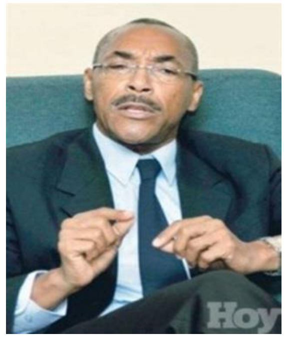
Dr. Manuel de Jesús Linares Jiménez



Obras
Completas

Nuevo Tomo
122

Estudiando el libro CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL de Granville. Cuarto resultado del proyecto de investigación en el campo matemático.

Santo Domingo, República Dominicana,
Noviembre 2024

ESTUDIANDO EL LIBRO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL DE GRANVILLE. CUARTO RESULTADO DEL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN EN EL CAMPO MATEMÁTICO.

Autor: Doctor Manuel de Jesús Linares Jiménez
829-637-9303

Edición en formato digital:
Noviembre, 2024

Tamaño 14 de las letras en Word, debido a mis problemas en la vista.

DEDICATORIA ESPECIAL:

Dedico con particular aprecio el tomo 122 de mis Obras Completas, Estudiando el libro CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL de Granville a mis queridas y distinguidas sobrinas Belkis, Nancy y Moraima, las cuales han dado un ejemplo de honestidad y trabajo en tierras extranjeras, siguiendo el comportamiento de su padre y madres, especialmente de sus abuelos, Clodomiro Linares y Orfelina Jiménez.

PRÓLOGO

Con mucho agrado y entusiasmo he vuelto a estudiar el magnífico libro de Granville, CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.

Percey F. Smith y William Raymond Longley, filósofos y matemáticos de la Universidad de Yale, tuvieron a cargo la revisión de la edición de fecha 1970.

Al exponer al público los puntos concretos que estudié, del libro citado, el esfuerzo realizado se ha constituido en el tomo 122 de mis Obras Completas, en formato digital, y a la vez representa el cuarto y penúltimo resultado de mi proyecto de investigación en el campo matemático. El presente estudio reposa en la ciencia matemática de la educación superior, en cambio, los resultados primero, segundo y tercero fueron en el área de la trigonometría, geometría y álgebra respectivamente, no más allá de la educación secundaria.

Debo recordar que el cuarto resultado del proceso investigativo incluía no solamente el estudio de la obra de Granville, sino también el estudio del libro titulado GEOMETRÍA ANALÍTICA de la autoría de Lehmann. No obstante, esta parte fue excluida en virtud de que en mi estudio denominado EXPLORANDO EL CAMINO DE LA ECONOMÍA MATEMÁTICA, de fecha enero 2002, pude yo, en su primer capítulo, exponer algunos elementos de la esencia de la obra de Lehmann, que son claves para la investigación actual que estamos desarrollando.

Volviendo sobre Granville, debemos aseverar que el cuarto resultado del proceso investigativo, en el campo matemático que he emprendido, no implica que haya agotado la joya de Granville; en el futuro volveré a estudiar a Granville; cuando lo agote totalmente entonces podré decir que he asimilado los fundamentos básicos del cálculo diferencial e integral. Hasta tanto, seré un simple alumno. Me falta mucho, muchísimo por aprender. Mas, tengo la firme convicción de que dominaré el cálculo diferencial e integral, no importa que en algunos días cumpla 75 años de edad.

Un día después de la publicación del presente resultado investigativo, que constituye el tomo 122 de mis Obras Completas, en formato digital, comenzaré a estructurar el resultado final del proyecto de investigación en el campo matemático que he emprendido. Me siento extremadamente contento.

El resultado final, que probablemente se fundamentará en ecuaciones diferenciales y en ecuaciones en diferencia, representará un gran desafío para un simple economista; sin embargo, en otras ocasiones he desarrollado investigaciones que me han entrenado para este nuevo emprendimiento; citemos algunas: *Modelo de interacción del multiplicador con el acelerador; Acerca de la supuesta vigencia de la relación de Phillips; Estudiando el libro álgebra superior de Spiegel-Moyer; y Aporte dominicano al marxismo desde la econometría y el cálculo diferencial e integral.* Sin duda, saldré victorioso.

Dr. Manuel de Jesús Linares Jiménez
Profesor Titular Jubilado y Ex-Presidente del Consejo
Superior de Doctores de la UASD (2019-2022)

Noviembre 2024.

ESTUDIANDO EL LIBRO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL DE GRANVILLE

Introducción

El primer tema que vamos a estudiar es el de la derivación de funciones algebraicas.

En el capítulo III (DERIVACIÓN), página 25, dice Granville: *"En este capítulo vamos a investigar cómo varía el valor de una función al variar la variable independiente. El problema fundamental del Cálculo diferencial es el de establecer con toda precisión una medida de esta variación…"* (Comillas, cursiva y puntos suspensivos son nuestros). Más adelante, en el capítulo IV (REGLAS PARA DERIVAR FUNCIONES ALGEBRAICAS), páginas 36-51, Granville nos ilustra sobre las nueve (9) principales reglas para derivar funciones algebraicas.

En la página 42 de su libro, Granville nos introduce en la solución de problemas relativos a la derivada de funciones algebraicas, muchos de los cuales son resueltos por Granville. Comencemos:

Hallar la derivada de las siguientes funciones:

1. $y= x^3$.

Respuesta del libro: $3x^2$.

Mi respuesta:

Supongo que en el problema 1 nos proponen una función de exponente constante. En este caso Granville, en la página 41 dice: *"La derivada de la potencia de una función de exponente constante es igual al producto del exponente por la función elevada a un exponente disminuido en una unidad y por la derivada de la función".* (Comillas y cursiva son nuestras). Aplicando esta regla tendremos la solución que propone Granville:

Solución:

$dy/dx= d/dx (x^3)= 3x^{3-1}= 3x^2$.

Mi respuesta coincide con la respuesta del libro.

2. $y= ax^4 - bx^2$.

Respuesta del libro: $4ax^3 - 2bx$.

Mi respuesta:

Supongo que en el problema 2 nos proponen una suma algebraica de funciones. En este caso Granville, en la página 39 dice: *"La derivada de la suma algebraica de un número finito n de funciones es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones"*. (Comillas y cursiva son nuestras). Después que apliquemos esta regla (número III) tendremos una nueva situación en la que aplicaremos la regla IV, que reza así: *"La derivada del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la derivada de la función".* (Comillas y cursiva son nuestras). Y, finalmente, también tendremos que aplicar la regla VIa, que Granville, en la página 41, la define así: "*"La derivada de la potencia de una función de exponente constante es igual al producto del exponente por la función elevada a un exponente disminuido en una unidad y por la derivada de la función".* (Comillas y cursiva son nuestras).

Solución:

$dy/dx= d/dx\ (ax^4 - bx^2)$

$= d/dx\ (ax^4) - d/dx(bx^2)$

$= (a)d/dx\ (x^4) - (b)d/dx\ (x^2)$

$= 4(a)(x^{4-1}) - 2(b)(x^{2-1})$

$= 4ax^3 - 2bx$.

Mi respuesta coincide con la respuesta del libro de Granville.

3. $y= x^{4/3} +5$.

Respuesta del libro: $4/3x^{1/3}$.

Mi respuesta:

Primero examinemos la función que nos han dado; es una función que representa una suma algebraica, que de acuerdo a Granville en la página 39 de su libro, para resolverla debemos aplicarle la regla III, que reza del modo siguiente: *"La derivada de la suma algebraica de un número finito n de funciones es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones"*. (Comillas y cursiva son nuestras). En segundo lugar, después de aplicar la regla III, tenemos que aplicar dos reglas más. Una, la regla VIa que Granville, en la página 41, la define así: *"La derivada de la potencia de una función de exponente constante es igual al producto del exponente por la función elevada a un exponente disminuido en una unidad y por la derivada de la función"*. (Comillas y cursiva son nuestras). Dos, la regla I, que en la página 37, Granville la define así: *"La derivada de una constante es cero"*. (Comillas y cursiva son nuestras). Procedamos:

Solución:

$dy/dx= d/dx(x^{4/3}) +d/dx(5)$

$=(4/3)(x^{4/3-1}) +(0)= (4/3)x^{1/3} +0$

$= (4/3)x^{1/3}$.

Mi respuesta coincide con la respuesta del libro de Granville.

5. $y= (x^2 -3)^5$.

Respuesta del libro: $10x(x^2 -3)^4$.

Mi respuesta:

Para resolver el problema 2, debemos utilizar las siguientes reglas de derivación. Primero, la regla VI que Granville, en la página 41, la define así:

"La derivada de la potencia de una función de exponente constante es igual al producto del exponente por la función elevada a un exponente disminuido en una unidad y por la derivada de la función". (Comillas y cursiva son nuestras). Segundo, cuando tengamos que derivar $(x^2 -3)$, usaremos la regla III, que Granville la define, en la página 39, del modo siguiente: *"La derivada de la suma algebraica de un número finito n de funciones es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones"*. (Comillas y cursiva son nuestras). Pero resulta que x^2 exigirá de la regla VI nuevamente y el 3, como constante exigirá de la regla I, que

Granville en la página 37 la define de este modo: *"La derivada de una constante es cero"*. Procedamos:

$dy/dx= d/dx(x^2 -3)^5$

$= 5(x^2 -3)^4 d/dx(x^2 -3)$

$= 5(x^2 -3)^4 (2x)= 10x(x^2 -3)^4$.

Mi respuesta coincide con la respuesta del libro de Granville.

6. $y= \sqrt{(a^2 -x^2)}$.

Respuesta del libro: $-x/\sqrt{(a^2 -x^2)}$.

Mi respuesta:

Para resolver correctamente el problema 6 debemos utilizar las siguientes reglas de derivación: VI (derivada de la potencia de una función), III (derivada de una suma), I (derivada de una constante) y VIa. Procedamos:

$dy/dx= d/dx\ (a^2 -x^2)^{1/2}$

$= 1/2(a^2 -x^2)^{-1/2} d/dx(a^2 -x^2)$

$= 1/2(a^2 -x^2)^{-1/2}(0 -2x)$

$= (1/2)(-2x)(a^2 -x^2)^{-1/2}$

$= -x(a^2 -x^2)^{-1/2}$

$= -x/(a^2 -x^2)^{1/2}$

$= -x/\sqrt{(a^2 -x^2)}$.

