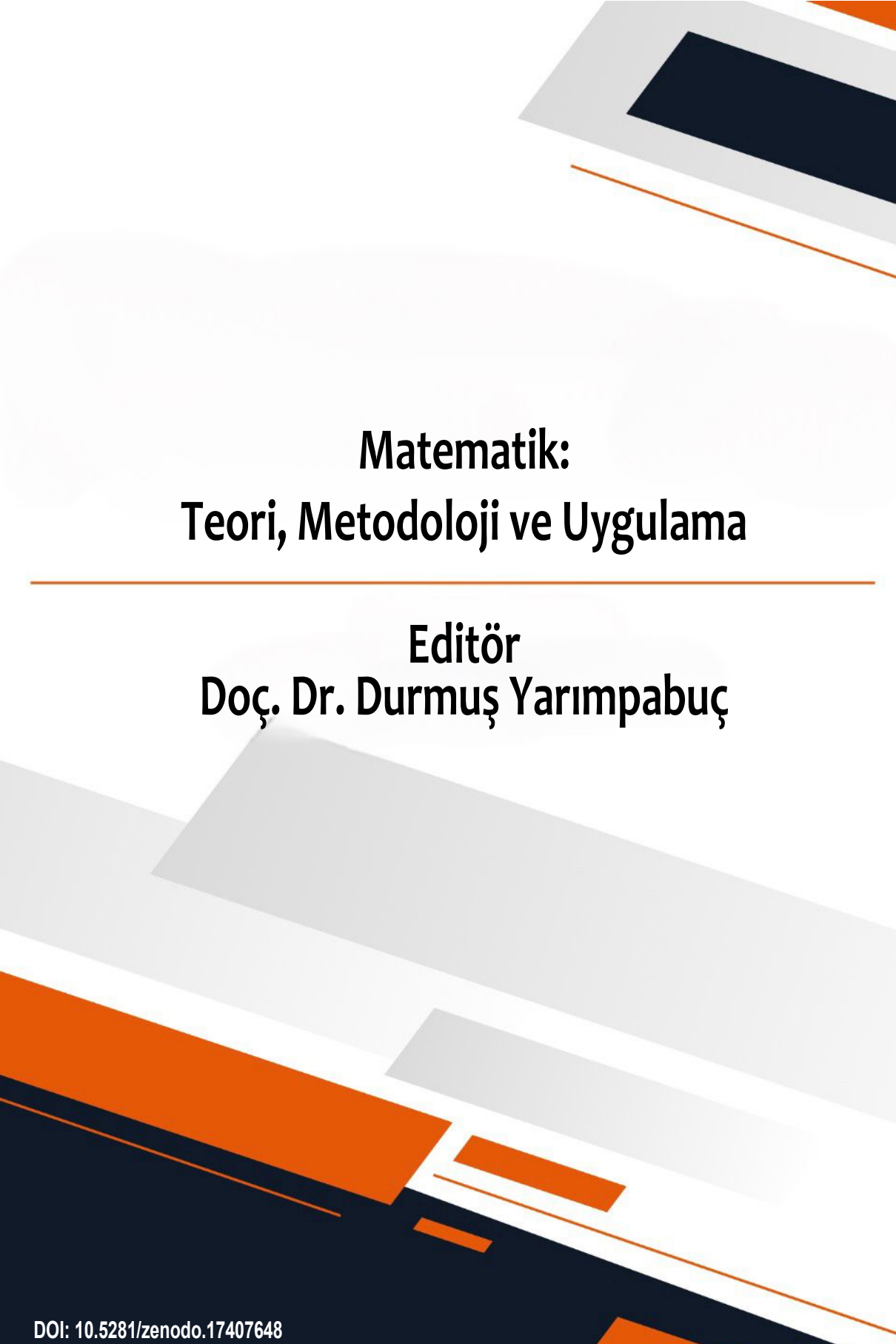




Matematik: Teori, Metodoloji ve Uygulama

**Editör
Doç. Dr. Durmuş Yarımpabuç**

Matematik:
Teori, Metodoloji ve Uygulama

Editör
Doç. Dr. Durmuş Yarımpabuç

İmtiyaz Sahibi
Platanus Publishing®

Editör
Doç. Dr. Durmuş Yarımpabuç

Kapak & Mizanpaj & Sosyal Medya
Platanus Yayın Grubu

Birinci Basım
Ekim, 2025

Yayımcı Sertifika No
45813

ISBN
978-625-7609-25-8

©copyright
Bu kitabın yayım hakkı Platanus Publishing'e aittir. Kaynak gösterilmeden alıntı yapılamaz, izin alınmadan hiçbir yolla çoğaltılamaz.

Adres: Natoyolu Cad. Fahri Korutürk Mah. 157/B, 06480, Mamak,
Ankara, Türkiye.

Telefon: +90 312 390 1 118
web: www.platanuspublishing.com
e-mail: platanuskita@gmail.com



Platanus Publishing®

İÇİNDEKİLER

Bölüm 1	5
Tamamlayıcısı Ambivalent Grup Olan ve Abelyen Sylow 2-Alt Grubu İçeren Frobenius Gruplarının İncelenmesi	
Didem Öztürk	
Bölüm 2	15
Monte Carlo Metotları ile Sayısal Çözüm: Ortalama Değer, Reddetme ve Kontrol Değişken	
Derya Arslan	
Bölüm 3	23
A Neural Network Approach for Solving Fredholm Type Integro-Differential Equation	
Derya Arslan	
Bölüm 4	33
New Developments of Nabla Fractional Inequalities	
Yusuf Zeren	



Bölüm 1

Tamamlayıcısı Ambivalent Grup Olan ve Abelyen Sylow 2-Alt Grubu İçeren Frobenius Gruplarının İncelenmesi

Didem Öztürk¹

Giriş

Grupların gösteriliş teorisi, soyut grupların, lineer tasvirlerle ait matrislerin belirlediği grupların içine tanımlanmış homomorfilerinin sınıflandırılması esasına dayanmaktadır. Bir grubun gösterişleri üzerinde çalışma fikri, grup teorisi ve uygulamaları konusunda yeni araştırma yöntemlerinin doğmasına sebep olmuştur. Karakter teorisi de bu konuda belirleyici rol oynar. Sonlu grupların gösteriliş teorisinin kökeni, 1896 yılında R.Dedekind ile F.G.Frobenius arasındaki çalışmalara kadar dayanmaktadır. Dedekind, bir sonlu grup ile bağlantılı bir determinanttan elde edilen bir polinomun, nasıl çarpanlara ayrılabilceği konusunda, F.G.Frobenius'tan istediği yardım üzerine F.G.Frobenius, sonlu gruplar için genel karakter teorisini geliştirdi ve Dedekind'in problemine çözüm sundu. Öte yandan, F.G.Frobenius, karakter teorisi üzerine çalışırken bazı özel alt gruplara sahip grupların karakter tablo hesaplarının belirli bir düzende ilerlediğini gördü ve ilk defa Frobenius Gruplarını tanımladı. Ardından, Burnside, Frobenius tamamlayıcısının çift mertebeli veya çözülebilir olması durumunda bir alt grup olduğunu ispat etti. Ancak, Frobenius çekirdeğinin her durumda bir alt grup olduğu yine Frobenius tarafından ispat edilmiştir. [9]

Frobenius grupları, çekirdeklerinin çözülebilir olması, tamamlayıcılarının ise bilinen küçük mertebeli gruplardan biri olarak tanımlanabilmesi sebebiyle, sonlu grupların sınıflandırılması problemine ışık tutmaktadır. Sonlu bir grubun karakter tablosu, grubun merkezi, normal alt grupları, eşlenik eleman sınıfları gibi yapısal özelliklere bağlıdır. Bu bağlamda, Q-gruplarının ve Ambivalent gruplarının yapılarını incelemek, Adi Gösteriliş Teorisinin önemli araştırma konularındandır. Q-gruplarının karakter değerleri rasyonel, Ambivalent grupların karakterleri ise reel değerli olduğundan, gösteriliş teorisinin hesaplama kısmını kolaylaştırır; karakter tabloları oldukça sadeleşir.

