EXÁMENES FINALES

PROBABILIDAD

DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE ESTADÍSTICA

ITAM

Agosto de 2017

En el presente documento se reúnen las versiones originales de los exámenes finales departamentales de la materia de Probabilidad con el propósito de indicar el nivel requerido para acreditar el curso.
El periodo incluye los exámenes del semestre Enero-Mayo de 2005 a Enero-Mayo de 2017.

Dr. Alejandro Islas Camargo
Coordinador de la materia
aislas@itam.mx
Ext. 3832

INDICE

PROBABILIDAD

EXÁMEN FINAL TIPO A

Enero-Mayo 2005

Nobre____Cve.Única___________

Nota 1: Este examen incluye 7 preguntas de opción múltiple, las cuales deben ser contestadas con lápiz del número 2 o 2 ½ en la hoja anexa. Es importante que anotes TODOS tus datos personales en la hoja anexa. En este tipo de respuestas no se califica el procedimiento.
Nota 2: En la respuesta de cualquier otro ejercicio se debe incluir desarrollo del procedimiento, de otra manera se considera errónea la respuesta.

1. Se realizó un estudio sobre los daños en accidentes automovilísticos que sufren los niños. Sea X la variable aleatoria que denota el número de niños dentro del automóvil y Y la variable que denota el número de niños que resulta con daño grave después de un accidente automovilístico. Si la distribución conjunta de las variables X y Y está dada por

		X	
		1	2
	0	0.12	0.08
Y	1	0.48	0.12
	2	0	0.2

(a) Obtenga la función generadora de momentos (f.g.m.) de la variable X.

(b) Con base en la f.g.m. obtenida en el inciso (a) obtenga la varianza de la variable X.

(c) **PREGUNTA (1) DE OPCIÓN MÚLTIPLE.**

¿Cuál es el valor de $P(X \geq 1.5 | -0.5 \leq Y \leq 1.5)$?

a. 0.2 b. 0.25 c. 0.8 d. Ninguna de las anteriores

(d) ¿Son independientes las v.a. X y Y? Justifica tu respuesta

(e) Calcule $E\left[\frac{Y}{X}\right]$.

2. Suponga que el número de pasajeros X que documenta su equipaje en cierta línea aérea se puede modelar como una variable aleatoria Poisson y que en promedio 12 pasajeros por HORA documenta su equipaje en esta línea.

(a) Obtenga la probabilidad de que entre las 8 a.m. y las 9 a.m. más de 6 pasajeros documenten su equipaje en esta línea, si ya han documentado su equipaje al menos 4

(b) Si el costo por hora de documentar equipaje por la línea aérea está dado por $C = 800 - X^2$. Obtenga el costo esperado y la varianza del costo.

(c) PREGUNTA (2) DE OPCIÓN MÚLTIPLE

¿Cuál es la probabilidad de que entre las 10 a.m. y las 10:30 a.m. más de 3 pasajeros documente su equipaje en esta línea?

a. 0.849 b. 0.735 c. 0.151 d. Ninguna de las anteriores

(d) ¿Cuál es la probabilidad de que transcurran más de 15 minutos entre dos pasajeros de esta línea?

3. Sea X la variable aleatoria que modela las ventas mensuales de cierta empresa (en millones de pesos) por concepto de papelería y sea Y la variable que denota las ventas mensuales (en millones de pesos) por concepto de accesorios de computo. Suponga que el vector aleatorio (X, Y) tiene distribución Normal bivariada con media y varianza dadas por:

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \end{pmatrix} \text{ Y } \Sigma = \begin{pmatrix} 4.0 & 0.45 \\ 0.45 & 9 \end{pmatrix}$$

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un mes dado las ventas por concepto de accesorios de cómputo excedan 22 millones de pesos?

(b) ¿Cuál es la varianza de las ventas totales por papelería y accesorios de cómputo?

(c) PREGUNTA (3) DE OPCIÓN MULTIPLE

Si en un mes dado las ventas por accesorios de cómputo (Y) son de 15 millones de pesos, ¿Cuál es la probabilidad de que las ventas por papelería (X) sean mayores de 5 millones de pesos?

a.0.0838 b. 0.25 c. 0.916 d. 0.5

(d) PREGUNTA (4) DE OPCIÓN MULTIPLE

Si las ventas de cada mes son independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que en más de 3 de los siguientes diez meses las ventas por accesorios de cómputo excedan 20 millones de pesos?

a. 0.7641 b. 0.8281 c. 0.1719 d. Ninguna de las anteriores

4. Problemas varios

(a) PREGUNTA (5) DE OPCIÓN MULTIPLE

Una población de votantes está conformada por 25% de republicanos, 35% de demócratas y 40% liberales. Se sabe que el 20% de los republicanos, el 30% de los demócratas y el 10% de los liberales están a favor de cierta cuestión política. Si se selecciona alearoriamente una persona de esta población y la respuesta es EN CONTRA de esta cuestión política. ¿Cuál es la probabilidad condicional de que esta persona sea demócrata?

a. 0.353 b.0.805 c. 0.304 d. Ninguna de las anteriores

(b) Si $P(A \cup B) = 0.8, P(A) = 0.5$ y $P(A|B) = 0.4$ Encuentre la $P(B)$

Nota No puedes asumir que los eventos son independientes o mutuamente excluyentes (a menos que lo demuestres).

5. Sean X_1 y X_2 dos v.a. con función de densidad conjunta dada por:

$$f_{X_1,X_2}(X_1, X_2) = 2(1 - x_1) \quad \text{si} \quad 0 \leq X_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1$$

Y sean (Y_1, Y_2) una transformación de las v.a. X_1 y X_2 dada por:

$$Y_1 = X_1 X_2 \qquad \text{y} \qquad Y_2 = X_1$$

(a) Calcula $P(X_1 + X_2 < 1/2)$

(b) Obtenga la densidad conjunta de Y_1 y Y_2 $f_{Y_1,Y_2}(y, y_2)$. Verifique que efectivamente se trata de una función de densidad de probabilidad conjunta.

(c) PREGUNTA (6) DE OPCIÓN MÚLTIPLE.

¿Cuáles son los valores permitidos (simultáneos) que pueden tomar las v.a. Y_1 y Y_2 ?

a. $0 \leq y_1 \leq 1, \; 0 \leq y_2 \leq 1$ b. $0 \leq y_1 \leq 1, \; y_1 \leq y_2 \leq 1$

c. $0 \leq y_1 \leq 1, \; 0 \leq y_2 \leq y_1$ d. $0 \leq y_1 \leq \frac{1}{2}, \; 0 \leq y_2 \leq 1/2$

6. Un padre y un hijo usan el mismo auto y entre ambos comparten la responsabilidad de comprarle gasolina. Sea X la v.a. que modela los litros de gasolina que compra el padre en una semana y Y la v.a. que modela los litros de gasolina que compra el hijo en una semana. Suponga que el comportamiento probabilístico de estas dos variables está dada por la función de densidad conjunta:

$$f_{X,Y}(x, y) = k(xy) \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq 20, x \leq y \leq 2x$$

Donde $k = 1/(60{,}000)$.

-Para este problema se tiene la siguiente información:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{8} k y^3 & \text{si } 0 \leq y \leq 20 \\ \frac{k}{2}\left(400y - \frac{y^3}{4}\right) & \text{si } 20 \leq y \leq 40 \end{cases}$$

$$E[X] = 16 \qquad E[Y] = 24.89$$

$$V(X) = 10.67 \qquad V(Y) = 47.21$$

(a) PREGUNTA (7) DE OPCIÓN MÚLTIPLE

¿Cuál es la probabilidad de que los litros comprados por el padre (X) sean más de 10, si se sabe que los litros comprados por el hijo (Y) fueron menos de 20, en una semana dada?

a. 0.25 b. 0.5 c.01875 d. 0.75

(b) Obtenga la densidad marginal de los litros comprados por el padre $f_X(x)$.

(c) Obtenga el valor esperado de litros comprados por el hijo (Y) dado que el padre compra 20 litros (X).

(d) Si $W = 3Y - 5X$. Obtenga la varianza de la variable W.

PROBABILIDAD

EXÁMEN FINAL TIPO A

Agosto-Diciembre 2005

Nombre:____Clave única________________

PARTE I

A continuación se presentan 6 preguntas de opción múltiple, las cuales deben ser contestadas con lápiz del número 2 o 2½, en la hoja anexa. Es importante que anotes tus datos personales. (No se califica su procedimiento)

1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**?

   a) Sean A y B dos eventos ajenos (esto es, $A \cap B = \emptyset$) con $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$, entonces A y B no son independientes.

   b) Si A es un subconjunto del espacio muestral Ω y $\{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ construyen una partición de Ω . Entonces A puede descomponerse de la siguiente manera

   $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_k)$.

   c) Si $P(A|B) = P(A|B^c)$, entonces A y B son independientes.

   d) Sean $A_1, A_2, \dots, A_n$ eventos del espacio muestral Ω. Entonces, se dice que los eventos son independientes si y sólo si son independientes dos a dos.

   (5 puntos)

2. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**?

   a) Suponga que $X \sim \chi^2(m), S = X + Y \sim \chi^2(m+n)$ y que X y Y son independientes, entonces $S - X \sim \chi^2(n)$

   b) Suponga que $X_i \sim Exp(100)$, entonces $\sum_{i=1}^{10} X_i \sim Gama(100{,}10)$.

   c) Si $X \sim Gama(\theta, k)$, entonces $Y = \frac{2X}{\theta} \sim \chi^2(k)$.

   d) Si $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2); i = 1,2, \dots, n$ denota variables aleatorias independientes normalmente distribuidas, entonces $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 {\sigma_i}^2)$.

   (5 puntos)

3. Suponga que $P(X \leq x) = 1 - \exp(-x)\,, x \geq 1$ y $P(X \leq x) = 0, x < 1$. ¿Cuál de los siguientes enunciados es **verdadero**?

   a)$P(X = 2) = 1 - \exp(-2)$ y $P(X = 1) = 1 - \exp(-1)$

   b)$P(X = 2) = 1 - \exp(-2)$ y $P(X \leq 1) = 1 - \exp(-1)$

   c)$P(X < 2) = 1 - \exp(-2)$ y $P(X < 1) = 1 - \exp(-1)$

   d)$P(X = 2) = 1 - \exp(-2)$ y $P(X < 1) = 1 - \exp(-1)$

   (5 puntos)

4. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**?

a) Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes indénticamente distribuidas tales que $X_i \sim Unif(0,1)$. Definimos

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Entonces, la función de distribución de Y_n converge a la función de distribución normal $Y_n \sim N\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{12}\right)$ conforme n tiende a infinito.

b) Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas tales que $X_i \sim Bernoulli(p)$ y considérese $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Si permitimos que $p \to 0$ conforme $n \to \infty$ de tal manera que $np = \mu$, para $\mu > 0$ fijo, entonces Y_n converge a la función de distribución Poisson con parámetro μ

c) Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas tales que $X_i \sim Bernoulli(p)$ y considérese $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Entonces $Z_n = \frac{Y_n}{\sigma_n} - \frac{np}{\sigma_n}$ donde $\sigma_n = \sqrt{np(1-p)}$, converge a la distribución normal estándar conforme n tiende a infinito.

d) Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas tales que $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$. Entonces, la función de distribución de $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ converge a la función de distribución normal $\bar{X}_n \sim N(\mu, n\sigma^2)$.

(5 puntos)

5.- Sea X una función de densidad continua con la siguiente función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \alpha f_1(x) + (1-\alpha) f_2(x),$$

donde $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son funciones de densidad de probabilidad y $0 \leq \alpha \leq 1$, μ_i y ${\sigma^2}_i$ denotan la media y la varianza correspondientes a $f_i(x)$, $i = 1,2$. Diga cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**

a) $E[X] = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$

b) $Var(X) = \alpha^2{\sigma^2}_1 + (1-\alpha)^2{\sigma^2}_2 + 2\alpha(1-\alpha){\sigma^2}_1{\sigma^2}_2$

c) $Var(X) = \alpha{\sigma^2}_1 + (1-\alpha){\sigma^2}_2 + \alpha(1-\alpha)(\mu_1 - \mu_2)^2$

d) $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\ \alpha f_1(x) + (1-\alpha) f_2(x))dx$

(5 puntos)

6.- Diga en cuál de los siguientes casos se cumple la igualdad en la desigualdad de Tchebyshev.

a) Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$; para k=2

b) Sea X la variable aleatoria discreta que toma los valores -1,0 y 1 con probabilidades $\frac{1}{8}$, $\frac{6}{8}$ y $\frac{1}{8}$ respectivamente; para k=2

c) $X \sim U(0{,}10)$; para k=4

d) En ninguno de las anteriores

(5 puntos)

PARTE II

Indica claramente el inciso que estás resolviendo. Si tienes dos respuestas para una pregunta tacha la que consideres incorrecta, de lo contrario la ambigüedad anulará ambas. Un número o un resultado sin debida justificación no dan crédito.

1. En cierta compañía se debe seleccionar un comité de tres personas de un grupo de dos economistas, dos contadores y un ingeniero. Sea X el número de economistas y Y el número de contadores en el comité.

a) Determina la distribución de probabilidad conjunta de X y Y. **(5 puntos)**

b) Obtenga la función generadora de momentos de la variable X. **(4 puntos)**

c) Con base en la f.g.m. obtenida en el inciso (b) obtenga la varianza de la variable X

(3 puntos)

d) Calcule $P(X \geq 1 | 0.5 \leq y \leq 2.5)$ **(3 puntos)**

e) ¿Son X y Y independientes? **(3 puntos)**

2. Sea X la variable aleatoria que representa la demanda anual de un producto que es medido en escala continua, por ejemplo, un pesticida, el cual es medido en galones (o fracciones de galón). Al inicio del año, una tienda de productos agrícolas ordena c galones a un precio d_1 pesos por galón y vende estos a sus clientes a d_2 pesos por galón. El pesticida pierde su efectividad si es almacenado después de la temporada de cultivo, por lo tanto, cualquier cantidad de pesticida no vendida al final del año se considera una pérdida.

a) Si S es la cantidad vendida, verifique que:

$$E[S] = \int_0^c x f(x) dx + c[1 - F(c)]$$

Donde $f(x)$ es la función de densidad y $F(x)$ es la función de distribución de X. **(5 puntos)**

b) Verifica que la cantidad c, que maximiza la ganancia neta esperada es el p-ésimo percentil de la distribución de X con p= $\frac{d_2 - d_1}{d_2}$. [*Sugerencia: use el teorema fundamental del cálculo*] **(10 puntos)**

c) Si $d_1 = 6$ y $d_2 = 14$ y $X \sim Unif(980,1020)$, encuentre el valor óptimo de c. **(2 puntos)**

3**.** Sea X_1 y X_2 una muestra aleatoria de tamaño 2 de una distribución con función de densidad de probabilidad igual a:

$$f(x_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{{x_i}^2} & 1 < x_i < \infty \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obtenga la función de densidad conjunta de $U = X_1 X_2$ y $V = X_1$.

(6 puntos)

4.- Las variables aleatorias continuas X y Y tienen la siguiente función de densidad de probabilidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{g(x)g(y)}{G(x)} & -\infty < y < x < \infty \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Donde $G(x)$ es una función de distribución acumulada tal que $g(x) = \frac{dG(x)}{dx}$

a) Verifique que las funciones de densidad de probabilidad marginal de X y Y están dadas por

$$f_X(x) = g(x) \qquad -\infty < x < \infty$$
$$f_Y(y) = -g(y)\ln G(y) \quad -\infty < y < \infty$$

respectivamente. **(5 puntos)**

b) Verifique que $f_Y(y) = -g(y)\ln G(y)$ es una función de densidad de probabiidad. **(5 puntos)**

c) Encontrar la función de densidad de probabilidad de $V = -lnG(Y)$ **(5 puntos)**

5.-Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes normalmente distribuidas, $X_i \sim N(\mu_i, {\sigma_i}^2)$ y sean $Y_1 = X_1$ y $Y_2 = X_1 + X_2$

a) Verifique que la distribución conjunta de Y_1 y Y_2 es una normal bivariada **(7 puntos)**

b) ¿Cuál es la media, la varianza y el coeficiente de correlación de Y_1 y Y_2? **(3 puntos)**

c) Encuentre la distribución condicional de Y_2 dado $Y_1 = y_1$ **(3 puntos)**

PROBABILIDAD

EXÁMEN FINAL TIPO A

Enero-Mayo 2006

Nombre Clave Única:

El Examen consiste en dos partes con un total de 100 puntos

PARTE I

A continuación se presentan 10 preguntas de opción múltiple, las cuales deben ser contestadas con lápiz del número 2 en la hoja anexa. No se califica el procedimiento. Cada una tiene valor de 3 puntos

1. si $A \subset B \subset C$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

(a) $P(C \cap B^c) \geq P(B \cap A^c)$, (b) $P(C \cap A^c) \geq P(B \cap A^c)$

(c) $P(B \cap A^c) = P(C \cap B^c)$, (d) $P(A) + P(B) \leq P(C)$

2. Si A es independiente de B y A es independiente de C, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

   (a) B y C son independientes

   (b) B y C son ajenos o disjuntos

   (c) $P(A \cap B) = P(A \cap C)$

   (d) Ninguna de las anteriores

3. Sea X una variable aleatoria con distribución Binomial (n, p). Si $p > 0.5$, el coeficiente de asimetría α_3 es :

   (a) $\alpha_3 < 0$ (b) $\alpha_3 > 0$ (c) $\alpha_3 = 0$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Sean $B_1, B_2, \ldots, B_n$ una partición del espacio muestral, i.e., $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$ y $B_i \cap B_j = \emptyset \; para \; i \neq j$ y $P(B_j) > 0$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

   (a) Si A es un evento contenido en Ω, tal que $P(A) > 0$ entonces

   $$P(B_j|A) = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}$$

   (b) Si B es un evento tal que $B = \bigcup_{j=1}^{k} B_j$ para $1 \leq k \leq n$, entonces

   $$P(B) < \sum_{j=1}^{k} P(B_j)$$

   (c) $P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)$

   (d) Ninguna de las anteriores

5. Sea X variable aleatoria discreta con función de distribución F_x. Sean $a < b$ dos números reales. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

   (a) $P(X \geq a) = 1 - F_x(a)$

   (b) $P(\{X > a\} \cup \{X \leq b\}) = F_x(b) - F_x(a)$

   (c) $P(\{X > a\} \cap \{X \leq b\}) = F_x(b) - F_x(a)$

   (d) $P(|X| \leq a) = F_x(a)$

6. Si X y Y son variables aleatorias independientes con $X \sim Binomial(10,0.5)$ y $Y \sim Binomial(15,0.4)$, entonces la variable aleatoria $W = X + Y$ tiene una distribución:

   (a) Binomial (25,0.9) (b) Binomial (25,0.5)

(c) Binomial (25,0.4) (d) Ninguna de las anteriores

7. Considera las siguientes funciones de densidad conjuntas

$f_{X,Y}(x,y) = xyI_{[0,2]}(x)I_{[0,1]}(y)$ (A)

$f_{U,V}(u,v) = 3e^{-u}e^{-2v}I_{[0,u]}(v)I_{[0,\infty]}(u)$ (B)

$f_{W,Z}(w,z) = 8wzI_{[0,z]}(w)I_{[0,1]}(z)$ ©

$f_{S,T}(s,t) = e^{-(s+t)}I_{[0,\infty]}(s)I_{[0,\infty]}(t)$ (D)

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

(a) En todos los casos las variables son independientes.

(b) Tanto en (A) como en (B), las variables aleatorias son independientes.

(c) Tanto en (A) como en (D), las variables aleatorias son independientes.

(d) Tanto en (C) como en (D), las variables aleatorias no son independientes.

8. Sean X_k , $k = 1, \dots, 10$ variables aleatorias independientes con distribución Poisson con $E[X_k] = k$, para cada $k = 1, \dots, 10$. Entonces la distribución de $Y = \sum_{k=1}^{10} X_k$ es:

(a) $Y \sim Poisson(10)$.

(b) $Y \sim Poisson(55)$.

(c) $Y \sim Exponencial(10)$.

(d) Ninguna de las anteriores.

9. Si X es una variable aleatoria definida por

$$X = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces la esperanza de X es:

(a) 0.0 (b) 1.0 (c) P(A) (d) No se puede saber

10. Suponga que el vector aleatorio (X, Y) sigue una distribución normal bivariada con vector de medias y matriz de varianzas y covarianzas dadas por

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \text{ y } \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} \\ \sigma_{1,2} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es FALSA?

(a) $P(X \leq t|Y \leq y) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2(1-\rho^2)}} e^{-\frac{\left[x-\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)\right]^2}{2\sigma_1^2(1-\rho)^2}} dx$.

(b) $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

(c) Si $\sigma_{1,2} = 0$ entonces X y Y son independientes.

(d) Ninguna de las anteriores

EXAMEN FINAL TIPO A

PARTE II

A continuación se presentan 6 problemas a desarrollar. Identifica claramente en tus respuestas el número del inciso que estás contestando. Justifica tus resultados por muy obvios que parezcan. Un número o resultado sin justificar no se calificará. Total 70 puntos

1. **(7 puntos)** Una urna tiene 6 pelotas de las cuales 3 son verdes. Primero se elige al azar un número n del conjunto $\{1,2,3,4\}$ y después se selecciona una muestra de n pelotas sin reemplazo de la urna. Encontrar la probabilidad de que aparezca una pelota verde en la muestra.
2. **(10 puntos)** Si la media, la varianza y función generadora de momentos de una variable aleatoria X están dadas por μ, σ^2 y $M_x(t)$, para $t \in (-\infty, \infty)$, respectivamente, y si Y es otra variable aleatoria cuya función generadora de momentos está dada por:
$$M_y(t) = e^{c[M_x(t)-1]}, -\infty < t < \infty$$
Donde c es una constante positiva. Exprese la media y la varianza de Y en términos de la media y la varianza de X.
3. **(10 puntos)** Sea X una variable aleatoria con densidad Uniforme (0,1). Muestre que si $Y = -\lambda \log(X)$ con $\lambda > 0$. Entonces la distribución de la variable aleatoria W es exponencial con parámetro λ.
4. Sean (X, Y) variables aleatorias conjuntamente distribuidas con función de densidad
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 24xy & \text{si } \; 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < x + y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$
   (a) **(10 puntos)** Encuentre la función de densidad conjunta de
   $U = X + Y \, ; V = X$
   (b) **(10 puntos)** Obtenga las densidades marginales de U y V.
5. Sea X la cantidad de determinado artículo que un vendedor almacena a granel a principio de una semana. Suponga que X sigue una distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$. Sea Y la cantidad vendida durante la semana. Suponga que Y tiene uina distribución uniforme en el intervalo $0 \leq y \leq x$, dado que x es un valor específico de X.

(a) **(5 puntos)** Determine la función de densidad conjunta de (X, Y).

(b) **(5 puntos)** Si el vendedor almacena una cantidad de 1/2, ¿cuál es la probabilidad de que venda una cantidad mayor que ¼?

(c) **(5 puntos)** Si se sabe que el vendedor almacenó una cantidad igual a 1/4, ¿cuál es el valor esperado de la cantidad vendida?

6. **(8 puntos)** Cierto artículo tiene un precio de oferta en el mercado igual a P_O. El cual se distribuye normal con media de \$50 y desviación estándar de \$5. El precio máximo que están dispuestos a pagar los consumidores (precio de demanda) también es una variable aleatoria P_D, cuya distribución es normal con media \$45 y desviación estándar \$2.5. Suponga que P_O y P_D son independientes. Calcule la probabilidad de que tenga lugar una transacción. [Sugerencia: las transacciones tendrán lugar si y sólo si el precio de oferta es menor o igual al de la demanda.]

Los problemas no están en orden de dificultad, por lo que te recomiendo que leas brevemente todo y comiences por los problemas que consideres más sencillos. Por favor marca claramente la letra de tu respuesta en la pregunta de opción múltiple en la hoja de respuestas. Nota: “ndla” significa “ninguno (ninguna) de los (las) anteriores”. Para preguntas de desarrollo asegúrate de poner alguna justificación y sin ambigüedad.

1. (6 PTS). Si A es independiente de B y A es independiente de C, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

   a. $P(A \cap B) = P(A \cap C)$.

   b. B y C son ajenos o disjuntos

   c. B y C son independientes

   d. $ndla$

2. (6 PTS). Sea X la variable aleatoria con función acumulada F_x y sea $a < b$ números reales ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

   a. Si $0 < a$ entonces $P(|X| > a) = 2\big(1 - F_x(a)\big)$.

   b. $P(\{a \leq X\} \cap \{X \geq b\}) = 1 - F_x(b) - F_x(a)$.

   c. $P(\{a < X\} \cup \{X \leq b\}) = F_x(b) + 1 - F_x(a)$.

   d. $P(\{a < X\} \cap \{X \leq b\}) = F_x(b) - F_x(a)$.

3. (6 PTS). Sea Y una variable aleatoria con densidad normal con media cero y varianza 4. Si $c = E[Y^3]$, entonces:

   a. $c < 0$

   b. $c = 0$

   c. $0 < c$

   d. No existe valor esperado

4. (6 PTS). Sea X la variable aleatoria discreta que sólo toma valores enteros no negativos, y con función de distribución acumulada F_x ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

   a. $P(|X| < 2) = F_x(2)$ b. $P(X \geq 3) = 1 - F_x(3)$

   c. $P(X < 2) = F_x(1)$ d. $P(2 \leq X \leq 3) = F_x(3) - F_x(2)$

5. (6 PTS). Considera las siguientes funciones de densidad conjuntas:

   (1) $f(x, y) = \frac{1}{2}$ si $0 < x < 2$ y $0 < y < 1$ y cero de otra forma

(2) $f(u,v) = 3e^{u}e^{-2v}$ si $0 < v < u$ y $0 < u$ y cero de otra forma

(3) $f(w,z) = 8wz$ si $0 < w < z$ y $0 < z < 1$ y cero de otra forma

(4) $f(x,y) = e^{-(x+y)}$ si $0 < x$ y $0 < y$ y cero de otra forma

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a. En todos los casos las variables son independientes.

b. Tanto en (1) como en (4), las variables aleatorias son independientes.

c. Tanto en (1) como en (2), las variables aleatorias son independientes.

d. Tanto en (3) como en (4), las variables aleatorias no son independientes.

6. (15 PTS). Sean X_1 y X_2 el número de clientes correspondientes, que llegan a dos cajas registradoras alejadas, en el intervalo de las 12:00 a las 12:30 de un supermercado. Si suponemos que X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes con distribución Poisson con media igual a 4 y 2 en dicho intervalo respectivamente, ¿cuál es la probabilidad de que el total de clientes que llegan a ambas cajas, en el intervalo de las 12:00 a las 12:20, exceda a 10? Justifica tu respuesta

7. (15 PTS). Sea $X = (X_1, X_2, X_3)^T$ un vector aleatorio con $E[X_i] = i, Var(X_i) = 4, i = 1,2,3,$

$$Cov(X_{1,}X_2) = 0. \qquad Cov(X_{1,}X_3) = 0. \qquad Cov(X_{2,}X_3) = 3.$$

Calcula

$$E[(X_1 - X_2)(X_3 - 2X_2)]$$

8. (15 PTS). Supongamos que X tiene densidad uniforme en $(-1,1)$. Encuentra la densidad de $Y = X^2$ y verifica que es función de densidad. ¿Es la densidad de Y una función acotada?

