

Dr. Manuel de Jesús Linares Jiménez



**Obras
Completas**

**Tomo
126**

**Estudiando el libro Métodos fundamentales de economía matemática de
Alpha Chiang y Kevin Wainwright.**

**Santo Domingo, República Dominicana
Septiembre, 2025**

Obra 126. Estudiando el libro Métodos fundamentales de economía matemática de Chiang y Wainwright

Estudiando el libro *Métodos fundamentales de economía matemática* de Alpha Chiang y Kevin Wainwright (Obra 126)

Autor: Dr. Manuel de Jesús Linares Jiménez

Teléfono 829-637-9303

Correo electrónico: profesormanuellinares@gmail.com

Este libro digital se entrega de manera gratuita al público lector.

DEDICATORIA

Dedico este libro #126, a mis dos excelentes maestros en la PUCMM, José Antonio Herrero y Jaime Moreno.

**¡Si estudiamos aprendemos y si aprendemos
avanzamos!**

PRÓLOGO

Mi obra 126, constituye el sexto volumen de la serie *Estudiando el libro Métodos fundamentales de economía matemática de Chiang y Wainwright*.

A pesar de que ya tengo varios volúmenes, en los cuales he tenido que batallar arduamente con la obra citada, mi interés por el estudio del libro *Métodos fundamentales de economía matemática* de Chiang y Wainwright no ha disminuido, al contrario experimenta notable pasión.

Y esa pasión se explica por el hecho de que al persistir en estudiarlo voy encontrando un mayor dominio del mismo.

Todavía me quedan muchos años de su estudio, porque cuando aborde el último capítulo, que es el número 20, volveré sobre los capítulos 1-20, para tratar de resolver muchos problemas, pertenecientes a los distintos ejercicios, que hasta ahora no he podido solucionar.

Advierto, que la solución de múltiples problemas, que carecen de las respuestas de los autores del libro *Métodos fundamentales de economía matemática*, la respuesta que ofrezco simplemente son propuestas nuestras, por tanto, el lector o lectora con espíritu investigativo, también tendrá que formular las suyas.

Dr. Manuel de Jesús Linares Jiménez
Ex-Coordinator General de los Programas Doctorales de la UASD
Ex-Presidente del Consejo Superior de Doctores de la UASD

Septiembre, 2025



ÍNDICE

EJERCICIO 14.5.....	9
EJERCICIO 15.1.....	23

**¡Trabajar, estudiar e investigar, nos permite
encontrar el camino correcto; si vivimos de los demás,
nos perdemos en la selva del capitalismo!**

14.5

EJERCICIO 14.5

El ejercicio 14.5, forma parte del capítulo 14, denominado La dinámica económica y el cálculo integral, y se encuentra en la página 470 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright.

1. Dadas las siguientes funciones de ingreso marginal:

a) $R'(Q) = 28Q - e^{0.3Q}$

b) $R'(Q) = 10(1 + Q)^{-2}$

Encuentre en cada caso la función de ingreso total $R(Q)$. ¿Qué condición inicial puede introducir para determinar la constante de integración?

Mi respuesta a):

Los problemas del punto 1, nos reclaman el cálculo del ingreso total, y, naturalmente, nos aportan las funciones de ingresos marginales. Los ejemplos 1 y 2, que se encuentran en la página 465 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright, nos pueden servir de guía para afrontar con éxitos las respuestas que debemos aportar en los dos casos que tenemos por delante. Procedamos:

Primero, partimos de la función de ingreso marginal a): $R'(Q) = 28Q - e^{0.3Q}$

Segundo, integramos la función de ingreso marginal, $R'(Q)$, respecto a Q , para encontrar la función de ingreso total, $R(Q)$.

Para integrar $R'(Q)$ debemos usar las siguientes reglas: regla de la suma o diferencia de funciones; luego en el primer término aplicamos la integral de un múltiplo y la integral de una potencia. En el segundo término usamos la integral de

una función exponencial (regla IIa). Y es que $-e^{0.3Q}$ está en el formato de $f'(x)e^{f(x)}dx$.

$$\begin{aligned} & \int (28Q - e^{0.3Q})dQ \\ &= 28 \int QdQ - \int e^{0.3Q}dQ \\ &= (28)(1/2) Q^2 + c_1 - 1/0.3e^{0.3Q} + c_2 \\ &= 14Q^2 + c_1 - 10/3Qe^{0.3Q} + c_2 \\ &= 14Q^2 - 10/3Qe^{0.3Q} + c \end{aligned}$$

Ahora pasamos a responder la pregunta, ¿qué condición inicial puede introducir para determinar la constante de integración? Simplemente haciendo $Q = 0$, en el resultado obtenido arriba, tendremos:

$$\begin{aligned} R(Q) &= 14Q^2 - 10/3e^{0.3Q} + c = 14(0)^2 - (10/3)e^{0.3(0)} + c = 0 - (10/3)(e^0) + c = -(10/3)(1) \\ &+ c = -10/3 + c. \text{ despejamos a } c, \text{ para obtener: } c = 10/3. \end{aligned}$$

Finalmente tenemos:

$$R(Q) = 14Q^2 - 10/3e^{0.3Q} + 10/3$$

Comprobación:

En la página 447 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, Chiang y Wainwright afirman: “*Observe que los resultados de la integración pueden verificarse siempre mediante la diferenciación; si el proceso de integración es correcto, la derivada de la integral debe ser igual al integrando*”. (Comillas y cursiva son nuestras).

El resultado que obtuvimos fue $14Q^2 - 10/3e^{0.3Q} + 10/3$; aquí aplicaremos las siguientes reglas de diferenciación. Regla generalizada de la función potencia, regla generalizada de la función exponencial y regla de la función constante. Procedamos:

$$\begin{aligned} & d/dQ \ 14Q^2 - 10/3e^{0.3Q} + 10/3 \\ &= 28Q - (0.3)(10/3)(e^{0.3Q}) \end{aligned}$$

$$= 28Q - (3/3)(e^{0.3Q})$$

$$= 28Q - e^{0.3Q}$$

Ese resultado es igual al integrando que nos dieron en el problema ($R'(Q) = 28Q - e^{0.3Q}$), por tanto, es correcta la operación de integración que efectuamos.

Mi respuesta b):

Los problemas del punto 1, nos reclaman el cálculo del ingreso total, y, naturalmente, nos aportan las funciones de ingresos marginales. Los ejemplos 1 y 2, que se encuentran en la página 465 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright, nos pueden servir de guía para afrontar con éxitos las respuestas que debemos aportar en los dos casos que tenemos por delante. Procedamos:

Primero, partimos de la función de ingreso marginal b): $R'(Q) = 10(1 + Q)^{-2}$

Segundo, integramos la función de ingreso marginal, $R'(Q)$, respecto a Q , para encontrar la función de ingreso total, $R(Q)$.

Para integrar $R'(Q)$ debemos usar la siguiente regla: regla VI de sustitución.

Sugerimos que hagamos $u = 1 + Q$, entonces $du/dQ = 1$; $du = dQ$; y procedemos a integrar:

$$\int R'(Q)$$

$$= \int 10(1 + Q)^{-2} dQ$$

$$= 10 \int (u)^{-2} du$$

$$= (10)(1/-2+1)u^{-2+1} + c$$

$$= (10)(-1)u^{-1} + c$$

$$= -10/u + c$$

$$= -10/(1+Q) + c$$

Comprobación:

En la página 447 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, Chiang y Wainwright afirman: “*Observe que los resultados de la integración pueden verificarse siempre mediante la diferenciación; si el proceso de integración es correcto, la derivada de la integral debe ser igual al integrando*”. (Comillas y cursiva son nuestras).

El resultado que obtuvimos fue $R(Q) = -10/(1+Q) + c = -10(1+Q)^{-1} + c$; aquí aplicaremos las siguientes reglas de diferenciación. Regla generalizada de la función potencia y regla de la función constante. Procedamos:

$$R'(Q) = (-1)(-10)(1+Q)^{-1-1} + 0 = 10(1+Q)^{-2}$$

Ese resultado es igual al integrando que nos dieron en el problema $R'(Q) = 10(1+Q)^{-2}$, por tanto, es correcta la operación de integración que efectuamos.

2. (a) Dada la propensión marginal a la importación $M'(Y) = 0.1$, y la información de que $M = 20$ cuando $Y = 0$, encuentre la función de importación $M(Y)$.

Mi respuesta:

El problema del punto 2, nos reclama el cálculo de la función de importación, y, naturalmente, nos aporta la función de la propensión marginal a la importación, $M'(Y) = 0.1$. Los ejemplos 1 y 2, que se encuentran en la página 465 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright, nos pueden servir de guía para afrontar con éxitos la respuesta que debemos aportar en el caso que tenemos por delante. Procedamos:

Primero, partimos de la función de la propensión marginal a la importación, $M'(Y) = 0.1$.