¹ Dr. Öğr. Üyesi, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
0000-0002-4973-8140

Günümüzde bir abelyen Sylow 2-alt grubu içeren Q-grupları ve asal involüsyon içeren Q-grupları tamamen sınıflandırılmıştır. Ayrıca, süper çözülebilir Q-gruplarının mertebeleri ve asal bölenleri belirlenmiştir. [8]

Diğer yandan, Q-gruplarının temel kavramlarından yararlanılarak, Ambivalent gruplarının bazı özel alt grupları sayesinde, izomorf olduğu yapılar elde edilmiştir. [4]

Bu çalışmada, Frobenius gruplarının, Q-gruplarının, Ambivalent gruplarının temel tanım ve teoremleri irdelenmiş; elde edilen sonuçlar yorumlanarak, daha önce araştırılmamış Tamamlayıcısı Ambivalent Grup olan Frobenius Grupları, bir abelyen Sylow 2-alt grubu içerdiğinde, bu alt grup yardımıyla incelenmiştir.

Tamamlayıcısı Ambivalent Grup Olan ve Abelyen Sylow 2-Alt Grubu İçeren Frobenius Gruplarının İncelenmesi

Bu çalışmada, konunun bütünlüğü açısından sırasıyla, Frobenius grupları, adi gösteriliş teorisinin temel kavramları, Q-grupları ve Ambivalent grupların yapısal özellikleri ayrıntıları ile ele alınacaktır. Öte yandan, araştırma problemine ışık tutan grup teorisinin temel tanım ve teoremlerine de yer verilecektir.

Böylece elde edilen bilgiler sentezlenerek, “Tamamlayıcısı Ambivalent Grup olan Frobenius Grupları”, bir abelyen Sylow 2-alt grubu içerdiğinde, bu alt grup yardımıyla izomorf olduğu cebirsel yapı belirlenecektir.

Tanım 1: X boş kümeden farklı sonlu bir cümle olmak üzere, X üzerinde simetrik grup, $S_X = \{ \alpha : X \rightarrow X, \alpha \text{ bir bijeksiyon} \}$ kümesi ile tanımlanır. $|X| = n$ ise $|S_X| = n!$ dir. Sonlu bir G grubu ve bir $i : G \rightarrow S_X$ grup homomorfisi verildiğinde ise (X, G, i) üçlüsü bir permütasyon grubu belirler. Bu durumda, G grubu X kümesi üzerinde bir operatördür denir. [7]

Tanım 2: (X, G, i) bir permütasyon grubu, $x \in X$ olsun. $G_x = \{ y \in G : xy = x \}$ kümesine, $x \in X$ in izotrop alt grubu veya stabilazörü denir. Öte yandan, $xG = \{ u \in X : xy = u, y \in G \}$ kümesine $x \in X$ in G ye göre orbiti (yörüngesi), bir $g \in G$ için $F(g) = \{ x \in X : xg = x \}$ cümlesine ise $g \in G$ nin X içinde sabit bıraktığı noktaların kümesi denir. [5]

Teorem 1: (X, G, i) bir permütasyon grubu, $x \in X$ olsun. Bu taktirde, $|G| = |xG| \cdot |G_x|$ dir. [10]

Teorem 2: (X, G, i) bir permütasyon grubu ve G nin X içindeki yörünge sayısı t olsun. Bu durumda, $t \cdot |G| = \sum_{g \in G} |F(g)|$ dir. [10]

Tanım 3: (X, G, i) bir permütasyon grubu olsun. G nin X kümesi içinde tek bir yörüngesi varsa, (X, G, i) ye bir tranzitif permütasyon grubu denir. Bu

durumda, $x \in X$ sabit bir noktayı göstermek üzere, her $y \in X$ için $xg = y$ olacak şekilde bir $g \in G$ vardır. [5]

Tanım 4: (X, G, i) bir tranzitif permütasyon grubu olsun. $|X| = |G|$ ise (X, G, i) permütasyon grubu regülerdir denir. [5]

Teorem 3: (X, G, i) bir permütasyon grubu, (X, N) bir regüler normal alt grup olsun. Bu durumda, (X, G, i) permütasyon grubu da tranzitifdir. [10]

Teorem 4: H sonlu bir grup, $A \leq \text{Aut}(H)$ olsun. Bir $f \in \text{Aut}(H)$ için $f(1_H) = 1_H$ olduğundan A grubu $H - \{1_H\}$ kümesi üzerinde bir permütasyon grubudur. Üstelik, $(H - \{1_H\}, A)$ bir tranzitif permütasyon grubu ise H bir elementer abelyen grubudur. [11]

Tanım 5: G , sonlu elemanlı bir Ω kümesi üzerinde sonlu bir tranzitif permütasyon grubu, $\alpha \in \Omega$ olsun. $H = G_\alpha \neq \{1_G\}$ ve Ω nın birden fazla noktasını sabit bırakan tek elemanı 1_G ise G ye bir Frobenius grubu, $H = G_\alpha$ ya da bir Frobenius tamamlayıcısı denir. [5]

Teorem 5: G sonlu bir grup, H , G nin triviyal olmayan bir alt grubu olsun. G nin bir tamamlayıcısı H olan bir Frobenius grubu olabilmesi için gerek ve yeter koşul, H nin eşleniklerinden ayrık ve G içindeki normalizatörüne eşit bir alt grup olmasıdır. [7]

Teorem 6: G , $|\Omega| = n$ olmak üzere Ω kümesi üzerinde tanımlı, tamamlayıcısı H olan bir Frobenius grubu olsun. $K = \{g \in G: \forall \alpha \in \Omega, g(\alpha) \neq \alpha\} \cup \{1_G\}$ şeklinde tanımlanan K alt grubu, G nin bir normal alt grubudur. K alt grubuna, G nin Frobenius çekirdeği denir. K regüler bir alt gruptur; G grubu K ve H alt gruplarının yarı direkt çarpımına eşittir. [5]

$\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ ve $n = 2, n \geq 4$ olmak üzere, Ω kümesi üzerinde S_n simetrik grupları gözönüne alınsın;

$n = 2$ için $S_n = \{I, (12)\}$ grubu, $\Omega = \{1, 2\}$ kümesinin eleman sayısı kadar permütasyon içerdiğinden regülerdir. O halde, Frobenius grubu değildir.

$n \geq 4$ için S_n grubunda, Ω kümesinin elemanlarından 2 nin stabilazörü G_2 , (13) devresini içerir. Dikkat edilecek olursa, (13) içindevresi 2 nin dışında 4 ü de sabit bırakmaktadır.