9. (10 PTS). Considera (X_1, X_2) vector aleatorio normal bivariado con $\mu_1 = 3, \mu_2 = 1, \sigma_1^2 = 16$, $\sigma_2^2 = 25$ y $\rho = \frac{3}{5}$. Calcula $P(0 < X_2 < 7 | X_1 = 7)$

10. (15 PTS). Sean X_1, X_2 variables aleatorias independientes con densidad normal estándar. Sean $U_1 = X_1 + X_2$ y $U_2 = X_1 - X_2$. Encuentra la densidad conjunta de (U_1, U_2), ¿son variables aleatorias independientes? Justifica tu respuesta.

PROBABILIDAD

Examen Final **TIPO A**

Mayo 2007

Nombre: ____ Cve. Única: ___________

Parte I

Nota 1: En esta parte del examen, la respuesta de cualquier ejercicio debe incluir el desarrollo del procedimiento, de otra manera se considerará errónea la respuesta.

1. Una persona está analizando la conformación de un portafolio de inversión con los instrumentos 1, 2, 3. Sea (X, Y, Z) el vector aleatorio que modela el rendimiento de los instrumentos de inversión, respectivamente. Si se considera que la distribución de este vector aleatorio es Normal multivariado con media y varianza dadas por:

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \\ \mu_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15\% \\ 21\% \\ 0\% \end{pmatrix} \text{ y } \Sigma = \begin{pmatrix} 2^2 & -4.7 & 3 \\ -4.7 & 3.4^2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Si un día el instrumento 2 tiene un rendimiento del 25%, ¿Cuál es la probabilidad de que ese día el instrumento 1 tenga un rendimiento menor que 14%? [7 puntos]

   (b) Si esta persona forma un portafolio en el cual el 60% de la inversión total lo hace en el instrumento 1, el 30% en el instrumento 2 y el resto en el instrumento 3 ¿Cuál es la probabilidad de que el rendimiento total de este portafolio sea mayor al 25%? [8 puntos]

2. Un padre le da a su hijo $100 más una cantidad variable de dinero extra cada domingo. Para esto le pide que seleccione simultáneamente (al mismo tiempo) 3 monedas de una caja que contiene 4 monedas de $10 y 2 monedas de $5. Sea X la v.a. que representa el número de monedas de $10 y Y la v.a. que representa el número de monedas de $5 que selecciona el hijo.

   (a) Obtenga la distribución de probabilidad conjunta de las variables X y Y. [6 puntos]

   (b) Sea T la cantidad total de dinero que el padre le da al hijo cada domingo. Obtenga la función de probabilidad de la variable T. Recuerde que el padre le da “de cajón” $100 pesos a su hijo. [6 puntos]

   (c) Obtenga la varianza de la cantidad total T de dinero que recibe el hijo cada domingo. [6 puntos]

3. Suponga que el vector aleatorio (X, Y) se distribuye uniformemente dentro del triángulo A con vértices en $(0,0), (1,0)$ y $(0,1)$. Es decir, la función de densidad conjunta de las v.a. X y Y está dada por:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{si}(x,y) \in A \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   (a) Obtenga la función de densidad marginal de la v.a. X. [6 puntos]
   (b) ¿Son las v.a. X y Y independientes? Justifica tu respuesta. [7 puntos]
   (c) Calcula la covarianza entre las v.a. X y Y. [7 puntos]
   (d) Calcula $P\left(Y \leq \frac{3}{4} | X = \frac{1}{2}\right)$. [9 puntos]

4. Un juego consiste en lanzar una moneda cargada de tal forma que la probabilidad de que el resultado sea águila es 2/3. Si aparece águila se extrae aleatoriamente una pelota de la urna A que contiene dos pelotas rojas y tres verdes; si el resultado es sol, se extrae una pelota de la urna B que contiene dos pelotas rojas y dos verdes. Si al final del juego se tiene una pelota roja ¿cuál es la probabilidad de que haya sido extraída de la urna A? [8 puntos]

Parte II

Nota 2: A continuación se presentan 10 preguntas de opción múltiple, las cuales deben ser contestadas con lápiz del número 2 ó 2 ½, en la hoja anexa. Es importante que anotes TODOS tus datos personales en la hoja anexa. En este tipo de respuestas no se calificará el procedimiento. Cada una de las preguntas vale 3 puntos.

1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

   (a) Si A y B son dos eventos ajenos (o mutuamente excluyentes) entonces A y B^c también son ajenos.
   (b) Si A y B son dos eventos independientes, entonces A y B^c también son independientes.
   (c) La expresión $P(A \cap B|A \cup B)$ se reduce a $\frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)}$.
   (d) Si A y B son dos eventos independientes se tiene que $P(A|B) = P(A)$

2. Sea X con distribución $Binomial(10,0.6)$, y $Y = 100 + X^2$. La esperanza de la v.a. Y es:
   (a) 138.4 (b) 38.4 (c) 136 (d) ninguna de las anteriores.

3. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

   (a) En la distribución Binomial, la media es más grande que la varianza.
   (b) Bajo la distribución uniforme, cualquier intervalo (dentro del soporte) de la misma longitud tiene la misma probabilidad.
   (c) En la distribución normal estándar, el primer cuartil es negativo.
   (d) Ninguna de las anteriores

4. Si X y Y son dos variables aleatorias discretas y a, b, c son números reales distintos de cero, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

   (a) $Cov(X, 2Y) = 2Cov(X, Y)$
   (b) $Var(aX - bY) + c) = a^2Var(X) + b^2Var(y) - 2abCov(X, Y)$.
   (c) Si el coeficiente de correlación entre X y Y es igual a -1 entonces si la v.a. X disminuye, se esperaría que la v.a. Y también disminuya.
   (d) Si $Cov(X, Y) = 0$, entonces se dice que las variables no están correlacionadas linealmente.

5. Sea T el tiempo en minutos que tarda una persona en ser atendida en cierta sucursal bancaria. Si la variable T se puede modelar probabilísticamente como una variable exponencial con varianza de 36 min^2. ¿Cuál es la mediana del tiempo que tarda una persona en ser atandida en esa sucursal bancaria?
   (a) 3.47 (b) 4.16 (c) -0.12 (d) Otro valor negativo.

6. Si X y Y son dos variables aleatorias discretas tales que $V(X) = 16$, $V(Y)40$ y $Cov(X, Y) = 10$, entonces lavarianza de la variable $W = -2X - 3Y + 5$ es igual a:
   (a) 361 (b) 484 (c)364 (d) 544

7. Si X es una v.a. con función de densidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & -8 < x \leq 0 \\ \frac{1}{10} - \frac{1}{40}x & 0 < x \leq 4 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

   La mediana de la v.a. X es:

   (a) 2.0 (b) -4.0 (c) -3.0 (d) 0.0

8. Sea $f(x) = 2(1 - x)$ si $0 < x < 1$. Entonces, la $E\left[\frac{1}{1-x}\right]$ es:

   (a) 2.0 (b) 1.0 (c) 0.0 (d)Ninguna de las anteriores

9. Sean X_1 y X_2 dos v.a. con función de densidad conjunta dad a por:

$$f_{X_1 X_2}(x_1 x_2) = 2(1 - x_1) \text{ si } 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1$$

   Y sean $(Y_1 \quad Y_2)$ una transformación de las v.a. X_1 y X_2 dadas por: $Y_1 = X_1 X_2$ y $Y_2 = X_1$
   ¿Cuáles son los valores permitidos (simultáneos) que pueden tomar las v. a. Y_1 y Y_2?
   (c) $0 \leq y_1 \leq 1, 0 \leq y_2 \leq 1$ (b) $0 \leq y_1 \leq 1, y_1 \leq y_2 \leq 1$
   (d) $0 \leq y_1 \leq 1, 0 \leq y_2 \leq y_1$ (d) $0 \leq y_1 \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y_2 \leq \frac{1}{2}$

10. Si X y Y son v.a. independientes con $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$ y $Y \sim Gamma(\lambda, \beta)$ entonces la v.a. $W = X + Y$ tiene una distribución $Gamma$ con parámetros:

   (a) $(\alpha\lambda, \beta)$ (b) $(\alpha + \lambda, 2\beta)$ (c) $(\alpha\lambda, 2\beta)$ (d) $(\alpha + \lambda, \beta)$

Probabilidad | Examen final–A | Nombre: ____________________
Ago-Dic 2007

Parte I. (36 puntos) Preguntas de opción múltiple. Es importante que anotes todos tus datos personales en la hoja anexa. En estas preguntas no se califica el procedimiento. Solo hay una respuesta correcta.

(4^{pts}) 1. Si la función generadora de una variable aleatoria X está dada por $M(t) = e^{5t^2}$, entonces la mejor aproximación de $P(X < 2)$ es:
(a) 0.6 (b) 0.7 (c) 0.8 (d) 0.9

(4^{pts}) 2. Si X, Y y Z son variables Poisson independientes con parámetro λ, entonces las variables aleatorias $X + Y$ y $Y + Z$ tienen coeficiente de correlación igual a
(a) 0 (b) λ (c) 2λ (d) ½

(4^{pts}) 3. Supóngase que $P(A \cup B) = 0.7$ y $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}^{\mathrm{c}}) = 0.9$. Entonces $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ es igual a
(a) 0.2 (b) 0.4 (c) 0.6 (d) 0.8

(4^{pts}) 4. Se sacan dos pelotas sucesivamente, al azar y sin reemplazo, de una caja que contiene 5 pelotas blancas y 10 negras. ¿Cuál de los siguientes eventos tiene la probabilidad más grande?
(a) La segunda pelota extraída es negra.
(b) La primera pelota extraída es negra.
(c) La primera pelota extraída es blanca.
(d) Alguna de las dos pelotas extraídas es negra.

(4^{pts}) 5. Si $P(A|B) = 1$ entonces $P(B^c\ |A^c) =$ es igual a
(a) 0 (b) no se puede saber (c) 1 (d) ¼

(4^{pts}) 6. La probabilidad de que una persona escogida al azar tenga algún problema respiratorio es de 1/4. Las personas que tienen problemas respiratorios tienen el doble de probabilidad de ser fumadores que los que no tienen problemas respiratorios. ¿Cuál es la probabilidad condicional de que una persona tenga problemas respiratorios dado que es fumador?
(a) 1/4 (b) 1/3 (c) 2/5 (d) 1/2

(4^{pts}) 7. Sea X una variable aleatoria gamma con parámetros α= 1 y λ= 1, y Y una variable aleatoria gamma con parámetros α= 0.5 y λ= 1. Las v.a.s X y Y son independientes. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
(a) $X + Y$ es exponencial con parámetro λ= 2.
(b) $X + Y$ es gamma con parámetros α= 1.5 y λ = 2.
(c) $X + Y$ es gamma con parámetros α = 1.5 y λ = 1.
(d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es verdadera.

(4 pts) 8. Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad f, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es necesariamente falsa?

(a) $P(X^2 > 0) = 0$ (b) $P(X\ es\ par) = 0$ (c) $P(X > 0) = 0$ (d) $P(X < 0) = 0$

(4 pts) 9. Sean X y Y variables aleatorias exponenciales e independientes, y sean:
$U = X + Y$ y $V = \frac{X}{(X+Y)}$. La densidad conjunta $f_{u,v}(u,v)$ es distinta de cero para los pares (u,v), donde

(a) $u, v>0$ (b) $u > 0$ y $0 < u < v$ (c) $u > 0$ y $0 < v < 1$ (d) $u > 1$ y $v > u$

Parte II. (64 puntos) Contesta mostrando tu procedimiento. Sólo se dará crédito si las respuestas están debidamente justificadas.

(24^{pts}) 1. Sean X y Y variables aleatorias con función de densidad conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 3/2 & si -1 \leq x \leq 1 \; y \; 0 \leq y \leq x^2 \\ 0 & en \; otro \; caso \end{cases}$$

Adicionalmente, se tiene que las marginales son $f_x(x) = (3/2)x^2$ para $-1 \leq x \leq 1$ y $f_y(y) = 3(1-\sqrt{y})$ si $0 \leq y \leq 1$, y cero en otro caso. Calcula

(a) (5 pts.) $E[X]$.

(b) (5 pts.) $E[X|Y = 1/2]$.

(c) (7 pts.) $Cov(X,Y)$.

(d) (5 pts.) ¿Son independientes X y Y? Justifica.

(20^{pts}) 2. Las ventas en dos semanas sucesivas, en miles de dólares, tienen distribución normal bivariada con media común 40, desviación estándar común 6, y correlación de 0.6.

(a) (5 pts.) ¿Cuál es la distribución de las ventas de la primera semana?

(b) (5 pts.) Calcula la varianza del total de ventas de las próximas dos semanas.

(c) (5 pts.) Calcula la probabilidad de que el total de ventas de las próximas dos semanas exceda 90.

(d) (5 pts.)Si sabemos que en la primera semana se vendieron 50 unidades, calcula la probabilidad condicional de que se vendan más de 50 unidades en la segunda semana.

(20^{pts}) 3. Un amigo nos recomienda la siguiente estrategia *ganadora* para apostar en la ruleta. Comenzamos por apostar \$1 a rojo. Si sale rojo (con probabilidad 18/38), entonces el jugador debe tomar su ganancia de \$1 y retirarse. Si el jugador pierde esta apuesta (con probabilidad 20/38), entonces debe apostar \$1 a rojo en los siguientes dos tiros de la ruleta, y luego retirarse. Sean X las ganancias del jugador al retirarse.

(a) (5 pts.) Calcula la función de masa de probabilidad de X.

(b) (5pts.) Encuentra $P(X > 0)$, la probabilidad de que las ganancias sean positivas.

(c) (5 pts.) Calcula $E[X]$.

(d) (5pts.) Usa los resultados anteriores para comparar esta estrategia con la alternativa de hacer una sola apuesta a rojo y retirarse. ¿Cuál es mejor? ¿Por qué algunos jugadores no están dispuestos a jugar con esta estrategia? Justifica.

Probabilidad **Examen final–A** Nombre: ________________________________
Primavera 2008

Parte I. Preguntas de opción múltiple. Es importante que anotes todos tus datos personales en la hoja anexa. En estas preguntas no se califica el procedimiento. Sólo hay una respuesta correcta.

(4^{pts}) 1. Sean E, F y G con probabilidades positivas y menores a uno. Si E y G son mutuamente excluyentes, F Es subconjunto de E, y la probabilidad de que ocurra E es el doble de la de F, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

(a) $P(E|F) = 1$ (b) $P\,(E^c|F^c) = 1$ (c) $P(E \cup F|G) = 0$ (d) $P(F|G) = 0$.

(4^{pts}) 2. Si X y Y son variables aleatorias con media μ y varianza 1, entonces el valor esperado de $W = (X-\mu)^2 + (Y-\mu)^2$ es
(a) 1 (b) 0 (c) µ (d) 2

(4^{pts}) 3. Si X y Y son variables aleatorias normales estándar, que tienen distribución conjunta normal bivariada con correlación $\rho = 0.5$, entonces la mejor aproximación de $P(X+Y<1)$ es
(a) 0.2182 (b) 0.3584 (c) 0.7181 (d) 0.8819.

(4^{pts}) 4. Si X y Y son variables aleatorias normales estándar, que tienen distribución conjunta normal bivariada con correlación $\rho = 0.5$, entonces la mejor aproximación de $P(X>0|Y=1)$ es
(a) 0.0645 (b) 0.2388 (c) 0.4035 (d) 0.7181

(4^{pts}) 5. Si X y Y son variables aleatorias, y $U = X+Y, V = X-Y$, entonces $Cov(U,V)$ es igual a
(a) $Var(X) + Var(Y)$
(b) $Var(X) - Var(Y)$
(c) $Var(X) + Var(Y) - Cov(X,Y)$
(d) $Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y)$

(4^{pts}) 6. Se sacan sucesivamente cartas de una baraja usual de póker de 52 cartas, sin reemplazo, hasta obtener un as (hay 4 ases en una baraja). La probabilidad de sacar el primer as en la tercera extracción es
(a) 0.0775 (b) 0.0921 (c) 0.0680 (d) 0.3589

(4^{pts}) 7. Sea X una variable aleatoria Poisson con media 1. La mejor aproximación de $E[e\wedge(.5X)]$ es
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

(4 pts) 8. Sean A y B eventos mutuamente excluyentes con $P(A) = .3$ y $P(B) = .5$. La probabilidad del evento $A \cap B^c$ es

(a) 0.2 (b) 0.3 (c) 0.4 (d) 0.5

(4 pts) 9. Si X es Binomial con parámetros $n = 4$ y $p = 1/5$, entonces la probabilidad condicional de $X = 0$ dado que $X < 2$ es igual a

(a) 1/5 (b) 1/4 (c) 1/3 (d) ½

(4 pts) 10. Sean X y Y uniformes en $[0,1]$ e independientes. Si $U = X + 2Y$ y $V = 3X - Y$, entonces la densidad conjunta de U y V, sobre su soporte, es constante igual a

(a) 1 (b) 2 (c) 1/7 (d) 1/5

Parte II. (60 puntos) Contesta mostrando tu procedimiento. Sólo se dará crédito si las respuestas están debidamente justificadas.

(24^{pts}) 1. Sean X y Y variables aleatorias con función de densidad conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)} si\ x > 0\ y\ Y > 0 \\ 0 \qquad\qquad en\ otro\ caso \end{cases}$$

y $f_Y(y) = (1+y)^{-2}\ para\ y > 0$. Calcula

(a) (6^{pts}) La función de densidad condicional de X dado $Y = 1$.
(b) (6^{pts}) $E[Y|X = 2]$.
(c) (6^{pts}) $E(XY)$.
(d) (6^{pts}) P (XY<2).

(18^{pts}) 2. La demanda semanal X de gasolina en una gasolinera, medida en cientos de litros tiene una distribución aproximadamente normal con media 160 y varianza 144.

(a) (4^{pts}) Si la gasolinera cree que sus reservas para la siguiente semana serán de 175 cientos de litros, ¿cuál es la probabilidad de que se pueda satisfacer la demanda de esa semana?
(b) (5^{pts}) ¿Qué cantidad de gasolina debería estar disponible para poder satisfacer la demanda de una semana con una probabilidad de 0.98?
(c) (5^{pts}) Si la gasolinera comienza cada semana con una reserva de 160 cientos de litros, ¿cuál es el valor esperado de semanas en las que se satisface la demanda de gasolina durante un año (52 semanas)? Especifica tus supuestos.
(d) (4^{pts}) Si se sabe que la media de la demanda semanal es de 160, pero no hay seguridad de que la distribución sea normal, da una cota superior para la probabilidad de que la demanda de una semana exceda 250 cientos de litros.

(18^{pts}) 3. La caja A contiene 2 pelotas blancas y 2 negras, y la caja B contiene 1 pelota blanca y 5 negras. Primero sacamos dos pelotas al azar y sin reemplazo de la caja A y las pasamos a la caja B. Después se saca una pelota al azar de la caja B.

(a) (6^{pts}) Calcula la probabilidad de que se pasen dos pelotas negras de A a B.
(b) (6^{pts}) Calcula la probabilidad de sacar una pelota blanca al extraer de la caja B.
(c) (6^{pts}) Si la pelota extraída de B es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que se hayan transferido dos pelotas negras de A a B?

Probabilidad **Examen final–A** Nombre: ________________________

Otoño 2008

Parte I. (40 puntos) Preguntas de opción múltiple. Es importante que anotes todos tus datos personales en la hoja anexa. En estas preguntas no se califica el procedimiento. Sólo hay una respuesta correcta.

(4^{pts}) 1. Suponga que X es una variable aleatoria exponencial con media 5. Determina cuál de las siguientes afirmaciones es falsa.

(a) Var(X) = 5^2 (b) E$\left[\frac{1}{X}\right] < \frac{1}{5}$ (c) E$[e^x] \geq e^5$ (d) E$[\ln(x)] \leq \ln(5)$.

(4^{pts}) 2. Si X, Y son variables aleatorias independientes $Bernoulli\ (p)$, entonces $P(XY = 1)$es igual a

(a) p (b) p^2 (c) $\binom{2}{1}p(1-p)$ (d) $p^2 + (1-p)^2$

(4^{pts}) 3. Si X y Y son variables aleatorias Poisson independientes tales que $Var(X) + Var\ (Y) = 4$, ¿cuánto vale $P(X + Y \geq 1)$?

(a) 0.743 (b) 0.982 (c) 0.371 (d) Ninguna de las anteriores.

(4^{pts}) 4. Sea X una variable aleatoria normal con media 1. Si $P(X \leq 0) = 0.05$ entonces la mejor aproximación de la desviación estándar de X es

(a) 0.6067 (b) 0.8681 (c) 1.9958 (d) 3.5912

(4^{pts}) 5. El dado A tiene 4 caras rojas y 2 caras blancas. El dado B tiene 2 caras rojas y 4 blancas. Se tira un volado, si sale sol se tira el dado A, y si sale águila se tira el dado B. La probabilidad de tirar una cara roja es

(a) 1/2 (b) 1/3 (c) 2/3 (d) 1/6

(4^{pts}) 6. Si la función de densidad conjunta de X y Y está dada por $f(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)$ para $0 < x < 1$ y $0 < y < 1$ entonces $E[Y|X = \frac{1}{2}]$ es igual a:

(a) 1 (b) 15/12 (c) 7/12 (d) -2.

(4^{pts}) 7. La función generadora de momentos de X es $M_x(t) = \exp(2e^t - 2)$, y la función generadora de momentos de Y es $M_y(t) = (\frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4})^{10}$. Si X y Y son independientes, entonces $E[XY]$ es igual a:

(a) 2 (b) 15 (c) 10 (d) 5

(4^{pts}) 8. Si X y Y son variables aleatorias con varianza uno y coeficiente de correlación igual a −1/3, entonces la covarianza entre X y $Z = 5X - 3Y$ es igual a

(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) 6

(4pts) 9. Sean A y B eventos. Considera las afirmaciones: 1) Si A y B son disjuntos (o mutuamente excluyentes) entonces A y B son independientes, y 2) Si A y B son independientes entonces son disjuntos. Entonces

(a) Las dos afirmaciones son verdaderas.
(b) La primera es falsa y la segunda es verdadera.
(c) La segunda es falsa y la primera es verdadera.
(d) Ninguna de las anteriores.

(4pts) 10. Sea U una variable aleatoria uniforme sobre el intervalo $(0,1)$. Entonces $P(U < 0.75|U > .25)$ es igual a:

(a) 0 (b) 1/2 (c) 2/3 (d) 3/4

Parte II. (60 puntos) Contesta mostrando tu procedimiento. Sólo se dará crédito si las respuestas están debidamente justificadas.

(18pts) 1. En una población, el peso (X) y la estatura (Y) de las personas se describe con una densidad normal bivariada. La media del peso es de 60kg y su desviación estándar 10kg, mientras que la media de la estatura es de 1.6m con una desviación estándar de 0.3m. El coeficiente de correlación entre estatura y peso es de 0.3.

(a) (6pts) Calcula la proporción de personas en la población que tienen una estatura de más de 1.75m.
(b) (6pts) ¿Qué proporción de personas de 70kg. de peso mide más de 1.75m?
(c) (6pts) Calcula $P(X > 40Y)$ (que se puede interpretar como la proporción de personas que tienen masa corporal $M = X/Y$ mayor a 40).

(22pts) 2. La tortuga propone a la zorra la siguiente apuesta: la tortuga lanzará la moneda honesta 4 veces seguidas y si no obtiene tres o más soles o águilas consecutivos entonces la zorra gana. Deciden que en cada juego la tortuga apostará 1 peso y la zorra 2 pesos.

(a) (6pts) ¿Cuál es la probabilidad de que la tortuga gane uno de estos juegos?
(b) (6pts) ¿Cuál es el valor esperado de la ganancia de la tortuga después de exactamente 20 juegos?
(c) (5pts) ¿Cuál es la probabilidad de que la zorra gane a lo más dos juegos de los 20?
(d) (5pts) Si en un juego dado la tortuga tiró dos soles o más (no necesariamente consecutivos), ¿cuál es la probabilidad condicional de que haya tirado 4 soles consecutivos?

(20pts) 3. Sean X y Y variables aleatorias con densidad conjunta dada por

$$f(x,y) = e^{-(x+y)} \text{ para } x > 0 \text{ y } y > 0.$$

(a) (6pts) Calcula $P(X + Y > 2)$.
(b) (6pts) Calcula $E[(X - Y)^2)]$
(c) (8pts) Calcula la función de densidad conjunta de las variables aleatorias $U = X$ y $V = X/Y$.

Probabilidad **Examen final A** Nombre: ______________________________
Primavera 2009

Parte I. (30 puntos) Preguntas de opción múltiple. Es importante que anotes todos tus datos personales en la hoja anexa de respuestas. En estas preguntas no se califica el procedimiento. Sólo hay una respuesta correcta.

(3^{pts}) 1. Si A y B son eventos independientes con $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}, C \subset A\,, P(C) = \frac{1}{4}$ y B y C son mutuamente excluyentes, entonces $P(C|A \cup B)$ es igual a

(a) 1/5 (b) 1/4 (c) 1/3 (d) 2/3

(3^{pts}) 2. Sea T una variable aleatoria con media 5 y varianza 25. Entonces la media y la varianza de $C = 50 + 6(T - 4)$ son

(a) 76 y 926 (b) 56 y 926 (c) 76 y 900 (d) 56 y 900

(3^{pts}) 3. Si X es una variable aleatoria normal con $E[X] = 0$ y $P(X > 2) = 0.42$, entonces la mejor aproximación de la desviación estándar de X es:

(a) 0.01 (b) 0.1 (c) 1 (d) 10.

(3^{pts}) 4. Sea X una variable aleatoria Poisson, y $P(X = 0) = 0.1353$. La mejor aproximación de $E[X]$ es

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) No se puede determinar.

(3^{pts}) 5. Una variable aleatoria X tiene media 0 y desviación estándar 1. La probabilidad de que $P(|X| \geq 2)$ no puede ser mayor a

(a) 0 (b) 0.025 (c) 0.25 (d) Ninguna de las anteriores

(3^{pts}) 6. Supongamos que en un juego de azar, la probabilidad de obtener una ganancia entre 0 y 2 pesos es igual a 0.5, igual que la probabilidad de obtener una ganancia entre 1 y 3 pesos. Entonces la probabilidad de obtener una ganancia entre 0 y 3 pesos es de

(a) 1/8 (b) 1/4 (c) 1/2 (d) No se puede determinar.