Segundo, integramos la función de la propensión marginal a la importación, $M'(Y) = 0.1$, para encontrar la función de importación $M(Y)$.

Para integrar $M'(Y)$ debemos usar la siguiente regla: la integral de un múltiplo.

$$M(Y) = \int M'(Y) dY$$

$$= \int 0.1 dY$$

$$= 0.1 \int dY$$

$$= 0.1Y + c$$

Comprobación:

En la página 447 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, Chiang y Wainwright afirman: “*Observe que los resultados de la integración pueden verificarse siempre mediante la diferenciación; si el proceso de integración es correcto, la derivada de la integral debe ser igual al integrando*”. (Comillas y cursiva son nuestras).

El resultado que obtuvimos fue $M(Y) = 0.1Y + c$; aquí aplicaremos las siguientes reglas de diferenciación. Regla de la función potencia y regla de la función constante. Procedamos:

$$M'(Y) = (1)(0.1)Y^{1-1} + 0$$
$$= 0.1Y^0$$

$$= 0.1(1)$$

$$= 0.1.$$

Ese resultado es igual al integrando que nos dieron en el problema ($M'(Y) = 0.1$), por tanto, es correcta la operación de integración que efectuamos.

(b) Dada la propensión marginal al consumo $C'(Y) = 0.8 + 0.1Y^{-1/2}$ y la información de que $C = Y$ cuando $Y = 100$, encuentre la función de consumo $C(Y)$.

Mi respuesta:

El problema del punto 2b, nos reclama el cálculo de la función de consumo $C(Y)$, y, naturalmente, nos aporta la función de la propensión marginal al consumo, $C'(Y) = 0.8 + 0.1Y^{-1/2}$. Los ejemplos 1 y 2, que se encuentran en la página 465 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright, nos pueden servir de guía para afrontar con éxitos la respuesta que debemos aportar en el caso que tenemos por delante. Procedamos:

Primero, partimos de la función de la propensión marginal al consumo $C'(Y) = 0.8 + 0.1Y^{-1/2}$.

Segundo, integramos la función de la propensión marginal al consumo $C'(Y) = 0.8 + 0.1Y^{-1/2}$, para encontrar la función de consumo $C(Y)$.

Tercero, para integrar $C'(Y)$ debemos usar las siguientes reglas: regla de la integral de la suma de funciones; la integral de un múltiplo y la integral de una potencia.

$$\begin{aligned} C(Y) &= \int C'(Y) \\ &= \int (0.8 + 0.1Y^{-1/2}) dY \\ &= \int 0.8 dY + \int 0.1Y^{-1/2} dY \\ &= 0.8 \int dY + 0.1 \int Y^{-1/2} dY \\ &= 0.8Y + c_1 + (0.1)(1/-1/2+1)Y^{-1/2+1} + c_2 \\ &= 0.8Y + c_1 + (0.1)(1/-1/2+1)Y^{-1/2+1} + c_2 \\ &= 0.8Y + c_1 + 0.2 Y^{1/2} + c_2 \end{aligned}$$

Comprobación:

En la página 447 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, Chiang y Wainwright afirman: “*Observe que los resultados de la integración pueden verificarse siempre mediante la diferenciación; si el proceso de integración es correcto, la derivada de la integral debe ser igual al integrando*”. (Comillas y cursiva son nuestras).

El resultado que obtuvimos fue $C(Y) = 0.8Y + c_1 + 0.2 Y^{1/2} + c_2$; aquí aplicaremos las siguientes reglas de diferenciación. Regla de la función potencia, regla generalizada de la función potencia y regla de la función constante. Procedamos:

$$d/dY (0.8Y + c_1 + 0.2 Y^{1/2} + c_2) = 0.8 + 0 + (1/2)(0.2)Y^{1/2-1} + 0 = 0.8 + 0.1Y^{-1/2}.$$

Ese resultado es igual al integrando que nos dieron en el problema ($C'(Y) = 0.8 + 0.1Y^{-1/2}$), por tanto, es correcta la operación de integración que efectuamos.

3. Suponga que la tasa de inversión la describe la función $I(t) = 12t^{1/3}$ y que $k(0) = 25$:

a) Encuentre la trayectoria de tiempo del capital k .

Mi respuesta:

El problema a) del punto 3, nos reclama encontrar la trayectoria de tiempo del capital k , a partir de una tasa de inversión.

El ejemplo 3, que se encuentra en la página 466 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright, nos puede servir de guía para afrontar con éxitos la respuesta que debemos aportar en el caso que tenemos por delante. Procedamos:

Primero, identificamos la función $I(t) = 12t^{1/3}$, que nos han dado, la cual representa el flujo de inversión neta.

Segundo, integramos dicha función para obtener la trayectoria de tiempo del capital k .

Tercero, para integrarla debemos utilizar las siguientes reglas: integral de un múltiplo; integral de una función potencia. Procedamos

$$\begin{aligned} K(t) &= \int I(t) dt \\ &= \int 12t^{1/3} dt \\ &= 12 \int t^{1/3} dt \\ &= 12(1/1/3 + 1)t^{4/3} + c \\ &= 12(1/4/3)t^{4/3} + c \\ &= 9t^{4/3} + c \end{aligned}$$

Y como nos dan el dato de que $k(0) = 25$, tendremos:

$$K(t) = 9t^{4/3} + 25$$

Comprobación:

En la página 447 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, Chiang y Wainwright afirman: “*Observe que los resultados de la integración pueden verificarse siempre mediante la diferenciación; si el proceso de integración es correcto, la derivada de la integral debe ser igual al integrando*”. (Comillas y cursiva son nuestras).

El resultado que obtuvimos fue $K(t) = 9t^{4/3} + 25$; aquí aplicaremos las siguientes reglas de diferenciación. Regla de la función potencia y la regla de la función constante. Procedamos:

$$d/dt (9t^{4/3} + 25)$$

$$= (4/3)(9) t^{4/3-1}$$

$$= 12t^{1/3}$$

Ese resultado es igual al integrando que nos dieron en el problema $I(t) = 12t^{1/3}$, por tanto, es correcta la operación de integración que efectuamos.

b) Encuentre el monto de la acumulación de capital durante los intervalos [0, 1] y [1, 3], respectivamente.

El problema b) del punto 3, nos introduce directamente en el concepto de integral definida, puesto que nos pide encontrar la cantidad de formación de capital durante un intervalo, tal como nos indica, en la página 466, en ocasión del ejemplo 3, el libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, Chiang y Wainwright.

Los ejemplos 4 y 5, que se encuentran en la página 467 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright, nos pueden servir de guía para afrontar con éxitos la respuesta que debemos aportar en el caso que tenemos por delante. Procedamos:

Primero, identificamos la función $I(t) = 12t^{1/3}$, que nos han dado, la cual representa el flujo de inversión neta.

Segundo, integramos dicha función, ahora en la perspectiva de la integral definida, en interés de encontrar la cantidad de formación de capital en los intervalos que nos han dado.

Tercero, encontramos la integral indefinida, acudiendo a las siguientes reglas: integral de un múltiplo; integral de una función potencia.

Cuarto, procedemos a calcular la integral definida. Iniciemos el trabajo:

$$\begin{aligned} &= \int 12t^{1/3} dt \\ &= 12 \int t^{1/3} dt \\ &= 12(1/1/3+1)t^{4/3} + c \\ &= 12(1/4/3)t^{4/3} + c \\ &= 9t^{4/3} + c \end{aligned}$$

Comprobación:

En la página 447 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, Chiang y Wainwright afirman: “Observe que los resultados

de la integración pueden verificarse siempre mediante la diferenciación; si el proceso de integración es correcto, la derivada de la integral debe ser igual al integrando". (Comillas y cursiva son nuestras).

El resultado que obtuvimos fue $K(t) = 9t^{4/3} + 25$; aquí aplicaremos las siguientes reglas de diferenciación. Regla de la función potencia y la regla de la función constante. Procedamos:

$$d/dt (9t^{4/3} + 25)$$

$$= (4/3)(9) t^{4/3-1}$$

$$= 12t^{1/3}$$

Ese resultado es igual al integrando que nos dieron en el problema $I(t) = 12t^{1/3}$, por tanto, es correcta la operación de integración que efectuamos.