Şu halde, $n \geq 4$ için S_n , bir Frobenius grubu değildir. En küçük Frobenius grubu, S_3 simetrik grubudur. [5]

Teorem 7: G , Ω sonlu kümesi üzerinde bir tamamlayıcısı H , çekirdeği K olan bir Frobenius grubu ise $\forall h \in H - \{1_G\}$ için $C_G(h) \leq H$ ve $\forall h \in K - \{1_G\}$ için $C_G(h) \leq K$ dir. [5]

Teorem 8: G , çekirdeği K ve tamamlayıcısı H olan bir Frobenius grubu olsun. $H - \{1_G\}$ kümesinin her elemanı, eşlenik etkisi ile K nın sadece birim elemanını sabit bırakan bir otomorfisini belirler. Başka bir deyişle, Frobenius tamamlayıcısı, Frobenius çekirdeğinin bir düzenli otomorfiler grubunu oluşturur.

İspat: $K \trianglelefteq G$ olduğundan, $\forall x \in G$ ve $\forall k \in K$ için $x^{-1}kx \in K$ dır.

$h \in H - \{1_G\}$ olmak üzere $h: K \rightarrow K, h(k) = k^h = h^{-1}kh$ tasviri gözönüne alınsın;

1. $k_1, k_2 \in K, k_1 = k_2 \Leftrightarrow h^{-1}k_1h = h^{-1}k_2h \Leftrightarrow$
2. $h(k_1) = h(k_2)$ dir. O halde, h tasviri iyi tanımlıdır.
3. $k_1, k_2 \in K, h(k_1) = h(k_2) \Leftrightarrow h^{-1}k_1h = h^{-1}k_2h \Leftrightarrow k_1 = k_2$ dir. Böylece, h tasviri bire birdir.
4. h tasviri üzerinedir.
5. $k_1, k_2 \in K, h(k_1k_2) = h^{-1}(k_1k_2)h = h^{-1}(k_1hh^{-1}k_2)h = (h^{-1}k_1h). (h^{-1}k_2h) = h(k_1).h(k_2)$ dir.

Şu halde, h tasviri altında işlemler korunur.

Sonuç olarak, h tasviri K nın bir otomorfisidir.

Bir $k \in K - \{1_G\}$ için $h(k) = k$ olduğu varsayılınsın;

$h(k) = k \Leftrightarrow h^{-1}kh = k \Leftrightarrow kh = hk \Leftrightarrow k^{-1}hk = h \Leftrightarrow h \in H \cap H^k$ dır. Öte yandan, $H \cap H^k = \{1_G\}$ olduğundan $h = \{1_G\}$ elde edilir ki; bu da h nın başlangıçtaki seçimine aykırıdır.

O halde, H nın birimden farklı her elemanı, $K - \{1_G\}$ nin hiçbir elemanını sabit bırakmaz.

Teorem 9: G , tamamlayıcısı H , çekirdeği K olan bir Frobenius grubu olsun. Bu takdirde, $|H| \mid (|K| - 1)$ dir. [5]

Teorem 10: G , tamamlayıcısı H , çekirdeği K olan bir Frobenius grubu olsun. H çift mertebeli ise K komütatiftir ve H sadece bir tane involüsyon içerir.

İspat: H çift mertebeli ise mertebesi iki olan en az bir eleman vardır. $|h| = 2$ olmak üzere bir $h \in H$ alınsın; H, K nın bir düzenli otomorfiler grubu oluşturduğundan, $\forall k \in K, \exists x \in K \ni k = x^{-1}x^h$ dır. Diğer yandan, $k^h = (x^{-1}x^h)^h = (x^h)^{-1}x, kk^h = x^{-1}x^h(x^h)^{-1}x = x^{-1}1_Gx = 1_G \Leftrightarrow k^h = k^{-1}$ elde edilir.

$\forall x, y \in K, x^{-1}y^{-1} = x^hy^h = (xy)^h = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ sonucuna varılır. Böylece, K alt grubu abelyendir.

Şimdi, $s \neq h$ ve $|s| = 2$ olacak biçimde $s \in H$ nin var olduğu kabul edilsin; $\forall k \in K - \{1_G\}$ için $k^h = k^s = k^{-1} \Leftrightarrow r^{-1}kr = s^{-1}ks \Leftrightarrow (rs^{-1})^{-1}k(rs^{-1}) = k \Leftrightarrow rs^{-1} = 1_G \Leftrightarrow r = s$ bulunur. O halde, H , sadece bir tane involüsyon içerir.

Teorem 11: G , tamamlayıcısı H , çekirdeği K olan bir Frobenius grubu olsun. K nilpotenttir. [7]

Teorem 12: G bir Frobenius grubunun tamamlayıcısı ve p, q birbirinden farklı asal sayıları gösterebilir. Bu durumda,

1. $p > 2$ ise G nin Sylow p –alt grupları devreseldir; $p = 2$ olduğunda ise G nin Sylow 2 –alt grupları devresel veya quaterniondur.
2. G nin pq mertebeli her alt grubu devreseldir. [10]

Bundan sonraki paragraflarda, Adi Gösteriliş Teorisinin temel kavramları, Q -grupları ve Ambivalent grupların yapısal özellikleri ele alınacaktır.

Tanım 6: G sonlu bir grup, R komütatif ve birimli bir halka ve V , n -boyutlu serbest bir R - modül olsun. Bu durumda, $T: G \rightarrow GL(V)$ şeklinde tanımlanan bir grup homomorfisine, G nin n -inci dereceden bir R -gösterilişi denir. V nin baz seçiminden bağımsız olarak, $GL(V) \cong GL(n, R)$ olduğu dikkate alındığında, $\varphi: G \rightarrow GL(n, R)$ grup homomorfisi, G nin R üzerindeki n -inci dereceden bir matris gösterilişi olarak adlandırılır. G nin V üzerindeki bir gösterilişi, bir matris gösterilişine tekabül eder. [5]

Tanım 7: $R = k$ bir cisim, V sonlu boyutlu bir k -vektör uzayı ve $T: G \rightarrow GL(V)$, G nin bir k -gösterilişi olsun. $\aleph: G \rightarrow k, \aleph(x) = \text{iz } T(x)$ şeklinde tanımlanan $\aleph$ fonksiyonuna, T gösterilişine karşılık gelen bir kG -karakteri denir ve $\aleph(1_G) = \text{iz } T(1_G) = \dim_k V$ dir. [5]

Tanım 8: G , n -inci mertebeden sonlu bir grup olsun. G nin adi kompleks gösterilişli tüm karakterleri rasyonel değerli ise G ye bir Q -grubu denir. [8]

Teorem 13: Sonlu bir G grubunun bir Q - grubu olabilmesi için gerek ve yeter koşul $s, t \in G$ aynı devresel grubu doğurduğunda, bu elemanların birbirine konjüge olmasıdır. Bir Q -grubunda bir alt devresel grubun doğuraylarının konjüge olması zorunluluğuna karşılık, konjüge elemanların aynı devresel grubu doğurmaları gerekmez. [8]

Teorem 14: Sonlu bir G grubunun bir Q - grubu olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\forall s \in G$ için $N(< s >)/C(< s >) \cong \text{Aut}(< s >)$ olmasıdır. [8]

Tanım 9: G , n -inci mertebeden sonlu bir grup olsun. G nin adi kompleks gösterilişli tüm karakterleri reel değerli ise G ye bir ambivalent grup denir. Başka bir deyişle, G bir ambivalent grup ise G nin $\mathbb{C}$ üzerinde n -inci dereceden bir gösterilişi, $\varphi: G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ grup homomorfisi ve bu gösterilişe ait bir $\aleph, CG$ -

karakteri verildiğinde, $\forall s \in G$ için $\aleph(s) \in \mathbb{R}$ dir. Q-grupları, ambivalent olma özelliğini kapsamaktadır. [4]

Sonuç 1: S_n simetrik grubu hem bir Q- grubu hem de bir ambivalent gruptur. [4]

Teorem 15: Sonlu bir G grubunun bir ambivalent grup olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\forall s \in G$ için $s^t = tst^{-1} = s^{-1}$ olacak şekilde bir $t \in G$ nin bulunmasıdır. [4]

Tanım 10: G sonlu bir grup, $s \in G$ olsun. Eğer, s ve s^{-1} elemanları, G içinde birbirine konjüge ise s ye gerçek eleman denir.