(3^{pts}) 7. Un estudiante sale de su casa entre las 8:00 y 8:30 AM y tarda entre 20 y 40 minutos en llegar a la universidad. Si ambos tiempos son independientes y tienen una distribución uniforme, ¿cuál es la probabilidad de que el estudiante llegue después de las 9:00 AM a la universidad?

(a) 0 (b) 1/12 (c) 1/7 (d) 1

(3^{pts}) 8. Considérese una caja con 10 pelotas, 5 rojas y 5 blancas. Si extraemos cinco pelotas al azar (sin reemplazo), y por lo menos una de ellas es blanca, la probabilidad condicional de que hayamos sacado por lo menos una roja es de

(a) 249/250 (b) 250/251 (c) 251/252 (d) 252/253

(3 pts) 9. La función de masa probabilidad conjunta de X y Y está dada por $P(0,0) = P(1,1) = .2$ y $P(1,0) = P(0,1) = 0.3$. Entonces $Cov(X,Y)$ es igual a

(a) -0.05 (b) 0 (c) 0.05 (d) 0.10

(3 pts) 10. Sea X una variable aleatoria normal con media 0 y varianza 1. La mejor aproximación de $E[e^x]$ es:

(a) 0.82 (b) 1.65 (c) 1.72 (d) 1

Parte II. (70 puntos) Contesta mostrando tu procedimiento. Sólo se dará crédito si las respuestas están debidamente justificadas.

(28^{pts}) 1. Sean X y Y variables aleatorias con función de densidad conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 3(x+y) & si\ 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < x+y < 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Encuentra

(a) (7^{pts}) La función de densidad marginal de X,

(b) (7^{pts}) $P(X+Y<\frac{1}{2})$,

(c) (7^{pts}) $E[Y|X=1/2]$,

(d) (7^{pts}) Calcula $E[XY]$.

(21^{pts}) 2. Un avión está perdido, y se supone que es igualmente probable que haya caído en una de tres regiones. Si el avión está en la región i, la probabilidad de encontrarlo cuando se busca en la región i es de $1-\beta_i$ y tenemos que $\beta_1 = 1/2$, $\beta_2 = 2/3$ y $\beta_3 = 3/4$.

(a) (7^{pts}) Se decide buscar en la región 1. Calcula la probabilidad de que la búsqueda no sea exitosa.

(b) (7^{pts}) Calcula las probabilidades condicionales de que el avión esté en cada una de las regiones 1, 2, 3 dado que la primera búsqueda (en la región 1) no fue exitosa.

(c) (7^{pts}) Si se decide comenzar escogiendo una región al azar para buscar primero, ¿cuál es la probabilidad de encontrar el avión?

(21^{pts}) 3. La puntuación en boliche de María se distribuye aproximadamente normal con media 170 y desviación estándar 20, mientras que las de Juan son aproximadamente normales con media 160 y desviación estándar 15. Si Juan y María juegan cada uno un juego, y sus puntuaciones son independientes,

(a) (7^{pts}) Calcula la probabilidad de que María obtenga una puntación mayor a 185.

(b) (7^{pts}) Calcula la probabilidad de que Juan le gane a María.

(c) (7^{pts}) Si Juan y María juegan una serie de tres juegos, ¿cuál es la probabilidad de que María gane su segundo juego antes que Juan? Puedes suponer que las puntuaciones de cada jugador en juegos sucesivos son independientes.

PROBABILIDAD

EXAMEN FINAL. TIPO A

Agosto-Diciembre, 2009

Nombre: ____Clave única_____________

PARTE I

A continuación se presentan 8 preguntas de opción múltiple, las cuales deben ser contestadas, con lápiz del número 2, en la hoja anexa. Es importante que anote sus datos personales. Cada pregunta tiene un valor de 4 puntos (No se calificará procedimiento)

1.- Considere las siguientes afirmaciones

$$(I)\ Si\ P(A|B) \geq P(A) \Rightarrow P(A|B) \geq P(B)$$
$$(II)\ Si\ P(B|A^c) = P(B|A) \Longrightarrow A\ y\ B \text{ son independientes}$$
$$(III)\ Si\ P(A) = a\ y\ P(B) = b \Longrightarrow P(A|B) \geq \frac{a+b-1}{b}$$

a) Las tres afirmaciones son verdaderas
b) Sólo (I) y (III) son verdaderas
c) Ninguna de las afirmaciones son verdaderas
d) Sólo (II) es verdadera

2.- Sea $m_{X,Y}(t_1,t_2) = \frac{t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2}{2}$ la función generadora de momentos conjunta de (X,Y). Entonces $Var(3X-2Y)$ es

a) 1 b)5 c)7 d)11

3.- La función generadora de momentos conjunta de (X,Y) está dada por

$$m_{X,Y}(t_1,t_2) = \exp\left\{\frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2)\right\}$$

Considere las siguientes afirmaciones

(I) $Y \sim N(0,1)$
(II) Las dos variables aleatorias son independientes

a) Sólo (I) es verdadera
b) (I) y (II) son verdaderas
c) Sólo (II) es verdadera
d) Ninguna de las dos son verdaderas

4.- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

a) En la distribución Binomial, el coeficiente de curtosis (α_4) tiende a 3 para cualquier valor de p cuando n tiende a infinito.
b) La distribución de Poisson se encuentra sesgada positivamente para cualquier valor λ>0, pero la asimetría disminuye para valores relativamente grandes de λ.
c) Sea X la variable aleatoria con distribución Binomial y función de probabilidad

$$P(x; n, p) = \frac{n!}{(n-x)!\,x!} p^x (1-p)^{n-x} \quad x = 0,1,2,\dots,n$$

Si para n=1,2,… la relación $p = \frac{\lambda}{n}$ es cierta para alguna constante $\lambda > 0$, entonces

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0}} P(x; n, p) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}; x = 0,1,2,\dots$$

d) En la distribución Binomial, la media es menor que la varianza.

5.- Sea X la variable aleatoria con distribución $Poisson(3)$, y $Y = 8 + X - X^2$. La esperanza de la variable aleatoria Y es

a) 2 b) 0 c)8 d) Ninguna de las anteriores

6.- ¿Cuál de las siguientes funciones podría ser una función de distribución?

a) $F(x) = e^{-x}$; $0 \le x < \infty$.
b) $F(x) = e^{x}$; $-\infty < x \le 0$.
c) $F(x) = 1 - e^{-x}$; $-1 \le x < \infty$.
d) Ninguna de las anteriores.

7.-En el juego de azar Backgammon, cada jugador tira dos dados. El número de cada dado puede ser sumado o puede considerarse de manera separada. Un jugador necesita un cinco para ganar el juego. ¿Cuál es la probabilidad de que este jugador gane la partida?

a) 15/36 b) 8/36 c) 10/36 d) 11/36

8.- Considere las siguientes afirmaciones

(I) Sean $X_1, X_2, \dots X_k$ variables aleatorias independientes tales que $X_i \sim Binomial(n_i, p)$. Para $i = 1,2,..,k$. Entonces la distribución de $Y = \sum_{i=1}^{k} X_i \sim binomial(n_1 + n_2 + \dots + n_k, p)$

(II)Sean $X_1, X_2, \dots X_k$ variables aleatorias independientes tales que $X_i \sim gama(\alpha, \beta_i)$ para $i = 1,2,..,k$. Entonces la distribución de $Y = \sum_{i=1}^{k} X_i \sim gama(\alpha, \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta n_k)$

(III)Sean $X_1, X_2, \dots X_k$ variables aleatorias independientes tales que $X_i \sim Poisson(\lambda)$ para $i = 1,2,..,k$. Entonces la distribución de $Y = \sum_{i=1}^{k} X_i \sim Poisson(k\lambda)$

a) Sólo (I) y (II) son verdaderas
b) Sólo (I) y (III) son verdaderas
c) Sólo (II) y (III) son verdaderas

d) Las tres afirmaciones son verdaderas

PARTE II

Indica claramente el inciso que estás resolviendo. Si tienes dos respuestas para una pregunta tacha la que consideres incorrecta, de lo contrario la ambigüedad anulará ambas. <u>Un número o un resultado sin la debida justificación no dan crédito.</u>

1.- Sean $X, Y \sim N(0,1)$ independientes, $\alpha \in (0,2\pi)$ un valor arbitrario y U, V variables aleatorias definidas por

$$U = sen(\alpha)X - \cos(\alpha)\,Y$$

$$V = \cos(\alpha)\,X + sen(\alpha)Y$$

a) **(5 puntos).** Calcular la esperanza y varianza de $U - V$.
b) **(7 puntos).** Encuentre la densidad conjunta de (U, V). Sugerencia: Verifique que

$$X = sen(\alpha)U + \cos(\alpha)\,V$$
$$Y = -\cos(\alpha)\,U + sen(\alpha)V$$

c) **(6 puntos).** Diga si U y V son variables independientes o no.

2.- Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes normalmente distribuidas, $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2); i = 1,2$ que representan las ventas de dos tiendas departamentales ubicadas en ciudades diferentes. Sea $Y_2 = X_1 + X_2$ la variable aleatoria que representa las ventas totales, mientras que $Y_1 = X_1$ representa las ventas de la tienda uno.

a) **(7 puntos).** Verifique que la distribución conjunta de Y_1 y Y_2 es una normal bivariada. Sugerencia: usa f.g.m.
b) **(5 puntos).** Encuentre la distribución condicional de las ventas totales (Y_2) dado que la tienda uno tuvo ventas iguales a y_1 $(Y_1 = y_1)$

3.- Sean X y Y variables aleatorias con función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = ce^{-(x+y)};\ \ 0 \le y \le x < \infty$$

a) **(5 puntos).** Determinar el valor de la constante c talque $f_{X,Y}(x, y)$ sea una función de densidad conjunta.
b) **(6 puntos).** Calcule $P(X + Y \le 1)$.
c) **(6 puntos).** Calcule $P(X \le 1/2)$.
d) **(5 puntos).** Calcule $E(Y|X = 1)$.

4.- El tiempo que tarda Pedro en trasladarse de su casa a su oficina se puede modelar como una variable aleatoria normal con media igual a 40 minutos y desviación estándar igual a 7 minutos. Su horario de entrada a la oficina es a las 9 A.M, y Pedro trabaja 250 días cada año.

a) **(4 puntos).** Si Pedro sale todos los días de su casa a las 8:05 A.M, ¿qué proporción de días llega tarde a la oficina?
b) **(4 puntos)**. Si Pedro quiere estar 90% seguro de que va a llegar temprano a la oficina, ¿a qué hora es lo más tarde que debe salir de su casa?
c) **(4 puntos).** Calcula la probabilidad de que llegue más de dos días tarde en un año dado. Explica tus supuestos.
d) **(4 puntos).** Si al final del año Pedro es penalizado en su bono anual con $100 pesos por cada día que llegó tarde, ¿Cuál es el valor esperado de su penalización?

PROBABILIDAD

EXAMEN FINAL. TIPO B

Enero-Mayo, 2010

Nombre: ____Clave única____________

PARTE I

A continuación se presentan 6 preguntas de opción múltiple, las cuales deben ser contestadas con lápiz del número 2, en la hoja anexa. Es importante que anote sus datos personales. Cada pregunta tiene un valor de 5 puntos (No se calificará procedimiento)

1.- Considere las siguientes afirmaciones

I) Si $Z \sim N(0,1)$ $y\ Y = a + bZ + cZ^2$, con a , b y c constantes. Entonces

$$Corr(Z,Y) = \frac{b}{\sqrt{b^2 + 2c^2}}, \qquad b\ y\ c \neq 0$$

II) Sean X y Y dos variables aleatorias que tienen la misma distribución, no necesariamente independientes. Entonces

$$Corr(X+Y, X-Y) = 0$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) I) es correcta pero II) no
b) (I) y (II) son correctas
c) II) es correcta pero I) no
d) I) y II) son incorrectas

2.- Considere las variables aleatorias X y Y con función de densidad conjunta dada por:

X \ Y	1	0	-1
1	*0*	*a*	*0*
0	*b*	*c*	*b*
-1	*0*	*a*	*0*

Donde $a, b, c > 0$ y $2a + 2b + c = 1$. Entonces

I) $E(X) = E(Y) = 0$, II) $E(XY) = 0$, III) X y Y son independientes

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) Sólo I) y II) son correctas
b) Sólo I) es correcta
c) I), II) y III) son correctas
d) Sólo II) es correcta

3.- Sea $X \sim N(3,4)$. Entonces el valor de k talque $P(X > k) = 2P(X \leq k)$ es:

$a)\ k \cong -0.43$ $b)\ k \cong 2.14$ $c)\ k \cong 0.333$ $d)$ ninguno de los anteriores

4.- Sean $X \sim Poisson(\lambda)$ y $Y \sim Poisson(\gamma)$. Asuma que X y Y son independientes, entonces

$I)\ m_{X+Y}(t) = e^{t(\lambda+\gamma)(e^t-1)}$, $II)\ m_{X+Y}(t) = e^{t(\lambda\gamma)(e^t-1)}$, $III)\ E(XY) = \lambda\gamma$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) Sólo III) es correcta
b) II) y III) son correctas
c) I) y III) son correctas
d) Sólo I) es correcta

5.- Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{2}, & si\ x < 0 \\ x^{-2}, & si\ x \geq 2 \\ 0, en\ otro\ caso \end{cases}$$

Entonces, la función de distribución está dada por

$$a)\ F_X(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2}, & si\ x < 0 \\ \\ 1 - \frac{1}{x}, & si\ x \geq 2 \end{cases} \qquad b)\ F_X(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2}, & si\ x < 0 \\ \frac{1}{2}, & si\ 0 \leq x < 2 \\ 1 - \frac{1}{x}, & si\ x \geq 2 \end{cases}$$

$$a)\ F_X(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2}, & si\ x < 0 \\ \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{x}, & si\ x \geq 2 \end{cases} \qquad b)\text{Ninguna de las anteriores}$$

6.- Cierto día, un atleta participa en dos carreras. La probabilidad de que el atleta gane la primera carrera es igual a 0.7, la probabilidad de que gane la segunda carrera es 0.6, mientras que la probabilidad de que gane las dos carreras es igual a 0.5. Entonces

I) $P(\text{el atleta gane al menos una carrera}) = 0.8$
II) $P(\text{el atleta no gane ninguna de las carreras}) = 0.2$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) II) es correcta pero I) no
b) I) es correcta pero II) no
c) I) y II) son incorrectas
d) I) y II) son correctas

PARTE II

Indica claramente el inciso que estás resolviendo. Si tienes dos respuestas para una pregunta tacha la que consideres incorrecta, de lo contrario la ambigüedad anulará ambas. <u>Un número o un resultado sin la debida justificación no dan crédito.</u>

1.- **(24 puntos)** Sean X y Y variables aleatorias continuas con función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y, & si\ 0<x<1, \quad 0<y<1 \\ 0 \quad , & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Encontrar

a) $E(X+Y)$ **(8 puntos)**
b) $E(XY)$ **(8 puntos)**
c) $E(Y|X=x)$ **(8 puntos)**

2.- **(26 puntos)** Sea $\underline{X} \sim N_3(\underline{\mu}, \Sigma)$, donde

$$\underline{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \ \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Encuentre la distribución de $Y_1 = 3X_1 + X_2 + X_3$. **(8 puntos)**
b) Encuentre la distribución conjunta de Y_1 en (a) y $Y_2 = X_2 + X_3$. **(8 puntos)**
c) Encuentre $E(X_1X_2)$. **(2puntos)**
d) Sea $\underline{Z} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_3 \end{pmatrix}$ y $X_2 = 1$, encuentre la distribución de $\underline{Z}|X_2 = 1$. **(8 puntos)**

(Recuerde que: $\begin{bmatrix} \underline{X_1} \\ \underline{X_2} \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} \underline{\mu_1} \\ \underline{\mu_2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}\right), entonces\ \mu_{1,2} = \underline{\mu_1} + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\underline{X_2} - \underline{\mu_2})$

$\Sigma_{1,2} = \Sigma_{11} + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$)

3.- **(10 puntos)** Una urna contiene B_0 canicas blancas y N_0 canicas negras. Se extrae de manera aleatoria una canica de la urna, se anota el color de la canica, y se regresa a la urna agregándose a la urna α canicas del color extraído y β canicas del otro color. Sea B_n, N_n la cantidad de canicas en la caja después de la n-ésima extracción. Encuentre la probabilidad de que en la primera extracción, la canica seleccionada haya sido blanca dado que en la segunda extracción la canica fue negra.

4.- **(10 puntos)** Las variables aleatorias X y Y tienen la siguiente función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right], \qquad |\rho| < 1$$

Sean $U = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ y $V = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}$.

Encuentre la función de densidad conjunta de U y V, y demuestre que U y V son independientes.

PROBABILIDAD

EXAMEN FINAL. TIPO A

Agosto-Diciembre, 2010

Nombre: ____Clave única_____________

PARTE I

A continuación se presentan 6 preguntas de opción múltiple, las cuales deben ser contestadas con lápiz del número 2, en la hoja anexa. Es importante que anote sus datos personales. Cada pregunta tiene un valor de 5 puntos (No se calificará procedimiento)

1.- Sean X y Y variables aleatorias tales que $E(X) = 3, E(Y) = 9, Var(X) = 4,$
$Var(Y) = 12 \ y \ Cov(X,Y) = 0$. Entonces

(I) $E(XY) = E(X)E(Y)$ y por lo tanto las variables aleatorias son independientes

(II)$Var(4X - Y) = 52$

(III)$Cov(X, 4X - Y) = 16$

Diga cuál de las siguientes afirmaciones es correcta

a) Sólo (I) y (III) son correctas b) Sólo (II) es correcta

c) Sólo (I) y (II) son correctas　　　　d) Sólo (III) es correcta

2.- Sea X una variable aleatoria con función generadora de momentos

$M_X(t) = (0.4e^t + 0.6)^8$ y sea $Y = 3X + 2$. Entonces

(I) $M_Y(t) = e^{2t}(0.4e^{3t} + 0.6)^8$, (II) $E(X) = 3.2$

Diga cuál de las siguientes afirmaciones es correcta

a) Sólo (II) es correcta　　　　b) (I) y (II) son correctas
c) Sólo (I) es correcta　　　　d) (I) y (II) son incorrectas

3.- Una máquina produce esferas de metal, cuyos diámetros siguen una distribución normal con media μ=5 cm. Y desviación estándar σ=0.2 cm. Para los usos que tiene destinados, la esfera se considerará inservible si su diámetro cae fuera del intervalo [4.8, 5.2] (en centímetros). Entonces

(I) El porcentaje de esferas defectuosas que produce la máquina es aproximadamente igual a 31.73%
(II) La probabilidad de que entre 10 esferas escogidas al azar ninguna sea inservible es aproximadamente igual a 0.02197

Diga cuál de las siguientes afirmaciones es correcta

a) Sólo (I) es correcta　　　　b) (I) y (II) son incorrectas
c) Sólo (II) es correcta　　　　d) (I) y (II) son correctas

4.- Sea X la variable aleatoria que toma los valores -1, 0 y 1 con probabilidades 1/8, 6/8 y 1/8 respectivamente. Entonces el valor de k para el cual se cumple la igualdad en la desigualdad de Tchebyshev es

a) k=1,　　b) k=4,　　c) k=2,　　d) k=5

5.- Sean $A_i,\ i = 1,2,3,4,5$ eventos de un espacio muestral Ω tales que

$$\bigcup_{i=1}^{5} A_i = \Omega, \qquad \text{y} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \ \text{ para toda } i \neq j.$$

Con $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{15}{64}, P(A_4) = \frac{1}{64}\ y\ P(A_5) = \frac{18}{64}$. Defínanse los siguientes tres eventos $B = A_1 \cup A_4, C = A_2 \cup A_4\ y\ D = A_3 \cup A_4$. Entonces

(I) $P(B) = P(C) = P(D) = \frac{1}{4}$

(II) $P(B \cap C \cap D) = \frac{1}{64} = P(B)P(C)P(D) y\ por\ lo\ tanto\ B, C\ y\ D$ son mutuamente independientes

(III) $P(B \cap C) = P(A_4) = \frac{1}{64} \neq P(B)P(C) = \frac{1}{16}$

Diga cuál de las siguientes afirmaciones es correcta

a) (I), (II) y (III) son correctas

b) Sólo (I) y (III) son correctas

c) Sólo (I) y (II) son correctas

d) Sólo (II) y (III) son correctas

6.- Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una partición del espacio muestral Ω, esto es, $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$ y $A_i \cap A_j = \emptyset\ si\ i \neq j$ y $P(A_j) > 0$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

(a) Si B es un evento contenido en Ω, tal que $P(B) > 0$ entonces

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)}$$

(b) Para todo B en Ω

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(B \cap A_j)$$

(c)$P(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$

(d) Si A es un evento en Ω tal que $A = \bigcup_{j=1}^{k} A_j$ para $1 \leq k \leq n$, entonces

$$P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(A_j)$$

PARTE II

Indica claramente el inciso que estás resolviendo. Si tienes dos respuestas para una pregunta tacha la que consideres incorrecta, de lo contrario la ambigüedad anulará ambas. <u>Un número o un resultado sin la debida justificación no dan crédito</u>

1**.- (25 puntos)** La compañía de computadoras Ajax manufactura una computadora con un CPU-dual. El tiempo de funcionamiento de los dos CPUs, hasta que fallan, puede ser modelado por las dos variables aleatorias (X_1, X_2) cuya función de densidad conjunta está dada por

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}(x_1+x_2)} I_{[0,\infty]}(x_2) I_{[0,\infty]}(x_2)$$

El valor de x_i se mide en unidades de 10,000 hrs. Por ejemplo, si $x_i = 2$ significa que el i-ésimo CPU funciono 20,000 horas hasta que fallo.

a) **(5 puntos)** Verifica que la función generadora de momentos conjunta de (X_1, X_2) está dada por
$$M_{X_1,X_2}(t_1, t_2) = (1-2t_1)^{-1}(1-2t_2)^{-1}, \qquad para\ t_i < \frac{1}{2}, i = 1,2$$
b) **(5 puntos)** Calcula $E(X_1^2), E(X_2^2), E(X_1X_2\ )$ y ρ_{X_1,X_2}
c) **(5 puntos)** ¿Son los tiempos de funcionamiento X_1y X_2 independientes?
d) **(10 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que los dos CPUs funcionen al menos 20,000 hrs, esto es $P(X_1 + X_2 > 2)$?

2.- **(10 puntos)** Sean X_1y X_2 variables aleatorias independientes con función de densidad dada por

$$f(x_i) = \frac{1}{x_i^2} I_{[1,\infty]}(x_i), \qquad i = 1,2$$

a) **(5 puntos)** Encuentra la función de densidad conjunta de $U = X_1X_2 \ y \ V = X_1$
b) **(5 puntos)** Encuentra la función de densidad marginal de U.

3.- **(15 puntos)** Un inversionista dispone de tres instrumentos de inversión para conformar un portafolio de inversión. Sea $\underline{X}' = (X_1, X_2, X_3)'$ el vector aleatorio que modela los rendimientos de dichos instrumentos de inversión. Suponga que $\underline{X} = \sim N_3\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$,

Donde

$$\underline{\mu} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 9 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

a) **(5 puntos)** Encuentra la matriz de correlaciones.
b) **(5 puntos)**¿Cuál es la probabilidad de que el instrumento de inversión X_1 tenga un rendimiento menor de 6 dado que el instrumento X_2 tiene un rendimiento de 3?
c) **(5 puntos)** Si el inversionista forma un portafolio en el cual 30% de la inversión total la hace en el instrumento X_1, 50% en el instrumento X_2 y 20% en el instrumento X_3, encuentra la distribución del rendimiento total de este portafolio de inversión.

4.- **(20 puntos)** Suponga que la duración en horas, llamémosla T, de cierto dispositivo electrónico es una variable aleatoria con una distribución exponencial con parámetro β. El funcionamiento de una máquina que usa este dispositivo cuesta C_1 pesos/$hora$. Mientras la máquina está funcionando se obtiene una utilidad de C_2 pesos/$hora$, con $C_2 > C_1$.

a) **(8 puntos)** Para una jornada laboral de H horas, calcula la utilidad esperada, donde

$$U(T) = \begin{cases} (C_2 - C_1)H, & si\ T > H \\ (C_2 - C_1)T, & si\ T \leq H \end{cases}$$

(12 puntos) Ahora considera el salario del operador de la máquina durante la jornada laboral, el cual obtiene un pago de C_3 pesos/$hora$, ¿para qué valor de H se maximiza la utilidad esperada?

PROBABILIDAD

EXAMEN FINAL. TIPO A

Enero-Mayo, 2011

Nombre:____Clave única_____________

PARTE I

A continuación se presentan 7 preguntas de opción múltiple, las cuales deben ser contestadas con lápiz del número 2, en la hoja anexa. Es importante que anote sus datos personales. Cada pregunta tiene un valor de 5 puntos (No se calificará procedimiento)

1.- Sea $\mathbb{x} = (X, Y)$ un vector normal bivariado con coeficiente de correlación ρ y densidades marginales, tanto para *X* como para *Y*, normales estándar. ¿Cuál debe ser el valor de la constante *k* para que *X* y $Y - kX$ sean independientes?

a) $k = \rho$ *b)* $k = 0$ *c)* $k = \rho^2$ *d)* $k = \frac{1}{2}$

2.- Sean A y B dos eventos de un espacio muestral Ω, tales que, *P(A)=0.3, P(B)=0.5* y $P(A \cap B) = 0.2$. La probabilidad de que exactamente uno de los dos eventos A ó B ocurra es igual a

a) 0.8 *b) 0.4* *c) 0.2* *d) 0.6*

3.- Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = e^{-2|x|}, \quad si \; -\infty < x < \infty.$$

Entonces, la función de distribución está dada por

a) $F(x) = \frac{1}{2}e^{-2|x|},\ si \; -\infty < x < \infty$

b) $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{2x}, & si\ x < 0 \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2x}), & si\ x \geq 0 \end{cases}$

c) $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{2x}, & si\ x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-2x}, & si\ x \geq 0 \end{cases}$

d) $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{2x}, & si\ x < 0 \\ \frac{1}{2}(1 + e^{-2x}), & si\ x \geq 0 \end{cases}$

4.- Se X una variable aleatoria exponencial con media igual a 2. Determine cuál de las siguientes afirmaciones es falsa.

a) $P(|X - 2| \geq 6) \leq \frac{1}{9}$

b) $E[X^3] \geq 8$

c) $E[e^{-X}] \leq e^{-2}$

d) $E[\ln(X)] \leq \ln(2)$

5.- Los precios de las acciones de dos compañías al final del año son modelados con las variables aleatorias X y Y que tienen una función de densidad conjunta dada por

$$f_{XY}(x, y) = 2x; \;\; para\ 0 < x < 1, \quad x < y < x + 1$$

Entonces, la varianza condicional del precio de las acciones Y dado que el precio de las acciones X tomaron un valor x (X=x) es igual a

a) $\frac{7}{6}$ b) $\frac{1}{12}$ c) $x + \frac{1}{2}$ d) $x^2 - \frac{1}{6}$

6.- La función generadora de momentos conjunta de (X, Y) está dada por

$$m_{X,Y}(t_1, t_2) = \exp\left\{\frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2)\right\}$$

Diga cuál de las siguientes afirmaciones es falsa.

