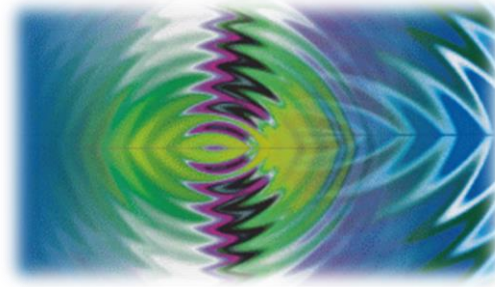


HALIÇ ÜNİVERSİTESİ
MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ

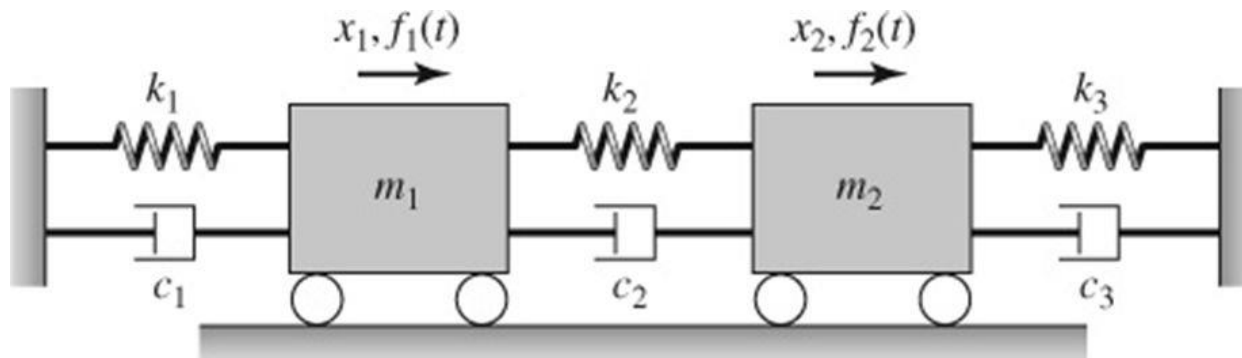


MAK307
MEKANİK TİTREŞİMLER
(Hareket Denklemlerinin Oluşturulması)

Dr. Turan ŞİŞMAN

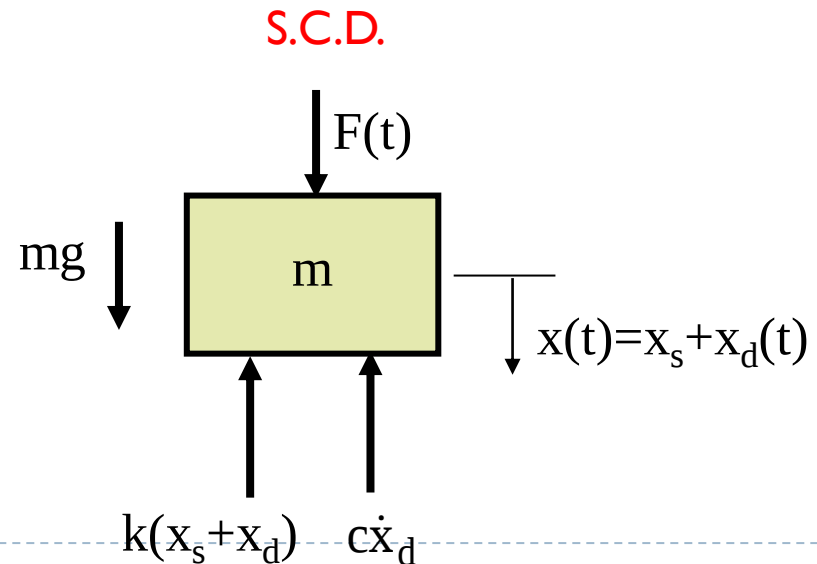
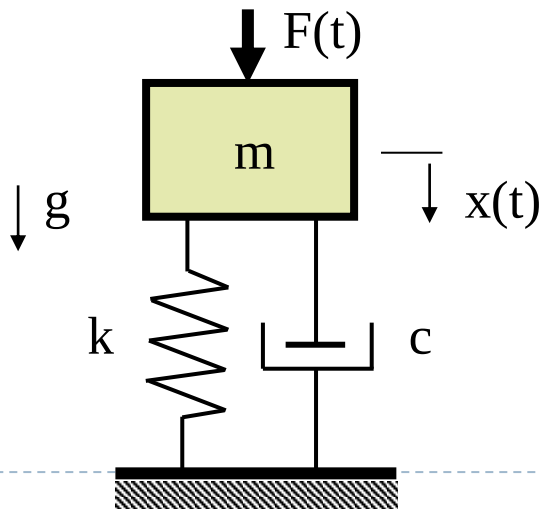
2017 - İSTANBUL