Mi respuesta coincide con la respuesta del libro de Granville.

7. $y= (3x^2 +2)\sqrt{(1 +5x^2)}$.

Respuesta del libro: $(45x^3 +16x)/\sqrt{(1 +5x^2)}$.

Mi respuesta:

Las reglas de derivación que usaremos en la solución del problema 7 son las siguientes: V (derivada del producto de dos funciones), VI (derivada de la potencia de una función), III (derivada de una suma). Procedamos:

$dy/dx= (3x^2 +2)d/dx(1 +5x^2)^{1/2}+(1 +5x^2)^{1/2}d/dx(3x^2 +2)$

$= (3x^2 +2)1/2(1 +5x^2)^{-1/2}d/dx(1 +5x^2) +(1 +5x^2)^{1/2}(6x +0)$

$= (3x^2 +2)1/2(1 +5x^2)^{-1/2}(0 +10x) +(1 +5x^2)^{1/2}(6x)$

$= (3x^2 +2)1/2(1 +5x^2)^{-1/2}(10x) +(1 +5x^2)^{1/2}(6x)$

$= (3x^2 +2)(1 +5x^2)^{-1/2}(5x) +(6x)(1 +5x^2)^{1/2}$

$= 5x(3x^2 +2)/\sqrt{(1 +5x^2)} +6x\sqrt{(1 +5x^2)}$

$= (15x^3 +10x)/\sqrt{(1 +5x^2)} +6x\sqrt{(1 +5x^2)}$.

Mi respuesta coincide con la respuesta del libro, solo que el autor llevó la respuesta a un mayor grado de simplificación.

8. $y= (a^2 +x^2)/\sqrt{(a^2 -x^2)}$.

Respuesta del libro: $dy/dx= (3a^2x -x^3)/(a^2 -x^2)^{3/2}$.

Mi respuesta:

Las reglas de derivación que usaremos para resolver el problema 8, son las siguientes: regla VII (derivada de un cociente); regla III (derivada de una suma de funciones); regla VI (derivada de la potencia de una función); y la regla VIa. Comencemos:

Solución:

$dy/dx= [(a^2 -x^2)^{1/2}d/dx(a^2 +x^2) -(a^2 +x^2)d/dx(a^2 -x^2)^{1/2}]/(a^2 -x^2)$

$= [(a^2 -x^2)^{1/2}(0 +2x) -(a^2 +x^2)1/2(a^2 -x^2)^{-1/2}(0 -2x)]/(a^2 -x^2)$

$= [(a^2 - x^2)^{1/2}(2x) - (a^2 + x^2)1/2(a^2 - x^2)^{-1/2}(-2x)]/(a^2 - x^2)$

$= [(2x)(a^2 - x^2)^{1/2} - (a^2 + x^2)(-x)(a^2 - x^2)^{-1/2}]/(a^2 - x^2) =$

Multiplicamos el numerador y el denominador por $(a^2 - x^2)^{1/2}$, por tanto, en el numerador y en el denominador, quedarán:

$= [(2x)(a^2 - x^2) - (a^2 + x^2)(-x)]/(a^2 - x^2)^{3/2}$

$= (2a^2x + a^2x + x^3)/ (a^2 - x^2)^{3/2}$

$= (3a^2x + x^3)/ (a^2 - x^2)^{3/2}$.

Mi respuesta coincide con la respuesta del libro excepto en el signo del segundo término del numerador.

Comprobar cada una de las siguientes derivadas:

9. $d/dx(3x^4 - 2x^2 + 8)$

Respuesta del libro: $12x^3 - 4x$.

Mi comprobación:

Para realizar la comprobación, en el problema 9, debemos usar las siguientes reglas de derivación: regla III (derivada de una suma de funciones), regla IV (derivada del producto de una constante por una función; regla VIa (derivada de la potencia de una función siendo el exponente constante); regla I (derivada de una constante). Comencemos:

$d/dx(3x^4) - d/dx(2x^2) + d/dx(8)$

$= 12x^3 - 4x + 0$

$= 12x^3 - 4x$. Comprobado.

10. $d/dx(4 + 3x - 2x^3)$

Respuesta del libro: $3 - 6x^2$.

Mi comprobación:

Para realizar la comprobación, en el problema 10, debemos usar las siguientes reglas de derivación: regla III (derivada de una suma de funciones); regla I (derivada de una constante); regla IV (derivada del producto de una constante por una función; regla VIa (derivada de la potencia de una función siendo el exponente constante). Comencemos:

$d/dx(4) + d/dx(3x) - d/dx(2x^3)$

$= 0 + 3 - 6x^2$

$= 3 - 6x^2$. Comprobado.

11. $d/dt(at^5 - 5bt^3)$

Respuesta del libro: $5at^4 - 15bt^2$.

Mi comprobación:

Para realizar la comprobación, en el problema 11, debemos usar las siguientes reglas de derivación: regla III (derivada de una suma de funciones); regla IV (derivada del producto de una constante por una función); regla VIa (derivada de la potencia de una función siendo el exponente constante). Comencemos:

$d/dt(at^5) - d/dt(5bt^3)$

$= (a)5t^4 - (5b)(3)t^2$

$= 5at^4 - 15bt^2$. Comprobado.

12. $d/dz[(z^2/2) - (z^7/7)]$

Respuesta del libro: $z - z^6$.

Mi comprobación:

Para realizar la comprobación, en el problema 12, debemos usar las siguientes reglas de derivación: regla III (derivada de una suma de funciones, que es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones); regla VII (derivada de un cociente, que es igual al producto del denominador por la derivada del numerador, menos el producto del numerador por la derivada del denominador, todo dividido por el cuadrado del denominador); regla IV (derivada del producto de una constante por una función); regla VIa (derivada de la potencia de una función siendo el exponente constante). Comencemos:

$d/dz(z^2/2) – d/dz(z^7/7)$

$= [(2)(2z) – (z^2)(0)]/4 – [(7)(7z^6) – (z^7)(0)]/49$

$= (4z - 0)/4 – (49z^6 - 0)/49$

$= (4z/4) – (49z^6/49) = z – z^6$. Comprobado.

14. $d/dx(2/x - 3/x^2)$

Respuesta del libro: $-2/x^2 + 6/x^3$.

Comprobando:

Para realizar la comprobación, en el problema 14, debemos usar las siguientes reglas de derivación: regla III (derivada de una suma de funciones, que es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones); regla VII (derivada de un cociente, que es igual al producto del denominador por la derivada del numerador, menos el producto del numerador por la derivada del denominador, todo dividido por el cuadrado del denominador); regla IV (derivada del producto de una constante por una función); regla VIa (derivada de la potencia de una función siendo el exponente constante). Comencemos:

$d/dx(2/x) – d/dx(3/x^2)$

$= [(x)(0) – (2)(1)]/x^2 – [(x^2)(0) – (3)(2x)]/(x^4)$

$= [(0) – (2)]/(x^2) – [(0) - 6x]/(x^4)$

= $-(2)/(x^2) +(6x)/(x^4)$

= $-2/x^2 +6/x^3$. Comprobado.

15. $d/dt(2t^{4/3} -3t^{2/3})$

Respuesta del libro: $8/3t^{1/3} -2t^{-1/3}$.

Mi comprobación:

Para realizar la comprobación en el problema 15, debemos usar las siguientes reglas de derivación:

Regla III (derivada de una suma de funciones, que es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones); regla IV (derivada del producto de una constante por una función, que es igual al producto de la constante por la derivada de la función); regla VIa (derivada de la potencia de una función siendo el exponente constante, que es igual al producto del exponente por la función elevada a un exponente disminuido en una unidad y por la derivada de la función). Comencemos:

$d/dt(2t^{4/3}) –d/dt(3t^{2/3})$

= $8/3t^{1/3} -2t^{-1/3}$

= $(2)d/dt(t^{4/3}) –(3)d/dt(t^{2/3})$

= $8/3t^{1/3} -2t^{-1/3}$

=$(2)(4/3)t^{1/3} –(3)(2/3)t^{-1/3}$

= $8/3t^{1/3} -2t^{-1/3}$

= $8/3t^{1/3} -2t^{-1/3}$

= $8/3t^{1/3} -2t^{-1/3}$. Comprobado.

16. $d/dx(2x^{3/4} +4x^{-1/4})$

Respuesta del libro: $3/2x^{-1/4} –x^{-5/4}$.

Mi comprobación:

Para realizar la comprobación, en el problema 16, debemos usar las siguientes reglas de derivación: regla III (derivada de una suma de funciones, que es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones); regla IV (derivada del producto de una constante por una función, que es igual al producto de la constante por la derivada de la función); regla VIa (derivada de la potencia de una función siendo el exponente constante, que es igual al producto del exponente por la función elevada a un exponente disminuido en una unidad y por la derivada de la función). Comencemos:

$d/dx(2x^{3/4})+d/dx(4x^{-1/4})$

$=(2)d/dx(x^{3/4}) +(4)d/dx(x^{-1/4})$

$= 3/2x^{-1/4} – x^{-5/4}$

$=(2)(3/4)x^{-1/4} +(4)(-1/4)(x^{-5/4})$

$= 3/2x^{-1/4} – x^{-5/4}$

$= 3/2x^{-1/4} – x^{-5/4}$. Comprobado.

17. $d/dx(x^{2/3} – a^{2/3})$

Respuesta del libro: $2/3x^{-1/3}$.

Mi comprobación:

Para realizar la comprobación, en el problema 17, debemos usar las siguientes reglas de derivación: regla III (derivada de una suma de funciones, que es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones); regla VIa (derivada de la potencia de una función siendo el exponente constante, que es igual al producto del exponente por la función elevada a un exponente disminuido en una unidad y por la derivada de la función). También debemos aplicar la regla I (derivada de una constante, que es igual a cero). Comencemos:

$d/dx(x^{2/3}) – d/dx(a^{2/3})$

$= 2/3x^{-1/3} -0$

$= 2/3x^{-1/3}$. Comprobado.