Y como nos dan el dato de que $k(0) = 25$, tendremos:

$$K(t) = 9t^{4/3} + 25$$

$$\int_0^1 I(t) dt = \int_0^1 12t^{1/3} dt = [9t^{4/3} + 25]_0^1 = (9)(1)^{4/3} + 25 = 9 + 25 = 34.$$

Pasemos ahora a realizar el cálculo en base al intervalo $[1, 3]$.

$$\int_1^3 I(t) dt$$

$$= \int_1^3 12t^{1/3} dt$$

$$= [9t^{4/3} + 25]_1^3$$

$$= [(9)(3)^{4/3} + 25] - [9(1)^{4/3} + 25]$$

$$= [9(4.3267) + 25] - [9(4.3267) + 25]$$

$$= [38.9403 + 25] - [9 + 25]$$

$$= 63.9403 - 34$$

$$= 29.9403.$$

Nota: de acuerdo a la IA, *“3 elevado a $4/3$ equivale a la raíz cúbica de 3 elevado a la cuarta potencia, lo que se puede calcular como la raíz cúbica de 81, resultando aproximadamente en 4.3267”*.

**¡Seguid la senda del estudio y la investigación, nunca
te perderás!**

15.1

EJERCICIO 15.1

El ejercicio 15.1, forma parte del capítulo 15, denominado Ecuaciones diferenciales de primer orden, y se encuentra en la página 479 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright.

1. Encuentre y_c , y_p , la solución general y la solución definida por la condición inicial, dados:

a) $dy/dt + 4y = 12$; $y(0) = 2$

Mi respuesta:

Debemos leer atentamente las páginas 475, 476 y 477 y practicar los ejemplos que se encuentran en las páginas 477, 478 y 479 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright.

El problema que abordaremos en estos momentos está integrado por una ecuación, $dy/dt + 4y = 12$, que es una ecuación diferencial porque contiene derivadas, es ordinaria porque contiene solamente una variable independiente (t), es de primer orden a causa de que la derivada de mayor orden que contiene es la primera, es lineal debido a que dy/dt aparece en primer grado y finalmente es no homogénea puesto que la constante no es igual a 0, sino a 12.

Si la ecuación es no homogénea, la solución general de la ecuación diferencial es $y(t) = y_c + y_p = Ae^{-at} + b/a$, donde:

$y_c = Ae^{-at}$, función complementaria

$y_p = b/a$, integración particular. Ésta proviene del supuesto de que $y = k$, es decir, y es igual a una constante, por lo que $dy/dt = 0$, en consecuencia,

$$dy/dt + ay = b$$

$$0 + ay = b$$

$$y = b/a.$$

La presencia de la constante A, es lo que nos permite tipificar como solución general la primera etapa resolutoria. Eliminar dicha constante A, es lo que nos hará arribar a la solución definida.

La solución definida es $y(t) = (y(0) - b/a)e^{-at} + b/a$.

¿De dónde proviene esa última expresión? Deviene bajo el supuesto de que $y(t) = y(0)$, es decir, la variable dependiente $y(t)$ toma el valor $y(0)$ cuando $t = 0$, por tanto:

$y(t) = y_c + y_p = Ae^{-at} + b/a$, experimentará ciertas transformaciones debido a que el exponente de e se convierte en cero (0), quedando $y(0) = A + b/a$, despejando a A, $A = y(0) - (b/a)$, la ecuación de la solución general, ahora será:

$$y(t) = [y(0) - b/a]e^{-at} + b/a, \text{ que es la solución definida.}$$

Pasemos a resolver el problema propuesto.

Primer paso, función complementaria:

Partimos de la ecuación diferencial no homogénea $dy/dt + ay = b$, que en el problema que nos están dando para resolverlo es $dy/dt + 4y = 12$; $y(0) = 2$; por tanto $a = 4$, $b = 12$.

$$y_c = Ae^{-at}$$

Sustituimos a por su igual, que es 4, para obtener

$$y_c = Ae^{-4t} \text{ que es la función complementaria.}$$

Segundo paso, integral particular.

Partimos de la ecuación diferencial no homogénea $dy/dt + ay = b$, que en el problema es $dy/dt + 4y = 12$, por tanto $a = 4$, $b = 12$.

$y_p = b/a = 12/4 = 3$, que es la integral particular.

Tercer paso, solución general.

$y(t) = y_c + y_p = Ae^{-4t} + 3$, es la solución general.

Cuarto paso, solución definida.

Cuando $t=0$

$$y(t) = y_c + y_p = Ae^{-4(0)} + 3 = Ae^0 + 3 = A(1) + 3 = A + 3$$

Cuando $y(0) = 2$ (dato del problema, que es la condición inicial), sustituimos para obtener A

$$y(0) = A + 3$$

$$2 = A + 3$$

$$A = 2 - 3 = -1$$

Sustituir el valor de A en la solución general:

$$y(t) = y_c + y_p = (-1)e^{-4t} + 3 = -e^{-4t} + 3 \text{ Solución definida.}$$

b) $dy/dt - 2y = 0$; $y(0) = 9$

Mi respuesta:

Debemos leer atentamente las páginas 475, 476 y 477 y practicar los ejemplos que se encuentran en las páginas 477, 478 y 479 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright.

El problema que abordaremos en estos momentos está integrado por una ecuación, $dy/dt - 2y = 0$, que es una ecuación diferencial porque contiene derivadas, es ordinaria porque contiene solamente una variable independiente (t), es de primer orden a causa de que la derivada de mayor orden que contiene es la primera, es lineal debido a que dy/dt aparece en primer grado y finalmente es homogénea puesto que la constante es igual a 0.

Si la ecuación es homogénea, la solución general de la ecuación diferencial es $y(t) = Ae^{-at}$, donde A es una constante arbitraria.

La solución definida es

$$y(t) = y(0)e^{-at}$$

donde $y(0)$ define y sustituye a la constante arbitraria A .

De modo, que si tenemos $dy/dt - 2y = 0$ daremos los siguientes pasos:

Primer paso: aunque la función dada es homogénea, seguiremos en parte el mismo procedimiento anterior para resolver una ecuación diferencial no homogénea. Por tanto, buscamos la función complementaria. Partimos de la ecuación diferencial no homogénea $dy/dt + ay = b$, por tanto $a = -2$, $b = 0$. Reiteramos que la ecuación dada es no homogénea, pero vamos a continuar con el mismo procedimiento de solución.

$y(t) = Ae^{-at}$ sustituimos a por su igual, que es -2 , para obtener:

$$y(t) = Ae^{-(2)t} = Ae^{2t}, \text{ que es nuestra función complementaria.}$$

Segundo paso: calculamos integral particular

$$y_p = b/a = 0/-2 = 0$$

Tercer paso: solución general

$$y(t) = y_c + y_p = Ae^{2t} + 0 = Ae^{2t} \text{ que es la solución general}$$

Cuarto paso: solución definida

Cuando $t = 0$

$$y(t) = Ae^{2(0)} = A$$

Cuando $y(0) = 9$

$$A = 9$$

Sustituyendo

$$y(t) = Ae^{2t} = 9e^{2t} \text{ que es la solución definida.}$$

c) $dy/dt + 10y = 15$; $y(0) = 0$

Mi respuesta:

Debemos leer atentamente las páginas 475, 476 y 477 y practicar los ejemplos que se encuentran en las páginas 477, 478 y 479 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright.

El problema que abordaremos en estos momentos está integrado por una ecuación, $dy/dt + 10y = 15$, que es una ecuación diferencial porque contiene derivadas, es ordinaria porque contiene solamente una variable independiente (t), es de primer orden a causa de que la derivada de mayor orden que contiene es la primera, es lineal debido a que dy/dt aparece en primer grado y finalmente es no homogénea puesto que la constante no es igual a 0, sino 15.

Si la ecuación es no homogénea, la solución general de la ecuación diferencial es $y(t) = y_c + y_p = Ae^{-at} + b/a$, donde:

$y_c = Ae^{-at}$, función complementaria

$y_p = b/a$, integración particular. Esta proviene del supuesto de que $y = k$, es decir y es igual a una constante, por lo que $dy/dt = 0$, en consecuencia,

$$dy/dt + ay = b$$

$$0 + ay = b$$

$$y = b/a.$$

La presencia de la constante A , es lo que nos permite tipificar como solución general la etapa resolutive en que estamos. Eliminar dicha constante A , es lo que nos hará arribar a la solución definida.

La solución definida es $y(t) = (y(0) - b/a)e^{-at} + b/a$.

¿De dónde proviene esa última expresión? Deviene bajo el supuesto de que $y(t) = y(0)$, es decir, la variable dependiente $y(t)$ toma el valor $y(0)$ cuando $t = 0$, por tanto:

$y(t) = y_c + y_p = Ae^{-at} + b/a$, experimentará ciertas transformaciones debido a que el exponente de e se convierte en cero (0), quedando $y(0) = A + b/a$, despejando a A , $A = y(0) - (b/a)$, la ecuación de la solución general, ahora será:

$y(t) = [y(0) - b/a]e^{-at} + b/a$, que es la solución definida.