- Titreşim analizi yapılacak sistemin matematik modelinin oluşturulmasından sonra bazı yöntemler kullanılarak hareketi tanımlayan diferansiyel denklemler (**hareket denklemleri**) oluşturulur.
- Hareket denklemleri oluşturulur iken farklı yöntemler kullanılabilir. Bu yöntemlerden sık kullanılanları aşağıda verilmiştir.

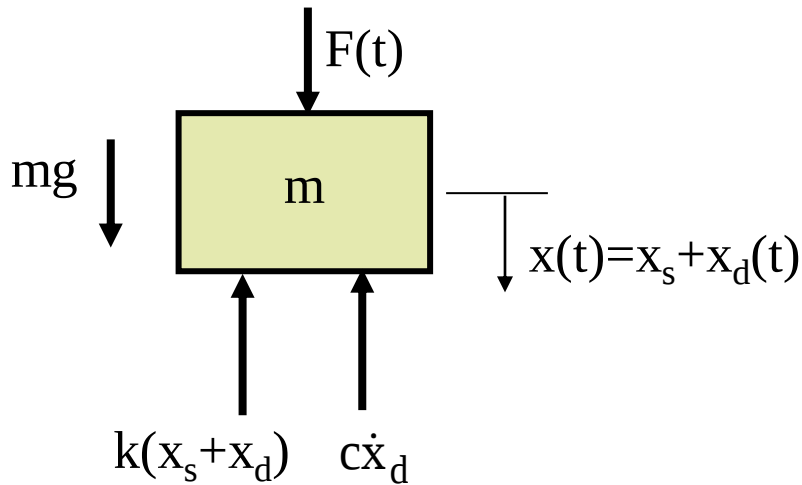


1. Newton Hareket Yasası Yöntemi

- Şekilde görülen sistem tek serbestlik dereceli sistemdir ve m kütlesinin hareketi x koordinatı ile tanımlanabilir.
- Newton'un 2. yasası gereği cisme etkiyen kuvvetlerin toplamı cismin kütlesi ile ivmesinin çarpımına eşittir



S.C.D.



$$x(t) = x_s + x_d(t)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_d$$

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_d$$

x_s : m kütlelerinin statik çökmesi

x_d : m kütlelerinin statik çökme sonrasındaki yer değiştirmesi

➤ Öteleme yapan sistemler için;

$$\sum F = m \ddot{x}$$

➤ Dönme hareketi yapan sistemler için; $\sum M = I \ddot{\theta}$

$$F(t) + mg - k(x_s + x_d) - c\dot{x}_d = m\ddot{x}$$

$$F(t) + \cancel{mg} - k \frac{\cancel{mg}}{k} - kx_d - c\dot{x}_d = m\ddot{x}_d$$

$$m\ddot{x}_d + c\dot{x}_d + kx_d = F(t)$$

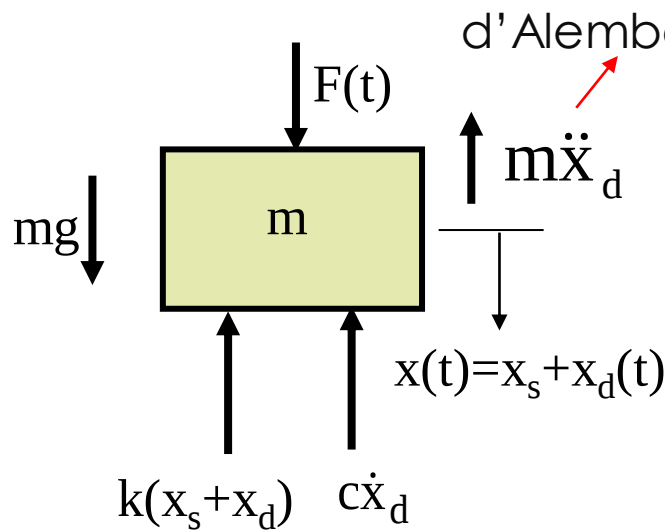
$x_d = X$: Yer değiştirme statik çökme etrafındaki yer değiştirmedir.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