(III) $E(XY) = E(X)E(Y) = 0$
(IV) $Var(X - Y) = 2$
(V) $Y \sim N(0,1)$
(VI) $Var(X|Y = 1) = 2$

7.- Diga cuál de las siguientes afirmaciones es falsa.

a) $Si\ P(A) > 0, P(B) > 0, A \cap B = \emptyset.\ Entonces, A\ y\ B\ son\ independientes$
b) Si $P(A)$ y/o $P(B) = 0, A \cap B = \emptyset.\ Entonces, A\ y\ B\ son\ independientes$
c) Si $P(A)$ y/o $P(B) = 0, A \cap B \neq \emptyset.\ Entonces, A\ y\ B\ son\ independientes$
d) Sea $P(A) = 0.4\ y\ P(A \cup B) = 0.6$. Entonces el valor de $P(B)$ para que A y B sean independientes es igual a $\frac{1}{3}$

PARTE II

Indica claramente el inciso que estás resolviendo. Si tienes dos respuestas para una pregunta tacha la que consideres incorrecta, de lo contrario la ambigüedad anulará ambas. <u>Un número o un resultado sin la debida justificación no dan crédito</u>

1.- Sean X y Y variables aleatorias que tienen una distribución normal bivariada, $\mathbb{x} = (X, Y) \sim NBiv(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho)$.

a) Haciendo uso de la función generadora de momentos conjunta, demuestre que la distribución de $W = aX + bY + c, con\ a\ y\ b\ \neq 0$ y c constantes arbitrarias es

$$W \sim N(a\mu_X + b\mu_Y + c, a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2abCov(X, Y))$$

(10 puntos)

b) Ahora suponga que las variables aleatorias X y Y representan las ventas semanales sucesivas (medidas en millones de dólares) y que

$$\mathbb{x} = (X, Y) \sim NBiv(40,40,36,36,0.6).$$

Encuentre la probabilidad de que la cantidad total de ventas acumuladas en las siguientes dos semanas sea mayor que 90. **(5 puntos)**

c) Determine la distribución condicional de las ventas de la segunda semana (Y) dado que las ventas de la primera semana (X) fueron de 60 millones. **(5 puntos)**

2.- Si X, Y, Z tienen la siguiente función de densidad conjunta

$$f_{XYZ}(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{6}{(1 + x + y + z)^4}; & x, y, z \geq 0 \\ 0; & en\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Encontrar la función de densidad conjunta de $U = X + Y + Z,\ V = Y, W = Z$ **(5 puntos)**

b) Encontrar la densidad marginal de U. **(10 puntos)**

3.- Una empresa hace estimaciones de la venta total que tendrá en el 2012 en una línea de producción específica. El monto que se estima por concepto de ventas para el 2012, en millones, está representado por la variable aleatoria X. Una vez concluido el 2012, la compañía tendrá una venta total final, en millones, Y. Por experiencia en años anteriores, la empresa ha determinado que la función de densidad conjunta entre X y Y está dada por

$$f_{XY}(x,y) = \frac{2}{x^2(x-1)} y^{-\frac{(2x-1)}{(x-1)}}; \quad para\; x > 1, y > 1.$$

Dado que la estimación inicial de ventas para 2012 es 2 millones,

a) Determinar la probabilidad de que la venta total final de ese año esté entre 1 y 3 millones. **(10 puntos)**
b) Determinar la esperanza condicional de la venta total final de ese año. **(5 puntos)**

4.- Para evitar que individuos potencialmente peligrosos sean policías en México, se ha establecido un examen psicológico que los aspirantes deben aprobar como requisito para ser contratados. El defecto de esta prueba, sin embargo, es que 8% de los individuos aptos quedan erróneamente descalificados por haber reprobado, mientras que 12% de los que no son aptos aprueban y son contratados por equivocación. Suponga que todos los que pasan son contratados. Si la experiencia muestra que sólo 85% de los policías son aptos para su trabajo, determine el porcentaje de aspirantes que también lo son. **(10 puntos)**

PROBABILIDAD

EXAMEN FINAL. TIPO A

Agosto-Diciembre, 2011

Nombre:____Clave única_____________

PARTE I

A continuación se presentan 6 preguntas de opción múltiple, las cuales deben ser contestadas con lápiz del número 2, en la hoja anexa. Es importante que anote sus datos personales. Cada pregunta tiene un valor de 5 puntos (No se calificará procedimiento)

1.- Sean *X* y *Y* variables aleatorias independientes normalmente distribuidas. Definamos $Z = aX + (1-a)Y$. Entonces, la varianza de *Z*+*Y* es:

a) $a^2Var(X) + (1-a)^2 Var(Y)$
b) $Var(Z) + Var(Y)$
c) $a^2Var(X) + (2-a)^2 Var(Y)$
d) No se puede determinar porque falta información

2.- La tienda de auto servicio "Todo para su hogar", acepta como forma de pago en una compra, cheque o pago en efectivo. El contador de la tienda ha determinado, a través de su experiencia, que el 2% de los cheque aceptados como forma de pago no tienen fondos (esto es, son rechazados por el banco). Si la tienda recibe 10 cheques como forma de pago de consumidores independientes en un determinado día, la probabilidad de que ningún cheque sea rechazado dado que no más de la mitad son rechazados es:

a) $2.2892X10^{-7}$ b) 0.99999 c) 0.81707 d) 0.00083

3.- Suponga que Y_1 y Y_2 son variables aleatorias con función generadora de momentos conjuntos $M_{Y_1,Y_2}(t_1,t_2) = \exp\{3.50t_1 + 1000t_2 + 0.02t_1^2 + 1250t_2^2 - 5t_1t_2\}$, $t_i \in$ **R**, *i* = 1, 2.

Determine cuál de las siguientes afirmaciones es la falsa:

a) Y_1 y Y_2 tienen una distribución Normal Bivariada.
b) $E(Y_2)=1000$
c) $E(Y_1Y_2) = 3495$
d) $Cov(Y_1, Y_2) = -0.5$

4.- Una variable aleatoria X tiene media 0 y desviación estándar 1. La probabilidad de que $P(|X| \geq 2)$ no puede ser mayor a

(a) 0 (b) 0.025 (c) 0.25 (d) Ninguna de las anteriores

5.- Un analista predice que el 3.5% de las pequeñas empresas quebrarán durante el próximo año. Asumiendo que la predicción del analista es correcta, la probabilidad de que exactamente dos empresas de un total de 100 empresas independientes quiebren durante el próximo año es aproximadamente:

(a) 0.3209 (b) 0.1850 (c) 0.1057 (d) 0.0302

6.- Diga cuál de las siguientes afirmaciones es falsa

a) Sea P(A)=0.75 y P(B)=0.2 y P(A|B)=0.15. Entonces A y B son eventos independientes.
b) La función de densidad conjunta de las variables aleatorias (X,Y) está dada por $f(x,y) = e^{-(x+y)} I_{[0,\infty)}(x) I_{[0,\infty)}(y)$. Entonces, las variables aleatorias son independientes.
c) La función generadora de momentos conjunta de (X, Y) está dada por $m_{X,Y}(t_1, t_2) = \exp\left\{\frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2)\right\}$. Entonces, las variables aleatorias son independientes.
d) Si X y Y son no correlacionadas, entonces *E(XY)=E(X) E(Y).*

PARTE II

Indica claramente el inciso que estás resolviendo. Si tienes dos respuestas para una pregunta tacha la que consideres incorrecta, de lo contrario la ambigüedad anulará ambas. <u>Un número o un resultado sin la debida justificación no dan crédito</u>

1.- Los precios y cantidades de las ventas diarias al por mayor de cerveza en un mercado regional de la zona norte de México durante el verano están determinados por la siguiente función de densidad conjunta:

$$f(p,q) = \frac{1}{2} p e^{-pq} I_{[2,4]}(p) I_{[0,\infty)}(q)$$

Donde los precios son medidos en pesos y las cantidades en 100,000 unidades de litros (por ejemplo, q=2 significa que 200,000 litros fueron vendidos).

a) **(5 puntos)** Encuentre $f_Q(q|p)$
b) **(5 puntos)**¿Cuál es la probabilidad de que la cantidad de cerveza vendida exceda 50,000 litros si el precio es de $2 pesos?
¿Cuál es la probabilidad de que la cantidad de cerveza vendida exceda 50,000 litros si el precio es de $4 pesos?
¿Los resultados tienen algún sentido económico?
c) **(8 puntos)** Sea *D=PQ* la variable aleatoria que denota las ventas totales diarias en pesos durante el verano. ¿Cuál es la probabilidad de que las ventas diarias totales excedan $3000,000 pesos?
d) **(5 puntos)** Encuentre $E(Q|P=2)$

2.- Suponga que los precios del Crudo Maya (X_1), del Crudo Istmo (X_2) y del Crudo Olmeca (X_3),
en dólares por barril, siguen una distribución Normal Multivariada con vector de medias $\underline{\mu}$ y
matriz de varianzas-covarianzas Σ dados por:

$$\underline{\mu} = \begin{pmatrix} 100 \\ 115 \\ 120 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 25 & 24 & 24 \\ 24 & 25 & 27 \\ 24 & 27 & 36 \end{pmatrix}$$

a) **(5 puntos)** Encuentre la matriz de coeficientes de correlación de $(X_1, X_2, X_3)^t$
b) **(7 puntos)** Dado que el Crudo Istmo se ubica en 110 dólares por barril, ¿cuál es la probabilidad de que el Crudo Olmeca supere su valor promedio?
c) **(5 puntos)** Si se sabe que la Mezcla Mexicana de Exportación se compone 80% de Crudo Maya, 15% de Crudo Istmo y 5% de Crudo Olmeca, ¿cuál es la probabilidad de que su precio se ubique por arriba de los 110 dólares por barril?

3.- La compañía Ajax manufactura computadoras en su planta de Seattle. La compañía ha contratado la manufactura de las tarjetas de video usadas en las computadoras a tres pequeñas compañías cuyas plantas están ubicadas en Portland, Dallas y en la Ciudad de México. Las plantas producen el 15, 25 y 60 por ciento de las tarjetas de video, respectivamente. Las tarjetas contienen una etiqueta "PORT", "DAL" o "MEX" para poder identificar la planta en donde fueron manufacturadas.
Respecto al control de calidad en la manufactura de las tarjetas de video, se sabe que el porcentaje de tarjetas defectuosas es de 1, 3 y 2 por ciento en la planta de Portland, Dallas y Ciudad de México, respectivamente. Durante el proceso de manufactura y prueba, se encuentra una tarjeta de video que tiene serios defectos de fabricación y se le pide al equipo de control de calidad que se comunique con la compañía que la fabricó para que corrija los potenciales problemas en el resto de la producción. Sin embargo, la etiqueta de la compañía que manufacturó la tarjeta con defectos se perdió. Conteste las siguientes preguntas.

a) **(5 puntos)** ¿Cuál de las tres compañías contratadas es la más probable que haya manufacturado la tarjeta defectuosa?
b) **(5 puntos)** ¿Cuál de las tres compañías contratadas es la menos probable que haya manufacturado la tarjeta defectuosa?
c) **(5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que una tarjeta de video instalada en una computadora manufacturada por Ajax sea defectuosa?
d) **(5 puntos)** Dado que la tarjeta de video instalada en la computadora no es defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que dicha tarjeta haya sido manufacturada en la Ciudad de México?

4.- La producción de cierto producto volátil está dada por la siguiente función de producción estocástica

$$Y = L^{0.5}K^{0.25}e^{\nu}$$

Donde L denota las unidades de trabajo, K las unidades de capital y ν es una variable aleatoria cuya función de distribución está dada por

$$F(\nu) = \frac{1}{1 + e^{-2(\nu-1)}}$$

a) **(5 puntos)** Si las unidades de trabajo son iguales a 9 y las de capital son 16, ¿Cuál es la probabilidad de que la producción sea mayor que 12 unidades?

b) **(5 puntos)** Con las mismas unidades de trabajo y capital que en (a), ¿Cuál es la probabilidad de que la producción se encuentre entre 12 y 18.

EXAMEN FINAL DE PROBABILIDAD. TIPO A.

ENERO-MAYO 2012.

1 Parte I.

A continuación se presentan 6 preguntas de opción múltiple, las cuales deben ser contestadas con lápiz del número 2 o 2 ½, en la hoja anexa. Es importante que anotes sus datos personales. (No se califica su procedimiento)

1. **(7 puntos)** Sea X una variable aleatoria que se distribuye Poisson con parámetro $\lambda = 2$, si se conoce el valor de $P(X = 5)$, entonces el valor de $P(X = 7)$, se determina por la expresión:

a) $\frac{\lambda^2}{42} P(X = 5)$.
b) $\frac{\lambda^2}{7} P(X = 5)$.
c) $\frac{\lambda^2}{7!} P(X = 5)$.
d) $\frac{\lambda^2}{42} P(X = 6)$.

2. **(7 puntos)** Sean $X_1, X_2, \dots, X_{20}$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con distribución normal con media $\mu = 2$,y varianza $\sigma^2 = 4$. Defina $Y = \sum_{i=1}^{20} X_i$. Cuál de las siguientes es cierta?

   a) Y se distribuye N (40, 80).
   b) $M_Y(t) = e^{40t+40t^2}$
   c) $M_Y(t) = \left(m_{X_1}(t)\right)^{20}$, donde m_{X_1} es la función generadora de momentos de X_1
   d) Todas las anteriores.

3. **(7 Puntos)** Sean E y F dos eventos. La probabilidad de que exactamente uno de ellos no ocurra es

   a) $P(E^c) + P(F^c) - 2P(E^c \cap F^c)$
   b) $P(E^c) + P(F^c) - P(E^c \cap F^c)$
   c) $P(E) + P(F)$
   d) Ninguna de las anteriores

4. **(7 puntos)** Considere las siguientes afirmaciones:
   I Si $Z \sim N(0,1)$ y $Y = a + bZ + cZ^2, con\ a, b, c$ constantes. Entonces:
   $$Cov(Z, Y) = \frac{b}{\sqrt{b^2+2c^2}}$$

   II Sean X y Y son variables aleatorias que tienen la misma distribución, no necesariamente independientes. Entonces:

   $$Cov(X + Y, X - Y) = 0$$

   Diga si las siguientes aseveraciones son falsas o verdaderas.
   a. I) es correcta pero II) no.
   b. II) es correcta pero I) no
   c. I) y II) son correctas.
   d. I) y II) son incorrectas.

5. **(7 puntos)** Suponga que X es una variable aleatoria tal que $P(X = 0) = p = 1 - P(X = 1). Si\ E(X) = 3Var(X)$, entonces $P(X = 0)$ es

   a. 2/3
   b. 1/2
   c. 1/6
   d. Ninguno de los anteriores

6. **(7 puntos)** considere las siguientes afirmaciones:

I Sean $X_1, \dots, X_k$ variables aleatorias independientes tales que $X_i \sim Binomial(n_i, p)$ para $i = 1,2, \dots, k$. Entonces la distribución de $Y = \sum_{i=1}^{k} X_i \sim Binomial(n_1 + \cdots n_k, p)$.

II Sean $X_1, \ldots, X_k$ variables aleatorias independientes tales que $X_i \sim Gamma(\alpha, \beta_i)$ para $i = 1,2, \ldots, k$. Entonces la distribución de $Y = \sum_{i=1}^{k} X_i \sim Gammal(\alpha, \beta_i + \cdots + \beta_k)$.

III Sean $X_1, \ldots, X_k$ variables aleatorias independientes tales que $X_i \sim Poisson(\lambda)$ para $i = 1,2, \ldots, k$. Entonces la distribución de $Y = \sum_{i=1}^{k} X_i \sim Poisson(k\lambda)$.

a) Sólo I) y II) son correctas.
b) Sólo I) y III) son correctas.
c) Sólo II y III son correctas.

2 Parte II

Contesta mostrando tu procedimiento. Sólo se dará crédito si las respuestas están debidamente justificadas.

7. **(15 puntos)** $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de densidad.

$$f_{x(x)=\lambda e^{-\lambda x}}, \text{ para } x > 0.$$

Utilizando la función generadora de momentos encuentre la distribución de la variable aleatoria $U = 2\lambda(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$
Hint: Recuerde que si Y es una variable aleatoria que se distribuye $Gamma(\alpha, \beta)$, entonces su función generadora de momentos es:

$$M_Y(t) = \left(1 - \frac{t}{\beta}\right)^{-\alpha} \; para\ t < \beta$$

8. **(15 puntos)** Un estudio analiza la relación que existe entre la presión sanguínea y el nivel de colesterol, arrojando los siguientes resultados. De aquellos de presión elevada, el 50% tienen el nivel de colesterol alto; y de aquellos que tienen nivel de colesterol alto, el 80% tienen presión alta. De las personas dentro del estudio que presentaron al menos una de las condiciones (presión elevada o colesterol alto), ¿Qué porcentaje tienen ambas condiciones?

9. **(15 puntos**) suponga que los rendimientos del activo X y del activo Y, en miles de pesos, siguien una distribución normal multivariada con vector de medias $\mu = (100{,}125)^T$ y matriz de varianzas-covarianzas Σ dada por:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 49 & 45 \\ 45 & 64 \end{pmatrix}$$

- Encontrar la función generadora de momentos conjunta $m_{X,Y}(t_1, t_2)$.
- Dado que el rendimiento Y es de 150, en miles de pesos. ¿Cuál es laque el probabilidad de que el rendimiento X supere su valor promedio?
- Si se sabe que una combinación Z de los rendimientos se compone de 0.75 de X y de 0.45 de Y, encontrar P(Z>120).

10. **(15 puntos)** Sean X, Y~N(0,1) independientes y sea $\alpha \epsilon (0{,}2\pi)$ una constante arbitraria y U y V variables aleatorias definidas por:

$$U = Xsen(\alpha) - Ycos(\alpha)$$
$$V = Xcos(\alpha) + Ysen(\alpha)\cdot$$

- Calcula la esperanza y varianza de U-V.
- Encuentra la densidad conjunta de (U,V). Sugerencia verifique que:
-

$$X = Usen(\alpha) + Vcos(\alpha)$$
$$Y = -Ucos(\alpha) + Vsen(\alpha)\cdot$$

- Diga si U y V son independientes o no.

Agosto-Diciembre, 2012

Nombre:____Clave única_____________

PARTE I

A continuación se presentan 6 preguntas de opción múltiple, las cuales deben ser contestadas en la siguiente tabla. Cada pregunta tiene un valor de 5 puntos (No se calificará procedimiento)

Pregunta	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Respuesta						

1.- Sea $X \in \mathbb{R}$ una variable aleatoria cuya función de densidad es simétrica alrededor de la media. Supongamos que $\mathbb{E}[X] = 0$. Entonces, el valor de $2\mathbb{P}(X < 1) - 1$ es igual a:

a) $1 - \mathbb{P}(|X| > 1)$
b) $\mathbb{P}(X < 1) - \mathbb{P}(X > 1)$
c) $\mathbb{P}(X > 1) - \mathbb{P}(X > -1)$
d) Ninguna de las anteriores

2.- X y Y son variables aleatorias continuas con función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x, y) = 2 \ para\ 0 \leq x \leq y \leq 1.$$

Entonces, la esperanza condicional de Y dado X=*x* es igual a:

a) $\frac{x}{2}$ b) $\frac{x+1}{2}$ c) $\frac{x-1}{2}$ d) x

3.- El tiempo entre un cliente y otro en una ventanilla bancaria es una variable aleatoria cuya media es 10 minutos con una desviación estándar de 4 minutos. La cota inferior para la probabilidad de que el tiempo de espera entre un cliente y otro esté entre 5 y 15 minutos es:

a) $4/5$ b) 1/5 c) 16/25 d) 9/25

4.- Si $\mathbb{P}(A) = 0.3, \mathbb{P}(B) = 0.4\ y\ \mathbb{P}(A|B) = 0.3$. Evalúe las siguientes afirmaciones para identificar la opción correcta:

$$I)\ \mathbb{P}(A \cap B) = 0.12 \quad II)\ \mathbb{P}(A|B^c) = 0.3 \quad III)\ \mathbb{P}(A^c \cup B^c) = 0.88$$

a)Sólo I y II son verdaderas.
b)Sólo I y III son verdaderas.
c)Sólo II y III son verdaderas.

d)Todas son verdaderas.

5.- La densidad conjunta del tiempo total que pasa una persona en un banco (X) y el tiempo que tarda en ser atendida (Y) es $f_{X,Y}(x,y) = \theta^2 e^{-x\theta} I_{(0,\infty)}(x) I_{(0,x)}(y)$, $\theta > 0$, y su función generadora de momentos conjuntos es $M_{X,Y}(s,t) = \frac{\theta^2}{(s+t-\theta)(s-\theta)}$, donde $s < \theta \ y \ s + t < \theta$. Evalúe las siguientes afirmaciones para identificar la opción correcta:

I) X y Y son variables aleatorias independientes

II) $Y \sim Exp\left(\frac{1}{\theta}\right)$

III) $Cov(X,Y) = \frac{1}{\theta^2}$

a) Sólo I y II son verdaderas.
b) Sólo I y III son verdaderas.
c) Sólo II y III son verdaderas.
d) Ninguna de las anteriores.

6.- Evalúe las siguientes afirmaciones para identificar la opción correcta:

e) En la distribución Binomial, el coeficiente de curtosis (α_4) tiende a 3 para cualquier valor de p cuando n tiende a infinito.
f) La distribución de Poisson se encuentra sesgada positivamente para cualquier valor λ>0, pero la asimetría disminuye para valores relativamente grandes de λ.
g) Sea X la variable aleatoria con distribución Binomial y función de probabilidad

$$\mathbb{P}(x; n, p) = \frac{n!}{(n-x)!\,x!} p^x (1-p)^{n-x} \quad x = 0,1,2,\dots,n$$

Si para n=1,2,… la relación $p = \frac{\lambda}{n}$ es cierta para alguna constante $\lambda > 0$, entonces

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0}} \mathbb{P}(x; n, p) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}; x = 0,1,2,\dots$$

a)Sólo I y II son verdaderas.
b)Sólo I y III son verdaderas.
c)Sólo II y III son verdaderas.
d)Todas son verdaderas.

PARTE II

Indica claramente el inciso que estás resolviendo. Si tienes dos respuestas para una pregunta tacha la que consideres incorrecta, de lo contrario la ambigüedad anulará ambas. <u>Un número o un resultado sin la debida justificación no dan crédito</u>

1.- El dueño de una gasolinera sabe que la cantidad demandada diariamente (en miles de litros) de gasolina Magna (X_1), gasolina Premium (X_2) y de Diesel (X_3) tienen las siguientes distribuciones: $X_1 \sim N(5, 0.25)$, $X_2 \sim N(4, 0.36)$ y $X_3 \sim N(3, 0.49)$. Sabe también que la correlación entre la demanda de gasolinas Magna y Premium es de 0.9, que la correlación entre gasolina Magna y Diesel es de 0.2 y que la demanda de gasolina Premium y el Diesel no están correlacionadas.

a) **(8 puntos)** ¿Qué distribución siguen de manera conjunta X_1, X_2 y X_3? Especifique sus parámetros.

b) **(8 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que en un día la demanda de Diesel supere a la demanda de gasolina Premium?

c) **(8 puntos)** Si la demanda diaria de gasolina Magna se ubica en 6 mil litros, ¿cuál es la probabilidad de que la demanda de gasolina Premium supere los 5 mil litros

d) **(5 puntos)** Si los precios de las gasolinas Magna, Premium y del Diesel se ubican en 10.8, 11.4 y 10.9 pesos por litro, respectivamente, ¿cuál es la probabilidad de que el ingreso del dueño de la gasolina sea mayor a 150 mil pesos?

2.- La compañía de productos electrónicos LG fabrica televisores de alta calidad que pone a la venta en los mercados nacional e internacional. La compañía opera dos plantas de producción en México, una se encuentra ubicada en Tijuana Baja California y la otra en Guadalajara Jalisco. En cada una de las plantas, cuando un televisor se termina de ensamblar, este es sometido a un riguroso control de calidad, momento en el que se aprueba el embarque del televisor para su venta, o bien es regresado para realizarle los ajustes necesarios antes de que se embarque. En un día cualquiera, la proporción de televisores producidos en cada planta que requiere de un ajuste antes de su embarque y la producción total de televisores en ambas plantas de la compañía, es el resultado de una función de densidad conjunta de tres variables aleatorias dada por:

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = \frac{2}{3}(x+y)e^{-x} I_{(0,\infty)}(x) I_{(0,1)}(y) I_{(0,1)}(z),$$

donde

X= Producción total de televisores en las dos plantas, medida en miles de unidades

Y= Proporción de televisores ensamblados en Tijuana que se embarcan sin ajuste

Z= Proporción de televisores ensamblados en Guadalajara que se embarcan sin ajuste

a) **(8puntos)** Proporcione la función de densidad marginal de la producción total de televisores en las dos plantas. ¿Cuál es la probabilidad de que menos de 1000 televisores sean producidos en un día cualquiera?

b) **(8 puntos)** Proporcione la función de densidad marginal $f_{Y,Z}(y,z)$. ¿Cuál es la probabilidad de que más del 75 por ciento de los televisores producidos en cada planta sean embarcados sin haber requerido de un ajuste?

c) **(8 puntos)** Proporcione la función de densidad condicional de X, dado que 50 por ciento de los televisores son embarcados sin haber requerido un ajuste desde la planta de Tijuana. ¿Cuál es la probabilidad de que LG produzca 1500 televisores un determinado día, dado que 50 por ciento de los televisores son embarcados sin haber requerido un ajuste desde la planta de Tijuana?

3. Suponga que X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes con distribuciones uniforme continua sobre el intervalo (0, 2π) y exponencial con media 1, respectivamente. Si $Y_1 = \sqrt{2X_2}\cos(X_1)$ *y* $Y_2 = \sqrt{2X_2}\operatorname{sen}(X_1)$:

a) **(10 puntos)** Demuestre que $f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{y_1^2+y_2^2}{2}} I_{(-\infty,\infty)}(y_1) I_{(-\infty,\infty)}(y_2)$.