Bir ambivalent grubunun tüm elemanları gerçektir. [8]

Tanım 11: G sonlu bir grup, p bir asal sayı ve $s \in G$ olsun. $P \leq C(s)$ olacak şekilde bir $P \in Syl_p(G)$ mevcutsa s ye bir p – merkezi eleman denir. [8]

Teorem 16: G sonlu bir grup, p bir asal sayı olsun. Şu halde, $\{G \text{ nin } p - \text{merkezi elemanları}\} = \cup_{P \in Syl_p(G)} C(P)$ dir. Üstelik, $s \in G$ nin her p bir asal sayısına karşılık, p – merkezi olabilmesi için gerek ve yeter koşul $s \in Z(G)$ olmasıdır. [8]

Tanım 12: Bir G grubu ve G nin bir $\{1_G\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_s = G$ alt normal serisi verilmiş olsun. $\forall i = 0, 1, \dots, s-1$ için G_{i+1}/G_i abelyen ise G ye çözülebilir bir grup denir. [11]

Teorem 17: Çözülebilir grupların alt grupları ve bölüm grupları da çözülebilirdir. [11]

Tanım 13: Bir G grubu ve G nin bir $\{1_G\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_s = G$ alt normal serisi verilmiş olsun. $\forall i = 0, 1, \dots, s-1$ için $G_i \trianglelefteq G$ ve $|G_{i+1}/G_i|$ değerleri asal ise G ye süper çözülebilir bir grup denir. Süper çözülebilir gruplar çözülebilirdir. [11]

Tanım 14: G bir grup, $Z_0(G) = \{1_G\}$, $Z_1(G) = Z(G)$ olsun. Her i için $Z_{i+1}(G)$, $Z_i(G) \subseteq Z_{i+1}(G)$ ve $Z_{i+1}(G)/Z_i(G) = Z(G/Z_i(G))$ bağıntılarını sağlayan G nin tek türlü belirli normal alt grubunu gösterebiliriz. Bu taktirde, $\{1_G\} \subseteq Z_1(G) \subseteq Z_2(G) \subseteq \dots$ alt normal serisine, G grubunun artan merkezi serisi denir. Bir $n \in \mathbb{N}$ için $Z_n(G) = G$ ise G grubuna bir nilpotent grup denir. Bu eşitliği gerçekleyen $n \in \mathbb{N}$ değerlerinin en küçüğü, G grubunun nilpotentlik sınıfı adını alır. [11]

Teorem 18: G bir grup ve G' , G nin komütatör grubu olmak üzere $G' \trianglelefteq G$ dir. Üstelik,

$N \trianglelefteq G$ için G/N grubunun bir abelyen grup olması için gerek ve yeter koşul $G' \leq N$

olmasıdır. [1]

Teorem 19: G bir grup, p bir asal sayı ve $S \in Syl_p(G)$ olsun.

$G = SN, S \cap N = \{1_G\}$ ve $|S| = [G : N]$ olacak biçimde bir $N \trianglelefteq G$ varsa, N ye G içinde bir p -tamamlayıcısı denir. [11]

Teorem 20: G bir grup, p bir asal sayı ve $S \in Syl_p(G)$ olsun. $S \subseteq Z(N_G(S))$ ise S nin G içinde bir p -tamamlayıcısı vardır. [11]

Teorem 21: G bir ambivalent grup olsun.

- a) $N \trianglelefteq G$ ise G/N bir ambivalent gruptur.
- b) G nin birimden farklı her 2-merkezi elemanı bir involüsyondur.
- c) $Z(G)$ bir elementer abelyen 2-grubudur.
- d) G abelyen ise G bir elementer abelyen 2-grubudur.
- e) G', G nin komütatör grubu olmak üzere, G/G' bir elementer abelyen 2-grubudur.

G nin tek mertebeli elemanları, G' içindedir. [4]

Teorem 22: G bir ambivalent grup ve $S \in Syl_2(G)$ ise $C_G(S) = Z(S)$ dir. [4]

Teorem 23: G çözülebilir bir ambivalent grup ve $S \in Syl_2(G)$ ise $N_G(S) = S$ dir. [4]

Teorem 24: G çözülebilir bir ambivalent grup, $S \in Syl_2(G)$ ve $S \leq H \leq G$ ise $N_G(H) = H$ dir. [4]

Teorem 25: G çözülebilir bir ambivalent grup ve s, G nin 2-merkezi elemanı ise $N_G(C(S)) = C(S)$ dir. [4]

O halde, Tamamlayıcısı Ambivalent Grup Olan ve Abelyen Sylow 2-Alt Grubu İçeren Frobenius Grupları için aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

G , sonlu Ω kümesi üzerinde tanımlı, çekirdeği K , tamamlayıcısı H olan bir Frobenius grubu ve H bir abelyen Sylow 2-alt grubu içeren ambivalent grup olsun. Bu taktirde, H çift mertebelidir; H nin mertebesi iki olan en az bir elemanı vardır. Teorem 10'dan, H nin sadece bir tane involüsyon içerdiği sonucuna varılır. H nin, bu asal involüsyonunu içeren bir Sylow 2- alt grubu Z_2 veya bir genelleştirilmiş quaternion grubuna izomorftur. [4]

H nın bir abelyen Sylow 2-alt grubu içerdiği bilindiğine göre bu alt grup Z_2 ye izomorftur ve $H = G' Z_2$ dir. Başka bir deyişle, H , G' üzerine, Z_2 tamamlayıcıyla yayılır.[4]

Öte yandan, Teorem 10 da belirtilen sonuçlara göre K komütatifdir. Üstelik, K tek mertebeli bir gruptur:

$i \in H, |i| = 2$ ve $k \in K$ ise Teorem 10'dan, $k^i = k^{-1} = k \Leftrightarrow i = k^{-1}ik \Leftrightarrow k \in C_G(i) \leq H$ elde edilir ki; bu bir çelişkidir.

O halde, K nın ikinci mertebeden bir elemanı yoktur.

Sonuç olarak, G nin bir Sylow 2-alt grubu, H nin da Sylow 2-alt grubudur ve ikinci mertebededir. Frobenius grubu tanımını dikkate alındığında, $G = KG' Z_2$ elde edilir. Diğer yandan, Teorem 11'e göre, Frobenius çekirdeği olan K grubu nilpotenttir, dolayısıyla çözülebilirdir. Üstelik, K alt grubu komütatif olduğundan tüm Sylow alt grupları da komütatifdir.