2. Dinamik Denge Yöntemi (d'Alembert Yöntemi)

- Cisme etki eden atalet kuvvetleri de serbest cisim diyagramında gösterilir ve cisim statik dengede kabul edilir:

$$\sum F = 0 \quad \text{veya} \quad \sum M = 0$$



d'Alembert veya atalet kuvveti

$$F(t) + \cancel{mg} - \cancel{k \frac{mg}{k}} - kx_d - c\dot{x}_d - m\ddot{x}_d = 0$$

$$x = x_d$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

3. Enerji Yöntemi

- Enerjinin korunumu prensibi uygulanır; bir sistemin **toplam enerjisinin artış hızı sisteme verilen güce eşittir.**

$$\frac{dE_t}{dt} = P_{\text{net}}$$

- E_t : Sistemin **potansiyel** ve **kinetik** enerjilerinin toplamı,
- P_{net} : Sisteme verilen net toplam güç olup; Dış kuvvetler ve momentlerin sisteme **verdikleri güç + işaretli**, Sistemin dışarıya verdiği mekanik güç ve sönümleyici elemanlar tarafından **çevreye yayılan ısı gücü – işaretlidir.**

HAREKET DENKLEMLERİ

$$P_{\text{net}} = \sum P_g - \sum P_v - \sum P_d$$

Sisteme verilen
mekanik güçlerin
toplamı

Sistemin dışarıya
verdiği mekanik
güçlerin toplamı

Sönümleyici
elemanlardan dışa
atılan ısı
güçlerin toplamı

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

$$E_t = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$P_{\text{net}} = F(t)\dot{x} - c\dot{x}\dot{x}$$

$$\frac{dE_t}{dt} = P_{\text{net}} \longrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) = F(t)\dot{x} - c\dot{x}\dot{x}$$

$$m \dot{x} \ddot{x} + k x \dot{x} = F(t)\dot{x} - c \dot{x} \dot{x} \longrightarrow m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = F(t)$$

4. Lagrange Yöntemi

- İncelenen sisteme ait kinetik ve potansiyel enerjiler dikkate alınır.
- Ayrıca **sanal iş ilkesi** ile dış kuvvetlerin ve sönüm kuvvetlerinin sistemin genel koordinatlarında gerçekleştirmiş oldukları **sanal işler** dikkate alınarak türetilen genel kuvvetler hareket denkleminin türetilmesi için kullanılır.
- Sisteme ait **Lagrange** ifadesi kinetik enerji ile potansiyel enerji farkına eşittir.

$$L = E_k - E_p \longrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_p}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = Q_i$$

- q_i : Bir sistemin **i.** genel koordinatı,
- Q_i : Bu koordinata etki eden kuvvetlerin toplamı olup **genel kuvvet** ifadesi **sanal iş** ile elde edilir.
- Genel olarak kinetik enerjinin genel koordinat hızı ve potansiyel enerjinin genel koordinat ile ilişkili olduğu düşünüldüğünde Lagrange denklemi aşağıdaki basit formunu alır:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = Q_i$$

- Genel kuvveti elde etmek için **dış zorlamaların** ve **sönümleyici kuvvetlerin** genel koordinatlar üzerindeki **sanal işleri** dikkate alınır.
- Genel koordinatlarda zamandan bağımsız olarak küçük değişimler dikkate alınarak (δ) bu kuvvetlerin yaptığı iş elde edilir:

$$\delta W = F(t)\delta q_i - c\dot{q}_i\delta q_i$$

$$\delta W = Q_i\delta q_i$$

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad E_p = \frac{1}{2}kx^2 \quad \delta W = F(t)\delta x - c\dot{x}\delta x = \underbrace{[F(t) - c\dot{x}]}_{Q_x}\delta x$$