18. $d/dx(a + bx + cx^2)/x$

Respuesta del libro: $c - (a/x^2)$.

Mi comprobación:

$d/dx(a + bx + cx^2)(x^{-1})$

$= (a + bx + cx^2)\, d/dx(x^{-1}) + (x^{-1}) d/dx(a + bx + cx^2)$

$= (a + bx + cx^2)(-x^{-2}) + (x^{-1})(b + 2cx)$

$= -ax^{-2} - bx^{-1} - c + bx^{-1} + 2c$

$= c - ax^{-2}$

$= c - (a/x^2)$. Comprobación.

¿Qué hice? Reestructuramos la función dada; en vez de buscar la derivada de un cociente de funciones algebraicas, busqué la derivada del producto de dos funciones algebraicas, es decir, usamos la regla V. El libro que estamos estudiando, CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL de Granville, en la página 40 dice: *"La derivada de un producto de dos funciones es igual al producto de la primera función por la derivada de la segunda, más el producto de la segunda por la derivada de la primera".* (Comillas y cursiva son nuestras). En adición, tuvimos que utilizar otras reglas, como la regla III (derivada de una suma de funciones algebraicas). A este respecto dice Granville en la página 39 de su libro: *"La derivada de la suma algebraica de un numero finito n de funciones es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones".* (Comillas y cursiva son nuestras).

Igualmente usamos la regla I, que es la derivada de una constante. Dice Granville en la pagina 37: *"La derivada de una constante es cero".* (Comillas y cursiva son nuestras). También usamos la regla II que es la derivada de una variable con respecto a sí misma. Dice Granville en la pagina 38: *"La derivada de una variable con respecto a sí misma es la unidad".* (Comillas y cursiva son nuestras).

Por otra parte, usamos profusamente la regla VI, que de acuerdo a Granville, se refiere a la derivada de la potencia de una función, siendo el exponente constante. En la página 41 puntualiza: *"La derivada de la potencia de una función de exponente constante es igual al producto del exponente por la función elevada a un exponente disminuido en una unidad y por la derivada de la función"*. (Comillas y cursiva son nuestras).

19. y= √x/2 -2/√x.

Respuesta del libro: 1/4√x +1/x√x.

Mi comprobación:

d/dx(√x/2 -2/√x)

$= d/dx[(x^{1/2})/2 -2/(x^{1/2})]$

$= d/dx(x^{1/2})/2 -d/dx(2/(x^{1/2})$

$= [(2)(1/2)x^{-1/2}–(x^{1/2})(0)]/4 –[(x^{1/2})(0) –(2)(1/2)x^{-1/2}]/x$

$= (x^{-1/2})/4 +(x^{-1/2})/x$

$= (1/4x^{1/2}) +1/xx^{1/2}$

= (1/4√x) +(1/x√x). Comprobado.

Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones:

42. f(x)= √(2x) + ^{3}√(3x).

Mi respuesta:

Buscamos las raíces:

$√(2x)= 2x^{1/2}$

$^3√(3x)= 3x^{1/3}$.

Por tanto, tendremos:

$f(x)= 2x^{1/2} +3x^{1/3}$

$= (2)d/dx(x^{1/2}) +(3)d/dx(x^{1/3})$

$= (2)(1/2)x^{-1/2} +(3)(1/3)x^{-2/3}$

$= x^{-1/2} + x^{-2/3}$

$= 1/ x^{1/2} + 1/x^{2/3}$

$= 1/\sqrt{(x)} +1/ \sqrt[3]{(x)}$.

En cada uno de los siguientes ejercicios, hallar el valor de dy/dx para el valor dado de x:

52. $y= (x^2 -x)^3$; $x= 3$,

Respuesta del libro: 540.

Mi respuesta:

$d/dx(x^2 -x)^3= (3)(x^2 -x)^2(2x -1)$

Sustitución:

$d/dx(x^2 -x)^3= (3) (3^2 -3)^2(2(3) -1)= (3)(36)(5)= 540$.

Mi respuesta es idéntica a la respuesta del libro.

En la página 50 del libro que estamos estudiando, CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL de Granville, nos encontramos con una cierta cantidad de ejercicios que constituyen problemas relacionados con una función de función y funciones inversas. Veamos:

Hallar dy/dx para cada una de las funciones siguientes:

1. $y= u^6$, $u= 1 +2\sqrt{x}$.

Respuesta del libro: $dy/dx= 6u^5/\sqrt{x}$.

Mi respuesta:

El problema 1 es propio de los problemas referidos a la derivada de una función de función. Dice Granville, en la página 46 de su libro, CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL, lo siguiente*: "A veces acontece que y no se define directamente como función de x, sino que se da como función de otra variable v que se define como función de x. En este caso, y es función de x por intermedio de v, y se llama función de función".* Comillas y cursiva son nuestras). Y en la página 47 añade: *"Si y= f(v) y v= δ(x), la derivada de y con respecto a x es igual al producto de la derivada de y con respecto a v por la derivada de v con respecto a x".* (Comillas, cursiva y la letra δ son nuestras). Procedamos:

$d/du(u^6)= 6u^{6-1}$

$= 6u^5$

$d/dx(1 +2\sqrt{x})$

$= d/dx(1 +2x^{1/2})$

$= 0 +(1/2)(2)x^{-1/2}$

$= x^{-1/2}$

$= 1/x^{1/2}$

$=1/\sqrt{x}$

Por tanto, tendremos:

$(6u^5)(1/\sqrt{x})= 6u^5/\sqrt{x}$.

Mi respuesta concuerda con la respuesta del libro.

5. $15x= 15y +5y^3 +3y^5$.

Respuesta del libro: $dy/dx= 1/(1 +y^2 +y^4)$.

Mi respuesta:

El problema 5 es propio de los problemas referidos a la derivada de una función inversa. Dice Granville, en la página 48 de su libro, CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL, lo siguiente: *"La derivada de la función inversa es igual al recíproco de la derivada de la función directa".* (Comillas y cursiva son nuestras).

En el problema 5 la función directa indica que la variable x se encuentra en función de la variable y, por tanto, la función directa es:

$x= (15y +5y^3 +3y^5)/15$

$= y +1/3y^3 +1/5y^5$

$dx/dy= 1 +(3)(1/3)y^2 +(5)(1/5)y^4$

$= 1 +y^2 +y^4$

Luego,

$dy/dx= 1/(1 +y^2 +y^4)$.

Mi respuesta coincide con la respuesta del libro.

Ahora pasamos a los problemas que se encuentran en la página 69 del libro que estamos estudiando, CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL de Granville; en estos problemas el autor continúa insistiendo en la necesidad de aprender a calcular los máximos y los mínimos de distintas funciones. Comencemos:

Calcular los máximos y mínimos de cada una de las funciones siguientes:

1. $x^3 -6x^2 +9x$.

Mi respuesta:

Aplicamos la regla guía propuesta por el libro que estamos estudiando, CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL de Granville, página 66:

“Primer paso. Se halla la primera derivada de la función.

“Segundo paso. Se iguala la primera derivada a cero, y se hallan las raíces reales de la ecuación resultante. Estas raíces son los valores críticos de la variable.

“Tercer paso. Se consideran los valores críticos uno por uno, y se calculan los signos de la primera derivada, en primer lugar para un valor un poco menor que el valor crítico y después para un valor un poco mayor que él. Si el signo de la derivada es primeramente + y después -, la función tiene un máximo para este valor crítico de la variable; en el caso contrario, tiene un mínimo. Si el signo no cambia, la función no tiene ni máximo ni mínimo para el valor crítico considerado”. (Comillas y cursiva son nuestras).

Al aplicar esa guía obtuvimos los siguientes resultados:

Primer paso, derivar la función dada:

$d/dx(x^3 -6x^2 +9x)= 3x^2 -12x +9$

Segundo paso, calculamos los valores críticos de la función derivada, mediante la fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado, $x= [-b \pm\sqrt{(b^2 - 4ac)}]/2a$; siendo $a= 3$, $b= -12$; $c= 9$, los valores críticos alcanzados fueron $x_1= 3$, $x_2= 1$.

Tercer paso, consideramos los dos valores críticos calculados:

Así, en el caso del valor critico x_1= 3, experimentamos con 2.8 y la función derivada fue de -1.08; asimismo, para 3.2 la función derivada fue de +1.32; evidentemente la función, x^3 -6x^2 +9x, tiene un mínimo para x= 3, equivalente a 0.

En el caso del valor critico x_2= 1, experimentamos con 0.8 y la función derivada fue de +1.32; asimismo, para 1.2 la función derivada fue de -1.08; evidentemente la función, x^3 -6x^2 +9x, tiene un máximo para x= 1, equivalente a 4.

2. 10 +12x -3x^2 -2x^3.

Mi respuesta:

Aplicamos la regla guía propuesta por el libro que estamos estudiando, Cálculo diferencial e integral de Granville, página 66:

"Primer paso. Se halla la primera derivada de la función.

"Segundo paso. Se iguala la primera derivada a cero, y se hallan las raíces reales de la ecuación resultante. Estas raíces son los valores críticos de la variable.

"Tercer paso. Se consideran los valores críticos uno por uno, y se calculan los signos de la primera derivada, en primer lugar para un valor un poco menor que el valor crítico y después para un valor un poco mayor que él. Si el signo de la derivada es primeramente + y después -, la función tiene un máximo para este valor crítico de la variable; en el caso contrario, tiene un mínimo. Si el signo no cambia, la función no tiene ni máximo ni mínimo para el valor crítico considerado". (Comillas y cursiva son nuestras).