Kaynakça

1. Alperin, J. L., & Bell, R. B. (1995). *Groups and representations*. Springer-Verlag.
2. Armeanu, I. (1993). About the 2-Sylow subgroups of a Q-group. *İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Dergisi*, 52, 45–46.
3. Armeanu, I. (1994). Supersolvable Q-groups. *İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Dergisi*, 53, 1–2.
4. Armeanu, I. (1996). About ambivalent groups. *Annales de Mathématiques Blaise Pascal*, 3, 17–22.
5. Dornoff, L. (1971). *Group representation theory: Part A ordinary representation theory*. Marcel Dekker.
6. Gallian, J.A. (1994), *Contemporary Abstract Algebra*. D.C.Heat.
7. Gorenstein, D. (1968). *Finite Groups*. Harper & Row.
8. Kletzing, D. (1984). *Structure and representation of Q- groups*. Springer-Verlag.
9. Lam, T.Y. (1998). “Representations of Finite Groups: A Hundred Years, Part II”. *American Mathematical Society* 45, 465-474.
10. Passman, D. (1968). *Permutations Groups*. W.A.Benjamin.
11. Rose, J.S.(1978). *A course in group theory*. Dover Publications.



Bölüm 2

Monte Carlo Metotları ile Sayısal Çözüm: Ortalama Değer, Reddetme ve Kontrol Değişken

Derya Arslan¹

GİRİŞ

Analitik olarak çözümü zor veya imkânsız olan integral ve diferansiyel denklemler, sayısal yöntemlerle yaklaşık çözümler üreterek analiz edilebilir. Bu bölümde, özellikle Monte Carlo (M C) metotlarının bu tür problemlerdeki rolü ele alınmaktadır. Monte Carlo yöntemleri, rassal sayı üretimine dayalı bir yaklaşım ile belirli integrallerin ve başlangıç koşulu verilmiş diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünü sağlar. Üç temel yaklaşım olan ortalama değer metodu, reddetme metodu ve kontrol değişken metodu uygulanarak yöntemlerin doğruluk, hata davranışı ve kullanım kolaylığı açısından karşılaştırılması yapılmıştır.

Başlangıç koşulu verilmiş bir diferansiyel denklem üzerinde yapılan hesaplamalarda, farklı sayılarda (N) rassal örnek kullanımı, hata değerlerinin ve yöntemlerin performansının detaylı bir şekilde incelenmesini sağlamıştır. Kontrol değişken metodu, doğru yardımcı fonksiyon seçildiğinde en düşük hata oranını sağlarken, ortalama değer metodu dengeli ve pratik bir seçenek olarak öne çıkmaktadır. Reddetme metodu ise uygulama kolaylığı sunmasına rağmen daha yüksek hata oranları göstermiştir.

Çalışma, Monte Carlo yöntemlerinin özellikle integrallerin çözümü ve diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümü için esnek, ölçeklenebilir ve güvenilir bir araç olduğunu vurgulamaktadır. Monte Carlo metotlarının temel prensiplerini, yöntemlerin karşılaştırmalı avantajlarını ve uygulama stratejilerini sunmayı amaçlamaktadır.

Anahtar Kelimeler: Monte Carlo metotları, Rassal sayılar, İntegral denklemler, Diferansiyel denklemler, Ortalama değer metodu, Reddetme metodu, Kontrol değişken metodu

MONTE CARLO METOTLARININ KARŞILAŞTIRILMASI

Bu bölümde MC metotları tekil olmayan tek boyutlu bir integrale uygulanacaktır..

¹ Doç. Dr., Bitlis Eren Üniversitesi, ORCID: 0000-0001-6138-0607

Örnek 1

$$u'(x) = \frac{1}{1 + \sin(x)} \quad u(0) = 0, \quad (1)$$

başlangıç koşulu verilen diferansiyel denklem için uygun matematik programı kullanarak Monte Carlo metodu ile yaklaşık çözümünü hesaplama ve yorumlama:

$$u'(x) = \frac{1}{1 + \sin(x)},$$

denklemini

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + \sin(x)} dx,$$

integral denklemi şeklinde yazabiliriz. Bu integral denklemin analitik yollarla çözümü,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1 + \sin(x)} dx &= -\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1} \Big|_0^1 = -\frac{2}{\tan\left(\frac{1}{2}\right) + 1} + \frac{2}{\tan\left(\frac{0}{2}\right) + 1} \\ &= -1,293407993 + 2 = 0,706592007, \end{aligned}$$

şeklinde. Şimdi uygun bir matematik programı ile Monte Carlo metotları kullanılarak integral denklemleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

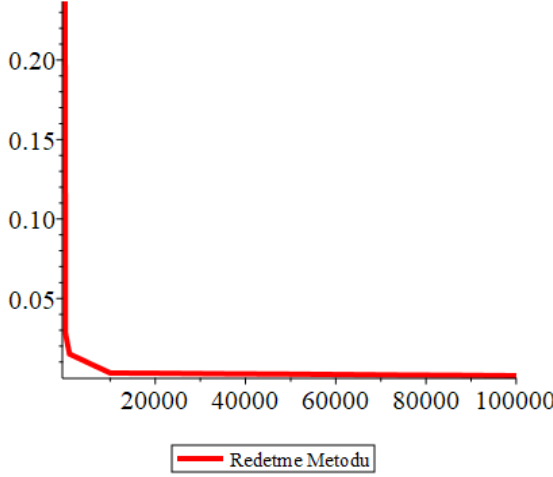
1. Reddetme Metodu ile Yaklaşık Çözüm

Reddetme metodu ile (1) denklemi ve başlangıç koşulu verilen diferansiyel denklemin yaklaşık değerini hesaplamak için 10,100, ...,100000 şeklinde N adet x_i ve y_i rassal sayısı kullanılarak çalıştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar ve hata değerleri Çizelge 1 ile verilmiştir.

Çizelge 1. Reddetme metodu ile hesaplanan değerler ve hata tablosu

N	Gerçek Değer	Yaklaşık Değer	Hata
10	0.7065920068	0.6000000000	0.1065920068
100	0.7065920068	0.5900000000	0.027721252
1000	0.7065920068	0.7070000000	0.0004079932
10000	0.7065920068	0.7095000000	0.0029079932

100000	0.7065920068	0.7065600000	0.0000320068
--------	--------------	--------------	--------------



Şekil 1. Redetme metodu ile elde edilen hata grafiği

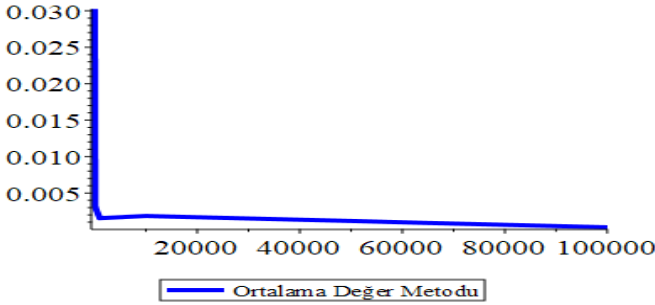
Burada N sayısı arttıkça, hata genel olarak azalıyor olsa bile $N = 10000$ değeri için artma olduğu görülmektedir. Monte Carlo Metotlarında N sayısı arttıkça doğrusal olarak integralin gerçek değerine yaklaşması yerine integralin gerçek değeri çevresinde salınım yapar. Bunun nedeni daha önce belirtildiği gibi rassal sayıların kullanılmasıdır.

