulo ABC, pues son *"Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en el mismo sentido…"* (Comillas y cursiva son nuestras), nos recuerda el libro que estamos estudiando, *Geometría y Trigonometría de Baldor*, en el teorema 12 que se encuentra en la página 47; en consecuencia si el ángulo ABC es igual a 70º, el ángulo MOP también será de 70º. El segundo ángulo que nos pide el libro que encontremos es el NOP; éste es adyacente al ángulo MOP que mide 70º, originándose la siguiente situación, dada la circunstancia de que son adyacentes, la suma debe dar 180º, por tanto, 70+NOP= 180; NOP= 180-70= 110º. El tercer ángulo que nos pide el libro es el NOQ, el cual es opuesto por el vértice al ángulo MOP, en consecuencia, son iguales y como el ángulo MOP que mide 70º, el NOQ medirá lo mismo. Y, finalmente, debemos buscar lo que mide el ángulo MOQ que es igual al ángulo NOP que mide 110º, en consecuencia el MOQ medirá 110º. Las respuestas del libro están correctas.

6. A'B' es paralela a AB, B'C' es paralela BC, MN es perpendicular a AB, NP es perpendicular a BC, el ángulo MNP= 48º. Hallar el ángulo A'B'C'.
Gráfica:



El libro otorga esta respuesta: el ángulo A'B'C'= 48º.

Mi respuesta:

Comencemos a discutir sobre los vínculos entre los ángulos agudos ABC y A'B'C'. En los datos del ejercicio 6 el libro *Geometría y Trigonometría de Baldor*, página 53, nos dice que el lado A'B' del ángulo A'B'C' es paralelo al lado AB del ángulo ABC; asimismo el lado B'C' es paralelo al lado BC, lo que nos permite recurrir a la página 47, teorema 12, donde leemos: *"Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en el mismo sentido son iguales"*. (Comillas y cursiva son nuestras). Efectivamente, por estas características los ángulos agudos A'B'C' y ABC son iguales. Pasemos ahora a indagar un poco sobre los ángulos, también agudos, ABC y MNP. Advertimos que el lado MN del ángulo agudo MNP es perpendicular al lado AB del ángulo ABC e igualmente el lado NP del ángulo MNP es perpendicular al lado BC del ángulo ABC; ante estas características podemos con el libro que estamos estudiando, *Geometría y Trigonometría de Baldor*, página 49, lo siguiente: *"Dos ángulos agudos cuyos lados son respectivamente perpendiculares son iguales".* De aquí, entonces que el ángulo MNP= ABC= 48º. Ahora tenemos la siguiente conclusión:

A'B'C'= ABC, debido a que son ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en el mismo sentido. (1).

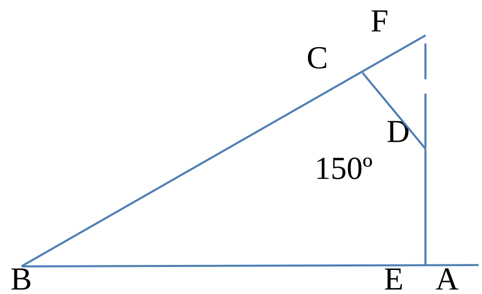
ABC= MNP, debido a son dos ángulos agudos cuyos lados son respectivamente perpendiculares. (2).

Sustitución de (1) en (2):

A'B'C'= MNP= 48º. La respuesta del libro es correcta.

7. AB es perpendicular a ED, BF es perpendicular a CD, el ángulo CDE= 150º. Hallar el ángulo ABC.

Gráfica:



El libro suministra esta respuesta: el ángulo ABC= 30º.

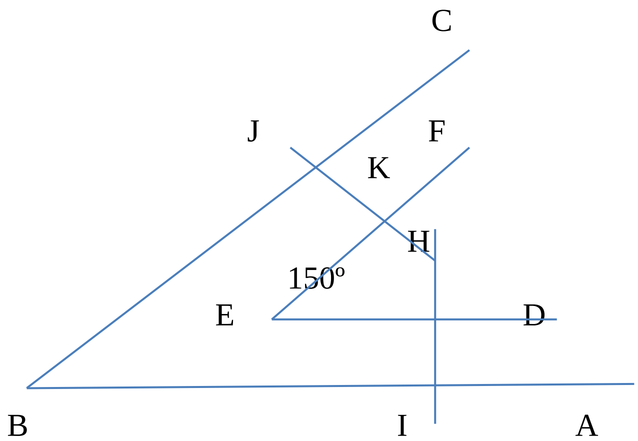
Mi respuesta:

En primer lugar, prolongamos hacia arriba el segmento ED hasta generar el ángulo CDF que es un ángulo agudo; en segundo lugar, sabemos que el ángulo ABC también es un ángulo agudo; en tercer lugar, sabemos que el ángulo CDE es un ángulo obtuso; en cuarto lugar, dentro de los datos del ejercicio 7, el libro nos dice que el lado AB del ángulo ABC es perpendicular al lado ED del ángulo obtuso ADC, y que el lado BF es perpendicular a CD; y, finalmente, nos dice que el ángulo obtuso CDE mide 150º y nos pide hallar el ángulo ABC; en cuarto lugar, tenemos que el ángulo ABC es igual al ángulo CDF, por tener lados perpendiculares y ser ambos ángulos agudos; en quinto lugar, el ángulo CDE, más el ángulo CDF, es igual a 180º en virtud de que son adyacentes; en sexto lugar, sustituimos el paso cuarto en el quinto y tendremos ABC+CDE= 180º, por tanto:

ABC= 180-150= 30º. La respuesta del libro esta correcta.

8. AB es paralela a ED, BC es paralela a EF, HI es perpendicular a ED, HK es perpendicular EF, el ángulo JHI= 150º. Hallar el ángulo ABC.

Gráfica:



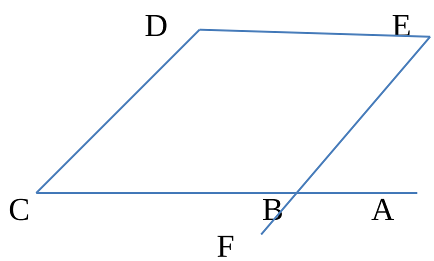
El libro aporta la siguiente respuesta: el ángulo ABC= 30º.

Mi respuesta:

El libro nos suministra los datos siguientes: AB es paralela a ED; BC es paralela a EF, HI es perpendicular a ED, HK es perpendicular a EF. El ángulo JHI= 150º. Y nos pide hallar el ángulo ABC. Procedamos. Prolongamos IH hasta L, para formar el ángulo agudo JKL. El ángulo DEF + el ángulo JKL= 180º; 150+JKL= 180º; despejando: JKL= 180-150= 30º. Pero por el teorema 15 los ángulos ABC y JKL son iguales. Luego ABC= 30º. La respuesta del libro es correcta.

9. AC es paralela a DE, EF es paralela a CD, el ángulo EBC= 2 ángulo BED. Hallar el ángulo B, el ángulo C, el ángulo D y el ángulo E.

Gráfica:



El libro nos suministras estas respuestas: el ángulo B= 120º; el ángulo D= 120º; el ángulo C= 60º; y el ángulo E= 60º.

Mis respuestas:

Entre los datos que nos otorga el libro se encuentra que el ángulo EBC= 2 ángulo BED. Podríamos decir que el último es un ángulo contiguo a EBC, por tanto, son suplementarios. ¿Cuáles son los números que más se acoplan a la fórmula de EBC? Obviamente el número 2 que es un dato, y BED= 60; este último número es el único que puede cumplir con la fórmula dada, ya que la medición de EBC no puede ser ni mayor ni menor a 120º. Y los grados de los ángulos obtusos de la figura que nos han dado, necesariamente deben ser igual a 120º, mientras los grados de los otros ángulos agudos de la figura, deben ser igual a 60º que sumandos totalizan 180º. Resumiendo:

Angulo B= 120º.

Angulo D= 120º.

Angulo E= 60º.

Angulo C= 60º.

Las respuestas del libro están correctas.

10. GE es paralela a AC que a su vez es paralela a IK, AG es paralela a CE que a su vez es JL; el ángulo FOD= 60º.

El libro suministra estas respuestas:

El ángulo A= 60º
El ángulo C= 120º
El ángulo E= 60º
El ángulo G= 120º

Mis respuestas:

El ángulo FOD= 60º.

El ángulo A= 60º, y el ángulo O= 60º miden lo mismo, puesto que son dos ángulos iguales, debido al teorema 12: “dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en el mismo sentido son iguales”; esto sucede con sus lados AH y OF e igualmente AB y OD. El ángulo E es igual también a 60 grados, pues es igual al ángulo O conforme al teorema 13: “Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en sentido contrario son iguales”. Por otra parte, si el ángulo A es un ángulo agudo igual a 60 grados, el ángulo contiguo a él, que es el ángulo C, obtuso, son suplementarios y deben sumar A+C= 180; sustituyendo: 60+C= 180; C= 180-60= 120 grados. Igualmente el G es un ángulo obtuso que sumado al A deben totalizar 180 grados, por tanto, 180-60= 60º.

Las respuestas del libro son correctas.