(*Sugerencia*: Recuerde que si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$).

b) **(7 puntos)** Diga si Y_1 y Y_2 son variables aleatorias independientes

PROBABILIDAD

EXAMEN FINAL. TIPO A

Enero-Mayo, 2013

Nombre:____Clave única_____________

PARTE I

A continuación se presentan 6 preguntas de opción múltiple, las cuales deben ser contestadas en la siguiente tabla. Cada pregunta tiene un valor de 5 puntos (No se calificará procedimiento)

Pregunta	1	2	3	4	5	6
Respuesta						

1.- Considere los siguientes casos

i) Sea X una variable aleatoria con función de densidad $f_X(x) = e^{-x}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$ y $\mathbb{E}(Y|x) = 2x^2 + 3$

ii) Sean $Z_1 \; y \; Z_2$ variables aleatorias independientes tales que $\mathbb{E}(Z_1) = 5, \mathbb{E}(Z_2) = 7$ y $\mathbb{E}(Y|z) = 3z_1z_2$

Evalúe las siguientes afirmaciones para identificar la opción correcta

I) En (i) $\mathbb{E}(Y) = 7$

II) En (ii) $\mathbb{E}(Y) = 105$

a) Sólo es verdadera

b) Sólo II es verdadera

c) I y II sob verdaderas

d) I y II son falsas

2.- Sea $\lambda > 1$ una constante y X una variable aleatoria con densidad

$$f_X(x) = \lambda x^{\lambda-1}\mathbb{I}_{(0,1)}(x)$$

Defina la variable aleatoria $Z = h(X) = \ln(1-X) - \ln(X)$. Entonces, es cierto que

a) $\mathbb{E}[h(X)] \geq h(\mathbb{E}[X])$

b) La función de distribución de Z es $F_Z(z) = \left(\frac{e^{-z}}{1+e^{-z}}\right)^{\lambda}$

c) La función de densidad de Z es $f_Z(z) = \frac{\lambda e^z}{(1+e^z)^{\lambda+1}}\mathbb{I}_{z>0}$

d) b) y c) son correctas

3.- Suponga que $X_1 \sim \chi^2_{(1)}, X_2 \sim \chi^2_{(2)} \; y \; X_3 \sim \chi^2_{(3)}$, son variables aleatorias independientes. Si $\mathbb{P}(X_1 + X_2 + X_3 \geq c) \approx 0.10$, entonces

a) c=2.7

b) c=2.8

c) c=10.6

d) ninguna de las anteriores

4.- Si X_1 y X_2 son dos variables aleatorias cuya función generadora de momentos está dada por

$$M_{X_1,X_2}(t_1,t_2) = exp\{3t_1 - 2t_2 + 2t_1^2 - 2t_1t_2 + 8t_2^2\}$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es incorrecta?

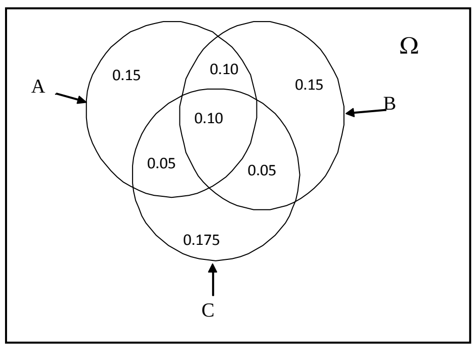
a) $\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 16 \end{bmatrix}$

b) $\mathbb{E}[X_1|X_2 = -2] = 3$

b) $\frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{2}X_2 \sim N(0,\ 37/9)$

d) $\rho = 1/8$

5.- El siguiente diagrama indica la forma en cómo se han asignado probabilidades a los eventos de un espacio muestral Ω



Sea D un evento tal que $\mathbb{p}(D) = 0.05$ y $D \cap (A \cup B \cup C) = \emptyset$. Evalúe las siguientes afirmaciones para identificar la opción correcta

I) Los eventos A, B y C son eventos independientes dos a dos.

II) Los eventos D y $(A \cup B \cup C)$ son eventos independientes.

III) Los eventos D y A son independientes

a) Sólo II y III son verdaderas.

c) Sólo I y III son verdaderas.

b) Sólo II es verdadera.

d) Todas son falsas.

6.- Sea X una función de densidad continua con la siguiente función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \alpha f_1(x) + (1 - \alpha)f_2(x),$$

donde $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son funciones de densidad de probabilidad y $0 \leq \alpha \leq 1$, μ_i y ${\sigma^2}_i$ denotan la media y la varianza correspondientes a $f_i(x)$, $i = 1,2$. Diga cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**

a) $E[X] = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$

b) $Var(X) = \alpha^2\sigma^2{}_1 + (1-\alpha)^2\sigma^2{}_2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma^2{}_1\sigma^2{}_2$

c) $Var(X) = \alpha\sigma^2{}_1 + (1-\alpha)\sigma^2{}_2 + \alpha(1-\alpha)(\mu_1-\mu_2)^2$

d) $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\ \alpha f_1(x) + (1-\alpha)f_2(x))dx$

PARTE II

Indica claramente el inciso que estás resolviendo. Si tienes dos respuestas para una pregunta tacha la que consideres incorrecta, de lo contrario la ambigüedad anulará ambas. <u>Un número o un resultado sin la debida justificación no dan crédito</u>

1.- Akinori Ito, un ingeniero que trabaja en Blest Corporation, Japón, está muy preocupado por la cantidad de desperdicio plástico que los humanos dejamos a nuestro paso. Como el plástico es un producto que viene del petróleo, el Sr. Ito ha estudiado la manera en que puede reconvertir el plástico en su materia prima original. Para ello, ha desarrollado una máquina que puede reconvertir un kilo de plástico en un litro de petróleo, diessel ó keroseno. (Para mayor información consulte: ourworld.unu.edu).

Sean $Y_1, Y_2\ y\ Y_3$ los costos de reconversión de 1kg. de plástico en petróleo, diessel y keroseno respectivamente. Sea $Y_1 - Y_3$ la diferencia en costos de reconversión de plástico y keroseno.

Suponga que $(Y_1, Y_2, Y_3)^T \sim N\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$, donde $\underline{\mu} = (2,1,2)^T$ en decenas de yenes y

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) ***(5 puntos)*** Obtenga la matriz de correlaciones entre los costos de reconversión
b) ***(7 puntos)*** Encuentre la distribución conjunta de $X_1 = Y_1 + Y_2 + Y_3$ y $X_2 = Y_1 - Y_3$.
c) ***(7 puntos)*** Encuentra la distribución de $X_1|X_2 = 2$.
d) ***(5 puntos)*** Determina $\mathbb{P}(X_1 > 3|X_2 = 2)$

2.- Suponga que X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes con densidad exponencial, esto es, $X_i \sim \exp(\lambda), i = 1,2$. Sean $U = X_1 + X_2\ y\ V = \frac{X_1}{X_1+X_2}$

a) ***(10 puntos)*** Encuentra la función de densidad conjunta de U y V e indica claramente su soporte.
b) ***(6 puntos)*** Obtenga las densidades marginales de U y V
c) ***(5 puntos)*** Determina $\mathbb{E}(U|V)$

3.- (a) ***(5 puntos)*** Sean $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con densidad exponencial, esto es, $X_i \sim \exp(100)\,, i = 1,2, \dots, 10$. ***Utilizando la función generadora de momentos*** encuentre la distribución de la variable aleatoria $T = \sum_{i=1}^{10} X_i$

(b) ***(5 puntos)*** Si $X \sim Gama(\alpha, \beta)$. ***Utilizando la función generadora de momentos*** encuentre la distribución de la variable aleatoria $Y = \frac{2X}{\beta}$.

4.- Una compañía que procesa alimentos tiene tres plantas ubicadas en Tijuana, Monterrey y Guadalajara. Las plantas difieren en tamaño y producen el 45%, 35% y 20% del total de sardina procesada, respectivamente. Dada la información histórica de la

SAGARPA sobre la calidad del producto, se pueden asignar las siguientes probabilidades de encontrar una lata contaminada en cada una de las tres plantas: 0.0005, 0.0002 y 0.0001 para Tijuana, Monterrey y Guadalajara, respectivamente. Un inspector de sanidad encuentra una lata de sardinas contaminada que fue enviada por esta compañía a una tienda de auto servicio en la Ciudad de México, desafortunadamente la etiqueta que indica la procedencia de la lata de sardina fue borrada y no se puede determinar en qué planta fue procesada.

a) ***(5 puntos)*** ¿En cuál de las tres plantas es más probable que se haya procesado la lata contaminada?
b) ***(5 puntos)*** ¿En cuál de las tres plantas es menos probable que se haya procesado la lata contaminada?
c) ***(5 puntos)***¿Cuál es la probabilidad de que la lata contaminada se haya procesado en una de las dos plantas más pequeñas?

PROBABILIDAD
EXAMEN FINAL. TIPO A
Agosto-Diciembre, 2013

Nombre:____Clave única____________

PARTE I

A continuación se presentan 6 preguntas de opción múltiple, las cuales deben ser contestadas en la siguiente tabla. Cada pregunta tiene un valor de 5 puntos (No se calificará procedimiento)

Pregunta	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Respuesta						

1.- Sean X y Y variables aleatorias que tienen una densidad normal bivariada con $\mathbb{E}(X) = 2, \mathbb{E}(Y) = -3, Var(X) = 4, \quad Var(Y) = 25\ y\ covarianza\ \sigma_{XY} = -3$. Entonces, $\mathbb{P}(X \leq 3|Y = 1) \cong$

(a) 0.54 (b) 0.64 (c) 0.76 (d) 0.59

2.- Una compañía modela sus ingresos mensuales, en millones, por medio de una variable aleatoria, *V*, con densidad exponencial de media 2. Sus costos totales mensuales, también en millones, los modela por medio de una variable aleatoria, *U*, cuya densidad es exponencial con media 1. Los ingresos y egresos se suponen independientes. Sea $X = {}^{U}/_{V}$ el cociente entre costos totales e ingresos. Entonces, la función de densidad de *X*, para $x > 0$ está dada por:

(a) ${}^{1}/_{(2x+1)}$ (b) xe^{-x} (c) ${}^{2}/_{(2x+1)^2}$ (d) $2e^{-2x}$

3.- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

a) Si $X \sim Gama(\alpha, \beta)$. Entonces, ${}^{2X}/_{\beta} \sim \chi^2_{(2\alpha)}$
b) Si $Z \sim N(0,1)$. Entonces, $\mathbb{P}(|Z| > 2) < 0.25$
c) Si $X \sim exp(\theta)$. Entonces, $\mathbb{P}(X > x + h|X > x) = \mathbb{P}(X > h),\ h > 0$
d) Sean X y Y variables aleatorias independientes tales que, $X \sim Bin(n, p_x), Y \sim Bin(n, p_y)$. Entonces $X + Y \sim Bin(n, p_x + p_y)$

4.- Sean X y Y variables aleatorias que tienen densidad normal bivariada con parámetros $(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho_{XY})$. Evalúe las siguientes afirmaciones para identificar la opción correcta

I) Cualquier combinación lineal distinta de cero entre X y Y de la forma $\alpha X + \beta Y + c$ tiene una densidad normal con media $\alpha\mu_X + \beta\mu_Y + c$ y varianza $\alpha^2\sigma_X^2 + \beta^2\sigma_Y^2$.
II) Suponiendo que X y Y tienen varianza común σ^2, entonces $Var(X + Y) < 2\sigma^2$ si y sólo si $\rho_{XY} < 0$.
III) $Var(Y|X = x) < Var(Y)$
IV) X y Y son independientes si y sólo si $Cov(X, Y) = 0$
V) X-Y tienen densidad normal si y sólo si $\rho_{XY} > 0$

a) Sólo II), III) y IV) son verdaderas
b) Sólo I) es verdadera
c) Sólo V) es falsa
d) Todas son verdaderas

5.- Sean $A, B\ y\ C$ tres eventos en el espacio muestral Ω, todos con probabilidad positiva. Evalúe las siguientes afirmaciones para identificar la opción correcta.

I) $\mathbb{P}(A \cup B|C) = \mathbb{P}(A|C) + \mathbb{P}(B|C) - \mathbb{P}(A \cap B|C)$

II) Si $\mathbb{P}(A|C) > \mathbb{P}(B|C)\ \ y\ \mathbb{P}(A|C^c) > \mathbb{P}(B|C^c)$, entonces $\mathbb{P}(B) < \mathbb{P}(A)$

$III)\ \dfrac{\mathbb{P}(A|C)}{\mathbb{P}(B|C)} = \dfrac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C|A)}{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C|B)}$

a) Sólo II) es verdadera
b) Todas son verdaderas
c) Sólo I) y III) son verdaderas
d) Sólo I) es verdadera

6.- La cantidad de agua, medida en millones de litros, demandada diariamente por una población en el norte de la ciudad de México durante los meses del verano, es modelada por una variable aleatoria, X, cuya función generadora de momentos está dada por: $M_X(t) = (1 - 0.5t)^{-10}\ \ para\ t < 2$. Evalúe las siguientes afirmaciones para identificar la opción correcta.

I) $\mathbb{E}(X) = 5$ II) $Var(X) = 2.5$ III) La función de densidad de X es simétrica.

a) Todas son verdaderas.
b) Sólo III) es verdadera.
c) Sólo I) es verdadera.
d) Sólo I) y II) son verdaderas.

PARTE II

Indica claramente el inciso que estás resolviendo. Si tienes dos respuestas para una pregunta tacha la que consideres incorrecta, de lo contrario la ambigüedad anulará ambas. <u>Un número o un resultado sin la debida justificación no dan crédito</u>

1.- Sea $W \sim Gama(\alpha, \beta)$.

a) **(7 puntos)** Muestra que el r-ésimo momento de W está dado por

$$\mathbb{E}[W^r] = \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)}\beta^r,\ para\ r > -\alpha.$$

Nota: En particular si $Y \sim \chi^2_{(n)}$ es un caso especial de la densidad Gama, en cuyo caso,

$$\mathbb{E}[Y^r] = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + r\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} 2^r, \qquad para\ r > -\frac{n}{2}$$

b) **(7 puntos)** Sean $Z \sim N(0,1)$ y $Y \sim \chi^2_{(n)}$ variables aleatorias independientes. Sea $T = \frac{Z}{\sqrt{Y/n}}$. Muestra que $\mathbb{E}(T) = 0$ y $Var(T) = {}^{n}/_{(n-2)}$, $si\ n > 2$

2.- Peopel Power es una compañía de asesoría en desarrollo organizacional que presta su servicio a varias empresas. La compañía aplica un examen que evalúa matemáticas (X_1), escritura (X_2) y destreza manual (X_3) a cada uno de los aspirantes a un empleo. Después de que la compañía ha analizado miles de exámenes de igual número de aspirantes, encontró que la calificación de las tres pruebas puede modelarse a través de la siguiente función de densidad conjunta (las tres pruebas son calificadas en una escala de 0 a 1, con 0 la calificación más baja y 1 la más alta).

$$f_{X_1X_2X_3}(x_1, x_2, x_3) = 0.80(2x_1 + 3x_2)x_3 \prod_{i=1}^{3} \mathbb{I}_{[0,1]}(x_i)$$

a) **(6 puntos)** Se tiene una vacante para un jefe de oficina. People Power, requiere de una calificación mayor de 0.75, tanto en matemáticas como en escritura para poder contratar a un aspirante**.** Proporcione la función de densidad marginal conjunta para las calificaciones de matemáticas y la de escritura.

b) (i) **(6 puntos)** Proporcione la función de densidad condicional de la calificación de escritura, dado que el aspirante logro una calificación en matemáticas mayor a 0.75.

(ii) **(6 puntos)** Dado que el aspirante logro una calificación mayor a 0.75 en matemáticas, ¿Cuál es la probabilidad de que logre una calificación mayor a 0.75 en escritura?

(iii) **(6 puntos)** ¿son las calificaciones de matemáticas y escritura variables aleatorias independientes?

3.- Las variables aleatorias continuas X y Y tienen la siguiente función de densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{g(x)g(y)}{G(x)} & -\infty < y < x < \infty \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $G(x)$ es una función de distribución tal que $g(x) = \frac{dG(x)}{dx}$

a) **(7 puntos)** Verifique que las funciones de densidad marginal de X y Y están dadas por

$$f_X(x) = g(x) \qquad -\infty < x < \infty$$
$$f_Y(y) = -g(y)\ln G(y) \quad -\infty < y < \infty$$

respectivamente.

b) (**7 puntos)** Verifique que $f_Y(y) = -g(y)\ln G(y)$ es una función de densidad.

4.- Sea X la variable aleatoria que representa la producción de pares de zapatos, la cual tiene la siguiente función de densidad

$$f_X(x) = e^{-x}, x > 0$$

Sean $c > 0$ la demanda de pares de zapatos, $d_1 > 0$ el precio de venta y $d_2 > 0$ el costo de producción de un par de zapatos.

a) **(6 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que se produzcan más pares de zapatos que los demandados?

b) **(6 puntos)** Sea

$$Y = \begin{cases} X & , si\ X < c \\ c & , si\ X > c \end{cases}$$

la variable aleatoria que representa la cantidad vendida de zapatos. Encuentra la esperanza de Y.

c) **(6 puntos)** Encuentra la ganancia total esperada

PROBABILIDAD

EXAMEN FINAL. TIPO A

Enero-Mayo, 2014

Nombre:____Clave única_____________

PARTE I

A continuación se presentan 6 preguntas de opción múltiple, las cuales deben ser contestadas en la siguiente tabla. Cada pregunta tiene un valor de 5 puntos (No se calificará procedimiento)

Pregunta	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Respuesta						

1.- Evalúe las siguientes afirmaciones para identificar la opción correcta.

I) Si $\underline{X}$ es un vector aleatorio distribuido normal *p-variado* y X_j, X_k son componentes de $\underline{X}$ con $Corr(X_j, X_k) = 0$. Entonces $X_j\ y\ X_k$ no necesariamente son variables aleatorias independientes.

II) Si $X_1\ y\ X_2$ son variables aleatorias que marginalmente tienen una distribución normal, entonces de forma conjunta (X_1, X_2) se distribuirán de acuerdo a una densidad normal bivariada

a) I) es verdadera pero II) es falsa.

b) I) es falsa pero II) es verdadera.
c) Tanto I) como II) son verdaderas.
d) Tanto I) como II) son falsas.

2.- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

a) En la distribución Binomial, el coeficiente de curtosis (α_4) tiende a 3 para cualquier valor de *p* cuando *n* tiende a infinito.
b) La distribución de Poisson se encuentra sesgada positivamente para cualquier valor *λ>0*, pero la asimetría disminuye para valores relativamente grandes de *λ*.
c) Sea *X* la variable aleatoria con distribución Binomial y función de probabilidad

$$P(x;n,p) = \frac{n!}{(n-x)!\,x!}p^x(1-p)^{n-x} \quad x = 0,1,2,\dots,n$$

Si para *n=1,2,…* la relación $p = \frac{\lambda}{n}$ es cierta para alguna constante $\lambda > 0$, entonces

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0}} P(x;n,p) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}; x = 0,1,2,\dots$$

d) En la distribución Binomial, la media es menor que la varianza

3.- Sean $A, B\ y\ C$ tres eventos en el espacio muestral Ω, todos con probabilidad positiva y tales que: A y B son ajenos, A y C son independientes, B y C son independientes. Supóngase que

$$4\mathbb{P}(A) = 2\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) \quad y\ \mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 5\mathbb{P}(A)$$

¿Cuál es el valor de $\mathbb{P}(A)$?

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{7}$ c) 0 d) $\frac{1}{3}$

4.- Evalúe las siguientes afirmaciones para identificar la opción correcta.

I) Suponga que la función $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ es tal que $F(b) \leq F(a)\ si\ b > a$. Entonces la función es una función de distribución para alguna variable aleatoria.

II) Sea $f(x_1, x_2)$ la función de densidad conjunta de las variables aleatorias continuas X_1, X_2. Suponga que $f(x_1|x_2 \in B)$ está dada por $f(x_1|x_2 \in B) = \frac{\int_{x_2 \in B} f(x_1,x_2)dx_2}{\int_{x_2 \in B} f_2(x_2)dx_2}$, en donde B es un evento de X_2 para el cual $\mathbb{P}_{X_2}(B) > 0$ y $f_2(x_2)$ es la función de densidad marginal de X_2. Entonces para cualquier evento A de la variable aleatoria X_1, $\mathbb{P}(x_1 \in A|x_2 \in B) = \int_{x_1 \in A} f(x_1|x_2 \in B)d\,x_1$

a) I) es verdadera pero II) es falsa.
b) I) es falsa pero II) es verdadera.
c) Tanto I) como II) son verdaderas.
d) Tanto I) como II) son falsas.

5.- Evalúe las siguientes afirmaciones para identificar la opción correcta.

I) El precio diario de un instrumento financiero es una variable aleatoria con valor esperado de \$2 dólares. Entonces la probabilidad de que el precio de dicho instrumento sea mayor o igual que \$10 dólares es ≤ 0.20.

II) Asumiendo que la media μ y la varianza σ^2 de una variable aleatoria X existen, entonces $\mathbb{P}(|x - \mu| < 2\sigma) \geq 0.75$

a) I) es verdadera pero II) es falsa.
b) I) es falsa pero II) es verdadera.
c) Tanto I) como II) son verdaderas.
d) Tanto I) como II) son falsas.

6.- Evalúe las siguientes afirmaciones para identificar la opción correcta.

I) Sea X la variable aleatoria con función de densidad $f_X(x) = 0.2e^{-0.2x}I_{(0,\infty)}(x)$. Entonces, la función generadora de momentos de X es $M_X(t) = \frac{-0.2}{t-2},\ t < 0.2$, $\mathbb{E}(X) = 5\ y\ Var\ (X) = 25$.

II) Sea Y la variable aleatoria con función de masa de probabilidad $f_Y(y) = 0.3^y 0.7^{1-y} I_{\{0,1\}}(y)$. Entonces, la función generadora de momentos de Y es $M_X(t) = 0.7 + 0.3e^t$, $\mathbb{E}(Y) = 0.3\ y\ Var\ (Y) = 0.21$

a) I) es verdadera pero II) es falsa.
b) I) es falsa pero II) es verdadera.
c) Tanto I) como II) son verdaderas.
d) Tanto I) como II) son falsas.

PARTE II

Indica claramente el inciso que estás resolviendo. Si tienes dos respuestas para una pregunta tacha la que consideres incorrecta, de lo contrario la ambigüedad anulará ambas. <u>Un número o un resultado sin la debida justificación no dan crédito</u>

1.- De un grupo de 9 estudiantes internacionales: 4 mexicanos, 2 españoles y 3 franceses, se eligen tres estudiantes para otorgarles una beca. Sea X el número de estudiantes mexicanos elegidos, y Y el número de estudiantes españoles elegidos.

a) **(8 puntos)** Construya la distribución conjunta (tabla de probabilidades) de X y Y.
b) **(4 puntos)** Calcule el valor esperado y desviación estándar de Y.
c) **(4 puntos)** Determine el coeficiente de correlación lineal entre X y Y, si se tiene que $\mathbb{E}(X) = 4/3 \ \ y \, Var(X) = 5/9$.
d) **(4 puntos)** Si Z es el número de estudiantes franceses elegidos para recibir beca. Obtenga su valor esperado μ_Z y su varianza σ_Z^2.
e) **(4 puntos)** Si se sabe que exactamente un estudiante francés recibirá beca, calcule el número esperado de estudiantes españoles que recibirán beca.

2.- Un inversionista tiene $10000.00 dólares los cuales desea invertir en un portafolio de inversión compuesto por tres acciones el cual considera es una buena oportunidad de inversión. Durante el horizonte planeado por el inversionista los precios semanales, al cierre, de las acciones puede considerarse como eventos de un vector aleatorio con densidad normal de dimensión 3 y con

$$\mathbb{E}(\underline{X}) = \begin{bmatrix} 27 \\ 10 \\ 18 \end{bmatrix} \ \ y\ con\ Cov(\underline{X}) = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Los precios actuales de la primera, segunda y tercera acción son \$22.988, \$11.001, y \$ 19.047, respectivamente.

a) **(8 puntos)** Si el inversionista decide invertir los \$10000.00 dólares en cantidades iguales para cada una de las tres acciones, ¿Cuál es el valor esperado y la varianza del valor del portafolio de inversión?

b) **(8 puntos)**¿Cuál es la función de densidad del valor del portafolio? ¿Cuál es la probabilidad de que el valor de cierre del portafolio en una semana determinada sea mayor de \$11000.00?

c) **(8 puntos)**¿Cuál es la densidad condicional del valor de la primera acción dado que la tercera acción tiene un valor de \$17? Si el inversionista invierte sus \$10000.00 en la primera acción, ¿Cuál es la probabilidad condicional de que el valor de cierre del portafolio sea mayor de \$11000.00, dado que la tercera acción tiene un valor de \$17?

3.- En cierta compañía, el esquema para aprobar una propuesta es el siguiente: tres personas *A*, *B y C* analizan la propuesta y ésta es aprobada únicamente si por lo menos 2 de los 3 le dan su visto bueno. Se sabe que cada uno de ellos analiza la propuesta en forma independiente y que las probabilidades de que den su visto bueno son 0.3, 0.2 y 0.1 respectivamente.

a) **(8 puntos)**¿Cuál es la probabilidad de que una determinada propuesta sea aprobada?

b) **(6 puntos)** Si se sabe que una propuesta fue aprobada. ¿Cuál es la probabilidad de que C le haya dado el visto bueno?

4.- **(10 puntos)** Una compañía modela sus ingresos mensuales, en millones, por medio de una variable aleatoria, V, con distribución exponencial de media 2. Sus costos totales mensuales, también en millones, los modela por medio de una variable aleatoria, U, cuya distribución es exponencial con media 1. Los ingresos y egresos se suponen independientes. Sea $X = \frac{U}{V}$ el cociente entre costos totales e ingresos. Encontrar la función de densidad de X, para $x > 0$.

PROBABILIDAD
EXAMEN FINAL. TIPO A
Agosto-Diciembre, 2014

Nombre:____Clave única____________

PARTE I

A continuación se presentan 6 preguntas de opción múltiple, las cuales deben ser contestadas en la siguiente tabla. Cada pregunta tiene un valor de 5 puntos (No se calificará procedimiento)

Pregunta	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Respuesta						

1.- La variables aleatorias X y Y representan los costos de consultas médicas y medicamentos, respectivamente, en 2013. Supongamos que $\mathbb{E}(X) = 5, \mathbb{E}(X^2) = 27.4, \mathbb{E}(Y) = 7, \mathbb{E}(Y^2) = 51.4$ y $Var(X+Y) = 8$ y sea $C_1 = X + Y$ el costo total de consulta y medicamentos en 2013. Supongamos que en 2014 los medicamentos aumentarán su costo en 20% y que los costos de consulta permanecerán sin cambios. Sea $C_2 = X +$

1.2Y que representa el monto total de consulta y medicamento en 2014. Entonces la $Cov(C_1, C_2)$ es igual a:

a) 8.8 b) 9.60 c) 9.76 d) 11.52

2.- La función de producción de un cultivo agrícola bajo las prácticas de cultivo estándar, depende críticamente del nivel de precipitaciones pluviales durante el periodo de crecimiento. Dicha función de producción está dada por $Y = 30X^{0.25}$, donde Y representa el rendimiento por hectárea medido en toneladas, mientras que X representa la cantidad de lluvia durante la temporada de crecimiento medido en centímetros cúbicos. Analice las siguientes afirmaciones para elegir la opción correcta.