2. Ortalama Değer Metodu ile Yaklaşık Çözüm

Ortalama değer metodu ile (1) problemi başlangıç koşulu verilen diferansiyel denklemin yaklaşık değerini hesaplayan uygun matematik programı kodu sırasıyla 10, 100, ..., 100000 (N) adet x_i rassal sayı için çalıştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar ve hata değerleri Çizelge 1’de yer almaktadır.

Çizelge 2. Ortalama değer metodu ile hesaplanan değerler ve hata tablosu

N	Gerçek Değer	Yaklaşık Değeri	Hata
10	0.7065920068	0.6763411750	0.0302508318
100	0.7065920068	0.7034821936	0.0031098132
1000	0.7065920068	0.7050414208	0.0015505860
10000	0.7065920068	0.708443986	0.0018519792
100000	0.7065920068	0.706883057	0.0002910502

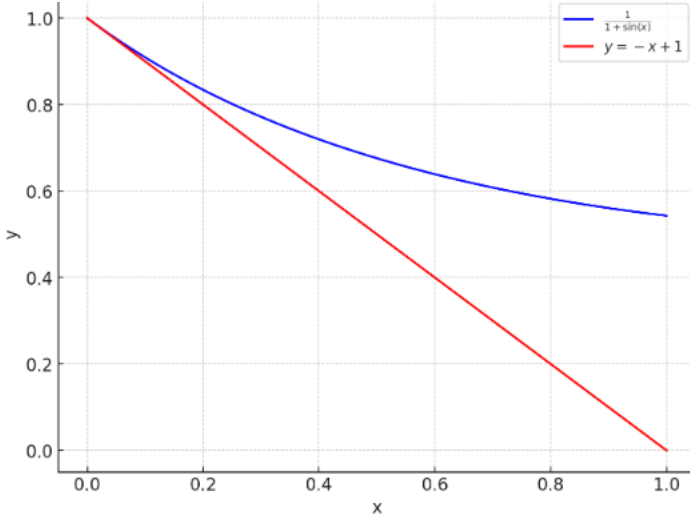


Şekil 2. Ortalama değer metodu ile hata grafiği

N sayısı arttıkça, hatanın genel olarak azaldığı ve reddetme metoduna göre gerçek değere daha yakın değerler elde edildiği görülmektedir.

3. Kontrol Değişken Metodu Kullanarak Yaklaşık Çözüm

Kontrol değişken metodu ile hesaplama yapılırken, diğer metotlar gibi rassal sayıların yanında aynı zamanda yardımcı bir $T(x)$ fonksiyonu gereklidir.



Şekil 3. Kontrol değişken metodu için yardımcı $h(x)$ fonksiyon

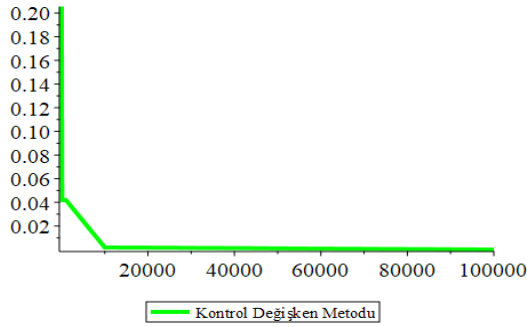
Kontrol değişken metodu ile

$$u'(x) = \frac{1}{1 + \sin(x)}, \quad u(0) = 0,$$

diferansiyel denklemin yaklaşık değerini hesaplayan uygun matematik programı kodu sırasıyla 10, 100, ..., 100000 olarak N adet x_i rassal sayısı için çalıştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar ve hata değerleri Çizelge 3 ile verilmiştir.

Çizelge 3. Kontrol Değişken metodu ile hesaplanan değerler ve hata tablosu

N	Gerçek Değer	Yaklaşık Değeri	Hata
10	0.7065920068	0.9120529947	0.2054609879
100	0.7065920068	0.6648404066	0.0417516002
1000	0.7065920068	0.6646002196	0.0419917872
10000	0.7065920068	0.7084504392	0.0018584324
100000	0.7065920068	0.7064706109	0.0001213959

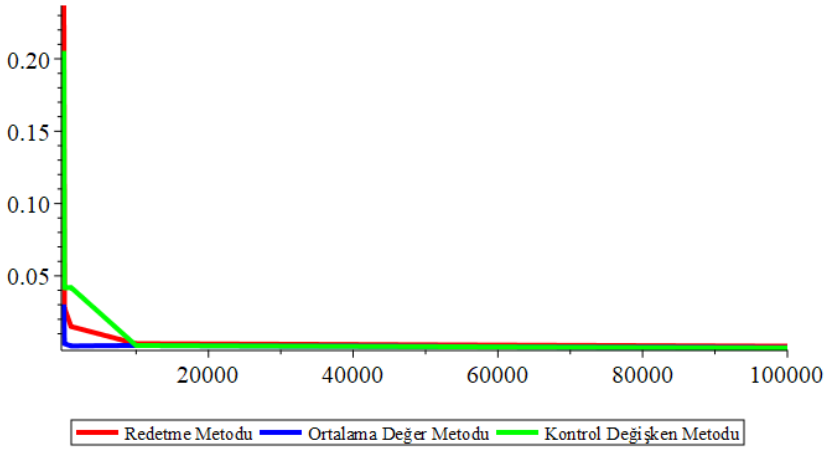


Şekil 4. Ortalama değer metodu ile hata grafiği

Çizelge 4. Monte Carlo metotlarının hata karşılaştırma tablosu

N	Reddetme Metodu	Ortalama Değer Metodu	Kontrol Değişken Metodu
10	0.236921838	0.0302508318	0.2054609879
100	0.027721252	0.0031098132	0.0417516002
1000	0.015006239	0.0015505860	0.0419917872
10000	0.003108612	0.0018519792	0.0018584324
100000	0.001384961	0.0002910502	0.0001213959

şeklinde. Karşılaştırma grafiği ise aşağıda gösterilmiştir:



Şekil 5. Monte Carlo metotları hata karşılaştırma grafiği

Gerçek değere en yakın sonuçlar kontrol değişken metodu ile elde edilmesine rağmen doğru ve iyi sonuç verecek yardımcı fonksiyonu bulmak metod için bir sınırlılıktır. Gerçek değere reddetme metoduna göre daha yakın sonuç veren, kontrol değişken metoduna göre ise daha kullanışlı olan ortalama değer metodu diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılabilir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, analitik olarak çözümü güç veya imkânsız olan diferansiyel denklemler için Monte Carlo metotlarının uygulanabilirliği incelenmiş ve üç farklı yöntem ortalama değer metodu, reddetme metodu ve kontrol değişken metodu ayrıntılı olarak karşılaştırılmıştır. Reddetme metoduna göre uygulama kolaylığı sağlamasına rağmen, diğer yöntemlere kıyasla daha yüksek hata oranına sahiptir. N değeri arttıkça hata genel olarak azalsa da rassal sayıların doğasından kaynaklı olarak hata değerlerinde küçük dalgalanmalar gözlenmiştir. Ortalama değer metodunda genel hata performansı açısından reddetme metoduna göre daha iyi sonuçlar vermiştir. N arttıkça hata düzenli şekilde azalmış ve gerçek değere hızlı bir yakınsama göstermiştir. Kontrol değişken metodunda ise doğru yardımcı fonksiyonun seçilmesi durumunda en düşük hata oranını sağlamıştır. Ancak, uygun kontrol değişkeninin belirlenmesi ek bilgi ve deneyim gerektirdiğinden yöntemin pratik kullanımı sınırlı olabilmektedir. Karşılaştırma sonuçları, Monte Carlo metotlarının özellikle yüksek boyutlu integrallerin hesaplanmasında ve diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünde esnek, ölçeklenebilir ve etkin bir araç olduğunu göstermektedir. Ortalama değer metodu, genel kullanım için uygun bir tercih olarak öne çıkarken, hata minimizasyonunun kritik olduğu durumlarda kontrol değişken metodunun tercih edilmesi önerilmektedir.