Pasemos a resolver el problema propuesto.

Primer paso, función complementaria:

Partimos de la ecuación diferencial no homogénea $dy/dt + ay = b$, que en el problema es $dy/dt + 10y = 15$, por tanto $a = 10$, $b = 15$.

$$y_c = Ae^{-at}$$

Sustituimos a por su igual, que es 10, para obtener

$y_c = Ae^{-10t}$ que es la función complementaria.

Segundo paso, integral particular.

Partimos de la ecuación diferencial no homogénea $dy/dt + ay = b$, que en el problema es $dy/dt + 10y = 15$, por tanto $a = 10$, $b = 15$.

$y_p = b/a = 15/10 = 1.5$, que es la integral particular.

Tercer paso, solución general.

$y(t) = y_c + y_p = Ae^{-10t} + 1.5$, que es la solución general.

Cuarto paso, solución definida.

Cuando $t=0$

$$y(t) = y_c + y_p = Ae^{-10t} + 1.5 = Ae^{-10(0)} + 1.5 = A(1) + 1.5 = A + 1.5$$

Cuando $y(0) = 0$ (dato del problema), sustituimos para obtener A

$$y(0) = A + 1.5$$

$$0 = A + 1.5$$

$$A = -1.5$$

Sustituir el valor de A en la solución general:

$$y(t) = y_c + y_p = (-1.5)e^{-10t} + 1.5 \text{ que es la solución definida.}$$

d) $(2)dy/dt + 4y = 6$; $y(0) = 1.5$

Mi respuesta:

Debemos leer atentamente las páginas 475, 476 y 477 y practicar los ejemplos que se encuentran en las páginas 477, 478 y 479 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright.

El problema que abordaremos en estos momentos está integrado por una ecuación, $(2)dy/dt + 4y = 6$, que es una ecuación diferencial porque contiene derivadas, es ordinaria porque contiene solamente una variable independiente (t), es de primer orden a causa de que la derivada de mayor orden que contiene es la primera, es lineal debido a que dy/dt aparece en primer grado y finalmente es no homogénea puesto que la constante no es igual a 0, sino 6.

Si la ecuación es no homogénea, la solución general de la ecuación diferencial es $y(t) = y_c + y_p = Ae^{-at} + b/a$, donde:

$y_c = Ae^{-at}$, función complementaria

$y_p = b/a$, integración particular. Esta proviene del supuesto de que $y = k$, es decir y es igual a una constante, por lo que $dy/dt = 0$, en consecuencia,

$$dy/dt + ay = b$$

$$0 + ay = b$$

$$y = b/a.$$

La presencia de la constante A , es lo que nos permite tipificar como solución general la etapa resolutive en que estamos. Eliminar dicha constante A , es lo que nos hará arribar a la solución definida.

La solución definida es $y(t) = (y(0) - b/a)e^{-at} + b/a$.

¿De dónde proviene esa última expresión? Deviene bajo el supuesto de que $y(t) = y(0)$, es decir, la variable dependiente $y(t)$ toma el valor $y(0)$ cuando $t = 0$, por tanto:

$y(t) = y_c + y_p = Ae^{-at} + b/a$, experimentará ciertas transformaciones debido a que el exponente de e se convierte en cero (0), quedando $y(0) = A + b/a$, despejando a A , $A = y(0) - (b/a)$, la ecuación de la solución general, ahora será:

$y(t) = [y(0) - b/a]e^{-at} + b/a$, que es la solución definida.

Pasemos a resolver el problema propuesto.

Primer paso, función complementaria:

Antes de calcular la función complementaria, debemos normalizar la ecuación diferencial dada, dividiendo por 2, quedando $dy/dt + 2y = 3$

Partimos de la ecuación diferencial no homogénea $dy/dt + ay = b$, que en el problema es $dy/dt + 2y = 3$, por tanto, $a = 2$, $b = 3$.

$$y_c = Ae^{-at}$$

Sustituimos a por su igual, que es 2, para obtener

$y_c = Ae^{2t}$ que es la función complementaria.

Segundo paso, integral particular.

Partimos de la ecuación diferencial no homogénea $dy/dt + ay = b$, que en el problema es $dy/dt + 2y = 3$, por tanto $a = 2$, $b = 3$.

$y_p = b/a = 3/2$, que es la integral particular.

Tercer paso, solución general.

$y(t) = y_c + y_p = Ae^{2t} + 3/2$, que es la solución general.

Cuarto paso, solución definida.

Cuando $t=0$

$$y(t) = y_c + y_p = Ae^{2t} + 3/2 = Ae^{2(0)} + 3/2 = A(1) + 3/2 = A + 3/2$$

Cuando $y(0) = 1.5$ (dato del problema), sustituimos para obtener A

$$y(0) = A + 3/2$$

Sustitución

$$1.5 = A + 3/2$$

$$A = 1.5 - 3/2 = 1.5 - 1.5 = 0$$

$$A = 0$$

Sustituir el valor de A en la solución general:

$$y(t) = y_c + y_p = (0)e^{2t} + 3/2 = 3/2, \text{ que es la solución definida.}$$

2. Verifique la validez de sus respuestas a los problemas anteriores

La primera solución que verificaremos es la correspondiente al problema 1a.

Comprobación:

En la página 479 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright, nuestros autores recomiendan: “*Como paso final del proceso de solución de una ecuación diferencial, se recomienda que se habitúe usted a verificar la validez de su respuesta asegurándose que (1) la derivada de la trayectoria de tiempo $y(t)$ sea consistente con la ecuación diferencial dada y que (2) la solución definida satisfaga la condición inicial*”. (Comillas y cursiva son nuestras).

Trataremos de verificar que $-a[y(0) - b/a]e^{-at} + a\{[y(0) - b/a]e^{-at} + b/a\} = b$, como lo indica el libro en la página 479:

$$-a[y(0) - b/a]e^{-at} +$$

$$+a\{[y(0) - b/a]e^{-at} + b/a\} = b$$

Sustitución:

$$-4[2 - 12/4]e^{-4t}$$

$$+4\{[2 - 12/4]e^{-4t} + 12/4\} = 12$$

Operación:

$$-4[2 - 12/4]e^{-4t} = -4[-1]e^{-4(0)} = -4[-1]e^{(0)} = -4[-1](1) = -4[-1](1) = 4$$

Operación:

$$+4\{[2 - 12/4]e^{-4t} + 12/4\} = +4\{[-1]e^{-4(0)} + 3\} = +4\{[-1]e^{(0)} + 3\} = +4\{[-1] + 3\} = +4\{2\} = 8$$

Finalmente sumamos ambos resultados:

$$4 + 8 = 12, \text{ exactamente igual a } b = 12.$$

Eso quiere decir que nuestra solución es correcta.

Veamos ahora si nuestra solución satisface la condición inicial: $y(0) = 2$.

El libro, en la página 479, nos propone esta expresión:

$$y(0) = [y(0) - b/a] + b/a = y(0)$$

Sustitución:

$$2 = [2 - 12/4] + 12/4 = 2$$

Operación:

$$2 = [2 - 3] + 3 = 2$$

$$2 = [-1] + 3 = 2$$

Resultado:

$2 = 2 = 2$, queda completamente satisfecha la condición inicial. La solución obtenida es completamente correcta.

La segunda solución que verificaremos es la correspondiente al problema 1b.

Comprobación:

En la página 479 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright, nuestros autores recomiendan: “*Como paso final del proceso de solución de una ecuación diferencial, se recomienda que se habitúe usted a verificar la validez de su respuesta asegurándose que (1) la derivada de la trayectoria de tiempo $y(t)$ sea consistente con la ecuación diferencial dada y que (2) la solución definida satisfaga la condición inicial*”. (Comillas y cursiva son nuestras).

Trataremos de verificar que $-a[y(0) - b/a]e^{-at} + a\{[y(0) - b/a]e^{-at} + b/a\} = b$, como lo indica el libro en la página 479:

$$-a[y(0) - b/a]e^{-at} +$$

$$+a\{[y(0) - b/a]e^{-at} + b/a\} = b$$

Sustitución:

$$-(-2)[9 - 0/-2]e^{-(-2)t}$$

$$-2\{[9 - 0/-2]e^{-(-2)t} + 0/-2\} = 0$$

Operación:

$$-(-2)[9 - 0/-2]e^{-(-2)t} = (2)[9]e^{(2)(0)} = (2)[9]e^0 = 18(1) = 18$$

Operación:

$$-2\{[9 - 0]e^{(2)0} + 0\} = -2\{[9]e^0\} = -2\{[9]\} = -18$$

Finalmente sumamos ambos resultados:

$$18 - 18 = 0, \text{ exactamente igual a } b = 0.$$

Eso quiere decir que nuestra solución es correcta.