I) Si $\mathbb{E}(X) = 20$, entonces $\mathbb{E}(Y) > 70$.
II) Si $\mathbb{P}(Y \geq 50) = 0.75$, entonces $\mathbb{E}(Y) > 35$.

a) (I) y (II) son verdaderas
b) (I) y (II) son falsas
c) (I) es falsa y (II) es verdadera
d) (II) es falsa y (I) es verdadera

3.- Sea X la variable aleatoria continua con función de distribución F_x y sean $a < b$ números reales ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) Si $0 < a$ entonces $P(|X| > a) = 2\left(1 - F_x(a)\right)$.
b) $P(\{a \leq X\} \cap \{X \geq b\}) = 1 - F_x(b) - F_x(a)$.
c) $P(\{a < X\} \cup \{X \leq b\}) = F_x(b) + 1 - F_x(a)$.
d) $P(\{a < X\} \cap \{X \leq b\}) = F_x(b) - F_x(a)$.

4.- La cantidad de cerveza, medida en miles de litros, demandada diariamente por los consumidores de una ciudad en el norte de México durante los meses de verano, es modelada por una variable aleatoria, X, cuya función generadora de momentos está dada por: $M_X(t) = (1 - 2t)^{-3}\ para\ t < 0.5$. Evalúe las siguientes afirmaciones para identificar la opción correcta

$I)$ $\mathbb{E}(X) = 6$ II) $Var(X) = 12$ III) La función de densidad de X es simétrica

a) (I), (II) y (III) son verdaderas
b) Sólo (II) y (III) son verdaderas
c) Sólo (I) y (II) son verdaderas
d) Sólo (I) y (III) son verdaderas

5.- Considere las siguientes afirmaciones

(I) Sean $X_1, X_2, \dots X_k$ variables aleatorias independientes tales que $X_i \sim Binomial(n_i, p)$. Para $i = 1,2, . . , k$. Entonces la distribución de $Y = \sum_{i=1}^{k} X_i \sim binomial(n_1 + n_2 + \cdots + n_k, p)$

(II) Si X y Y son v.a. independientes con $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$ y $Y \sim Gamma(\lambda, \beta)$ entonces la v.a. $W = X + Y \sim Gama(\alpha + \lambda, \beta)$

(III) Si $X \sim Gama(\alpha, \beta)$, entonces $Y = \frac{2X}{\beta} \sim \chi^2(\alpha)$.

a) (I), (II) y (III) son verdaderas
b) Sólo (II) y (III) son verdaderas
c) Sólo (I) y (II) son verdaderas
d) Sólo (I) y (III) son verdaderas

6.- Sean $A_1, A_2, \dots, A_n, B$ eventos de un espacio muestral Ω, con $\mathbb{P}(B) > 0$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa.

a) $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i | B) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i^c | B)$
b) $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i | B) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i | B)$
c) $\frac{\mathbb{P}(A_1 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} + \frac{\mathbb{P}(A_1^c \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$
d) Se dice que los eventos $A_1, A_2, \dots, A_n$ son independientes si y sólo si son independientes dos a dos.

PARTE II

Indica claramente el inciso que estás resolviendo. Si tienes dos respuestas para una pregunta tacha la que consideres incorrecta, de lo contrario la ambigüedad anulará ambas. <u>Un número o un resultado sin la debida justificación no dan crédito</u>

1.- Se sabe que, en un mes dado, el precio del petróleo crudo en dólares por barril (X) y la cantidad que un exportador podría ofrecer (por tanto, vender) en millones de barriles (Y) se distribuyen como un vector aleatorio normal bivariado; esto es, $(X, Y)^T \sim N\left(\underline{\mu},\ \Sigma\right)$ donde

$$\underline{\mu} = \begin{pmatrix} 82.5 \\ 12.4 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 26.4 & -2 \\ -2 & 5.1 \end{pmatrix}$$

a) **(9 puntos)** Si una compañía americana exportadora de crudo calcula sus ingresos sin tomar en cuenta costos. Calcule el ingreso medio en un mes dado.
b) **(10 puntos)** Por instrucciones de la OPEP, a dicha empresa se le ha pedido que su volumen de venta en dicho mes sea de 10 millones de barriles. Calcule la probabilidad de que el precio del crudo exceda los 86 dólares por barril.

2.- **(15 puntos)** Sean X y Y dos variables aleatorias con función de densidad conjunta

$$f_{xy}(x, y) = e^{-x-y}\ para\ x > 0\ y\ y > 0$$

Encontrar la función de densidad de $U = e^{-X-Y}$.

3.- La compañía de productos electrónicos ASUS fabrica tarjetas madre de alta calidad que pone a la venta en los mercados nacional e internacional. La compañía opera dos plantas de producción en Taiwán, una se encuentra ubicada en Taipéi y la otra en Nankan. En cada una de las plantas, cuando una tarjeta se termina de ensamblar, esta es sometida a un riguroso control de calidad, momento en el que se aprueba el embarque de la tarjeta para su venta, o bien es regresada para realizarle los ajustes necesarios antes de que se embarque. En un día cualquiera, la proporción de tarjetas producidas en cada planta que requiere de un ajuste antes de su embarque y la producción total de tarjetas en ambas plantas de la compañía, es el resultado de una función de densidad conjunta de tres variables aleatorias dada por:

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = \frac{3}{7}(x + y^2 + 2z)e^{-x} I_{[0,\infty)}(x) I_{[0,1]}(y) I_{[0,1]}(z),$$

donde
X= Producción total de tarjetas en las dos plantas, medida en miles de unidades
Y= Proporción de tarjetas ensambladas en Taipéi que se embarcan sin ajuste
Z= Proporción de tarjetas ensambladas en Nankan que se embarcan sin ajuste

d) **(9 puntos)** Proporcione la función de densidad marginal de la producción total de tarjetas en las dos plantas. ¿Cuál es la probabilidad de que menos de 1000 tarjetas sean producidos en un día cualquiera?
e) **(9 puntos)** Proporcione la función de densidad condicional de X, dado que 50 por ciento de las tarjetas son embarcadas sin haber requerido un ajuste desde la planta de Taipéi. ¿Cuál es la probabilidad de que ASUS produzca una cantidad menor o igual a 1000 tarjetas un determinado día, dado que 50 por ciento de las tarjetas son embarcados sin haber requerido un ajuste desde la planta de Taipéi?

4.- Suponga que la duración en horas, llamémosla T, de cierto dispositivo electrónico es una variable aleatoria con una distribución exponencial con parámetro β. El funcionamiento de una máquina que usa este dispositivo cuesta C_1 pesos$/hora$. Mientras la máquina está funcionando se obtiene una utilidad de C_2 pesos$/hora$, con $C_2 > C_1$.

a) **(9 puntos)** Para una jornada laboral de H horas, calcula la utilidad esperada, donde

$$U(T) = \begin{cases} (C_2 - C_1)H, & si\ T > H \\ (C_2 - C_1)T, & si\ T \le H \end{cases}$$

b) **(9 puntos)** Ahora considera el salario del operador de la máquina durante la jornada laboral, el cual obtiene un pago de C_3 pesos$/hora$. Calcula la utilidad esperada

PROBABILIDAD
EXAMEN FINAL. TIPO A
Enero-Mayo, 2015

Nombre:____Clave única____________

PARTE I

A continuación se presentan 6 preguntas de opción múltiple, las cuales deben ser contestadas en la siguiente tabla. Cada pregunta tiene un valor de 5 puntos (No se calificará procedimiento)

Pregunta	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Respuesta						

1.- Sean X, Y y Z variables aleatorias independientes y continuas. Entonces, la probabilidad del evento

$$\mathbb{P}(|x| < 5, Y < 4, Z^3 > 8),$$

en términos de las funciones de distribución $F_X, F_Y\ y\ F_Z$ es:

a) $F_X(5)F_Y\ (4)\ F_Z(2)$
b) $[1 - F_X(-5)]F_Y\ (4)\ F_Z(2)$
c) $[F_X(5) - F_X(-5)]F_Y\ (4)\ F_Z(2)$
d) $[F_X(5) - F_X(-5)]F_Y\ (4)\ [1 - F_Z(2)]$

2.- Evalúe las siguientes afirmaciones para identificar la opción correcta

I) Sean $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ variables aleatorias independientes cada una con distribución normal estándar. Entonces $J = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_n^2 \sim \chi^2_{(n)}$.

II) Si $X \sim Binomial\,(1000{,}0.28)$, entonces $\mathbb{p}[250 \leq X \leq 320]$ se puede aproximar por $\mathbb{p}[-2.11 \leq Z \leq 2.82]$, donde $Z \sim N(0{,}1)$.

III) Si $X \sim Uniforme(-1{,}1)$, entonces $Y = X^2 \sim Uniforme(0{,}1)$.

a) Sólo (II) es fala
b) Sólo (I) y (III) son falsas
c) Sólo (III) es falsa
d) Todas son correctas

3.-Sea X una variable aleatoria tal que, $X \sim Binomial(6, \frac{1}{6})$. Entonces, el valor esperado de $X(X-1)$ es igual a:

a) 5/6
b) 0
c) 5/36
d) -1/6

4- Un inversionista decide comprar 50 acciones de la empresa ψ y vender 70 de la empresa υ, por lo que el rendimiento de su portafolio se puede ver como una combinación lineal de la posición en ambos activos financieros $\Pi = 50r_\psi - 70r_\upsilon$; con las r´s igual a los rendimientos de los correspondientes activos. Se sabe que $\left(r_\psi, r_\upsilon\right)' \sim N(3.5{,}6.4{,}1.44{,}5.29, \rho)$.
En finanzas, se le conoce a la raíz cuadrada de la varianza del rendimiento del portafolio como "Volatilidad". Para este portafolio, una mayor volatilidad implica mayor riesgo y viceversa. Si el inversionista prefiere tomar menos riesgos al momento de armar su portafolio, determine cuál es la ρ que más le conviene.

a) $\rho = 0.85$
b) $\rho =$ -0.85
c) $\rho = 0.31$
d) $\rho = 0.1$

5.- Evalúe las siguientes afirmaciones para identificar la opción correcta

(IV) Sean $X_1, X_2, \ldots X_n$ variables aleatorias independientes tales que $X_i \sim Bernoulli(p)$, para $i = 1,2,..,n$ y $\overline{X} = \frac{\sum_{i-1}^{n} X_i}{n}$. Entonces, $\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$

(V) Suponga que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ y sea $Y = e^X$. Entonces, $\mathbb{E}(Y) > e^\mu$

a) (I) es verdadera y (II) es falsa
b) (II) es verdadera y (I) es falsa
c) (I) y (II) son falsas
d) (I) y (II) son verdaderas

6.- Sea $X \sim Gama(\alpha, \beta)$, tal que $\mathbb{E}(X) = 2\ y\ \mathbb{E}(X^2) = 8$. Evalúe las siguientes afirmaciones para identificar la opción correcta.

(I) $X \sim \chi^2_{(2)}$

(II) $\mathbb{P}(1 < X \leq 4) = e^{-1/2} - e^{-2}$

(VI) $M_X(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$

(VII) $\mathbb{P}(X > 6 | X > 2) = e^{-2}$

a) Todas son verdaderas
b) Sólo (I), (III) y (IV) Son verdaderas
c) Sólo (I), (II) y (IV) Son verdaderas
d) Sólo (II), (III) y (IV) Son verdaderas

PARTE II

Indica claramente el inciso que estás resolviendo. Si tienes dos respuestas para una pregunta tacha la que consideres incorrecta, de lo contrario la ambigüedad anulará ambas. <u>Un número o un resultado sin la debida justificación no dan crédito</u>

1.- La duración X de un componente electrónico, es una variable aleatoria con distribución exponencial. Hay dos procesos para su fabricación. El proceso I brinda una duración esperada de 100 horas. y tiene un costo unitario de *c* pesos. El proceso II brinda una duración esperada de 150 horas y el costo unitario es de *2c* pesos. Si un componente dura menos de 200 horas, el productor tiene una pérdida estimada en *k* pesos.

a) **(8 puntos)** Construye las variables aleatorias $C_I(X)$ y $C_{II}(X)$ que representan el costo de producción por unidad, usando el proceso I y el proceso II respectivamente.
b) **(8 puntos)** Determina el costo esperado con cada uno de los procesos.
c) **(10 puntos)** Calcula $\mathbb{E}\big(C_{II}(X)\big) - \mathbb{E}\big(C_I(X)\big)$ y determina para qué valores de *c* conviene más el proceso *I* y para qué valores conviene más el proceso *II*. Estos valores de *c* dependen de *k*.

2.- **(10 puntos)** Un estacionamiento tiene dos entradas. La llegada de vehículos a la entrada I tiene una distribución de Poisson, con un promedio de tres vehículos por hora; mientras que en la puerta II la distribución de arribos es también Poisson pero con un promedio de cuatro vehículos por hora. Calcula la probabilidad de que un total de tres vehículos entren al estacionamiento en una hora determinada. (Asume que las distribuciones son independientes).

3.- **(10 puntos)** Las variables aleatorias X y Y tienen la siguiente función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right], \qquad |\rho| < 1$$

Sean $\nu = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ y $\vartheta = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}$.

Encuentre la función de densidad conjunta de ν y ϑ, y demuestre que ν y ϑ son independientes**.**

4.- Un concurso consiste en dos partes. Primero el concursante tira dos dardos a un blanco ubicado a 6 metros de distancia. Se sabe que 3 de cada diez personan atinan al blanco. Sea Z la v.a. del número de aciertos en el blanco. Se realizan Z extracciones sin reemplazo de una urna que contiene 5 bolas numeradas como sigue: 2 con el número uno, 2 con el número dos y la última con el número tres. Sea W la suma de los puntos obtenidos.

a) **(12 puntos)** Hallar $f_{Z,W}(z,w)$
b) **(6 puntos**) Calcular $\mathbb{E}(W)\ y\ Var(W)$
c) **(6 puntos)** El juego paga $1,000 por cada punto obtenido. Calcule el valor esperado de la ganancia.

PROBABILIDAD
EXAMEN FINAL. TIPO B
Agosto-Diciembre, 2015

Nombre:____Clave única____________

PARTE I

A continuación se presentan 6 preguntas de opción múltiple, las cuales deben ser contestadas en la siguiente tabla. Cada pregunta tiene un valor de 5 puntos (No se calificará procedimiento)

Pregunta	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Respuesta						

1. Diga cuál de las siguientes aseveraciones es verdadera:
   a) Un experimento aleatorio tiene el espacio muestral $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, y todos los eventos elementales son equiprobables. Defina ahora los eventos $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ y $C = \{1, 4\}$. Los eventos A, B y C son mutuamente independientes.
   b) La combinación para abrir una chapa consiste en tres números enteros del conjunto $\{0, 1, \ldots, 50\}$. La combinación es tal, que dos números consecutivos no pueden ser iguales. El número de combinaciones posibles es entonces $(50)^3$.
   c) Un experimento aleatorio consiste en dos lanzamientos de un dado, y la salida consiste en la pareja ordenada (lanzamiento1, lanzamiento2). Defina los siguientes dos eventos: A = {lanzamiento1 > lanzamiento2}; B = {lanzamiento1 = 6}. Entonces, $P(A|B) = P(B|A)$.

2. La pareja de variables aleatorias X,Y tiene la función de masa de probabilidad señalada en la siguiente tabla:

X ↓ Y →	**-1**	**0**	**1**

- 1	1/6	1/12	1/12
0	1/12	1/6	1/12
1	1/12	1/12	1/6

¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero?

a) X y Y son independientes

b) $P(X=-1|Y=-1)=2P(X=-1|Y=0)=2P(X=-1|Y=1)$

c) El coeficiente de correlación entre X y Y es cero

3. Sea X una v. a. uniforme continua en el intervalo [A,B], i.e., $f(x)=1/(B-A)$ para $x\in[A,B]$. Entonces, el primer cuartil de X es

a) $A/2$

b) $A+(B-A)/4$

c) $(B-A)/4$

d) $A/(B-A)$

4. Se lanza una moneda honesta 3 veces. Sea X el máximo número de veces consecutivas que aparece un mismo resultado. $P(X=1)$ es igual a

a) 1/2

b) 1/3

c) 1/4

d) 1/5

5. Sean A, B y C eventos tales que P(C)>0. Considere los siguientes dos enunciados:

I. $P(A\cup B|C)=P(A|C)+P(B|C)-P(A\cap B|C)$

II. $P(A|C)=1-P(A^c|C)$

¿Cuál de las siguientes opciones es verdadera?

a) I y II falsas

b) I y II verdaderas

c) I falsa y II verdadera

d) I verdadera y II falsa

6. Sea X una v. a. con función de densidad dada por $f(x)=|x-1|I_{[0,2]}(x)$. Entonces la moda de X es

a) 1

b) 1/2
c) 0 y 2
d) No existe

PARTE II

Indica claramente el inciso que estás resolviendo. Si tienes dos respuestas para una pregunta tacha la que consideres incorrecta, de lo contrario la ambigüedad anulará ambas. <u>Un número o un resultado sin la debida justificación no dan crédito</u>

7. Suponga que se tiene un vector aleatorio normal bivariado $(X,Y)' \sim N_2(\mu,\Sigma)$, con $\mu' = (1,-1)$ y $\Sigma = \begin{pmatrix} 12.5 & 5.5 \\ 5.5 & 20.3 \end{pmatrix}$.

   a) **(8 puntos)** Si definimos la transformación $(U,V)' = \left(2X+Y, \dfrac{X-Y}{2}\right)$. Determina la distribución del vector (U,V).

   b) **(8 puntos)** Calcula $P\left(X > \dfrac{19.83-Y}{2}\right)$.

8. Sea X la proporción de personas económicamente activas cuyo ingreso es inferior a un salario mínimo (SM), y sea Y la proporción de personas cuyo ingreso es superior a 6 SM. La función de densidad conjunta entre X y Y está data por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 162xy, & 0 \le x \le 2/3,\ 0 \le y \le x/2 \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}.$$

   Además se sabe que

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{81}{4}x^3, & 0 \le x \le 2/3 \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases},$$

$$E(X) = \frac{8}{15},\ E(X^2) = \frac{8}{27},\ E(Y) = \frac{8}{45},\ E(Y^2) = \frac{1}{27}.$$

   a) **(5 puntos)** Obtenga la función de densidad marginal de Y.

   b) **(8 puntos)** Obtenga la proporción esperada de personas económicamente activas cuyo ingreso es superior a 6 SM, si se conoce la proporción de personas económicamente activas cuyo ingreso es inferior a un SM.

   c) **(8 puntos)** Calcule el coeficiente de correlación entre las variables X y Y e interprete su valor.

d) **(10 puntos)** Las personas que tienen un ingreso inferior a un SM no pagan impuestos. Se propone que aquellos que tienen un ingreso inferior a 6 SM tampoco lo hagan. ¿Cuál será el valor esperado y varianza de la proporción de personas con un ingreso entre 1 y 6 SM?

9. Sea Y_1 una v. a. binomial con n_1 ensayos y probabilidad de éxito p_1. Sea Y_2 otra v. a. binomial independiente de la anterior con n_2 ensayos y probabilidad de éxito p_2, i.e.,

$$f_{Y_i}(y_i) = \binom{n_i}{y_i} p_i^{y_i}(1-p_i)^{n_i - y_i} I_{\{1,\ldots,n_i\}}(y_i), \text{ para i=1,2,}$$

con función generadora de momentos

$$M_{Y_i}(t) = (1-p_i + p_i e^t)^{n_i}, \text{ para i=1,2.}$$

a) **(5 puntos)** Si Z es una v. a. tal que su función generadora de momentos es $M_Z(t) = M_{Y_1}(t) M_{Y_2}(t)$, ¿qué relación funcional existe entre Z, Y_1 y Y_2?
b) **(8 puntos)** Calcule la media y varianza de Z.
c) **(10 puntos)** Si $p_1 = 0.2$ y $p_2 = 0.8$, encuentra la función de densidad de $W = Y_1 + n_2 - Y_2$. Sugerencia: Encuentra la función generadora de momentos de W.

PROBABILIDAD
EXAMEN FINAL. TIPO A
Enero-Mayo, 2016

Nombre:____Clave única____________

PARTE I

A continuación se presentan 6 preguntas de opción múltiple, las cuales deben ser contestadas en la siguiente tabla. Cada pregunta tiene un valor de 5 puntos (No se calificará procedimiento)

Pregunta	1	2	3	4	5	6
Respuesta						

7. En el lanzamiento de dos dados con 6 caras definimos los siguientes eventos. A = el primer dado muestra un número par, B = el segundo dado muestra un 5 o un 6. ¿Cuál de las siguientes opciones es falsa:
   e) A y B son independientes
   f) La probabilidad de B dado A es 1/3
   g) La probabilidad de B dado A es igual a la probabilidad de B
   h) La probabilidad de que ni A ni B ocurran es de 2/3

8. Sean $X_1 \sim N(6,1)$ y $X_2 \sim N(7,1)$ v.a.'s independientes y definimos $Y = X_1 - X_2$. Entonces la opción verdadera es:
   e) $P(Y > 0) = P(X_2 > X_1)$
   f) $Y \sim N(1,2)$
   g) $M_Y(t) = e^{-t+t^2}$
   h) $P(X_1 > X_2) = \Phi(0.7071)$

9. Sean X_1, X_2, X_3, X_4 v.a.'s independientes con varianza 1. Sean $U = 2X_1 + X_2 + X_3$ y $V = X_2 + X_3 + 2X_4$. El coeficiente de correlación entre U y V es:
   d) 1/3
   e) 1/4
   f) 1/2
   g) 1

10. Sean X y Y v.a.'s con función de densidad conjunta dada por $f(x, y) = \frac{1}{x^2 y^2}$ definida para x≥1, y≥1. Si definimos la transformación $U = X/Y$ y $V = XY$, la función de densidad conjunta para (U,V) definida para u>0, v≥1 está dada por
   e) $\frac{1}{uv}$
   f) $\frac{1}{2u^2 v}$
   g) $\frac{1}{2uv^2}$
   h) $\frac{1}{v^2}$

11. Indique cuál de las siguientes opciones es falsa:
   e) Si X y Y son independientes, entonces para cualesquiera funciones $g_1(X)$ y $g_2(Y)$ se cumplirá que $E\{g_1(X)g_2(Y)\} = E\{g_1(X)\}E\{g_2(Y)\}$
   f) Para dos v.a.'s $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ y $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ se cumple que $aX - bY + c \sim N(a\mu_X - b\mu_Y + c, a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)$
   g) Si $Cov(X, Y) = 0$ entonces las v.a.'s X y Y pueden o no ser independientes
   h) Si X y Y son v.a.'s independientes, entonces $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$

12. Sea X una v.a. exponencial con media 20, i.e., $f(x) = \frac{1}{20} e^{-\frac{x}{20}} I_{(0,\infty)}(x)$. La mediana de X es aproximadamente:
   d) 0.035

e) 13.86
f) 20
g) 46.05

PARTE II

Indique claramente el inciso que está resolviendo. Si tiene dos respuestas para una pregunta tacha la que considere incorrecta, de lo contrario la ambigüedad anulará ambas. <u>Un número o un resultado sin la debida justificación no dan crédito</u>

10. Las concentraciones de monóxido de carbono (X) y de bióxido de carbono (Y) en las emisiones de un coche elegido al azar en la Ciudad de México, siguen una distribución conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}2e^{-x-y}, & 0\le y<x<\infty \\ 0, & \text{e.o.c.}\end{cases}.$$

d) **(10 puntos)** Para que un coche pase la verificación se necesita que $2X+Y\le 9$. Calcule la probabilidad de que un coche elegido al azar pase la verificación.

e) **(15 puntos)** Supóngase que al medir la cantidad de bióxido de carbono se observa una concentración de Y=2. ¿Cuál es la probabilidad de que la concentración de monóxido de carbono (X) sea mayor que 4?

f) **(10 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que un coche que ha pasado la verificación emita una concentración de monóxido de carbono (X) mayor que 3?

11. Sean X y Y v.a.'s discretas con función de masa de probabilidad dada por

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} k\left(\dfrac{x}{y}\right), & x=1,2\,;\; y=1,2 \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}.$$

e) **(10 puntos)** Obtenga el valor de k que haga que f(x,y) sea una función de masa (densidad) válida.

f) **(10 puntos)** Calcule $P(X>1|Y=1)$.

g) **(15 puntos)** Calcule el coeficiente de correlación entre las variables X y Y e interprete su valor.

PROBABILIDAD

EXAMEN FINAL. TIPO A

Agosto-Diciembre, 2016

Nombre:____Clave única_____________

PARTE I

A continuación se presentan 6 preguntas de opción múltiple, las cuales deben ser contestadas en la siguiente tabla. Cada pregunta tiene un valor de 5 puntos (No se calificará procedimiento)

Pregunta	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Respuesta						

1.- Sean X y Y dos variables aleatorias independientes tales que cada una tiene una distribución *Bernoulli* con valor esperado θ. Entonces $\mathbb{P}(XY = 1) = p$, con

a) $p = \theta$ b) $p = \theta(1-\theta)$ c) $p = \theta^2$ d) ninguna de las anteriores

2.- Sea X una v.a con media μ y varianza σ^2. Se define la v.a. Z como

$$Z = \frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2} + (X - 12)$$

Entonces el valor esperado de la v.a. Z es igual a

a) 0 b) $\mu - 11$ c) μ d) $\frac{(X-\mu)}{\sigma}$

3.- Un cajón tiene 4 monedas de \$10 y 2 de \$5. Se sacan de forma sucesiva dos sin reemplazo, si la segunda moneda fue \$5, ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea \$10?

a) 4/5 b) 1/3 c) 2/5 d)1/2

4.- Sea $X \sim Gama(\alpha, \beta)$, tal que $\mu_X = 2\ y\ \sigma_X^2 = 2$. Entonces su tercer momento $(\mathbb{E}(X)^3 = \mu_X^3)$ está en el intervalo

a) (0,10] b) (10,20] c) (20,30] d) (30, ∞]

5.- El tiempo, en días, en que el tipo de cambio peso-dólar se mantiene constante se distribuye como una exponencial con media 8 días. Si sabemos que el tipo de cambio ya lleva 5 días sin movimientos, ¿cuál es la probabilidad de que dure 10 días más sin movimiento?

a) 0.7135 b) 0.1534 c) 0.2865 d) 0.8466

6.-Si X es una v.a. no negativa con $\mathbb{E}(X) = 25$, diga cuál de las siguientes afirmaciones es falsa.

a) $\mathbb{E}(X^3) \geq 15625$ b) $\mathbb{E}\left(\sqrt{X}\right) \leq 5$ c) $\mathbb{E}(\log X)) \leq log 25$ d) $\mathbb{E}(e^{-X}) \leq e^{-25}$

PARTE II

Indica claramente el inciso que estás resolviendo. Si tienes dos respuestas para una pregunta tacha la que consideres incorrecta, de lo contrario la ambigüedad anulará ambas. <u>Un número o un resultado sin la debida justificación no dan crédito</u>

1.- (**20 puntos**) Una marca de cosméticos ha diseñado un nuevo tratamiento que consta del uso de dos productos en distintas fases, ambos con tiempo de vida máximo de un año. La fase 1 del producto sólo puede ser empleada si la fase 2 está disponible y en buen estado. Sea así (X_1, X_2) un vector aleatorio en donde X_i modela el tiempo de vida del producto asociado a la *j-ésima* fase del tratamiento para $j = 1{,}2$.