Al aplicar esa guía obtuvimos los siguientes resultados:

Primer paso, derivar la función dada:

d/dx(10 +12x -3x^2 -2x^3)= 0 +12 -6x -6x^2= 12 -6x -6x^2

Segundo paso, calculamos los valores críticos de la función derivada, mediante la fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado, x= [-b ±√(b^2 - 4ac)]/2a; siendo a= -6, b= -6; c= 12, los valores críticos alcanzados fueron x_1= -2, x_2= 1.

Tercer paso, consideramos los dos valores críticos calculados:

Así, en el caso del valor critico x_1= -2, experimentamos con -3 y la función derivada fue de -24; asimismo, para -1 la función derivada fue de 12; evidentemente la función, $10 +12x -3x^2 -2x^3$, tiene un mínimo para x= -2, equivalente a 0.

En el caso del valor critico x_2= 1, experimentamos con 0.5 y la función derivada fue de +4.5; asimismo, para 1.5 la función derivada fue de -10.5; evidentemente la función $10 +12x -3x^2 -2x^3$, tiene un máximo para x= 1, equivalente a 17.

En estos instantes el libro que estamos estudiando, CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL de Granville, entra en el capítulo VI que versa sobre DERIVADAS SUCESIVAS DE UNA FUNCIÓN.

Las derivadas sucesivas tienen que ver con el hecho de que puede darse el caso de que la primera derivada obtenida de una función que tiene por variable independiente a x, por ejemplo, también posea esta misma característica y que, por tanto, se pueda alcanzar una segunda derivada y así sucesivamente hasta la enésima derivada como dice Granville. En efecto, los problemas que ahora afrontaremos en las páginas 90-91 son de esta naturaleza.

Demostrar cada una de las siguientes derivaciones:

1. $y= 3x^4 -2x^3 +6x$.

Respuesta del libro: $d^2y/dx^2= 36x^2 -12x$.

Mi respuesta:

Primera derivada:

$dy/dx= 12x^3 -6x^2 +6$

Segunda derivada:

$d^2y/dx^2= 36x^2 -12x +0= 36x^2 -12x$.

La segunda derivada obtenida por mí coincide con la alcanzada por el libro, lo que indica que la primera derivada también fue correctamente calculada.

Llama particularmente la atención la precisión que hace Granville en la página 92 de su libro CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL, respecto a un segundo método para determinar máximos y mínimos en una función. Afirma: *“f(x) es un máximo si f’(x)= 0 y f’’(x) es negativa; f(x) es un mínimo si f’(x)= 0 y f’’(x) es positiva”*. (Comillas y cursiva son nuestras). Y, en la página 93, añade: *“La regla guía para aplicar este criterio es la siguiente: Primer paso. Hallar la primera derivada de la función. Segundo paso. Igualar a cero la primera derivada y resolver la ecuación; las raíces reales son los valores críticos de la variable. Tercer paso. Hallar la segunda derivada. Cuarto paso. Sustituir en la segunda derivada, en lugar de la variable, cada uno de los valores críticos obtenidos. Si el resultado es negativo, la función tiene un máximo para este valor critico; si el resultado es positivo, la función tiene un mínimo”.* (Comillas y cursiva son nuestras).

En la página 94 del libro que estamos estudiando, CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL de Granville, aparecen los problemas relacionados con el cálculo de máximos y mínimos de funciones, conforme al segundo método explicitado arriba. Comencemos:

Calcule los máximos y mínimos de cada una de las funciones siguientes:

1. $x^3 + 3x^2 – 2$.

Respuesta del libro: Un máximo= 2 para x= -2; Un mínimo = -2 para x= 0.

Mi respuesta:

Primer paso:

$f’(x)= 3x^2 +6x -0= 3x^2 +6x$.

Segundo paso:

$3x^2 +6x= 0$

En este segundo paso también debemos calcular los valores críticos de la función derivada, mediante la fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado, $x= [-b \pm\sqrt{(b^2 -4ac)}]/2a$; siendo a= 3, b= 6; c= 0, los valores críticos alcanzados fueron $x_1= 0$, $x_2= -2$.

Tercer paso: f''(x)= 6x +6

Cuarto paso:

f''(x)= 6(0) +6= 6.

f''(x)= 6(-2) +6= -12 +6= -6

Conclusión:

El valor alcanzado por la función f(x)= x^3 +3x^2 – 2, equivalente a 2, con el valor crítico x= -2, constituye un máximo.

El valor alcanzado por la función f(x)= x^3 +3x^2 – 2, equivalente a -2, con el valor crítico x= 0, constituye un mínimo.

Mi respuesta coincide con la respuesta del libro.

Los problemas que se inician en la página 97 están referidos al punto de inflexión. En efecto, nos dice el libro que estamos estudiando, CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL de Granville, en la pagina 96: *"Un punto de inflexión en una curva es el que separa arcos que tienen su concavidad en sentidos opuestos".* (Comillas y cursiva son nuestras).

Hallar los puntos de inflexión y el sentido de la concavidad de las siguientes curvas:

1. y= 3x^4 -4x^3 +1.

Respuestas del libro:

Raíces reales son x= 2/3, x= 0; cuando x< 0, f''(x)= +; cuando 2/3> x> 0, f''(x)= -. Luego la curva es cóncava hacia arriba a la izquierda de x= 0 y cóncava hacia abajo a la derecha de ese punto. Cuando 0 < x< 2/3, f''(x)= -; cuando x> 2/3, f''(x)= +. Luego la curva es cóncava hacia abajo a la izquierda de x= 2/3 y cóncava hacia arriba a la derecha de ese punto.

Mi respuesta:

Para resolver este problema, tenemos que acudir a la regla para hallar los puntos de inflexión de la curva cuya ecuación es $y= 3x^4 -4x^3 +1$. Las instrucciones se encuentran en la página 96 del libro que estamos estudiando, CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL de Granville:

"Primer paso. Se halla f''(x).

"Segundo paso. Se iguala a cero f''(x), se resuelve la ecuación resultante y se consideran las raíces reales de la ecuación.

"Tercer paso. Se calcula f''(x), primero para valores de x un poco menores y después un poco mayores, que cada una de las raíces obtenidas en el segundo paso. Si f'' cambia de signo, tenemos un punto de inflexión.

"Cuando f''(x) es positivo, la curva es cóncava hacia arriba.

"Cuando f''(x) es negativo, la curva es cóncava hacia abajo". (Comillas y cursiva son nuestras).

Ahora, demos el primer paso:

$y= 3x^4 -4x^3 +1$

$f'= 12x^3 -12x^2 +0= 12x^3 -12x^2$

$f''= 36x^2 -24x.$

Demos el segundo paso:

$36x^2 -24x= 0$

$x= [-b \pm\sqrt{(b^2 -4ac)}]/2a$

$x= [-(-24)\pm\sqrt{(-24)^2 -4(36)(0)}]2(36)= [24\pm\sqrt{576}]/72= 24\pm 24/72$

$48/72= 0.67= 2/3$

$(24 -24)/72= 0/72= 0.$

Luego, las raíces reales de la ecuación son: $x= 2/3$; $x= 0$.

Demos el tercer paso:

$f'' = 36x^2 - 24x$

para $x = 1/2$

$f'' = 36(1/2)^2 - 24(1/2) = 9 - 12 = -3$

Para $x = 1$

$f'' = 36(1)^2 - 24(1) = 36 - 24 = 12$

Obviamente tenemos un punto de inflexión, puesto que f''(x) cambió de signo al pasar de -3 a 12.

Como f''(x) arrojó un valor negativo con un valor de x un poco menor que el valor de la raíz obtenida, es decir, 2/3, la curva es cóncava hacia abajo; y como f''(x) arrojo un valor positivo con un valor de x un poco mayor que el valor de la raíz obtenida (2/3), la curva es cóncava hacia arriba.

Los detalles del método utilizado para la construcción de curvas dadas por su ecuación, se especifica en las páginas 98-99 del libro que estamos estudiando, CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL de Granville.

Regla:

Para afrontar con éxitos dichos problemas debemos guiarnos de la regla para construcción de curvas, empleando coordenadas rectangulares que se encuentra explicitada en la página 99 del libro CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL de Granville. Veamos:

“Primer paso. Se halla la primera derivada; se iguala a cero y se resuelve la ecuación resultante al objeto de hallar las abscisas de los puntos máximos y mínimos.

“Segundo paso. Se halla la segunda derivada; se iguala a cero y se resuelve la ecuación resultante a fin de hallar las abscisas de los puntos de inflexión.

“Tercer paso. Se calculan las ordenadas de los puntos cuyas abscisas se hallaron en los dos primeros pasos. Se determinan tantos otros puntos como se necesiten

para tener una noción suficientemente clara de la curva. Se construye una tabla tal como lo que damos en el problema que se resuelve a continuación.

"Cuarto paso. Se señalan en un papel los puntos que se han determinado, y se bosqueja la curva de manera de hacerla corresponder con los resultados de la tabla". (Comillas y cursiva son nuestras).

Construir las siguientes curvas, empleando la regla anterior. Hallar también las ecuaciones de la tangente y la normal en cada punto de inflexión:

1. $y= x^3 -9x^2 +24x -7$.

Mi respuesta:

"Primer paso. Se halla la primera derivada; se iguala a cero y se resuelve la ecuación resultante al objeto de hallar las abscisas de los puntos máximos y mínimos.

$y'= 3x^2 -18x +24 -0=$

$y'= 3x^2 -18x +24=$

$3x^2 -18x +24= 0$

$= [-b\ x \pm\sqrt{}(b^2 -4ac)]/2a$

$x= [-(-18)\pm\sqrt{}(-18)^2 -4(3)(24)]/2(3)=$

$x= 2, 4.$

"Segundo paso. Se halla la segunda derivada; se iguala a cero y se resuelve la ecuación resultante a fin de hallar las abscisas de los puntos de inflexión.

$y''= 6x -18 +0= 6x -18$

$6x -18= 0$

$x= 18/6= 3$

“Tercer paso. Se calculan las ordenadas de los puntos cuyas abscisas se hallaron en los dos primeros pasos. Se determinan tantos otros puntos como se necesiten para tener una noción suficientemente clara de la curva. Se construye una tabla tal como lo que damos en el problema que se resuelve a continuación.