KAYNAKLAR

- Du, W., & Su, J. (2022). Uncertainty quantification for numerical solutions of the nonlinear partial differential equations by using the multi-fidelity Monte Carlo method. *Applied Sciences*, 12(14), 7045. <https://doi.org/10.3390/app12147045>
- Hu, J. (2023). On multilevel Monte Carlo methods for deterministic and uncertain hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics*, 486, 112133. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2023.112133>
- Wang, S., Yu, B., & Zhang, W. (2024). A new general Monte Carlo PINNs method for solving fPDEs on irregular domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 425, 116973. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2024.116973>
- Thiruthummal, A. A., & Kim, E.-J. (2022). Monte Carlo simulation of stochastic differential equation to study information geometry. *Entropy*, 24(8), 1113. <https://doi.org/10.3390/e24081113>
- An, D., Babbush, R., Cao, Y., et al. (2021). Quantum-accelerated multilevel Monte Carlo methods for stochastic differential equations in mathematical finance. *Quantum*, 5, 481. <https://doi.org/10.22331/q-2021-11-10-481>
- Owen, A. B., & Dick, J. (2023). A review of Monte Carlo and quasi-Monte Carlo sampling techniques. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*, 15(2), e1637. <https://doi.org/10.1002/wics.1637>
- Yu, W. (2022). Monte Carlo methods for partial differential equations with applications to electronic design automation. In *Numerical Methods in EDA* (pp. 45–78). Tsinghua University Press.
- Yazgan, K. (2005). Monte Carlo yöntemleri ve kısmi diferansiyel denklem çözümüne uygulanmaları. *Elektrik Mühendisliği Dergisi*, 423(19), 32–38.
- Yıldız, H. (2014). *Tekil olmayan integrallerin Monte Carlo metodu ile çözümü* (Yüksek lisans tezi). Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.



Bölüm 3

A Neural Network Approach for Solving Fredholm Type Integro-Differential Equation

Derya Arslan¹

Introduction

Integro-differential equations are important mathematical models that arise in many physical, biological, and engineering applications. Integro-differential equations are widely used mathematical tools for modeling memory effects and complex dynamic behavior [3]. Fredholm-type integro-differential equations (FIDEs), in particular, are widely used in modeling memory effects and delayed behavior of systems because they include integral terms across fixed boundaries. Such equations have a wide range of applications, from elasticity theory to quantum mechanics, from population dynamics to control theory [8]. Fredholm-type integro-differential equations, especially because they include integral terms across fixed boundaries, have important applications in many fields such as engineering, physics, and biology [4-6]. Analytical solutions of FIDEs can only be obtained in limited, special cases; in general, numerical methods are required. Many different approaches have been developed in the literature for this purpose. The finite difference method (FDM), one of the most fundamental methods, approximates derivatives with difference diagrams and integral terms with trapezoidal or Simpson's rules [7]. More advanced Galerkin and spectral methods represent the solution with spectral accuracy using Chebyshev or Legendre polynomials [11]. Furthermore, collocation methods provide high accuracy by zeroing out the residual at specific points [12]. Semi-analytical methods such as the Adomian decomposition method (ADM) and the variational iteration method (VIM) are also widely used [3]. In recent years, artificial intelligence-based numerical approaches have been developed as alternatives to these methods [9]. In particular, multi-layer perceptron (MLP) artificial neural networks and physics-informed neural networks (PINN) are increasingly used in solving integro-differential equations. A multi-layer perceptron (MLP) is a feedforward artificial neural network consisting of an input layer, a hidden layer, and an output layer [1,2]. These methods represent the solution function with a parametric model and optimize the weights by minimizing the residual function. Thus, they provide flexibility and generalization capabilities compared to classical methods for high-dimensional and nonlinear problems [10].

¹ Doç. Dr., Bitlis Eren Üniversitesi, ORCID: 0000-0001-6138-0607

The Method and Implementation

In this study, the MLP method is presented for the approximate solution of the Fredholm integral-differential equation, which will be examined below. The results of an example application are compared with the analytical solution and the effectiveness of the method is discussed:

$$u'(x) = f(x) + \int_0^1 h(x,s)u(s)ds,$$

$$u(A) = B,$$

MLP Approach:

Training Points

$$x_j = 0, 0.1, \dots, 1, \quad \Delta x = 0.1,$$

$$n = 11,$$

Number of hidden layer neurons

$$m = 15$$

Weights and biases (randomly initialized)

$$\alpha_i, w_i, b_i \quad i = 1, \dots, m$$

A Multi-Layer Perceptron (MLP) is a feedforward artificial neural network consisting of an input layer, a hidden layer, and an output layer.

The sigmoid function was chosen as the activation function

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

The output function is defined by the trial function, satisfying the integral and boundary conditions:

Here, $N(x)$ is the linear combination of the hidden layer neurons with weight and bias parameters. This structure satisfies the boundary condition $u(0) = 0$.

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x) &= x \sum_{i=1}^m \alpha_i \sigma(z_i(x)) \\ z_i(x) &= w_i x + b_i, \\ u_{NN}(x) &= x N(x)\end{aligned}$$

Residual Function: The accuracy of the solution is measured by the residual function. The residual is defined as follows:

$$R(x) = \frac{du_{NN}(x)}{dx} - f(x) - \int_0^1 K(x, s) u_{NN}(s) ds$$

Error Function:

Reducing the residual function to the smallest size is an important goal. The mean square error function E is used for this purpose

$$E = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} R(x_j)^2$$

Training with Backpropagation and Gradient Descent

The parameters $\alpha_i, w_i, b_i, i=1, \dots, m$ are updated according to the residual function. At each iteration, derivatives are calculated and gradient descent is applied as follows:

$$\begin{aligned}\alpha_i^{new} &= \alpha_i - \mu R(x_j) \frac{\partial u_{NN}}{\partial \alpha_i} \\ w_i^{new} &= w_i - \mu R(x_j) \frac{\partial u_{NN}}{\partial w_i} \\ b_i^{new} &= b_i - \mu R(x_j) \frac{\partial u_{NN}}{\partial b_i}\end{aligned}$$

where μ is the learning coefficient. The training process is performed iteratively to minimize residual error.