Considere la función de densidad conjunta dada por

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = 8x_1x_2 I_{[0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1]}(x_1, x_2)$$

Sean $U = \frac{X_1}{X_2}$ y $V = X_2$, donde U y V denotan la proporción de duración de tiempo que se usa el producto correspondiente a la primera fase y el tiempo de vida asociado a la fase 2 del tratamiento, respectivamente.

a) (**10 puntos**) Encuentre la función de densidad conjunta de (U, V) e indica claramente su soporte.
b) (**5 puntos**) ¿Son U y V independientes?
c) (**5 puntos**) Encuentra la mediana de $U|V = v; si\ v = \frac{1}{2}$

2.- (**30 puntos**) Victoria distribuye sus productos en tiendas departamentales ubicadas en cinco capitales principales, tres en Europa y dos en América. Considere las ganancias de estas tiendas medidas en millones de dólares anuales que pueden modelarse mediante un vector aleatorio $\underline{X} \sim N_5\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ con

$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ & 2 & -1 & 0 & 1 \\ & & 5 & -1 & 0 \\ & & & 2 & 0 \\ & & & & 3 \end{bmatrix}$$

a) (**5 puntos**) Obtenga la matriz de correlaciones asociada con el vector de ganancias $\underline{X}$
b) (**5 puntos**) Encuentre la función de densidad marginal de X_1 (ganancias de la tienda 1) y X_2 (ganancias de la tienda 2), indique la correlación entre ambas e interprete.

c) (**5 puntos**) Muestre que la ganancias de la tienda 2 (X_2) y las ganancias de la tienda 1 (X_1) son independientes.

d) (**5 puntos**) Encuentre la función de densidad de $X_4|X_1 = x_1$ y calcula la probabilidad de que las ganancias de la tienda 4 superan los tres y medio millones de dólares dado que al día de hoy se han vendido setecientos mil dólares en la tienda 1.

e) (**10 puntos**) Sean $U = \frac{1}{3}X_1 + \frac{5}{12}X_2 + \frac{1}{4}X_3$ y $V = \frac{2}{5}X_4 + \frac{3}{7}X_5$ los gastos de representación asociados a las tiendas ubicadas en Europa y América, respectivamente. Calcule $Var(U) y\ Cov(U, V)$.

3.- (**20 puntos**) En una tienda se venden melones chinos que si no son vendidos durante el día deben ser malbaratados al final de éste. En esta época del año los melones cuestan $15 y se venden en $30 cada uno. La demanda (D) por este bien sigue una distribución de probabilidad dada por la siguiente tabla.

D	0	1	2
Prob.	0.35	0.40	0.25

Si se denota por *U* la variable aleatoria que describe la utilidad obtenida al tener un inventario de 2 melones por día, y *V* la variable aleatoria que denota la utilidad del vendedor si se tuene un melón en el inventario por día.

a) (**10 puntos**) Encuentre las funciones de probabilidad *(f.m.p)* de *U* y *V*.

b) (**10 puntos**) Usando los valores esperados de U y V determine qué le conviene al administrador del negocio, tener uno ó dos melones en existencia.

PROBABILIDAD

EXAMEN FINAL. TIPO A

Enero-Mayo, 2017

Nombre:____Clave única____________

PARTE I

A continuación se presentan 6 preguntas de opción múltiple, las cuales deben ser contestadas en la siguiente tabla. Cada pregunta tiene un valor de 5 puntos (No se calificará procedimiento)

Pregunta	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Respuesta						

1.- Sean X una variable aleatoria con función de densidad acumulada *F* dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{3x}{5} & 0 \leq x < \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1+3x}{5} & \dfrac{1}{3} \leq x < \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{2+3x}{5} & \dfrac{2}{3} \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Evalúe las siguientes afirmaciones para identificar la opción correcta.

(I) $\mathbb{P}\left(\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}\right) = 0.7$ y (II) $\mathbb{P}\left(X = \frac{1}{3}\right) + \mathbb{P}\left(X = \frac{1}{2}\right) = 0.2$

Entonces,

a) (I) y (II) son verdaderas
b) (I) es falsa y (II) es verdadera
c) (I) es verdadera y (II) es falsa
d) (I) y (II) son falsas

2.- Se lanza un dado honesto. Sea X la variable aleatoria que denota el doble del número de la cara que aparezca y Y la variable aleatoria que toma el valor 1 si el número que aparece es impar y 3 si es par. Evalúe las siguientes afirmaciones para identificar la opción correcta.

(I) $\mathbb{E}(X+Y) = 10$ y (II) $\mathbb{E}(XY) = 51$

Entonces,

a) (I) y (II) son verdaderas
b) (I) es falsa y (II) es verdadera
c) (I) es verdadera y (II) es falsa
d) (I) y (II) son falsas

3.- Un portafolio de inversión se conforma con tres instrumentos de inversión: J, K y L, cuyos retornos esperados son mutuamente independientes. Las funciones generadoras de momentos de los retornos esperados están dadas por

$$M_J(t) = (1-2t)^{-3}, \quad M_K(t) = (1-2t)^{-2.5}, \quad M_L(t) = (1-2t)^{-4.5}$$

Sea $X=J+K+L$ la variable aleatoria que representa el retorno esperado del portafolio de inversión. Evalúe las siguientes afirmaciones para identificar la opción correcta.

(I) $M_X(t) = M_J(t) + M_K(t) + M_L(t)$ (II) $\mathbb{E}(X) = 20$

a) (I) y (II) son verdaderas
b) (I) es falsa y (II) es verdadera
c) (I) es verdadera y (II) es falsa
d) (I) y (II) son falsas

4.- Si la función de densidad condicional de $X|\lambda \sim Poisson\ (\lambda)$ y $\lambda \sim Exp(5)$. Entonces,

a) $\mathbb{E}(X) = 5\ \ y\ \ Var(X) = 25$
b) $\mathbb{E}(X) = 4\ \ y\ \ Var(X) = 20$
c) $\mathbb{E}(X) = 5\ \ y\ \ Var(X) = 30$
d) $\mathbb{E}(X) = 4\ \ y\ \ Var(X) = 16$

5.- Sea X la variable aleatoria con función de densidad $f_X(x) = \frac{1}{2}, \quad -1 \leq x \leq 1$, si se sabe que $\mathbb{P}(|X| > a) \leq \frac{1}{4}$. Entonces el valor de a para el cual se cumple la desigualdad de Tchebyshev es igual a:

a) 1.154
b) 2
c) 1.17
d) 1

6. Evalúe las siguientes afirmaciones para identificar la opción correcta

(I) Si $\mathbb{P}(A_1) = 0.2, \mathbb{P}(A_2) = 0.3, \mathbb{P}(A_3) = 0.4\ y\ \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j), para\ todo\ i \neq j$, entonces $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0.024$

(II) Si $A \cap B = \phi\ y\ \mathbb{P}(B) = 0.2$, entonces $\mathbb{P}(A|B) = 0$

(III) Si $\mathbb{P}(A) = 0.8\ \ y\ \mathbb{P}(B) = 0.7$, entonces $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0.5$

a) (I) , (II) y (III) son verdaderas
b) (I) y (II) son verdaderas, mientras que (III) es falsa
c) (I) es falsa, mientras que (II) y (III) son verdaderas
d) (I) y (III) son verdaderas, mientras que (II) es falsa

PARTE II

Indica claramente el inciso que estás resolviendo. Si tienes dos respuestas para una pregunta tacha la que consideres incorrecta, de lo contrario la ambigüedad anulará ambas. <u>Un número o un resultado sin la debida justificación no dan crédito</u>

1.- El tiempo de arribo (aleatorio, medido en minutos) de cuatro tareas a un servidor se denota por $0 = T_0 < T_1 < T_2 < T_3 < T_4$. Sea f_T la función de densidad de probabilidad (*f.d.p.*) conjunta dada por

$$f_T(t_1, t_2, t_3, t_4) = 24e^{-(t_1+t_2+t_3+t_4)}\mathbb{I}_{\mathbb{S}_T}(t_1, t_2, t_3, t_4)$$

donde $\mathbb{S}_T\{0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < \infty\}$ es el soporte de la densidad conjunta de T. Considere ahora el tiempo entre arribos U_i definido por

$$U_i = T_i - T_{i-1}, \quad i = 1,2,3,4$$

a) (**10 puntos**) Encuentre la *f.d.p.* conjunta de $\boldsymbol{U} = (U_1, U_2, U_3, U_4)$. Indique claramente su soporte, $\mathbb{S}_U$.
b) (**7 puntos**) ¿Son los tiempos entre arribos independientes? Justifique su respuesta.
c) (**6 puntos**) Determine la mediana del tiempo entre arribos entre la segunda y la tercer tarea si se sabe que el tiempo de arribo entre la primera y segunda tarea fue de 90 segundos, es decir, $u_2 = 1.5$

2.- Sean X_1, X_2, X_3 variables aleatorias independientes que modelan el desgaste medido en unidades acorde a estándares internacionales que sufren tres diferentes textiles después de un año de uso. Suponga que X_1 y X_3 tienen una función de densidad normal con media $\mu = 1$ y varianza $\sigma^2 = 1$. Por otra parte, la variable aleatoria X_2 tiene una distribución normal con $\mu = 0$ y varianza $\sigma^2 = 1$.

a) (**2 puntos**) Obtenga la matriz de varianzas y covarianzas $\Sigma_{\underline{X}}$ de $\underline{X}^T = (X_1, X_2, X_3)$.
b) (**6 puntos**) Suponga que se elaboran dos prendas con estos materiales y se trata de medir el desgaste de las mismas Y_1 y Y_2 donde,

$$Y_1 = X_1 + 2X_2 \quad \text{y} \quad Y_2 = X_2 + 3X_3$$

Encuentre la función de densidad de probabilidad conjunta de $\underline{Y}^T = (Y_1, Y_2)$.

c) (**2 puntos**) Obtenga la matriz de varianzas y covarianzas $\Sigma_{\underline{Y}}$ de $\underline{Y}^T$.
d) (**3 puntos**) Determine si Y_1 y Y_2 son variables aleatorias independientes entre sí. Justifique su respuesta
e) (**6 puntos**) Calcule la probabilidad de que la prenda 2 tenga un desgaste mayor a 4 unidades dado que la prenda 1ha sufrido un desgate de 2 unidades.

3.- CASANOVA Rentals, una compañía pequeña, renta tres tipos de autos: compactos, medianos (sedan), y grandes (lujosos). Sean X_1, X_2 y X_3 las variables aleatorias que representa el número de autos compactos, medianos y grandes que CASANOVA renta por día, respectivamente. El espacio muestral de los valores posibles que toman $X_1, X_2\ y\ X_3$ está dado por

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3): x_1, x_2\ y\ x_3 \in \{0,1,2,3\}\}$$

CASANOVA tiene un inventario de 9 autos igualmente distribuidos entre los tres modelos.

La función de densidad de probabilidades asociada con $X_1, X_2\ y\ X_3$ está dada por

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{576}\right)(x_1 + 2x_2 + 3x_3)\prod_{i=1}^{3} \mathbb{I}_{\{0,1,2,3\}}(x_i)$$

a) (**7 puntos**) Proporcione la función de densidad marginal de X_3. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres autos grandes se renten en un determinado día?
b) (**7 puntos**) Proporcione la función de densidad marginal de (X_1, X_2). ¿Cuál es la probabilidad de que más de un auto compacto y más de un auto mediano se renten en un determinado día?
c) (**7 puntos**) Proporcione la función de densidad condicional de X_1dado que $x_2 = 2$. ¿Cuál es la probabilidad de rentar no más de un auto compacto dado que dos o más autos medianos son rentados?
d) (**7 puntos**) Proporcione la función de densidad condicional de (X_1, X_2) dado que $x_3 = 0$. ¿Cuál es la probabilidad de rentar más de un auto compacto y más de un auto mediano dado que ningún auto grande se renta?

RESPUESTAS A PROBLEMAS SELECTOS

EXAMEN FINAL DE PROBABILIDAD

Agosto-Diciembre de 2005

Parte I

Pregunta	1	2	3	4	5	6

Respuesta	(c) (b)

Parte II

Solución problema 2

a) $S = \begin{cases} X & si\ X < c \\ c & si\ X \geq c \end{cases}$

Entonces

$$E[S] = \int_0^c xf(x)dx + \int_c^\infty cf(x)dx = \int_0^c xf(x)dx + c\left[\int_{-\infty}^\infty f(x)dx - \int_{-\infty}^c f(x)dx\right]$$

$$= \int_0^c xf(x)dx + c\left[1 - \int_{-\infty}^c f(x)dx\right] = \int_0^c xf(x)dx + c[1 - F(c)]$$

b) $p(c) = \begin{cases} Xd_2 - cd_1 & si\ X < c \\ c(d_2 - d_1) & si\ X \geq c \end{cases}$

Entonces

$$E[p(c)] = \int_0^c (xd_2 - cd_1)f(x)dx + \int_c^\infty c(d_2 - d_1)\,f(x)dx$$

$$= d_2\int_0^c xf(x)dx - cd_1\int_0^c f(x)dx + c(d_2 - d_1)\left[1 - \int_0^c f(x)dx\right]$$

$$= c(d_2 - d_1) + d_2\int_0^c xf(x)dx - cd_2\int_0^c f(x)dx$$

Por lo tanto

$$\frac{dE[p(c)]}{dc} = \frac{d[c(d_2 - d_1) + d_2\int_0^c xf(x)dx - cd_2\int_0^c f(x)dx]}{dc}$$

$$= (d_2 - d_1) - d_2\int_0^c f(x)dx = (d_2 - d_1) - d_2F(c)$$

Entonces

$$\frac{dE[p(c)]}{dc} = 0 \Rightarrow (d_2 - d_1) - d_2F(c) = 0 \Rightarrow F(c) = \frac{d_2 - d_1}{d_2}$$

Note que

$$\frac{d^2E[p(c)]}{dc^2} = -d_2f(c) < 0$$

c) $Si\ X \sim Unif(989{,}1020)$

Entonces

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 980 \\ \dfrac{x-980}{40} & si\ 980 < x < 1020 \\ 1 & si\ x > 1020 \end{cases}$$

Entonces el valor óptimo de c es

$$F(c) = \frac{c-980}{40} = \frac{d_2 - d_1}{d_2} = \frac{14-6}{14} = \frac{8}{14}$$

Por lo tanto C=1002.857

EXAMEN FINAL DE PROBABILIDAD

Agosto-Diciembre de 2006

Parte I

Pregunta	1	2	3	4	5
Respuesta		(d)		(c)	(b)

Parte II

Solución problema 7

$$E[(X_1 - X_2)(X_3 - 2X_2)] = E[X_1X_3] - 2E[X_1X_2] - E[X_2X_3] + 2E[X_2X_2] = 3 - 4 - 9 + 16 = 6$$

Solución problema 8

$$f_Y(y) = \frac{1}{4\sqrt{y}} I_{(0,1)}(y)$$

EXAMEN FINAL DE PROBABILIDAD

Agosto-Diciembre de 2009

Parte I

Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8
Respuesta	(b)	(c)					(a)	

Parte II

Solución problema 1

a) $E[U-V] = E[sen(\alpha)X - \cos(\alpha)\,Y - \cos(\alpha)\,X - sen(\alpha)Y] = 0$

$$Var[U-V] = Var[sen(\alpha)X - \cos(\alpha)\,Y - \cos(\alpha)\,X - sen(\alpha)]Y$$
$$= Var[(sen(\alpha) - \cos(\alpha))X - \big(\cos(\alpha) + sen(\alpha)\big)Y]$$
$$= (sen(\alpha) - \cos(\alpha))^2\, Var[X] + (\cos(\alpha) + sen(\alpha))^2 Var[Y]$$

$$= 2[sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha)] - 2\cos(\alpha)\,sen(\alpha) + 2\cos(\alpha)\,sen(\alpha) = 2$$

b) El Jacobiano está dado por $|J| = |sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha)| = 1$ y además se observa que

$$x(u,v)^2 + y(u,v)^2$$
$$= sen(\alpha)^2u^2 + 2\cos(\alpha)\,sen(\alpha)uv + \cos(\alpha)^2u^2 + \cos(\alpha)^2v^2$$
$$- 2\cos(\alpha)\,sen(\alpha)uv + sen(\alpha)^2v^2 = u^2 + v^2$$

$$f_{(U,V)}(u,v) = \frac{1}{2\pi}exp\left\{-\frac{x(u,v)^2 + y(u,v)^2}{2}\right\}|J| = \frac{1}{2\pi}exp\left\{\frac{u^2 + v^2}{2}\right\}$$

c) U, V son normal estándar independientes.

Solución problema 3

a) $\frac{1}{c} = \int_0^\infty e^{-(x+y)}dxdy = \int_0^\infty e^{-x}(e^{-y})|_0^x dx = \int_0^\infty e^{-x} - e^{-2x}dx = \left(\frac{e^{-2x}}{2} - e^{-x}\right)\Big|_0^\infty = 2$

Entonces c=2

b) $P(X + Y \leq 1) = \int_0^{1/2} \int_y^{1-y} 2e^{-(x+y)}dxdy = \int_0^{1/2} 2e^{-y}(-e^{-x})|_y^{1-y} dx = \int_0^{1/2} 2(e^{-2y} - e^{-1})dy = -e^{-2y} - 2e^{-1}y|_0^{1/2} = 1 - 2e^{-1}$

d) $f_{Y|X=x}(y) = \frac{2e^{-(x+y)}}{2e^{-x}(1-e^{-x})}I_{[0\leq y\leq x]} = \frac{e^{-y}}{1-e^{-x}}I_{[0\leq y\leq x]}$

$$E[Y|X = x] = \int_0^x \frac{ye^{-y}}{1 - e^{-x}}dy = -\frac{(y+1)e^{-y}}{1 - e^{-x}}\Big|_0^x = \frac{1 + (x+1)e^{-x}}{1 - e^{-x}}$$

Por lo tanto

$$E[Y|X = 1] = \frac{1 - 2e^{-1}}{1 - e^{-1}}$$

EXAMEN FINAL DE PROBABILIDAD

Enero-Mayo de 2010

Solución Parte I

PREGUNTA	1	2	3	4	5	6
RESPUESTA		(b)	(d)		(c)	(a)

Solución Parte II

Solución problema 2

a) $Y_1 = 3X_1 + X_2 + X_3 = a'\underline{X}; \quad con \ \underline{a}' = [3 \ \ 1 \ \ 1]$

$$Entonces \ \ a'\underline{\mu} = [3 \ \ 1 \ \ 1]\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \underline{a}'\Sigma\underline{a} = [3 \ \ 1 \ \ 1]\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 20$$

Por lo tanto $Y_1 \sim N(0,20)$

b) $A\Sigma A' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

$$A\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces $\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}\right)$

c) $E(X_1X_2) = E(X_1)E(2) = (0)(-1) = 0$

d) $E[\underline{Z}|X_2 = 1] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1(1+1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$Var[\underline{Z}|X_2 = 1] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1 [0 \quad 1] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{Z}|X_2 = 1 \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\right)$$

Solución problema 3

Sea $\delta_i = \begin{cases} 1 & si\ la\ i-ésima\ canica\ seleccionada\ es\ blanca \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$

$$P(\delta_1 = 1|\delta_2 = 0) = \frac{P(\delta_1 = 1, \delta_2 = 0)}{P(\delta_2 = 0)}$$

$$= \frac{P(\delta_2 = 0|\delta_1 = 1)P(\delta_1 = 1)}{P(\delta_2 = 0|\delta_1 = 1)P(\delta_1 = 1) + P(\delta_2 = 0|\delta_1 = 0)P(\delta_1 = 0)}$$

$$= \frac{\left(\frac{N_0+\beta}{B_0+N_0+(\alpha+\beta)}\right)\left(\frac{B_0}{B_0+N_0}\right)}{\left(\frac{N_0+\beta}{B_0+N_0+(\alpha+\beta)}\right)\left(\frac{B_0}{B_0+N_0}\right)+\left(\frac{N_0+\alpha}{B_0+N_0+(\alpha+\beta)}\right)\left(\frac{N_0}{B_0+N_0}\right)} = \frac{(N_0+\beta)B_0}{B_0(N_0+\beta)+N_0(N_0+\alpha)}$$

Solución problema 4

$$X = \frac{U+V}{\sqrt{2}}, \quad Y = \frac{U-V}{\sqrt{2}}, \quad X^2 + Y^2 = U^2 + V^2$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = -1$$

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[u^2+v^2-\rho(u^2-v^2)]\right]|J|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1+\rho)}} exp\left(-\frac{u^2}{2(1+\rho)}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho)}} exp\left(-\frac{v^2}{2(1-\rho)}\right) = f_U(u)f_V(v)$$

Por lo tanto U y V son independientes.

EXAMEN FINAL DE PROBABILIDAD

Agosto-Diciembre de 2010

Parte I

Pregunta	1	2	3	4	5	6
Respuesta	(d)		(c)	(c)	(b)	

Parte II

Problema 1

Solución (a)

$$M_{X_1X_2}(t_1,t_2) = E(e^{t_1X_1+t_2X_2}) = \frac{1}{4}\int_0^\infty \int_0^\infty e^{t_1x_1+t_2x_2}\, e^{-\frac{1}{2}(x_1+x_2)} dx_1 dx_2$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-x_2\left(\frac{1}{2}-t_2\right)}\,dx_2 \int_0^\infty e^{-x_1\left(\frac{1}{2}-t_1\right)}\,dx_1 = \frac{1}{(1-2t_1)}\frac{1}{(1-2t_2)}, t_i < \frac{1}{2}, i\ 1{,}2$$

(b)

$$M_{X_1}(t_1) = M_{X_1X_2}(t_1, 0) = \frac{1}{(1-2t_1)}, t_1 < \frac{1}{2}$$

$$M_{X_2}(t_2) = M_{X_1X_2}(0, t_2) = \frac{1}{(1-2t_2)}, t_2 < \frac{1}{2}$$

Entonces,

$$E(X_1) = \left.\frac{dM_{X_1}(t_1)}{dt_1}\right|_{t_1=0} = 2(1-2t_1)^{-2}|_{t_1=0} = 2$$

$$E(X_1^2) = \left.\frac{d^2M_{X_1}(t_1)}{dt_1^2}\right|_{t_1=0} = 8((1-2t_1)^{-3}|_{t_1=0} = 8$$

$$E(X_2) = \left.\frac{dM_{X_2}(t_2)}{dt_2}\right|_{t_2=0} = 2(1-2t_2)^{-2}|_{t_2=0} = 2$$

$$E(X_2^2) = \left.\frac{d^2M_{X_2}(t_2)}{dt_2^2}\right|_{t_1=0} = 8(1-2t_2)^{-3}|_{t_2=0} = 8$$

$$E(X_1X_2) = \left.\frac{d^2M_{X_1X_2}(t_1t_2)}{dt_1dt_2}\right|_{t_1=0,t_2=0} = 4(1-2t_1)^{-2}(1-2t_2)^{-2}|_{t_1=0,t_2=0} = 4$$

Ahora

$$COV(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2) = 0, \qquad \rho_{X_1,X_2} = 0$$

c)

$M_{X_1X_2}(t_1, t_2) = M_{X_1}(t_1)M_{X_2}(t_2)$, entonces son independientes

c)

$$P(X_1 + X_2 \leq 2) = \int_0^2 \int_0^{2-x_2} \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}(X_1+X_2)} dx_1 dx_2$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x_2} \left(-e^{-\frac{1}{2}x_1} \Big|_0^{2-x_2} \right) dx_2 = \int_0^2 \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x_2} \left(1 - e^{\frac{1}{2}x_2 - 1} \right) dx_2$$

$$= 1 - 2e^{-1}$$

Por lo tanto

$$P(X_1 + X_2 > 2) = 1 - P(X_1 + X_2 \leq 2) = 2e^{-1}$$

Problema 3

Solución(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/2 \\ 1/3 & 1 & -1/3 \\ 1/2 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución (b)

$$X_1 | X_1 = x_2 \sim N\left(\mu_1 + \varphi_{X_1 X_1} \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \mu_2), \sigma_1^2 (1 - \varphi_{X_1, X_2}^2 \right)$$

$$X_1 | X_1 = x_2 \sim N\left(\frac{38}{9}, \frac{32}{9} \right), \quad P(X_1 < 6 | X_1 = 3) \cong 0.8263$$

c)

$$T \sim N(24{,}321)$$

Problema 4

Solución (a)

$$E\big(U(T)\big) = H(C_2 - C_1) P(T > H) + (C_2 - C_1) \int_0^H t\, \beta e^{-\beta t} dt$$

$$= H(C_2 - C_1) e^{-\beta H} + (C_2 - C_1)\left[\beta^{-1} - e^{-\beta H}(\beta^{-1} + H)\right]$$

$$= (C_2 - C_1)\left[H e^{-\beta H} + \beta^{-1} - e^{-\beta H}(\beta^{-1} + H)\right]$$

$$= (C_2 - C_1)\left[\beta^{-1}\left(1 - e^{-\beta H}\right)\right]$$

Solución (b)

En este caso

$$U(T) = \begin{cases} (C_2 - C_1 - C_3)H, & si\ T > H \\ (C_2 - C_1)T - C_3H, & si\ \ T \leq H \end{cases}$$

$$E\big(U(T)\big) = H(C_2 - C_1 - C_3)P(T > H) - C_3HP(T \leq H) + (C_2 - C_1)\int_0^H t\,\beta e^{-\beta t}dt$$

$$\begin{aligned} &= H(C_2 - C_1 - C_3)e^{-\beta H} - C_3H\big(1 - e^{-\beta H}\big) \\ &+ (C_2 - C_1)\big[\beta^{-1} - e^{-\beta H}(\beta^{-1} + H)\big] \\ &= \ (C_2 - C_1)\big[He^{-\beta H} + \beta^{-1} - e^{-\beta H}(\beta^{-1} + H)\big] \\ &= (C_2 - C_1)\big[\beta^{-1}\big(1 - e^{-\beta H}\big)\big] - C_3H \end{aligned}$$

Ahora

$$\frac{dE(U)}{dH} = (C_2 - C_2)e^{-H\beta} - C_3$$

Luego $\frac{dE(U)}{dH} = 0$ implica que

$$H = -\frac{1}{\beta}ln\left(\frac{C_3}{C_2 - C_1}\right)$$

EXAMEN FINAL DE PROBABILIDAD

Enero-Mayo de 2011

Parte I

Pregunta	1	2	3	4	5	6	7
Tipo A	(a)		(c)		(b)		(a)

PARTE II

Problema 1 examen Tipo A

Solución

a) La *f.g.m.* de $(X,Y) \sim NBiv(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho)$ es

$$m_{XY}(t_1, t_2) = exp\left[t_1\mu_X + t_2\mu_Y + \frac{1}{2}(t_1^2\sigma_X^2 + 2t_1t_2\rho\sigma_X\sigma_Y + t_2^2\sigma_Y^2)\right]$$

Luego entonces, la *f.g.m.* de w está dada por

$$m_W(t) = E(e^{tW}) = E\left(e^{t(aX+bY+c)}\right) = e^{tc}E(e^{taX+tbY}) = e^{tc}m_{XY}(at,bt)$$

$$= e^{tc}e^{at\mu_X+bt\mu_Y+\frac{1}{2}\left(a^2t^2\sigma_X^2+2abt^2\rho\sigma_X\sigma_Y+b^2t^2\sigma_Y^2\right)}$$

$$= e^{(a\mu_X+b\mu_Y+c)t+\frac{1}{2}\left(a^2\sigma_X^2+2ab\rho\sigma_X\sigma_Y+b^2\sigma_Y^2\right)t^2}$$

$$= e^{(a\mu_X+b\mu_Y+c)t+\frac{1}{2}\left(a^2\sigma_X^2+2abCov(X,Y)+b^2\sigma_Y^2\right)t^2}$$

Por lo tanto,

$$W \sim N(a\mu_X + b\mu_Y + c, a^2\sigma_X^2 + 2abCov(X,Y) + b^2\sigma_Y^2)$$

b) Sea W=X+Y las ventas totales de las siguientes dos semanas. Entonces,

$W \sim N(80.115.2)$ y

$$P(W > 90) = P\left[\frac{W-80}{10.733} > \frac{90-80}{10.733}\right] = P(Z > 0.9310) \cong 0.176$$

c) $E(Y|X = 60) = 40 + 0.6\left(\frac{6}{6}\right)20 = 52$ y
$Var(Y|X = 60) = 36(1 - 0.6^2) = 23.04$. Entonces,
$Y|X = 60 \sim N(52,23.04)$

Problema 4 examen Tipo A

Solución

Sea A el evento *{un aspirante a policía es apto}*. Sea $a = P(A)$ y $1 - a = P(A^C)$.