X	y	y’	y’’	Observaciones	Sentido de la concavidad
0	-7	+	-		
2	13	0	-	Máximo	Hacia abajo
3	11	-	0	Punto de inflexión	
4	9	0	+	Mínimo	Hacia arriba
6	29	+	+		

Veamos de dónde surgen las cifras que se encuentran en la tabla de arriba. Esas cifras se encuentran vinculadas con los cuatro (4) pasos que constituyen la regla para la construcción de curvas, empleando coordenadas rectangulares. En el primer paso derivamos la función dada, la igualamos a cero y resolvemos la ecuación resultante y obtenemos los siguientes valores: x= 2, x= 4, los cuales aparecen en la primera columna.

En el segundo paso, hallamos la segunda derivada, la igualamos a cero y resolvemos la ecuación resultante, obteniendo la abscisa de los puntos de inflexión, equivalente a 3.

En el tercer paso calculamos las ordenadas de los puntos cuyas abscisas (2, 3 y 4) se hallaron en los dos primeros pasos. Asimismo marcamos otros puntos colocando en la abscisa el cero y el seis, con el fin de aclarar más la curva a construirse.

Ya aclaramos el origen de la columna de la x. vayamos ahora a la columna de la y. Tomamos la ecuación dada, $y= x^3 -9x^2 +24x -7$, y vamos sustituyendo a x por los valores que asume (0, 2, 3, 4 y 6) y obtenemos:

$y= (0)^3 -9(0)^2 +24(0) -7= -7$

$y= (2)^3 -9(2)^2 +24(2) -7= 13$

$y= (3)^3 -9(3)^2 +24(3) -7= 11$

$y= (4)^3 -9(4)^2 +24(4) -7= 9$

$y= (6)^3 -9(6)^2 +24(6) -7= 29.$

Expliquemos el origen de la columna y'. Tomamos la ecuación $y'= 3x^2 -18x +24$ y vamos sustituyendo a x por sus valores, es decir, 0, 2, 3, 4 y 6, alcanzando las cifras siguientes:

$y'= 3(0)^2 -18(0) +24= 24= +$

$y'= 3(2)^2 -18(2) +24= 12 -36 +24= 0$

$3(3)^2 -18(3) +24= 27 -54 +24= -3= -$

$3(4)^2 -18(4) +24= 48 -72 +24= 0$

$3(6)^2 -18(6) +24= 108 -108 +24= 24= +$

Para calcular la cuarta columna, y'', tomamos la segunda derivada calculada en el segundo paso, que fue $y''= 6x -18$ y sustituimos a x por los valores expuestos en la primera columna y tendremos:

$y''= 6x -18= 6(0) -18= -18= -$

$y''= 6x -18= 6(2) -18= 12-18= -6= -$

$y''= 6x -18= 6(3) -18= 18 -18= 0$

$y''= 6x -18= 6(4) -18= 24 -18= 6= +$

$y''= 6x -18= 6(6) -18= 36 -18= 18= +$

Pasemos ahora a examinar la columna que lleva por título "Observaciones". La primera observación que expone el libro es que cuando x= 2 tenemos un máximo, puesto que y', es decir, la primera derivada es igual a 0, mientras que y'', es decir, la segunda derivada es negativa.

La segunda observación consiste en identificar un punto de inflexión cuando x= 3, debido a que y'', es decir, la segunda derivada es igual a 0. La ultima observación que encontramos es que cuando x= 4 tenemos un mínimo debido a y', o sea, la primera derivada es igual a cero, mientras que y'', es decir, la segunda derivada es positiva.

Finalmente, examinemos la última columna que está vinculada con el "Sentido de la concavidad". En efecto, cuando x asume los valores 0 y 2, rumbo a un máximo, el sentido de la concavidad es hacia abajo debido a que la segunda derivada de la función es negativa, tal como lo postula el libro que estamos estudiando, CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL de la autoría de Granville, en la página 92. Asimismo, cuando x asume los valores de 4 y 6 hacia un mínimo, el sentido de la concavidad es hacia arriba como lo postula el libro que estamos estudiando, CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL de la autoría de Granville, en la página 92.

Cuarto paso. En este paso, el libro orienta a marcar los puntos para bosquejar la curva que estamos construyendo, en base a los valores de x e y, es decir, 0 -7; 2 +13; 3 +11; 4 +9; y, 6 +29. Nos faltó calcular las ecuaciones de la tangente y la normal en cada punto de inflexión; lo haremos en otra ocasión.

Construir las siguientes curvas, empleando la regla anterior. Hallar también las ecuaciones de la tangente y la normal en cada punto de inflexión:

2. $3y= x^3-3x^2 -9x +11$.

Respuesta del libro: Max. (-1, 16/3); min. (3, -16/3); punto de inflexión, (1, 0); tangente, $4x +y -4= 0$; normal, $x -4y -1= 0$.

Mi respuesta:

"Primer paso. Se halla la primera derivada; se iguala a cero y se resuelve la ecuación resultante al objeto de hallar las abscisas de los puntos máximos y mínimos.

$y= (x^3-3x^2 -9x +11)/3$

$y'= [(3)(3x^2 -6x -9) -(x^3-3x^2 -9x +11)(0)]/9= [9x^2 -18x -27 -0]/9= [9x^2 -18x -27]/9= x^2 -2x -3$.

$x^2 -2x -3= 0$

$x= [-b \pm\sqrt{}(b^2 -4ac)]/2a= [-(-2)\pm\sqrt{}(-2)^2 -4(1)(-3)]/2(1)= [2\pm\sqrt{}4 +12]/2= [2\pm\sqrt{}16]/2= [2\pm4]/2$

Entonces:

$x_1= (2 +4)/2= 3$

$x_2= (2 -4)/2= -1$

“Segundo paso. Se halla la segunda derivada; se iguala a cero y se resuelve la ecuación resultante a fin de hallar las abscisas de los puntos de inflexión.

$y’= x^2 -2x -3$

$y’’= 2x -2 -0= 2x -2$

$2x -2= 0$

$2x= 2$

$x= 2/2= 1$

“Tercer paso. Se calculan las ordenadas de los puntos cuyas abscisas se hallaron en los dos primeros pasos. Se determinan tantos otros puntos como se necesiten para tener una noción suficientemente clara de la curva. Se construye una tabla tal como lo que damos en el problema que se resuelve a continuación.

x	y	y’	y’’	Observaciones	Sentido de la concavidad
-1	16/3	0	-4	Máximo	Hacia abajo
0	11/3	-3	-2		
1	0	-4	0	Punto de inflexión	
2	-11/3	-3	2		
3	-16/3	0	4	Mínimo	Hacia arriba
4	-3	5	6		

Veamos de donde surgen las cifras que se encuentran en la tabla de arriba. Esas cifras se encuentran vinculadas con los cuatro (4) pasos que constituyen la regla para la construcción de curvas, empleando coordenadas rectangulares. En el primer paso derivamos la función dada, la igualamos a cero y resolvimos la ecuación resultante y obtuvimos los siguientes valores: $x_1= 3$, $x_2= -1$, los cuales aparecen en la primera columna.

En el segundo paso, hallamos la segunda derivada, la igualamos a cero y resolvimos la ecuación resultante, obteniendo la abscisa de los puntos de inflexión, equivalente a 1.

En el tercer paso calculamos las ordenadas de los puntos cuyas abscisas (3, -1 y 1) se hallaron en los dos primeros pasos. Asimismo marcamos otros puntos colocándolos en la abscisa.

Ya aclaramos el origen de la columna de la x. vayamos ahora a la columna de la y. tomamos la ecuación dada, $y= (x^3-3x^2 -9x +11)/3$ y vamos sustituyendo a x por los valores que asume (-1, 0, 1, 2, 3 y 4) y obtenemos:

$y= (-1)^3-3(-1)^2 –9(-1) +11)/3= 16/3$

$y= [(0)^3-3(0)^2 -9(0) +11)]/3= (0 -0 +11)3= 11/3$

$y= [(1)^3-3(1)^2 -9(1) +11)/3= (1 -3 -9 +11)/3= 0/3= 0$

$y= (2)^3-3(2)^2 -9(2) +11)/3= (8 -12 -18 +11)/3= (19 -30)/3= -11/3$

$y= (3)^3-3(3)^2 -9(3) +11)/3= (27 -27 -27 +11)/3= -16/3=$

$y= (4)^3-3(4)^2 -9(4) +11)/3= 64 -48 -36 +11= -9/3= -3$

Expliquemos el origen de la columna y’. Tomamos la ecuación $y’= x^2 -2x -3$ y vamos sustituyendo a x por sus valores, es decir, 0, 2, 3, 4 y 6, alcanzando las cifras siguientes:

$y’= x^2 -2x -3= (-1)2 -2(-1) -3= 1 +2 -3= 0$

$y’= (0)^2- 2(0) -3= -3$

$y’= (1)^2 -2(1) -3= -4$

$y’= (2)^2 -2(2) -3= -3$

$y’= (3)^2 -2(3) -3= 0$

$y’= (4)^2 -2(4) -3= 5$

Procedamos ahora con la columna y’’. Tomemos la ecuación y’’= 2x -2 y vamos sustituyendo el valor de x:

y’’= 2(-1) -2= -4

y’’= 2(0) -2= -2

y’’= 2(1) -2= 0

y’’= 2(2) -2= 2

y’’= 2(3) -2= 4

y’’= 2(4) -2= 6

Pasemos ahora a examinar la columna que lleva por título “Observaciones”. La primera observación que expone el libro es que cuando x= -1 tenemos un máximo, equivalente a 16/3. Esta observación se funda en el hecho de que la primera derivada es igual a 0, mientras que y’’, es decir, la segunda derivada es negativa. La segunda observación consiste en identificar un punto de inflexión cuando x= 1, debido a que y’’, es decir, la segunda derivada es igual a 0. La ultima observación que encontramos es que cuando x= 3 tenemos un mínimo debido a que y’, o sea, la primera derivada es igual a cero, mientras que y’’, es decir, la segunda derivada es positiva. Nos faltó explicar la tangente y la normal; lo haremos en otra ocasión.

