Formulario de Cálculo Diferencial 1

Roberto López

Límites: Usar álgebra, factorizaciones, conjugado, $\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$.

f es <u>continua</u> en $x = a$ si existe $f(a)$, existe $\lim_{x\to a} f(x)$ y son iguales.

Teorema de Bolzano: Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Definición de derivada: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, o esta: $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
Ejemplo: Si $f(x) = x^2$, queda $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = ... = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = 2x$.

Recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = a$ (o coordenada $(x, y) = (a, f(a))$), es $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.
Por ejemplo, si $f(x) = x^3$ y $a = 2$, entonces $f(a) = f(2) = 2^3 = 8$ y $f'(x) = 3x^2, f'(a) = 3(2)^2 = 12$. La recta tangente es $y = 8 + 12(x - 2)$.

Derivación logaritmica
Conviene para derivar funciones como $f(x) = g(x)^{h(x)}$, o para $f(x) = \frac{g_1(x)g_2(x)\cdot...g_n(x)}{h_1(x)h_2(x)\cdot...h_m(x)}$ (muchas multiplicaciones o divisiones).
Se aplica $ln()$ en ambos lados del =, se simplifica con leyes de logaritmos, se deriva ambos lados, se despeja $f'(x)$. Ejemplo: derivar $f(x) = (x^2 + 1)^{5x^3+4x}$.

Derivación implícita
Para obtener $y' = \frac{dy}{dx}$ a partir de ecuaciones como $h(x, y) = 0$.
Se deriva respecto a x en ambos lados. Luego se despeja y'.
Ejemplo: $3x+5y^2+4xy-10 = 0$. Da $3+10yy'+4(xy'+y) = 0$, luego $y' = \frac{-3-4y}{10y+4x}$.

$f(x)$ es creciente donde $f'(x) > 0$ y decreciente donde $f'(x) < 0$.
x^* es <u>punto crítico</u> de f si $f'(x^*) = 0$ o $f'(x^*)$ no existe. Un punto crítico puede ser máximo, mínimo(local o global) o punto de inflexión.

$f(x)$ es convexa donde $f''(x) > 0$. Es cóncava donde $f''(x) < 0$.
x^* es <u>punto de inflexión</u> de f si cambia la concavidad(f pasa de cóncava a convexa o viceversa. Usualmente es donde $f''(x^*) = 0$ o no existe).

Teorema de Rolle: Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Tabla de derivadas	
Función $f(x)$	Derivada $f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}$
c	0
x^n	nx^{n-1}
$cf(x)$	$cf'(x)$
$f \pm g$	$f' \pm g'$
fg	$fg' + gf'$
f/g	$\frac{gf' - fg'}{g^2}$
$(f \circ g)(x) = f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$
e^x	e^x
a^x	$a^x ln(a)$
$f(x)^{g(x)}$	$\Big(f(x)^{g(x)}\Big)\Big(g\frac{f'}{f} + g' ln(f)\Big)$
Funciones trigonométricas y sus inversas	
$f(x) = sen(x)$	$f'(x) = cos(x)$
$f(x) = cos(x)$	$f'(x) = -sen(x)$
$f(x) = tan(x)$	$f'(x) = sec^2(x)$
$f(x) = cot(x)$	$f'(x) = -csc^2(x)$
$f(x) = sec(x)$	$f'(x) = sec(x)tan(x)$
$f(x) = csc(x)$	$f'(x) = -csc(x)cot(x)$
$f(x) = sen^{-1}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = cos^{-1}(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = tan^{-1}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$f(x) = cot^{-1}(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
$f(x) = sec^{-1}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$f(x) = csc^{-1}(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
Funciones hiperbólicas y sus inversas	
$f(x) = senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$f'(x) = cosh(x)$
$f(x) = cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$f'(x) = senh(x)$
$f(x) = tanh(x) = \frac{senh(x)}{cosh(x)}$	$f'(x) = sech^2(x)$
$f(x) = coth(x)$	$f'(x) = -csch^2(x)$
$f(x) = sech(x)$	$f'(x) = -sech(x)tanh(x)$
$f(x) = csch(x)$	$f'(x) = -csch(x)coth(x)$
$senh^{-1}(x) = ln(x + \sqrt{x^2+1})$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$cosh^{-1}(x) = ln(x + \sqrt{x^2-1})$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$f(x) = tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}ln(\frac{1+x}{1-x})$	$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ en $\|x\| < 1$
$f(x) = coth^{-1}(x) = \frac{1}{2}ln(\frac{x+1}{x-1})$	$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ en $\|x\| > 1$
$sech^{-1}(x) = ln(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1})$	$f'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$
$csch^{-1}(x) = ln(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1})$	$f'(x) = \frac{-1}{\|x\|\sqrt{1+x^2}}$

$cosh^2(x) - senh^2(x) = 1, \quad sech^2(x) = 1 - tanh^2(x)$

Mas propiedades: `https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_functions`