Veamos ahora si nuestra solución satisface la condición inicial: $y(0) = 9$.

El libro, en la página 479, nos propone esta expresión:

$$y(0) = [y(0) - b/a] + b/a = y(0)$$

Sustitución:

$$9 = [9 - 0/-2] + 0/-2 = 9$$

Operación:

$$9 = [9 - 0] - 0 = 9$$

$$9 = [9] = 9$$

Resultado:

$9 = 9 = 9$, queda completamente satisfecha la condición inicial. La solución obtenida es correcta.

La tercera solución que verificaremos es la correspondiente al problema 1c.

Comprobación:

En la página 479 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright, nuestros autores recomiendan: “*Como paso final del proceso de solución de una ecuación diferencial, se recomienda que se habitúe usted a verificar la validez de su respuesta asegurándose que (1) la derivada de la trayectoria de tiempo $y(t)$ sea consistente con la ecuación diferencial dada y que (2) la solución definida satisfaga la condición inicial*”. (Comillas y cursiva son nuestras).

Trataremos de verificar que $-a[y(0) - b/a]e^{-at} + a\{[y(0) - b/a]e^{-at} + b/a\} = b$, como lo indica el libro en la página 479:

$$-a[y(0) - b/a]e^{-at} +$$

$$+a\{[y(0) - b/a]e^{-at} + b/a\} = b$$

Sustitución:

$$-(10)[0 - 15/10]e^{-(10)t}$$

$$+10\{[0 - 15/10]e^{-(10)t} + 15/10\} = 15$$

Operación:

$$-(10)[-1.5]e^{-(10)(0)} = -(10)[-1.5]e^{(0)} = -(10)[-1.5](1) = 15$$

Operación:

$$10\{[-1.5]e^0 + 1.5\} = 10\{[-1.5](1) + 1.5\} = 10[-1.5 + 1.5] = 10(0) = 0$$

Finalmente sumamos ambos resultados:

$$15 + 0 = 15, \text{ exactamente igual a } b = 15.$$

Eso quiere decir que nuestra solución es correcta.

Veamos ahora si nuestra solución satisface la condición inicial: $y(0) = 0$.

El libro, en la página 479, nos propone esta expresión:

$$y(0) = [y(0) - b/a] + b/a = y(0)$$

Sustitución:

$$0 = [0 - 15/10] + 15/10 = 0$$

Operación:

$$0 = [-15/10] + 15/10 = 0$$

$$0 = [0] = 0$$

Resultado:

$0 = 0 = 0$, queda completamente satisfecha la condición inicial. La solución obtenida es correcta.

La cuarta solución que verificaremos es la correspondiente al problema 1d.

Comprobación:

En la página 479 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright, nuestros autores recomiendan: “*Como paso final del proceso de solución de una ecuación diferencial, se recomienda que se habitúe usted a verificar la validez de su respuesta asegurándose que (1) la derivada de la trayectoria de tiempo $y(t)$ sea consistente con la ecuación diferencial dada y que (2) la solución definida satisfaga la condición inicial*”. (Comillas y cursiva son nuestras).

Trataremos de verificar que $-a[y(0) - b/a]e^{-at} + a\{[y(0) - b/a]e^{-at} + b/a\} = b$, como lo indica el libro en la página 479:

$$-a[y(0) - b/a]e^{-at} +$$

$$+a\{[y(0) - b/a]e^{-at} + b/a\} = b$$

Sustitución:

$$(-2)[1.5 - 1.5]e^{-(2)(0)} = (-2)[0](1) = 0$$

Sustitución:

$$+2\{[1.5 - 1.5]e^{-2(0)} + 1.5\} = +2\{[0]e^{(0)} + 1.5\} = +2\{[0](1) + 1.5\} = 3$$

Finalmente sumamos ambos resultados:

$$0 + 3 = 3, \text{ exactamente igual a } b = 3.$$

Eso quiere decir que nuestra solución es correcta.

Veamos ahora si nuestra solución satisface la condición inicial: $y(0) = 0$.

El libro, en la página 479, nos propone esta expresión:

$$y(0) = [y(0) - b/a] + b/a = y(0)$$

Sustitución:

$$1.5 = [1.5 - 1.5] + 1.5 = 1.5$$

Operación:

$$1.5 = [0] + 1.5 = 1.5$$

$$1.5 = 1.5 = 1.5$$

Resultado:

$1.5 = 1.5 = 1.5$, queda completamente satisfecha la condición inicial. La solución obtenida es correcta.

3. Encuentre la solución de cada uno de los apartados siguientes usando una fórmula apropiada desarrollada en el texto.

a) $dy/dt + y = 4$; $y(0) = 0$

Mi respuesta:

Debemos leer atentamente las páginas 475, 476 y 477 y practicar los ejemplos que se encuentran en las páginas 477, 478 y 479 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright.

El problema que abordaremos en estos momentos está integrado por una ecuación, $dy/dt + y = 4$, que es una ecuación diferencial porque contiene derivadas, es ordinaria porque contiene solamente una variable independiente (t), es de primer orden a causa de que la derivada de mayor orden que contiene es la primera, es lineal debido a que dy/dt aparece en primer grado y finalmente es no homogénea puesto que la constante no es igual a 0, sino a 4.

Si la ecuación es no homogénea, la solución general de la ecuación diferencial es $y(t) = y_c + y_p = Ae^{-at} + b/a$, donde:

$y_c = Ae^{-at}$, función complementaria

$y_p = b/a$, integración particular. Esta proviene del supuesto de que $y = k$, es decir y es igual a una constante, por lo que $dy/dt = 0$, en consecuencia,

$$dy/dt + ay = b$$

$$0 + ay = b$$

$$y = b/a.$$

La presencia de la constante A , es lo que nos permite tipificar como solución general la etapa resolutiva en que estamos. Eliminar dicha constante A , es lo que nos hará arribar a la solución definida.

La solución definida es $y(t) = (y(0) - b/a)e^{-at} + b/a$.

¿De dónde proviene esa última expresión? Deviene bajo el supuesto de que $y(t) = y(0)$, es decir, la variable dependiente $y(t)$ toma el valor $y(0)$ cuando $t = 0$, por tanto:

$y(t) = y_c + y_p = Ae^{-at} + b/a$, experimentará ciertas transformaciones debido a que el exponente de e se convierte en cero (0), quedando $y(0) = A + b/a$, despejando a A , $A = y(0) - (b/a)$, la ecuación de la solución general, ahora será:

$y(t) = [y(0) - b/a]e^{-at} + b/a$, que es la solución definida.

Pasemos a resolver el problema propuesto.

Primer paso, función complementaria:

Partimos de la ecuación diferencial no homogénea $dy/dt + ay = b$, que en el problema es a) $dy/dt + y = 4$; $y(0) = 0$; por tanto, $a = 1$, $b = 4$.

$$y_c = Ae^{-at}$$

Sustituimos a por su igual, que es 1, para obtener

$y_c = Ae^{-t}$ que es la función complementaria.

Segundo paso, integral particular.

$y_p = b/a = 4/1 = 4$, que es la integral particular.

Tercer paso, solución general.

$y(t) = y_c + y_p = Ae^{-t} + 4$, que es la solución general.

Cuarto paso, solución definida.

Cuando $t = 0$

$$y(t) = y_c + y_p = Ae^{-0} + 4 = A(1) + 4$$

Cuando $y(0) = 0$ (dato del problema), sustituimos para obtener A

$$y(0) = A + 4$$

$$0 = A + 4$$

$$A = -4$$

Sustituir el valor de A en la solución general:

$y(t) = y_c + y_p = -4e^{-t} + 4$, que es la solución definida.

b) $dy/dt = 23$; $y(0) = 1$

Mi respuesta:

Debemos leer atentamente las páginas 475, 476 y 477 y practicar los ejemplos que se encuentran en las páginas 477, 478 y 479 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright.

El problema que abordaremos en estos momentos está integrado por una ecuación, 3b) $dy/dt = 23$; que es una ecuación diferencial porque contiene derivadas, es ordinaria porque contiene solamente una variable independiente (t), es de primer orden a causa de que la derivada de mayor orden que contiene es la primera, es lineal debido a que dy/dt aparece en primer grado y finalmente es no homogénea puesto que la constante no es igual a 0, sino 23.

Si la ecuación es no homogénea, la solución general de la ecuación diferencial es $y(t) = y_c + y_p = Ae^{-at} + b/a$, donde:

$y_c = Ae^{-at}$, función complementaria

$y_p = b/a$, integración particular. Esta proviene del supuesto de que $y = k$, es decir y es igual a una constante, por lo que $dy/dt = 0$, en consecuencia,

$$dy/dt + ay = b$$

$$0 + ay = b$$

$$y = b/a.$$

La presencia de la constante A , es lo que nos permite tipificar como solución general la etapa resolutive en que estamos. Eliminar dicha constante A , es lo que nos hará arribar a la solución definida.