Ahora estaremos introduciéndonos en el capítulo VII (DERIVACIÓN DE FUNCIONES TRASCENDENTES) del libro que estamos estudiando, es decir, CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL de la autoría de Granville. Este capítulo va desde la página 105 hasta la 137. El primer problema que afrontaremos comienza en la página 115 y concluye en la 117. Comencemos:

Derivar cada una de las siguientes funciones:

1. y= ln (ax +b).

Respuesta del libro: dy/dx= a/ax +b.

Mi respuesta:

La función trascendente que el libro nos pide derivar es análoga a la del ejemplo 1 desarrollado en la página 112. Nos guiaremos estrictamente por el procedimiento utilizado por Granville. *"La derivada del logaritmo natural* –dice Granville en la página 110- *de una función es igual a la derivada de la función dividida por la función (o la derivada de la función multiplicada por su recíproca)".* (Comillas y cursiva son nuestras).

dy/dx= [d/dx(ax +b)]/(ax +b)

= (a +0)/(ax +b)

= a/(ax +b).

Mi respuesta coincide con la respuesta del libro.

2. y= ln(ax^2 +b).

Respuesta del libro: dy/dx= 2ax/(ax^2+b)

Mi respuesta:

La función trascendente que el libro nos pide derivar es análoga a la del ejemplo 1 desarrollado en la página 112. Nos guiaremos estrictamente por el procedimiento utilizado por Granville. *"La derivada del logaritmo natural* –dice Granville en la página 110- *de una función es igual a la derivada de la función dividida por la* *función (o la derivada de la función multiplicada por su recíproca)".* (Comillas y cursiva son nuestras).

dy/dx= [d/dx(ax^2 +b)]/(ax^2 +b)

= (2ax +0)/(ax^2 +b)

= 2ax/(ax^2 +b).

Mi respuesta coincide con la respuesta del libro.

3. y= ln$(ax +b)^2$.

Respuesta del libro: dy/dx= 2a/(ax +b).

Mi respuesta:

La función trascendente que el libro nos pide derivar es análoga a la del ejemplo desarrollado en la página 112. Nos guiaremos estrictamente por el procedimiento utilizado por Granville. *"La derivada del logaritmo natural* –dice Granville en la página 110- *de una función es igual a la derivada de la función dividida por la función (o la derivada de la función multiplicada por su recíproca)".* (Comillas y cursiva son nuestras).

dy/dx= [d/dx$(ax +b)^2$]/$(ax +b)^2$

= 2(ax +b)(a)/$(ax +b)^2$

= ($2a^2x$ +2ab)/$(ax +b)^2$

= 2a(ax +b)/$(ax +b)^2$=

2a/(ax +b).

Mi respuesta coincide con la respuesta del libro de Granville.

5. y= ln x^3.

Respuesta del libro: dy/dx= 3/x.

Mi respuesta:

La función trascendente que el libro nos pide derivar es análoga a la del ejemplo 1 desarrollado en la página 112. Nos guiaremos estrictamente por el procedimiento utilizado por Granville. *"La derivada del logaritmo natural* –dice Granville en la página 110- *de una función es igual a la derivada de la función dividida por la función (o la derivada de la función multiplicada por su recíproca)".* (Comillas y cursiva son nuestras).

$dy/dx= [d/dx(x^3)]/x^3$

$= 3x^2/x^3$

$= (3x^2)(x^{-3})$

$= 3x^{-1}$

$= 3/x.$

Mi respuesta coincide con la respuesta del libro de Granville.

7. $y= \ln (2x^3 -3x^2 +4).$

Respuesta del libro: $dy/dx= 6x(x -1)/2x^3 -3x^2$

Mi respuesta:

La función trascendente que el libro nos pide derivar es análoga a la del ejemplo 1 desarrollado en la página 112. Nos guiaremos estrictamente por el procedimiento utilizado por Granville. *"La derivada del logaritmo natural* –dice Granville en la página 110- *de una función es igual a la derivada de la función dividida por la función (o la derivada de la función multiplicada por su recíproca)".* (Comillas y cursiva son nuestras).

$dy/dx= d/dx(2x^3 -3x^2 +4)/(2x^3 -3x^2 +4)$

$= (6x^2 -6x +0)/(2x^3 -3x^2 +4)$

$= (6x^2 -6x)/(2x^3 -3x^2 +4)$

$= 6x(x -1)/(2x^3 -3x^2 +4)$.

Mi respuesta coincide con la respuesta del libro.

En los problemas 38 a 47 hallar el valor de dy/dx para el valor dado de x:

38. $y= \ln (x^2 +2)$; $x= 4$.

Respuesta del libro: $y'= 4/9$.
Mi respuesta:

La función trascendente que el libro nos pide derivar es análoga a la del ejemplo desarrollado en la página 112. Nos guiaremos estrictamente por el procedimiento utilizado por Granville. *"La derivada del logaritmo natural* –dice Granville en la página 110- *de una función es igual a la derivada de la función dividida por la función (o la derivada de la función multiplicada por su recíproca)".* (Comillas y cursiva son nuestras).

$dy/dx= d/dx(x^2 +2)/ (x^2 +2)$

$= (2x +0)/ (x^2 +2)$

$= 2x/ (x^2 +2)$

Sustitución y resultado final:

$2(4)/ (4)^2 +2= 8/18= 4/9$.

Mi respuesta es coincidente con la respuesta del libro de Granville.

Los problemas que ahora desarrollaremos están ubicados en las páginas 123-126 del libro que estamos estudiando, CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL de Granville. Claro, todavía en el marco del capítulo VII (DERIVACIÓN DE FUNCIONES TRASCENDENTES).

Derivar las siguientes funciones:

1. y= sen ax^2.

Respuesta del libro: dy/dx= 2 ax cos ax^2.

Mi respuesta:

El libro nos indica que para resolver el problema 1, debemos utilizar la fórmula XIII de derivación de la función trigonométrica seno, que es expresada del modo siguiente: d/dx(sen v)= (cos v)dv/dx. Procedamos:

dy/dx= cos ax^2(d/dx)(ax^2)

= 2ax(cos ax^2).

Mi respuesta coincide con la respuesta del libro.

2. y= tg√(1 -x).

Respuesta del libro: dy/dx= -[sec^2 √(1 –x)/2 √(1 –x)].

Mi respuesta:

De acuerdo con Granville el problema 2 debe resolverse con la fórmula XV que se encuentra en la página 122 del libro que estamos estudiando, CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL de Granville, es decir, d/dx(tg v)= (sec^2) (v)(dv/dx).

Primero, colocamos la fórmula XV destinada a derivar la función trigonométrica tangente:

d/dx(tg v)= (sec^2) (v)(dv/dx).

Segundo, hacemos sustitución en la fórmula para incluir los términos de la función dada. Se mantiene $\sec^2$, v es sustituida por $\sqrt{(1 -x)}$ y multiplicamos por la derivación de $\sqrt{(1 -x)}$. Veamos:

$dy/dx= \sec^2\sqrt{(1 -x)}d/dx\sqrt{(1 -x)}=$

Suprimimos el segundo radical:

$\sec^2\sqrt{(1 -x)}d/dx(1 -x)^{1/2}=$

Derivamos:

$\sec^2 \sqrt{(1 -x)}(1/2)(1 -x)^{-1/2}(-1)=$

Multiplicamos un 1/2 por -1, restablecemos el radical y para tener un exponente positivo lo pasamos al denominador. Se obtiene el siguiente resultado:

$= (-1/2) \sec^2 \sqrt{(1 -x)}/\sqrt{(1 -x)}$.

Mi respuesta coincide con la respuesta del libro de Granville.

Ahora entraremos a la segunda parte del libro, a saber: CÁLCULO INTEGRAL y pasaremos a los problemas que están ubicados en el capítulo XII (INTEGRACIÓN DE FORMAS ELEMENTALES ORDINARIAS).

El libro que estamos estudiando, CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL de Granville, en las páginas 232-233, reúne las 23 fórmulas que debemos utilizar para integrar formas elementales y ordinarias. Comencemos con los problemas que se inician en la página 236:

Verificar las siguientes integraciones:

1. $\int x^4dx$

Respuesta del libro: $x^5/5 +C$.

Mi respuesta:

Observemos las 23 fórmulas de integración elemental que están en las páginas 232-233; igualmente, observemos los 11 ejemplos ilustrativos que están en las páginas 234-236 del libro que estamos estudiando, CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL de Granville; y, de inmediato, descubriremos que el problema 1, se resuelve con la fórmula 4, a saber:

$\int v^ndv= (v^{n+1})/(n +1) +C$

Siendo $v= x$ y $n= 4$.

Sustitución y resultado final:

$\int v^4dx$

$= [(x^{4+1})/(4 +1)] +C$

$= (x^5/5) +C$.

Diferenciemos la integral obtenida. Sí está correcta será igual al integrando que es x^4.

$d/dx[(x^5/5) +C]= [(5)(5x^4)-(x^5)(0)]/25= (25x^4 -0)/25= x^4$. La integral es correcta.

2. $\int dx/x^2=$

Respuesta del libro: (-1/x) +C.

Mi respuesta:

Observemos las 23 fórmulas de integración elemental que están en las páginas 232-233; igualmente, observemos los 11 ejemplos ilustrativos que están en las páginas 234-236 del libro que estamos estudiando, CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL de Granville; y, de inmediato, descubriremos que el problema 2, se resuelve con la fórmula 4, a saber:

$\int v^n dv= (v^{n+1})/(n +1) +C$

Siendo v= x, n= 2.

Sustitución y resultado final:

$\int dx/x^2$

$= \int(x^{-2})dx$

$= (x^{-2+1})/(-2+1) +C$

$= (x^{-1}/-1)+C$

= -(1/x) +C.

Diferenciemos la integral obtenida. Sí está correcta será igual al integrando que es $1/x^2$.

$d/dx(-1/x) +C)= -1x^{-1}= (-1)(-1)x^{-2}= 1/x^2$. La integral es correcta.