Sea B el evento *{aprobar el examen}*. Entonces, de acuerdo con los datos, tenemos

$P(B^c|A) = 0.08\ y\ P(B|A^c) = 0.12$. Esto significa que $P(B|A) = 0.92\ y\ P(B^c|A^c) = 0.88$. Además se proporciona la información de que $P(A|B) = 0.85$. Por lo tanto, usando Bayes, tenemos que

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|A^c)P(A^c)} = \frac{0.92(a)}{0.92(a)+0.12(1-a)}\frac{0.92(a)}{0.8(a)+0.12} = 0.85.$$

Entonces $P(A) = 0.4250$. Lo cual implica que sólo 42.5% de los aspirantes a policías son aptos para serlo.

EXAMEN FINAL DE PROBABILIDAD

Agosto-Diciembre de 2011

Parte I

Pregunta	1	2	3	4	5	6
Tipo A		(c)		(c)		(a)

PARTE II

Problema 1 examen Tipo A.

a) $f_Q(q|p) = \frac{f(q,p)}{f_P(p)} = pe^{-pq}I_{[0,\infty)}(q);\quad f_P(p) = \int_0^\infty 0.5pe^{-pq}d_q = 0.5I_{[2,4]}(p)$

b) $P(q > 0.5|p = 2) = \int_{0.5}^\infty f_Q(q|p = 2)d_q = \int_{0.5}^\infty 2e^{-2q}\,d_q = 0.367879$

$$P(q > 0.5|p = 4) = \int_{0.5}^{\infty} f_Q(q|p = 4)d_q = \int_{0.5}^{\infty} 4e^{-4q}\,d_q = 0.135335$$

La demanda de cerveza decrece cuando el precio aumenta.

c) $P(D \geq 3) = \int_2^4 \int_{3/p}^\infty 0.5pe^{-pq}d_q\,d_p = \int_2^4 0.5e^{-3}\,d_p = e^{-3} = 0.049787$

d) $E(q|p) = \int_0^\infty \frac{qf(p,q)}{f_P(p)} d_q = \frac{1}{p}, para\ 2 \leq p \leq 4$

Problema 4 examen Tipo A.

a) $P(Y > 12|L = 9, K = 16) = P(6e^{\upsilon} > 12) = P(\upsilon > \ln(2)) = 1 - F(\ln(2)) = \frac{e^2}{e^2+4} = 0.64878$

b) $P(12 < Y < 18|L = 9, K = 16) = P(12 < 6e^{\upsilon} < 18) = P(\ln(2) < \upsilon < \ln(3)) = F(\ln(3)) - F(\ln(2)) = 0.19793$

SOLUCIONES EXAMEN FINAL DE PROBABILIDAD. TIPO A.

ENERO-MAYO 2012.

1 Parte I.

1. a
2.
3.
4. b
5.
6. b

2 parte II

7. Ya que cada variable aleatoria tiene distribución exponencial y son independientes, la suma de éstas, digamos $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ tiene una distribución Gamma cuya función generadora de momentos es

$$m_Y(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-n}.$$

Ahora la variable aleatoria U = 2λY tiene función generadora

$$m_U(t) = E[e^U] = E\left[e^{t(2\lambda Y)}\right] = m_Y(2\lambda t) = \left(1 - \frac{2\lambda t}{\lambda}\right)^{-n} = (1-2t))^{-n}$$

Que es la función generadora de momentos de una $Gamma\left(n.\frac{1}{2}\right)$.

9. a) $m_{X,Y}(t_1, t_2) = exp\left\{100t_1 + 125t_2 + \frac{1}{2}(49t_1^2 + 90t_1t_2 + 64t_2^2)\right\}$.

b) Sabemos que la distribución de X|Y = y es una distribución normal con media $\mu_x \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\left(y - \mu_y\right)$ y varianza $\sigma_x(1-\rho^2)$. En este caso ρ= 0:8, entonces haciendo los cálculos obtenemos que la media es 117.5 y la varianza es 17.64. Es decir X|Y = y~N(117.5; 17.649). Por lo tanto

$$P(X > 100) = P\left(Z > \frac{100-117.5}{4.2}\right) = 1 - P(Z < -4.16) \cong 1.$$

Donde Z~N(0,1).

c) En este caso utilizando la generadora de momentos haciendo $t_1 = .75t\ \ y\ t_2 = .54t$ obtenemos que si hacemos W = 0.75X + 0.45Y, entonces

$$m_W(t) = m_{X,Y}(.75t, .45t) = exp\{131.25 + (70.897t^2)/2\}.$$

Es decir W~N(131.25,70.897). Lo que implica que

$$P(W > 120) = P\left(Z > \frac{120-131.25}{8.42}\right) = 1 - P(Z < -1.33) = 1 - 0.09176 = 0.908.$$

Donde Z~N(0,1).

EXAMEN FINAL DE PROBABILIDAD

Agosto-Diciembre de 2012

Solución Parte I

Pregunta	1	2	3	4	5	6
Respuesta Tipo A	a			d		d

Solución Parte II

Problema 1

a) Como las distribuciones marginales de X_1, X_2 y X_3 son distribuciones normales con medias $\mu_1 = 5$, $\mu_2 = 4$, $\mu_3 = 3$; varianzas $\sigma_1^2 = 0.25$, $\sigma_2^2 = 0.36$, $\sigma_2^2 = 0.49$; $\rho_{12} = 0.9 \Rightarrow \sigma_{12} = (0.9)\sqrt{(0.25)(0.36)} = 0.27$, $\rho_{13} = 0.2 \Rightarrow$ $\sigma_{13} = (0.2)\sqrt{(0.25)(0.49)} = 0.07$ y $\rho_{23} = 0 \Rightarrow \sigma_{23} = 0$, por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \sim N_3\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.25 & 0.27 & 0.07 \\ 0.27 & 0.36 & 0 \\ 0.07 & 0 & 0.49 \end{bmatrix} \right).$$

b) $E[X_3 - X_2] = 3 - 4 = -1$, y $Var[X_3 - X_1] = 0.49 + 0.36 = 0.85 \Rightarrow X_3 - X_2 \sim N(-1, 0.85)$, entonces

$P[X_3 > X_2] = P[X_3 - X_2 > 0] = 1 - \Phi\left(\frac{0+1}{\sqrt{0.85}}\right) = 1 - \Phi(1.08) = 1 - 0.85993 = 0.14007$.

c) $E[X_2 | X_1 = 6] = \mu_2 + \rho_{12}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(6 - \mu_1) = 4 + (0.9)\left(\frac{0.6}{0.5}\right)(6-5) = 5.08$, y

$Var[X_2 | X_1 = 6] = \sigma_2^2(1 - \rho_{12}^2) = (0.36)[1 - (0.9)^2] = 0.0684 \Rightarrow$

$\{X_2 | X_1 = 6\} \sim N(5.08,\ 0.0684)$,entonces

$P[X_2 > 5 | X_1 = 6] = 1 - \Phi\left(\frac{5-5.08}{\sqrt{0.0684}}\right) = 1 - \Phi(-0.31) = 1 - 0.37828 = 0.62172$.

d)Si Y es el ingreso diario (en miles de pesos) $\Rightarrow Y = (10.8)X_1 + (11.4)X_2 + (10.9)X_3$, entonces

$E[Y] = (10.8)(5) + (11.4)(4) + (10.9)(3) = 132.3$,y

$Var[Y] = (10.8)^2(0.25) + (11.4)^2(0.36) +$

$(10.9)^2(0.49) + 2(10.8)(11.4)(0.27) + 2(10.8)(10.9)(0.07) = 217.13 \Rightarrow$

$Y \sim N(132.3,\ 217.13)$,entonces

$P[Y > 150] = 1 - \Phi\left(\frac{150-132.3}{\sqrt{217.13}}\right) = 1 - \Phi(1.2) = 1 - 0.88493 = 0.11507$.

Problema 3

a) El soporte de (X_1, X_2) es $S = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < 2\pi, x_2 > 0\}$. Considerando la transformación $T(x_1, x_2) = \left(\sqrt{2x_2}\cos(x_1), \sqrt{2x_2}\operatorname{sen}(x_1)\right)$ se tiene que el soporte de (Y_1, Y_2) es $T(S) = \mathbf{R}^2$. Del Teorema de Cambio de Variable se sabe que $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)|J(x_1, x_2)|^{-1}$. Despejando x_1 y x_2 de $y_1 = g_1(x_1, x_2) = \sqrt{2x_2}\cos(x_1)$ y $y_2 = g_2(x_1, x_2) = \sqrt{2x_2}\operatorname{sen}(x_1)$ se obtienen $x_1 = h_1(y_1, y_2) = \cos^{-1}\left(\frac{|y_1|}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}\right)$ y $x_2 = h_2(y_1, y_2) = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2}$. El Jacobiano es

$$J(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} -\sqrt{2x_2}\operatorname{sen}(x_1) & \frac{\cos(x_1)}{\sqrt{2x_2}} \\ \sqrt{2x_2}\cos(x_1) & \frac{\operatorname{sen}(x_1)}{\sqrt{2x_2}} \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow$$

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{y_1^2 + y_2^2}{2}} I_{(-\infty,\infty)}(y_1) I_{(-\infty,\infty)}(y_2).$$

b) $f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y_1^2}{2}}I_{(-\infty,\infty)}(y_1)\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y_2^2}{2}}I_{(-\infty,\infty)}(y_2)\right]$, por lo tanto Y_1 y Y_2 son Normales Estándar independientes, es decir, $Y_1 \sim N(0,1)$ y $Y_2 \sim N(0,1)$.

EXAMEN FINAL DE PROBABILIDAD

Enero-Mayo de 2013

Parte I

Pregunta	1	2	3	4	5	6
Tipo A	(c)	(c)	(c)	(d)	(d)	(c)

PARTE II

Problema 2 examen Tipo A

$$u = g_1(x_1,x_2) = x_1 + x_2; \quad v = g_2(x_1,x_2) = \frac{x_1}{x_1+x_2}$$

Entonces

$$X_1 = h_1(u,v) = uv; \quad X_{21} = h_2(u,v) = u(1-v)$$

$$|J_g| = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u} & \frac{\partial h_1}{\partial v} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u} & \frac{\partial h_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & u \end{vmatrix} = u$$

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X_1,X_2}\left(\underline{h}(u,v)\right)|J| = \lambda e^{-\lambda(uv)}\lambda e^{-\lambda(uv)}|u| = \lambda^2 u e^{-\lambda u}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(u)\mathbb{I}_{(0,1)}(v)$$

a) $f_U(u) = \int_0^1 f_{U,V}(u,v)dv = \int_0^1 \lambda^2 u e^{-\lambda u}dv = \lambda^2 u e^{-\lambda u}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(u)$

$$f_V(v) = \int_0^{\infty} f_{U,V}(u,v)du = \int_0^{\infty} \lambda^2 u e^{-\lambda u} du = \mathbb{I}_{(0,1)}(v)$$

$U \sim Gama(2,\lambda)$ y $V \sim Unif(0,1)$

b) Note que $f_{U,V}(u,v) = f_U(u) f_V(v)$. Entonces, $\mathbb{E}(U|V) = \mathbb{E}(U) = \frac{2}{\lambda}$

Problema 3 examen Tipo A. Problema 4 Examen Tipo B

a) $M_{\sum_{i=1}^{10} X_i}(t) = \Pi_{i=}^{10} M_{X_i}(t) = \Pi_{i=1}^{10}(1-100t)^{-1} = (1-100t)^{-10}$

$$\sum_{i=1}^{10} X_i \sim Gama(100,10)$$

b) $M_Y(t) = M_{\frac{2X}{\beta}}(t) = M_X\left(\frac{2t}{\beta}\right) = (1-2t)^{-\frac{2\alpha}{2}}$

$Y \sim \chi^2_{(2\alpha)}$

EXAMEN FINAL DE PROBABILIDAD

Agosto-Diciembre de 2013

Parte I

Pregunta	1	2	3	4	5	6
Tipo A	c		d		c	

PARTE II

1.-

a) $f_W(w) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} w^{\alpha-1} e^{-\frac{w}{\beta}} \mathbb{I}_{[0,\infty]}(w)$. Entonces,

$$\mathbb{E}[W^r] = \int_0^\infty w^r \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} w^{\alpha-1} e^{-\frac{w}{\beta}} dw = \int_0^\infty \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} w^{\alpha+r-1} e^{-\frac{w}{\beta}} dw$$

$$= \frac{\beta^r \Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{1}{\beta^{\alpha+r} \Gamma(\alpha+r)} w^{\alpha+r-1} e^{-\frac{w}{\beta}} dw = \frac{\beta^r \Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)}$$

b) $\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}\left[\frac{Z}{\sqrt{Y/n}}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{\sqrt{n}Z}{\sqrt{Y}}\right] = \sqrt{n}\mathbb{E}\left[ZY^{-1/2}\right] = \sqrt{n}\mathbb{E}[Z]\mathbb{E}\left[Y^{-1/2}\right] = 0$

$$Var[T] = \mathbb{E}[T^2] = \mathbb{E}\left[\frac{Z^2}{Y/n}\right] = n\mathbb{E}[Z^2Y^{-1}] = n\mathbb{E}[Z^2]\mathbb{E}[Y^{-1}] = n\mathbb{E}[Y^{-1}]$$

$$= \frac{n2^{-1}\Gamma\left(n/2 - 1\right)}{\Gamma\left(n/2\right)} = \frac{n}{n-2}, n > 2$$

4.- a)

$$\mathbb{P}(X > c) = \int_c^{\infty} e^{-x}\, dx = e^{-c}$$

b)

$\mathbb{E}(Y) = \int_0^c xe^{-x}\, dx + \int_c^{\infty} ce^{-x}\, dx = -ce^{-c} + \int_0^c e^{-x} dx + \int_c^{\infty} ce^{-x}\, dx = -ce^{-c} + 1 - e^{-c} + ce^{-c} = 1 - e^{-c}$

c)

$$\mathbb{E}[d_1 Y - d_2 X] = d_1 \mathbb{E}[Y] - d_2 \mathbb{E}[X] = d_1(1 - e^{-c}\ ) - d_2$$

$$con\ \mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} xe^{-x}\, dx = 1$$

EXAMEN FINAL DE PROBABILIDAD

Enero-Mayo de 2014

Parte I

Pregunta	1	2	3	4	5	6
Tipo A	(d)		(a)			(c)

PARTE II

Problema 1 examen tipo A

Solución

a)

X \ Y	0	1	2	*P(X=x)*
0	1/84	6/84	3/84	10/84
1	12/84	24/84	4/84	40/84
2	18/84	12/84	0	30/84
3	4/84	0	0	4/84
4	0	0	0	0
P(Y=y)	35/84	42/84	7/84	1

b) $\mathbb{E}[Y] = \sum_y y\,\mathbb{P}(Y = y) = 0.666$

$\mathbb{E}[Y^2] = \sum_y y^2\, \mathbb{P}(Y = y) = 0.833,\ \sigma_Y^2 = \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2 = 0.3897, \sigma_Y = 0.623$

c) $\mathbb{E}[XY] = \sum_{xy} y\, \mathbb{P}(X = x, Y = y) = 0.666,\quad \mathbb{E}[X] = \sum_x y\, \mathbb{P}(X = x) = 1.333$

$\sigma_{XY} = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[y] = -0.222\ ,\ \rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} = -0.4780$

d) $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[3 - X - Y] = 3 - \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y] = 1$

$\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\sigma_{XY} = 0.5000$

d) 2/3

Problema 2 examen tipo A

Solución

a) Sea $S = [S_1 \quad S_2 \quad S_3]^T$, donde $S_1 =$ el número de acciones del primer tipo en el portafolio $= (10000/3) \div 22.988 \cong 145$, $S_2 =$ el número de acciones del primer tipo en el portafolio $= (10000/3) \div 11.001 \cong 303$, $S_1 =$ el número de acciones del primer tipo en el portafolio $= (10000/3) \div 19.047 \cong 175$.
Sea $Y = S^T\underline{X}$ la variable aleatoria que representa el valor del portafolio. Entonces
$$\mathbb{E}(Y) = S^T\mathbb{E}(\underline{X}) = [145 \quad 303 \quad 175]\begin{bmatrix}27\\10\\18\end{bmatrix} = 10095$$
$$Var(Y) = S^T Cov(\underline{X})S = [145 \quad 303 \quad 175]\begin{bmatrix}9 & 2 & 1\\2 & 1 & -1\\1 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}145\\303\\175\end{bmatrix} = 523{,}974$$

b) $Y{\sim}N(10095{,}523974)$, $\mathbb{P}(Y > 11000) = \mathbb{P}\left(\frac{Y-10095}{(523974)^{1/2}} > \frac{11000-10095}{(523974)^{1/2}}\right) =$
$\mathbb{P}(Z > 1.25) \cong 0.1056$

c) $(X_1|X_3 = 17){\sim}N(26.75\ {,}8.75)$

El valor del portafolio es $Y = 434X_1$, con $Y{\sim}N(11609.50,\ \ (434)^2 8.75)$
$$\mathbb{P}(Y > 11000|X_3 = 17) = \mathbb{P}\left(\frac{Y - 11609.50}{(8.75)^{1/2}434} > \frac{11000 - 11609.50}{(8.75)^{1/2}434}\right)$$
$$= \mathbb{P}(Z > -0.47) = 0.6808$$

EXAMEN FINAL DE PROBABILIDAD

Agosto-Diciembre de 2015

Parte I

Pregunta	1	2	3	4	5	6
Tipo A		(c)		(c)		(d)

PARTE II

Problema 1 examen tipo A

Solución

b)

$$\mathbb{E}(X|Y=10) = 82.5 + (-0.17236)\sqrt{\frac{26.4}{5.1}}(10-12.4) = 83.4412$$

$$Var(X|Y=10) = 26.4(1-(-0.17236\ )^2) = 25.6157$$

Entonces $X|Y=10 \sim N(83.4412{,}25.6157)$

$$\mathbb{P}(X>86|Y=10) = \mathbb{P}\left[\frac{X-83.4412}{\sqrt{25.6157}} > \frac{86-83.4412}{\sqrt{25.6157}}\right] = \mathbb{P}[Z>0.5055] \approx 0.3085$$

Problema 3 examen tipo A

Solución (a)

$$f_X(x) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{3}{7}(x + y^2 + 2z)e^{-x}dzdy = \int_0^1 \frac{3}{7}(x + y^2 + 1)e^{-x}dy$$

$$= \left(\frac{3}{7}x + \frac{4}{7}\right)e^{-x}I_{[0,\infty)}(x)$$

$$\mathbb{P}(X < 1) = \int_0^1 \left(\frac{3}{7}x + \frac{4}{7}\right)e^{-x}dx = 1 - \frac{10}{7}e^{-1}$$

Solución (b)

$$f(X|Y = 0.5) = \frac{\int_0^1 \frac{3}{7}\left(x + \frac{1}{4} + 2z\right)e^{-x}dz}{f_y(y = 0.5)} = \frac{\frac{3}{7}\left(x + \frac{5}{4}\right)e^{-x}}{\frac{3}{7}\left(\frac{1}{4} + 2\right)} = \frac{4}{9}\left(x + \frac{5}{4}\right)e^{-x}I_{[0,\infty)}(x)$$

$$\mathbb{P}(X \leq 1|Y = 0.5) = \int_0^1 \frac{4}{9}\left(x + \frac{5}{4}\right)e^{-x}dx = 1 - \frac{13e^{-1}}{9} = 0.4686$$

EXAMEN FINAL DE PROBABILIDAD

Enero-Mayo de 2015

Parte I

Pregunta	1	2	3	4	5	6
Tipo A		(c)		(a)	(d)	(c)

PARTE II

Problema 1

Solución

a) La función costo para el proceso I es:

$$C_I(X) = \begin{cases} c & si\ X > 200 \\ c + k & si\ X \leq 200 \end{cases}$$

y para el proceso II es

$$C_{II}(X) = \begin{cases} 2c & si\ X > 200 \\ 2c + k & si\ X \leq 200 \end{cases}$$

b) Cuando se usa el proceso I, $\mathbb{E}(X) = \beta = 100$. Entonces el costo esperado está dado por

$$\mathbb{E}[C_I(X)] = c\mathbb{P}(X > 200) + (c + k)\mathbb{P}(X \leq 200)$$

$$= ce^{-200/100} + (c + k)\left(1 - e^{-200/100}\right) = k(1 - e^{-2}) + c$$

Para el proceso II, $\mathbb{E}(X) = \beta = 150$ y el costo esperado es

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C_{II}(X)] &= 2c\mathbb{P}(X > 200) + (2c + k)\mathbb{P}(X \leq 200) \\ &= 2ce^{-200/150} + (2c + k)\left(1 - e^{-200/150}\right) \\ &= 2ce^{-4/3} + (2c + k)\left(1 - e^{-4/3}\right) = k\left(1 - e^{-4/3}\right) + 2c\end{aligned}$$

Problema 2

Solución

Para la puerta I, sea $X_I \sim Po(3)$, mientras que para la puerta 3, $X_{II} \sim Po(4)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_I = 0)\mathbb{P}(X_{II} = 3) + \mathbb{P}(X_I = 1)\mathbb{P}(X_{II} = 2) + \mathbb{P}(X_I = 2)\mathbb{P}(X_{II} = 1)\\ + \mathbb{P}(X_I = 3)\mathbb{P}(X_{II} = 0)\\ = e^{-3}\frac{e^{-4}4^3}{3!} + \frac{e^{-3}3^1}{1!}\frac{e^{-4}4^2}{2!} + \frac{e^{-3}3^2}{2!}\frac{e^{-4}4^1}{1!} + \frac{e^{-3}3^3}{3!}e^{-4} \cong 0.05212\end{aligned}$$

EXAMEN FINAL DE PROBABILIDAD

Agosto-Diciembre de 2016

Parte I

Pregunta	1	2	3	4	5	6
Tipo A	(c)		(a)		(c)	

PARTE II

Problema 1

Solución

a)

$$u = g_1(x_1, x_2) = x_1/x_2; \quad v = g_2(x_1, x_2) = x_2$$

Entonces

$$X_1 = h_1(u, v) = uv; \quad X_2 = h_2(u, v) = v$$

$$|J_g| = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u} & \frac{\partial h_1}{\partial v} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u} & \frac{\partial h_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = v$$

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X_1,X_2}\left(\underline{h}(u, v)\right)|J| = 8uv^3\mathbb{I}_{[0,1]}(u)\mathbb{I}_{[0,1]}(v)$$

Problema 2

Solución

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ & 1 & -\frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ & & 1 & -\frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

b) $X_1 \sim N(0,1)$; $X_4 \sim N(2,2)$ y $\rho_{X_1 X_4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ hay correlación positiva entre las ventas de las dos tiendas

c) $\rho_{X_1 X_2} = 0$, entonces son independientes ya que X_1 y X_2 se distribuyen como una normal.

Problema 3

Solución

a)

D	0	1	2
P	0.35	0.40	0.25
U	-30	0	30
V	-15	15	0

EXAMEN FINAL DE PROBABILIDAD

Enero-Mayo de 2017

Parte I

Pregunta	1	2	3	4	5	6
Tipo A	(a)		(b)			(c)

PARTE II

Problema 1 examen tipo A, problema 3 examen tipo B

Solución

a)

$u_i = g_i(t) = t_i - t_{i-1}; \quad i = 1,2,3,4$

$t_1 = h_1(\underline{u}) = u_1;\ t_2 = h_2(\underline{u}) = u_1 + u_2;\ h_3(\underline{u}) = u_1 + u_2 + u_3;$

$h_4(\underline{u}) = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$

Entonces,

$$\left|Jh(\underline{u})\right| = 1$$

$$f_{\underline{u}}(\underline{v}) = f_{\underline{T}}\left(h(\underline{u})\right)\left|Jh(\underline{u})\right| = 24e^{-\left(h_1(\underline{u})+h_2(\underline{u})+h_3(\underline{u})+h_4(\underline{u})\right)}$$
$$= 24e^{-(4u_1+3u_2+2u_3+u_4)}I_{S_U}(\underline{u});\ \ S_U\{u_1 \in \mathbb{R}^+, \dots, u_4 \in \mathbb{R}^+\}$$

Problema 1 examen tipo A, problema 3 examen tipo B

Solución

a) Sea $\underline{X}^T = (X_1, X_2, X_3)$ con $\underline{X} \sim N_3\left(\underline{\mu}_1, \Sigma_X\right)$ donde $\underline{\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\Sigma_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$