La solución definida es $y(t) = (y(0) - b/a)e^{-at} + b/a$.

¿De dónde proviene esa última expresión? Deviene bajo el supuesto de que $y(t) = y(0)$, es decir, la variable dependiente $y(t)$ toma el valor $y(0)$ cuando $t = 0$, por tanto:

$y(t) = y_c + y_p = Ae^{-at} + b/a$, experimentará ciertas transformaciones debido a que el exponente de e se convierte en cero (0), quedando $y(0) = A + b/a$, despejando a A , $A = y(0) - (b/a)$, la ecuación de la solución general, ahora será:

$y(t) = [y(0) - b/a]e^{-at} + b/a$, que es la solución definida.

Pasemos a resolver el problema propuesto.

Primer paso, función complementaria:

Partimos de la ecuación diferencial no homogénea $dy/dt + ay = b$, que en el problema es $b) dy/dt = 23$; $y(0) = 1$; por tanto, $a = 0$, $b = 23$.

El libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright, en la página 478, dice que cuando $a = 0$, la ecuación diferencial sería de este tipo, $dy/dt = b$ y, por tanto, su integración sería $y(t) = b_t + c$, donde c es una constante arbitraria. De aquí, entonces, la función complementaria de la ecuación que estamos resolviendo, será:

$y_c = Ae^{-at} = Ae^0 = A$, que es una constante arbitraria.

La integral particular, sería:

$$y_p = bt$$

La solución general sería:

$$y(t) = y_c + y_p = A + bt$$

Cuarto paso, solución definida.

Cuando $t = 0$

$$y(t) = y_c + y_p = A + bt = A + b(0) = A$$

Cuando $y(0) = 1$ (dato del problema), sustituimos para obtener A

$$1 = A$$

Sustituir el valor de A en la solución general:

$y(t) = y_c + y_p = A + bt = 1 + 23t$, que es la solución definida.

Reiteramos que después de calcular la constante arbitraria ($A=1$) es que obtenemos la solución definida:

$y(t) = y_c + y_p = A + bt = 1 + 23t$.

3c) $dy/dt - 5y = 0$; $y(0) = 6$.

Mi respuesta:

Debemos leer atentamente las páginas 475, 476 y 477 y practicar los ejemplos que se encuentran en las páginas 477, 478 y 479 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright.

El problema que abordaremos en estos momentos está integrado por una ecuación, $dy/dt - 5y = 0$; que es una ecuación diferencial porque contiene derivadas, es ordinaria porque contiene solamente una variable independiente (t), es de primer orden a causa de que la derivada de mayor orden que contiene es la primera, es lineal debido a que dy/dt aparece en primer grado y finalmente es homogénea puesto que la constante es igual a 0.

Si la ecuación es homogénea, pese a esta novedad, diremos que la solución general de la ecuación diferencial es $y(t) = y_c + y_p = Ae^{-at} + b/a$, donde:

$y_c = Ae^{-at}$, función complementaria

$y_p = b/a$, integración particular. Esta proviene del supuesto de que $y = k$, es decir y es igual a una constante, por lo que $dy/dt = 0$, en consecuencia,

$$dy/dt + ay = b$$

$$0 + ay = b$$

$$y = b/a.$$

La presencia de la constante A , es lo que nos permite tipificar como solución general la etapa resolutiva en que estamos. Eliminar dicha constante A , es lo que nos hará arribar a la solución definida.

La solución definida es $y(t) = (y(0) - b/a)e^{-at} + b/a$.

¿De dónde proviene esa última expresión? Deviene bajo el supuesto de que $y(t) = y(0)$, es decir, la variable dependiente $y(t)$ toma el valor $y(0)$ cuando $t = 0$, por tanto:

$y(t) = y_c + y_p = Ae^{-at} + b/a$, experimentará ciertas transformaciones debido a que el exponente de e se convierte en cero (0), quedando $y(0) = A + b/a$, despejando a A , $A = y(0) - (b/a)$, la ecuación de la solución general, ahora será:

$y(t) = [y(0) - b/a]e^{-at} + b/a$, que es la solución definida.

Pasemos a resolver el problema propuesto, donde $a = -5$; $b = 0$; $y(0) = 6$.

Primer paso, función complementaria:

Partimos de la ecuación diferencial en el problema es 3c) $dy/dt - 5y = 0$, por tanto, $a = -5$ $b = 0$

Sustituimos a por su igual, que es -5 , para obtener la función complementaria

$$y_c = Ae^{-at} = Ae^{-(-5)t} = Ae^{5t}$$

Segundo paso, integral particular.

$$y_p = b/a = 0/-5 = 0, \text{ que es la integral particular.}$$

Tercer paso, solución general.

$$y(t) = y_c + y_p = Ae^{5t} - 5, \text{ que es la solución general.}$$

Cuarto paso, solución definida.

Cuando $t=0$

$$y(t) = y_c + y_p = Ae^{5t} - 5 = Ae^{5(0)} - 5 = A(1) - 5 = A - 5$$

Cuando $y(0) = 6$ (dato del problema), sustituimos para obtener A

$$6 = A - 5$$

$$A = 11$$

Sustituir el valor de A en la solución general:

$$y(t) = y_c + y_p = 11e^{5t} - 5, \text{ que es la solución definida.}$$

3d) $dy/dt + 3y = 2$; $y(0) = 4$.

Mi respuesta:

Debemos leer atentamente las páginas 475, 476 y 477 y practicar los ejemplos que se encuentran en las páginas 477, 478 y 479 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright.

El problema que abordaremos en estos momentos está integrado por una ecuación, 3d) $dy/dt + 3y = 2$; que es una ecuación diferencial porque contiene derivadas, es ordinaria porque contiene solamente una variable independiente (t), es de primer orden a causa de que la derivada de mayor orden que contiene es la primera, es lineal debido a que dy/dt aparece en primer grado y finalmente es no homogénea puesto que la constante no es igual a 0, sino a 2.

Si la ecuación es no homogénea, la solución general de la ecuación diferencial es $y(t) = y_c + y_p = Ae^{-at} + b/a$, donde:

$y_c = Ae^{-at}$, función complementaria

$y_p = b/a$, integración particular. Esta proviene del supuesto de que $y = k$, es decir y es igual a una constante, por lo que $dy/dt = 0$, en consecuencia,

$$dy/dt + ay = b$$

$$0 + ay = b$$

$$y = b/a.$$

La presencia de la constante A , es lo que nos permite tipificar como solución general la etapa resolutive en que estamos. Eliminar dicha constante A , es lo que nos hará arribar a la solución definida.

La solución definida es $y(t) = (y(0) - b/a)e^{-at} + b/a$.

¿De dónde proviene esa última expresión? Deviene bajo el supuesto de que $y(t) = y(0)$, es decir, la variable dependiente $y(t)$ toma el valor $y(0)$ cuando $t = 0$, por tanto:

$y(t) = y_c + y_p = Ae^{-at} + b/a$, experimentará ciertas transformaciones debido a que el exponente de e se convierte en cero (0), quedando $y(0) = A + b/a$, despejando a A , $A = y(0) - (b/a)$, la ecuación de la solución general, ahora será:

$$y(t) = [y(0) - b/a]e^{-at} + b/a, \text{ que es la solución definida.}$$

Pasemos a resolver el problema propuesto.

Primer paso, función complementaria:

Partimos de la ecuación diferencial no homogénea $dy/dt + ay = b$, que en el problema es 3d) $dy/dt + 3y = 2$; $y(0) = 4$; por tanto, $a = 3$, $b = 2$.

El del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright, en la página 478, cuando $a = 0$, nos orienta de esta manera: la ecuación diferencial sería de este tipo, $dy/dt = b$, y por tanto, su integración sería $y(t) = b_t + c$, donde c es una constante arbitraria. De aquí, entonces, la función complementaria de la ecuación que estamos resolviendo, será:

$$y_c = Ae^{-at} = Ae^{-3t}$$

La integral particular, sería:

$$y_p = b/a = 2/3$$

La solución general sería:

$$y(t) = y_c + y_p = Ae^{-3t} + 2/3$$

Cuarto paso, solución definida.