3. $\int x^{2/3}dx$

Respuesta del libro: $3x^{5/3}/5$ +C.

Mi respuesta:

Observemos las 23 fórmulas de integración elemental que están en las páginas 232-233; igualmente, observemos los 11 ejemplos ilustrativos que están en las páginas 234-236 del libro que estamos estudiando, CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL de Granville; y, de inmediato, descubriremos que el problema 3, se resuelve con la fórmula 4, a saber:

$\int v^n dv = (v^{n+1})/(n+1) + C$.

Siendo v= x, n= 2/3.

Sustitución y resultado final:

$\int x^{2/3} dx$

$= (x^{2/3+1})/(2/3+1) + C$

$= (x^{5/3}/5/3) + C$

$= (3x^{5/3}/5) + C$.

Diferenciemos la integral obtenida. Sí está correcta el resultado será igual al integrando que es $x^{2/3}$.

$d/dx(3x^{5/3}/5 + C) = [(5)(5/3)(3)x^{2/3} - (x^{5/3})(0)]/25 = (25x^{2/3})/25 = x^{2/3}$. La integral es correcta.

4. $\int dx/\sqrt{x}$.

Respuesta del libro: $2\sqrt{x} + C$.

Mi respuesta:

Observemos las 23 fórmulas de integración elemental que están en las páginas 232-233; igualmente, observamos los 11 ejemplos ilustrativos que están en las páginas 234-236 del libro que estamos estudiando, CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL de Granville; y, de inmediato, descubriremos que el problema 4, se resuelve con la fórmula 4, a saber:

$\int v^n dv = (v^{n+1})/(n+1) + C$.

Siendo v= x;

Sustitución y resultado final:

$\int dx/\sqrt{x}$ +C

= $\int 1/x^{1/2}dx$

= $\int 1/x^{-1/2}dx$

= $(x^{-1/2+1})/(-1/2 +1)$ +C

= $x^{1/2}/1/2$ +C

= $2x^{1/2}$ +C

= $2\sqrt{x}$ +C.

Diferenciemos la integral obtenida. Sí está correcta el resultado será igual al integrando que es $1/\sqrt{x}$.

$d/dx(2\sqrt{x} +C)= (2)(1/2)x^{1/2-1} +0= x^{-1/2}= 1/\sqrt{x}$. La integral es correcta.

5. $\int dx/\ {}^{3}\sqrt{x}$

Respuesta del libro: $3/2x^{2/3}$ +C.

Mi respuesta:

Observemos las 23 fórmulas de integración elemental que están en las páginas 232-233; igualmente, observemos los 11 ejemplos ilustrativos que están en las páginas 234-236 del libro que estamos estudiando, CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL de Granville; y, de inmediato, descubriremos que el problema 5, se resuelve con la fórmula 4, a saber:

$\int v^{n}dv= (v^{n+1})/(n +1)$ +C.

Siendo v= x; n= 1/3

Sustitución y resultado final:

$\int dx/\sqrt[3]{x}$

$= \int dx/x^{1/3}$

$= \int 1/x^{1/3}dx$

$= x^{-1/3+1}/-1/3+1 +C$

$= (x^{2/3}/2/3) +C= 3/2\ x^{2/3} +C.$

Diferenciemos la integral obtenida. Sí está correcta el resultado será igual al integrando que es $1/\sqrt[3]{x}$.

$d/dx\ (3/2x^{2/3} +C)$

$= (3/2)(2/3)^{x-1/3} +0$

$= x^{-1/3}$

$= 1/x^{1/3}$

$= 1/\sqrt[3]{x}$. La integral es correcta.

6. $\int 3ay^2dy$.

Respuesta del libro: $ay^3 +C$.

Mi respuesta:

Observemos las 23 fórmulas de integración elemental que están en las páginas 232-233; igualmente, observemos los 11 ejemplos ilustrativos que están en las páginas 234-236 del libro que estamos estudiando, CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL de Granville; y, de inmediato, descubriremos que el problema 6, se resuelve con la fórmula 4, a saber:
$\int v^ndv= (v^{n+1})/(n +1) +C.$

Siendo v= x

$\int 3ay^2dy$

$= 3a\int y^2dy$

$= [(3a)y^{2+1}]/2+1 +C$

$= (3ay^3/3) +C$

$= ay^3 +C.$

Procedamos ahora a realizar la diferenciación de la integral obtenida; si logramos el integrando, que es $3ay^2$, entonces la integral es correcta: $d/dx(ay^3+C)= 3ay^2 +0= 3ay^2$. La integral alcanzada es correcta.

7. $\int 2dt/t^2$

Respuesta del libro: $-2/t +C$.

Mi respuesta:

Observemos las 23 fórmulas de integración elemental que están en las páginas 232-233; igualmente, observemos los 11 ejemplos ilustrativos que están en las páginas 234-236 del libro que estamos estudiando, CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL de Granville; y, de inmediato, descubriremos que el problema 6, se resuelve con la fórmula 4, a saber:

$\int v^ndv= (v^{n+1})/(n +1) +C.$

Siendo $v= x$

$\int 2dt/t^2$

$= \int 2t^{-2}dt$

$= 2\int t^{-2}dt$

$= 2t^{-2+1}/-2+1 +C$

$= 2t^{-1}/-1 +C$

$= -2/t +C.$

Procedamos ahora a realizar la diferenciación de la integral obtenida, si logramos el integrando, que es $2/t^2$, entonces la integral es correcta: $d/dt(-2/t +C)= [(t)(0) –(-2)(1]/t^2 +0= (0 +2)/ t^2= 2/t^2$. La integral alcanzada es correcta.

11. $\int(x^{3/2} -2x^{2/3} +5\sqrt{x} -3)dx$.

Respuesta del libro: $2x^{5/2}/5 -6x^{5/3}/5 +10x^{3/2}/3 -3x +C$.

Mi respuesta:

Observemos las 23 fórmulas de integración elemental que están en las páginas 232-233; igualmente, observemos los 11 ejemplos ilustrativos que están en las páginas 234-236 del libro que estamos estudiando, CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL de Granville; y, de inmediato, descubriremos que el problema 11, se resuelve con la fórmula 4, a saber: $\int v^n dv= (v^{n+1})/(n +1) +C$. Comencemos:

$\int(x^{3/2} -2x^{2/3} +5\sqrt{x} -3)dx$

$= \int x^{3/2}dx- \int 2x^{2/3}dx + \int 5\sqrt{x} - \int 3dx$

$= x^{3/2+1}/3/2 +1 -2x^{2/3+1}/2/3+1 +5x^{1/2+1}/1/2+1 -3x +C$

$= x^{5/2}/5/2 -2x^{5/3}/5/3 +5x^{3/2}/3/2 -3x +C$

$= 2/5x^{5/2} -6/5x^{5/3} +10x^{3/2}/3 -3x +C$.

Procedamos ahora a realizar la diferenciación de la integral obtenida, si logramos el integrando, que es $x^{3/2} -2x^{2/3} +5\sqrt{x} -3$, entonces la integral es correcta: $d/dx(2/5x^{5/2} -6/5x^{5/3} +10x^{3/2}/3 -3x +C)= (5/2)(2/5)x^{3/2} –(5/3)(6/5)x^{2/3} +(3/2)(10/3)x^{1/2} -3 +0= x^{3/2} -2x^{2/3} +5x^{1/2} -3$. La integral alcanzada es correcta.

12. $\int(4x^2 -2\sqrt{x})/xdx$

Respuesta del libro: $2x^2 -4\sqrt{x} +C$.

Mi respuesta:

Observemos las 23 fórmulas de integración elemental que están en las páginas 232-233; igualmente, observemos los 11 ejemplos ilustrativos que están en las páginas 234-236 del libro que estamos estudiando, CÁLCULO DIFERENCIAL E

INTEGRAL de Granville; y, de inmediato, descubriremos que el problema 12, se resuelve con la fórmula 4, a saber: $\int v^n dv= (v^{n+1})/(n+1) +C$. Comencemos:

$\int[(4x^2 -2\sqrt{x})/x]dx$

$= \int[(4x^2 -2\sqrt{x})/]x^{-1}dx$

$= \int 4x^2x^{-1}dx -\int 2x^{1/2}x^{-1}dx$

$= 4\int x^2x^{-1}dx -2\int x^{1/2}x^{-1}dx$

$= 4\int xdx -2\int x^{-1/2}dx$

$= 4x^2/2 -2x^{1/2}/1/2 +C$

$= 2x^2 -4x^{1/2} +C$

$= 2x^2 -4\sqrt{x} +C.$

Procedamos ahora a realizar la diferenciación de la integral obtenida, si logramos el integrando, que es $(4x^2 -2\sqrt{x})/x$, entonces la integral es correcta: $d/dx(2x^2 -4\sqrt{x} +C)= d/dx\ (2x^2 -4x^{1/2} +C)= 4x -(1/2)(4)x^{-1/2} +0= 4x -2x^{-1/2}= 4x -2/x^{1/2}= 4x -2/\sqrt{x}$. (PARECE SER QUE LA DIFERENCIACIÓN EFECTUADA POR MÍ NO HA SIDO CORRECTA).

13. $\int(x^2/2 -2/x^2)dx$

Respuesta del libro: $x^3/6 +2/x +C$.

Mi respuesta:

Observemos las 23 fórmulas de integración elemental que están en las páginas 232-233; igualmente, observemos los 11 ejemplos ilustrativos que están en las páginas 234-236 del libro que estamos estudiando, CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL de Granville; y, de inmediato, descubriremos que el problema 13 se resuelve con la fórmula 4, a saber: $\int v^n dv= (v^{n+1})/(n+1) +C$. Comencemos:

$\int(x^2/2 -2/x^2)dx$

$= \int(x^2/2)dx -\int(2/x^2)dx$

$= \int(x^2/2)dx - \int(2x^{-2})dx$

$= (x^{2+1}/2+2+1) - (2x^{-2+1})/(-2+1) + C$

$= x^3/5 + 2x^{-1} + C$

$= x^3/5 + 2/x + C$. (MI RESPUESTA PARECE QUE ES ERRADA).