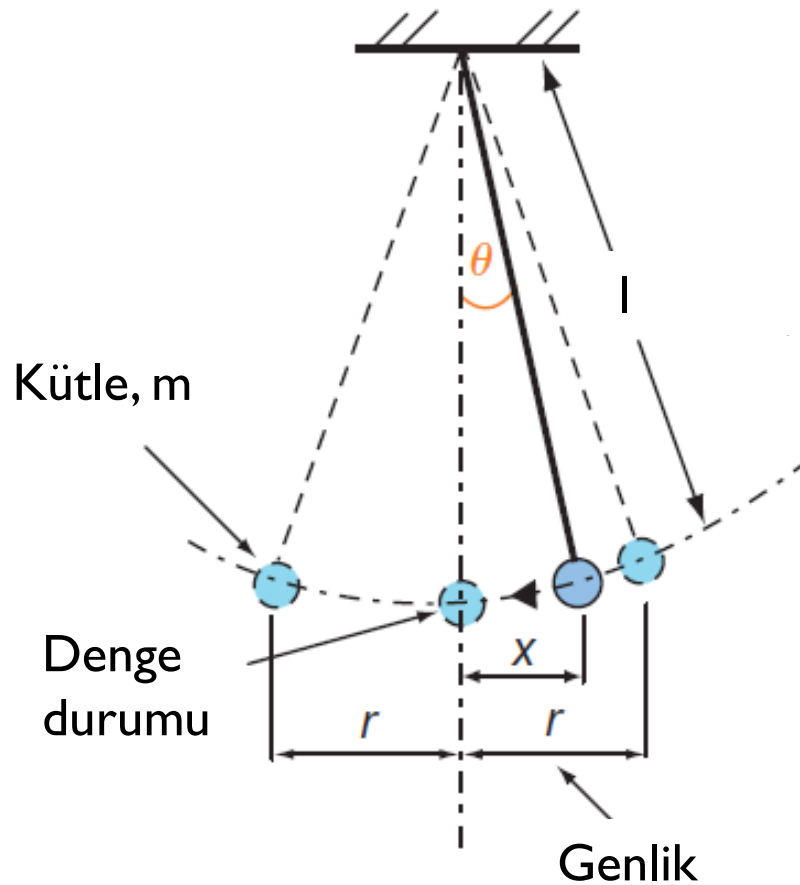
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} k x^2 \right) = F(t) - c \dot{x}$$

$$\frac{d}{dt} (m \dot{x}) + kx = F(t) - c \dot{x}$$

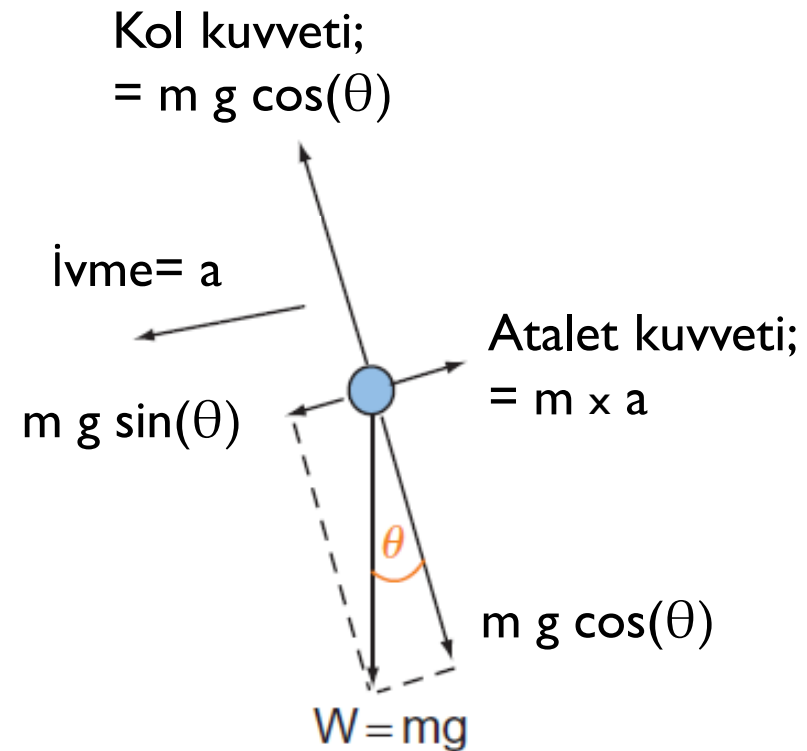
$$\cancel{m \dot{x}} + m \ddot{x} + kx = F(t) - c \dot{x}$$

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = F(t)$$

➤ Basit sarkaç sistemi



Basit sarkaç sistemi



Serbest cisim diyagramı