Cuando $t=0$

$$y(t) = y_c + y_p = Ae^{-3t} + 2/3 = A(1) + 2/3 = A + 2/3$$

Cuando $y(0) = 4$ (dato del problema), sustituimos para obtener A

$$4 = A + 2/3$$

$$A = 4 - 2/3 = 10/3$$

Sustituir el valor de A en la solución general:

$$y(t) = Ae^{-3t} + 2/3 = (10/3)e^{-3t} + 2/3, \text{ que es la solución definida.}$$

3e) $dy/dt - 7y = 7$; $y(0) = 7$

Mi respuesta:

Debemos leer atentamente las páginas 475, 476 y 477 y practicar los ejemplos que se encuentran en las páginas 477, 478 y 479 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright.

El problema que abordaremos en estos momentos está integrado por una ecuación, 3e) $dy/dt - 7y = 7$; que es una ecuación diferencial porque contiene derivadas, es ordinaria porque contiene solamente una variable independiente (t), es de primer orden a causa de que la derivada de mayor orden que contiene es la primera, es lineal debido a que dy/dt aparece en primer grado y finalmente es no homogénea puesto que la constante no es igual a 0, sino a 7.

Si la ecuación es no homogénea, la solución general de la ecuación diferencial es $y(t) = y_c + y_p = Ae^{-at} + b/a$, donde:

$y_c = Ae^{-at}$, función complementaria

$y_p = b/a$, integración particular. Esta proviene del supuesto de que $y = k$, es decir y es igual a una constante, por lo que $dy/dt = 0$, en consecuencia,

$$dy/dt + ay = b$$

$$0 + ay = b$$

$$y = b/a.$$

La presencia de la constante A , es lo que nos permite tipificar como solución general la etapa resolutive en que estamos. Eliminar dicha constante A , es lo que nos hará arribar a la solución definida.

La solución definida es $y(t) = (y(0) - b/a)e^{-at} + b/a$.

¿De dónde proviene esa última expresión? Deviene bajo el supuesto de que $y(t) = y(0)$, es decir, la variable dependiente $y(t)$ toma el valor $y(0)$ cuando $t = 0$, por tanto:

$y(t) = y_c + y_p = Ae^{-at} + b/a$, experimentará ciertas transformaciones debido a que el exponente de e se convierte en cero (0), quedando $y(0) = A + b/a$, despejando a A , $A = y(0) - (b/a)$, la ecuación de la solución general, ahora será:

$$y(t) = [y(0) - b/a]e^{-at} + b/a, \text{ que es la solución definida.}$$

Pasemos a resolver el problema propuesto.

Primer paso, función complementaria:

Partimos de la ecuación diferencial no homogénea $dy/dt + ay = b$, que en el problema es $3e) dy/dt - 7y = 7$; $y(0) = 7$; por tanto, $a = -7$, $b = 7$.

El del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright, en la página 478, cuando $a = 0$, nos orienta de esta manera: la ecuación diferencial sería de este tipo, $dy/dt = b$, y por tanto, su integración sería $y(t) = b_t + c$, donde c es una constante arbitraria. De aquí, entonces, la función complementaria de la ecuación que estamos resolviendo, será:

$$y_c = Ae^{-at} = Ae^{-(-7)t}$$

La integral particular, sería:

$$y_p = b/a = 7/-7$$

La solución general sería:

$$y(t) = y_c + y_p = Ae^{7t} - 1$$

Cuarto paso, solución definida.

Cuando $t=0$

$$y(t) = y_c + y_p = Ae^{-(-7)t} - 1 = A(1) - 1 = A - 1$$

Cuando $y(0) = 7$ (dato del problema), sustituimos para obtener A

$$7 = A - 1$$

$$A = 7 + 1 = 8$$

Sustituir el valor de A en la solución general:

$$y(t) = Ae^{7t} - 1 = 8e^{7t} - 1, \text{ que es la solución definida.}$$

3f) (3) $dy/dt + 6y = 5$; $y(0) = 0$

Mi respuesta:

Debemos leer atentamente las páginas 475, 476 y 477 y practicar los ejemplos que se encuentran en las páginas 477, 478 y 479 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright.

El problema que abordaremos en estos momentos está integrado por una ecuación, $dy/dt + 6y = 5$, que es una ecuación diferencial porque contiene derivadas, es ordinaria porque contiene solamente una variable independiente (t), es de primer orden a causa de que la derivada de mayor orden que contiene es la primera, es lineal debido a que dy/dt aparece en primer grado y finalmente es no homogénea puesto que la constante no es igual a 0, sino a 5.

Si la ecuación es no homogénea, la solución general de la ecuación diferencial es $y(t) = y_c + y_p = Ae^{-at} + b/a$, donde:

$y_c = Ae^{-at}$, función complementaria

$y_p = b/a$, integración particular. Esta proviene del supuesto de que $y = k$, es decir y es igual a una constante, por lo que $dy/dt = 0$, en consecuencia,

$$dy/dt + ay = b$$

$$0 + ay = b$$

$$y = b/a.$$

La presencia de la constante A , es lo que nos permite tipificar como solución general la etapa resolutive en que estamos. Eliminar dicha constante A , es lo que nos hará arribar a la solución definida.

La solución definida es $y(t) = (y(0) - b/a)e^{-at} + b/a$.

¿De dónde proviene esa última expresión? Deviene bajo el supuesto de que $y(t) = y(0)$, es decir, la variable dependiente $y(t)$ toma el valor $y(0)$ cuando $t = 0$, por tanto:

$y(t) = y_c + y_p = Ae^{-at} + b/a$, experimentará ciertas transformaciones debido a que el exponente de e se convierte en cero (0), quedando $y(0) = A + b/a$, despejando a A , $A = y(0) - (b/a)$, la ecuación de la solución general, ahora será:

$y(t) = [y(0) - b/a]e^{-at} + b/a$, que es la solución definida.

Pasemos a resolver el problema propuesto.

Primer paso, función complementaria:

Antes de calcular la función complementaria, debemos normalizar la ecuación diferencial dada, dividiendo por 3, quedando $dy/dt + 2y = 5/3$

Partimos de la ecuación diferencial no homogénea $dy/dt + ay = b$, que en el problema es $dy/dt + 2y = 5/3$, por tanto, $a = 2$, $b = 5/3$.

$$y_c = Ae^{-at}$$

Sustituimos a por su igual, que es 2, para obtener

$y_c = Ae^{2t}$ que es la función complementaria.

Segundo paso, integral particular.

Partimos de la ecuación diferencial no homogénea $dy/dt + ay = b$, que en el problema es $dy/dt + 2y = 5/3$ por tanto $a = 2$, $b = 5/3$.

$y_p = b/a = (5/3)/2 = 5/6$, que es la integral particular.

Tercer paso, solución general.

$y(t) = y_c + y_p = Ae^{2t} + 5/6$, que es la solución general.

Cuarto paso, solución definida.

Cuando $t=0$

$$y(t) = y_c + y_p = Ae^{2t} + 5/6 = Ae^{2(0)} + 5/6 = A(1) + 5/6 = A + 5/6$$

Cuando $y(0) = 0$ (dato del problema), sustituimos para obtener A

$$y(t) = A + 5/6$$

Sustitución

$$0 = A + 5/6$$

$$A = -5/6$$

Sustituir el valor de A en la solución general:

$$y(t) = y_c + y_p = -5/6 e^{2t} + 5/6, \text{ que es la solución definida.}$$

4. Verifique la validez de sus respuestas al problema 3.

Mi respuesta

La primera solución que verificaremos es la correspondiente al problema 3a.

Comprobación:

En la página 479 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright, nuestros autores recomiendan: “*Como paso final del proceso de solución de una ecuación diferencial, se recomienda que se habitúe usted a verificar la validez de su respuesta asegurándose que (1) la derivada de la trayectoria de tiempo $y(t)$ sea consistente con la ecuación diferencial dada y que (2) la solución definida satisfaga la condición inicial*”. (Comillas y cursiva son nuestras).

Trataremos de verificar que $-a[y(0) - b/a]e^{-at} + a\{[y(0) - b/a]e^{-at} + b/a\} = b$, como lo indica el libro en la página 479. Para facilitar el cálculo dividiremos la fórmula dada en tres partes, sabiendo que $a = 1$, $b = 4$, $y(0) = 0$, haciendo las sustituciones de lugar.

Primera parte:

$$-a[y(0) - b/a]e^{-at} = -1[0 - 4/1]e^{-1t} = -1[-4]e^{-t} = (-1)(-4)(1) = 4$$

Segunda parte:

$$+a\{[y(0) - b/a]e^{-at} + b/a\} = +(1)\{[0 - 4/1]e^{-t} + 4/1\} = +(1)\{[-4]e^{-t} + 4\} = +\{[-4]e^{-t} + 4\} = (-4)(1) + 4 = 0$$

Tercera parte:

$$= 4$$

Resultado final:

$$4 + 0 = 4, \text{ exactamente igual a } b = 4.$$

Eso quiere decir que nuestra solución es correcta.