Procedamos ahora a realizar la diferenciación de la integral obtenida, si logramos el integrando, que es $x^2/2 - 2/x^2$, entonces la integral es correcta: $d/dx(x^3/5 + 2/x + C.) = [(5)(3)x^2 - (x^3)(0)]/25 + [(x)(0) - (2)(1)]/x^2 = (15x^2 - 0)/25 + (0 - 2)/x^2 = 3/5x^2 - 2/x^2$. (PARECE QUE MI RESPUESTA ES ERRADA).

14. $\int\sqrt{x}(3x - 2)dx$.

Respuesta del libro: $6x^5/2/5 - 4x^3/2/3 + C$.

Mi respuesta:

Observemos las 23 fórmulas de integración elemental que están en las páginas 232-233; igualmente, observemos los 11 ejemplos ilustrativos que están en las páginas 234-236 del libro que estamos estudiando, CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL de Granville; y, de inmediato, descubriremos que el problema 14 se resuelve con la fórmula 4, a saber: $\int v^n dv = (v^{n+1})/(n + 1) + C$. Comencemos:

$\int\sqrt{x}(3x - 2)dx$

$= 3x^{3/2+1}/3/2 + 1 - 2x^{1/2+1}/1/2+1 + C$

$= 3x^{5/2}/5/2 - 2x^{3/2}/3/2 + C$
$= 6/5x^{5/2} - 4/3x^{3/2} + C$

Procedamos ahora a realizar la diferenciación de la integral obtenida, si logramos el integrando, que es $\sqrt{x}(3x - 2)$, el cual es igual a $3x^{3/2} - 2x^{1/2}$, entonces la integral seria correcta: $d/dx(6/5x^{5/2} - 4/3x^{3/2} + C) = [(5/2)(6/5)x^{5/2\ -1} - (3/2)(4/3)x^{3/2-1} + 0] = 3x^{3/2} - 2x^{1/2}$. Efectivamente la integral es correcta.

15. $\int(x^3 - 6x + 5/x)dx$.

Respuesta del libro: $x^3/3 - 6x + 5\ln x + C$.

Mi respuesta:

Observemos las 23 fórmulas de integración elemental que están en las páginas 232-233; igualmente, observemos los 11 ejemplos ilustrativos que están en las páginas 234-236 del libro que estamos estudiando, CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL de Granville; y, de inmediato, descubriremos que el problema 15 se resuelve con la fórmula 4 y la fórmula 5, a saber: $\int v^n dv = (v^{n+1})/(n+1) + C$ y $\int dv/v = \ln v + C$, respectivamente. Comencemos:

$\int(x^3 -6x +5/x)dx$

$= \int(x^3 -6x +5)(x^{-1})dx$

$= \int(x^2 -6 +5x^{-1})dx$

$= \int x^2 dx -6\int dx +5\int x^{-1}dx$

$= x^2+1/2+1 -6x +5x^{-1+1}/-1+1 +C$

Pero como n= -1 en el caso de 5x, no podemos aplicar la fórmula (4), debemos recurrir a la fórmula (5), que indica, según Granville, página 234: *"Si la expresión que se encuentra bajo el signo integral es una fracción cuyo numerador es la diferencial del denominador, entonces la integral es el logaritmo natural del denominador"*. (Comillas y cursiva son nuestras). Desde este punto de vista la expresión 5x-1+1/ -1+1 sería igual a 5ln x, por tanto:

$= x^{2+1}/2+1 -6x +5x^{-1+1}/-1+1 +C$

$= x^{2+1}/2+1 -6x +5\ln x +C$

$= x^3/3 -6x +5\ln x +C.$

Procedamos ahora a realizar la diferenciación de la integral obtenida, si logramos el integrando, que es x^3 -6x +5, entonces la integral sería correcta: $d/dx(x^3/3 -6x +5\ln x +C) = [(3)(3x^2)(x)–(x^3)(0)]/9 -6 +5/x +0] = 9x^2(x)/9 -6 +5/5x = x^3 -6 +5/x$. TENGO QUE REVISAR LA DIFERENCIACIÓN.

Los problemas relacionados con la integral definida están insertados en el capítulo XIV del libro que estamos estudiando, es decir, CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL de Granville; y comienzan a partir de la página 291.

La integral definida tiene por simbología: $\int_a^b$ y dx, la cual se puede leer *como "la integral desde a hasta b de y dx". Esta operación se denomina integración entre límites, siendo a el límite inferior y b el límite superior. Cuando estamos evaluando este tipo de integrales, la constante de integración desaparece, por lo que la integral tiene un valor definido. Es en tal virtud que se denomina integral definida de f(x) desde a hasta b".* (Draper y klingman: Matemáticas para administración y economía. Impreso en México, 1980, p. 412). (Comillas y cursiva son nuestras).

Para calcular la integral definida, Granville en la página 289, recomienda:

"Primer paso. Integrar la expresión diferencial dada.

"Segundo paso. Reemplazar la variable en esta integral indefinida en primer lugar por el límite superior, después por el inferior, y restar el segundo resultado del primero". (Comillas y cursiva son nuestras).

Verificar las siguientes integraciones:

2. $\int_0^a(a^2x - x^3)dx$.

Respuesta del libro: $a^4/4$.

Mi respuesta:

Para resolver el presente problema 2 de integral definida, aplicaremos la siguiente recomendación de Granville dada en la página 289 de su libro CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL:

"Primer paso. Integrar la expresión diferencial dada.
"Segundo paso. Reemplazar la variable en esta integral indefinida en primer lugar por el límite superior, después por el inferior, y restar el segundo resultado del primero". (Comillas y cursiva son nuestras).

$\int_0^a (a^2x - x^3)dx=$

$a^2\int_0^a (x)dx - \int_0^a (x^3)dx=$

$a^2[(x^2)/2]_0^a - [x^4/4] \int_0^a=$

$a^2[a^2/2]= a^4/2 -0 - a^4/4 -0= a^4/2 - a^4/4= 2a^4 - a^4/4= a^4/4.$

Mi respuesta coincide con la respuesta del libro.

3. $\int_1^e dx/x$

Respuesta del libro=1

Mi respuesta:

Para resolver el presente problema 2 de integral definida, aplicaremos la siguiente recomendación de Granville dada en la página 289 de su libro CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL:

"Primer paso. Integrar la expresión diferencial dada.

"Segundo paso. Reemplazar la variable en esta integral indefinida en primer lugar por el límite superior, después por el inferior, y restar el segundo resultado del primero". (Comillas y cursiva son nuestras).

$\int_1^e dx/x= \int_1^e (x^{-1})dx= [x^{-1}]_1^e=[(-1)x^0/0]_1^e= [(-1)(e)^0/0] -[(1)(1)^0/1 +0]= -1$

El tema de las derivadas parciales se encuentra incluido en la tercera parte del libro que estamos estudiando, CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL de la autoría de Granville, específicamente en el capítulo XXIII.

El cálculo diferencial no solamente se aplica a funciones de una variable. Precisamente la derivada parcial va orientada a funciones de más de una variable, según nos dice Granville. Comencemos:

En la página 547 el libro de Granville nos pide que hallemos las derivadas parciales de las siguientes funciones:

1. $z= Ax^2 +Bxy +Cy^2 +Dx +Ey +F$.

Respuesta del libro: $\partial z/\partial x= 2Ax +By +D$; $\partial z/\partial y= Bx +2Cy +E$.

Mi respuesta:

Considerando y como constante, tenemos:

$\partial z/\partial x= 2Ax +By +0 +D +0 +0$

$= 2Ax +By +D$.

Considerando x como constante, tenemos:

$\partial z/\partial y= 0 +Bx +2Cy +0 +E +0$

$= Bx +2Cy +E$.

Mi respuesta coincide con la respuesta del libro.

2. $f(x, y)= Ax^3 +3Bx^2y +3Cxy^2 +Dy^3$.

Respuesta del libro: $f_x (x. y)= 3(Ax^2 +2Bxy +Cy^2)$; $f_y (x. y)= 3(Bx^2 +2Cxy +Dy^2)$.

Mi respuesta:

$f_x(x, y)= 3Ax^2 +6Bxy +3Cy^2 +0$

$= 3Ax^2 +6Bxy +3Cy^2$.

$f_y(x, y)= 0 +3Bx^2 +6Cxy +3Dy^2$

$= 3Bx^2 +6Cxy +3Dy^2$.

Mi respuesta coincide con la respuesta del libro.

3. $f(x,y)= (Ax +By)/(Cx +Dy)$.

Respuesta del libro: $\partial f/\partial x= (AD – BC)y/(Cx +Dy)^2$; $\partial f/\partial y= (BC- AD)x/(Cx +Dy)^2$

Mi respuesta:

Considerando y como constante, tenemos:

$\partial f/\partial x= [(Cx +Dy)(A +0) –(Ax +By)(C +0)]/(Cx +Dy)^2$

$= (ACx +ADy) –(ACx +BCy)]/(Cx +Dy)^2$

$= (ADy –BCy)/(Cx +Dy)^2$

$= (AD –BC)y/(Cx +Dy)^2$.

Considerando x como constante, tenemos:

$\partial f/\partial y= [(Cx +Dy)(0 +B) –(Ax +By)(0 +D)]/(Cx +Dy)^2$

$= (BCx +BDy) –(ADx +BDy)]/(Cx +Dy)^2$

$= (BCx -ADx)/(Cx +Dy)^2$

$= (BC –AD)x/(Cx +Dy)^2$.

Mi respuesta coincide con la respuesta del libro.

CONCLUSIÓN

El presente estudio relativo al libro CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL de Granville es solamente el comienzo, pues probablemente ni siquiera abarcamos el 10% de su contenido; pero para el quinto resultado del proyecto de investigación que concluiré en el año 2025 o más tardar en el 2026, resulta suficiente. Simplemente he tenido un primer desafío con la joya de Granville. Quiero seguir aprendiendo.