Veamos ahora si nuestra solución satisface la condición inicial: $y(0) = 0$.

El libro, en la página 479, nos propone esta expresión:

$$y(0) = [y(0) - b/a] + b/a = y(0)$$

Sustitución y operación:

$0 = [0 - 4/1] + 4/1 = -4 + 4 = 0$, queda satisfecha la condición inicial. La solución obtenida es completamente correcta.

Mi respuesta:

La segunda solución que verificaremos es la correspondiente al problema 3b.

La comprobación correspondiente a 3b, la aplazaremos para otra ocasión; necesito estudiar más a fondo, el procedimiento a utilizar para verificar la correcta solución que pudimos ensayar.

Mi respuesta

La tercera solución que verificaremos es la correspondiente al problema 3c.

Comprobación:

En la página 479 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright, nuestros autores recomiendan: “*Como paso final del proceso de solución de una ecuación diferencial, se recomienda que se habitúe usted a verificar la validez de su respuesta asegurándose que (1) la derivada de la trayectoria de tiempo $y(t)$ sea consistente con la ecuación diferencial dada y que (2) la solución definida satisfaga la condición inicial*”. (Comillas y cursiva son nuestras).

Trataremos de verificar que $-a[y(0) - b/a]e^{-at} + a\{[y(0) - b/a]e^{-at} + b/a\} = b$, como lo indica el libro en la página 479. Para facilitar el cálculo dividiremos la fórmula dada en tres partes, sabiendo que $a = -5$, $b = 0$, $y(0) = 6$, haciendo las sustituciones de lugar.

Primera parte:

$$-(-5)[6 - 0/-5]e^{-(-5)t} = 5[6]e^{-1t} = 5[6]e^{5(0)} = (5)(6)(1) = 30$$

Segunda parte:

$$+a\{[y(0) - b/a]e^{-at} + b/a\} = +(-5)\{[6 - 0/-5]e^{-(-5)(0)} + 0/-5\} = -5\{[6]e^0 + 0\} = -5\{[6](1)\} = -30$$

Tercera parte:

$$b = 0$$

Resultado final:

$$30 - 30 = 0, \text{ exactamente igual a } b = 0.$$

Eso quiere decir que nuestra solución es correcta.

Veamos ahora si nuestra solución satisface la condición inicial: $y(0) = 6$.

El libro, en la página 479, nos propone esta expresión:

$$y(0) = [y(0) - b/a] + b/a = y(0)$$

Sustitución y operación:

$$6 = [6 - 0/-5] + 0/-5 = 6$$

$$= 6 + 0$$

= 6, queda satisfecha la condición inicial. La solución obtenida es completamente correcta.

Mi respuesta

La cuarta solución que verificaremos es la correspondiente al problema 3d.

Comprobación:

En la página 479 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright, nuestros autores recomiendan: “*Como paso final del proceso de solución de una ecuación diferencial, se recomienda que se habitúe usted a verificar la validez de su respuesta asegurándose que (1) la derivada de la trayectoria de tiempo $y(t)$ sea consistente con la ecuación diferencial dada y que (2) la solución definida satisfaga la condición inicial*”. (Comillas y cursiva son nuestras).

Trataremos de verificar que $-a[y(0) - b/a]e^{-at} + a\{[y(0) - b/a]e^{-at} + b/a\} = b$, como lo indica el libro en la página 479. Para facilitar el cálculo dividiremos la fórmula dada en tres partes, sabiendo que $a = 3$, $b = 2$, $y(0) = 4$, haciendo las sustituciones de lugar.

Primera parte:

$$-3[4 - 2/3]e^{-3t} = -3[10/3]e^0 = -3[10/3](1) = -30/3 = -10$$

Segunda parte:

$$+3\{[4 - 2/3]e^{-3t} + 2/3\} = +3\{[10/3]e^0 + 2/3\} = 3\{[10/3](1) + 2/3\} = 3\{[12/3]\} = 36/3 = 12$$

Tercera parte:

$$b = 2$$

Resultado final:

$$-10 + 12 = 2, \text{ exactamente igual a } b = 2.$$

Eso quiere decir que nuestra solución es correcta.

Veamos ahora si nuestra solución satisface la condición inicial: $y(0) = 4$..

El libro, en la página 479, nos propone esta expresión:

$$y(0) = [y(0) - b/a] + b/a = y(0)$$

Sustitución y operación:

$$4 = [4 - 2/3] + 2/3 = 4$$

$$4 = 10/3 + 2/3 = 4$$

$4 = 4 = 4$, queda satisfecha la condición inicial. La solución obtenida es completamente correcta.

Mi respuesta

La quinta solución que verificaremos es la correspondiente al problema 3e.

Comprobación:

En la página 479 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright, nuestros autores recomiendan: “*Como paso final del proceso de solución de una ecuación diferencial, se recomienda que se habitúe usted a verificar la validez de su respuesta asegurándose que (1) la derivada de la trayectoria de tiempo $y(t)$ sea consistente con la ecuación diferencial dada y que (2) la solución definida satisfaga la condición inicial*”. (Comillas y cursiva son nuestras).

Trataremos de verificar que $-a[y(0) - b/a]e^{-at} + a\{[y(0) - b/a]e^{-at} + b/a\} = b$, como lo indica el libro en la página 479. Para facilitar el cálculo dividiremos la formula dada en tres partes, sabiendo que $a = -7$, $b = 7$, $y(0) = 7$, haciendo las sustituciones de lugar.

Primera parte:

$$\text{que } -a[y(0) - b/a]e^{-at} = -(-7)[7 - 7/-7]e^{-(-7)t} = 7[8]e^0 = 7[8](1) = 56$$

Segunda parte:

$$+a\{[y(0) - b/a]e^{-at} + b/a\} = -7\{[7 - 7/-7]e^{-(-7)t} + 7/-7\} = -7\{[8](1) - 1\} = -7\{[8] - 1\} = -49$$

Tercera parte:

$$b = 7$$

Resultado final:

$$56 - 49 = 7, \text{ que es exactamente igual a } b = 7.$$

Eso quiere decir que nuestra solución es correcta.

Veamos ahora si nuestra solución satisface la condición inicial: $y(0) = 7$.

El libro, en la página 479, nos propone esta expresión:

$$y(0) = [y(0) - b/a] + b/a = y(0)$$

Sustitución y operación:

$$7 = [7 - 7/-7] + 7/-7 = 7$$

$$7 = 8 - 1 = 7$$

$7 = 7 = 7$, queda satisfecha la condición inicial. La solución obtenida es completamente correcta.

Mi respuesta

La sexta solución que verificaremos es la correspondiente al problema 3f.

Comprobación:

En la página 479 del libro que estamos estudiando, *Métodos fundamentales de economía matemática*, de la autoría de Chiang y Wainwright, nuestros autores recomiendan: “*Como paso final del proceso de solución de una ecuación diferencial, se recomienda que se habitúe usted a verificar la validez de su respuesta asegurándose que (1) la derivada de la trayectoria de tiempo $y(t)$ sea consistente con la ecuación diferencial dada y que (2) la solución definida satisfaga la condición inicial*”. (Comillas y cursiva son nuestras).

Trataremos de verificar que $-a[y(0) - b/a]e^{-at} + a\{[y(0) - b/a]e^{-at} + b/a\} = b$, como lo indica el libro en la página 479. Para facilitar el cálculo dividiremos la fórmula dada en tres partes, sabiendo que $a = 6$, $b = 5$, $y(0) = 0$, haciendo las sustituciones de lugar.

Primera parte:

$$-a[y(0) - b/a]e^{-at} = -6[0 - 5/6]e^{-6t} = -6[-5/6]e^0 = -6[-5/6](1) = 30/6 = 5$$

Segunda parte:

$$+a\{[y(0) - b/a]e^{-at} + b/a\} = 6\{[0 - 5/6]e^{-6t} + 5/6\} = 6\{[-5/6](1) + 5/6\} = 6\{[0]\} = 0$$

Tercera parte:

$$b = 5$$

Resultado final:

$$5 + 0 = 5, \text{ que es exactamente igual a } b = 5.$$

Eso quiere decir que nuestra solución es correcta.

Veamos ahora si nuestra solución satisface la condición inicial: $y(0) = 0$.

El libro, en la página 479, nos propone esta expresión:

$$y(0) = [y(0) - b/a] + b/a = y(0)$$

Sustitución y operación:

$$0 = [0 - 5/6] + 5/6 = 0$$

$0 = 0 = 0$, queda satisfecha la condición inicial. La solución obtenida es completamente correcta.

Dr. Manuel de Jesús Linares Jiménez
Ex-Coordinador General de los Programas Doctorales de la UASD
Ex-Presidente del Consejo Superior de Doctores de la UASD