Discretization of the Integral Term

$$I[u_{NN}] = \int_0^1 s u_{NN}(s) ds \approx \sum_{k=0}^{n-1} s_k u_{NN}(s_k) \Delta x$$

Örnek 1

$$u'(x) = 1 + \int_0^1 s u(s) ds,$$

$$u(0) = 0,$$

the analytical solution to the initial value problem has the following form:

$$u(x) = x + \frac{x^2}{2}.$$

Implementation Steps of Method

The “Training Algorithm” is as follows:

- 1) Training points x_j are selected.
- 2) In the relevant iteration, I is calculated and fixed.
- 3) $R(x)$ is calculated for each x_j .
- 4) Using gradients (simplified or exact), the parameters α_i, w_i, b_i $i = 1, \dots, m$ are updated.
- 5) The mean error E is updated; this is repeated until convergence is achieved.
- 6) An MLP-based solution method is applied to the Fredholm integro-differential equation. The results are compared with the analytical solution, and the method's operation is illustrated with tables and graphs.

At the end of the training, $u_{NN}(x_j)$ is compared with the analytical solution $u(x_j) = x_j + \frac{x_j^2}{2}$.

Furthermore, the accuracy of the method is visualized by plotting the residual $R(x_j)$ points as follows:

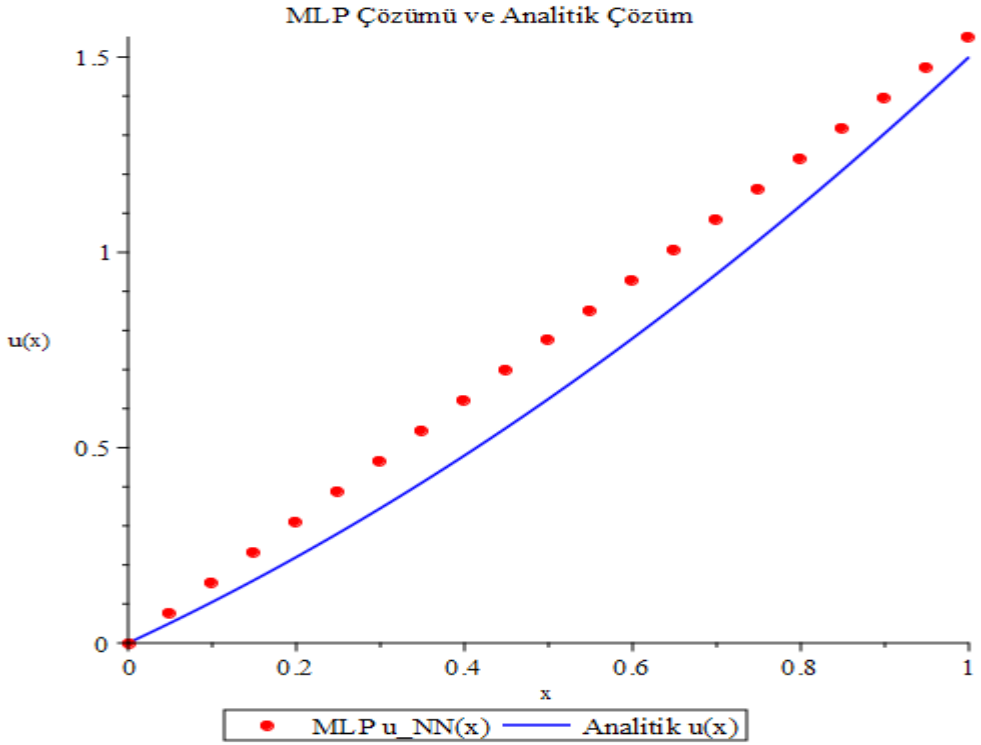


Figure 1. Comparison of the analytical and approximate solutions for Example 1

According to Figure 1, the red dots represent the numerical solutions obtained with the MLP (Multi-Layer Perceptron) artificial neural network, while the blue curve represents the analytical solution of the problem. Here, the MLP solution generally follows a similar trend to the analytical solution. The MLP solution (red dots) is slightly above the analytical solution (blue curve). This may be due to bias error or the network not being optimized sufficiently long or well. At the starting point ($x=0$), both the analytical and MLP solutions met the boundary condition ($u(0)=0$). As x values increase (especially after $x>0.5$), the difference between the MLP solution and the analytical solution increases. This suggests that the network may need more training points or a different activation/optimization method for high accuracy. In conclusion, the approach is generally accurate, matching the analytical solution curve, but further optimization is needed for accuracy.

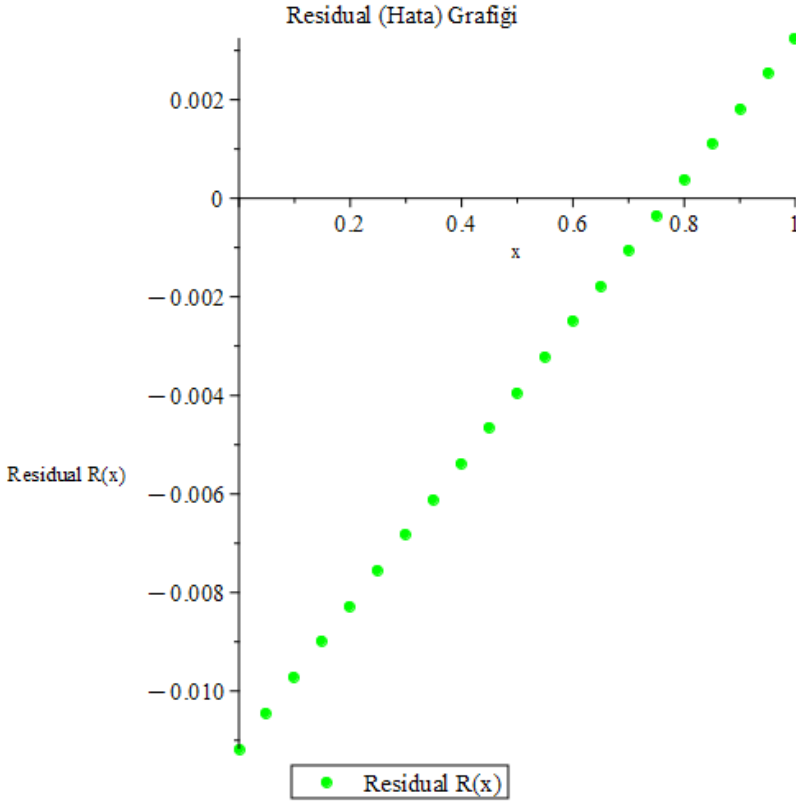


Figure 2. Residual (Error) Plot for Example 1

Figure 2 reveals how much the MLP solution deviates from the analytical solution. Initially (around $x = 0$), the error is around -0.01 . In other words, the MLP solution produces a slightly lower value than the analytical solution. As x increases, the residual (error) increases linearly, becoming positive, and reaches approximately $+0.002$ around $x = 1$. This indicates that the MLP solution underestimates the function for small x values and slightly overestimates it for large x values. The error amplitude is small: in the range $[-0.01, 0.002]$, meaning the maximum error is around 1%. This is a quite good result. There is a systematic trend the error increases monotonically rather than randomly distributed around zero. This shows that the MLP solution produces a small but consistent shift across the entire range. In summary, the MLP solution generally fits the analytical solution well. The error is small but systematic (monotonically increasing). Better training (more epochs, more training points, more appropriate learning rate) can reduce this systematic drift.

Table 1. Average error for 100, ..., 10000 iterations

İterasyon	Ortalama Hata
100	0.01045619
1000	0.00817774
2000	0.00587154
3000	0.00389259
4000	0.00234087
5000	0.00126301
6000	0.00061178
7000	0.00026941
8000	0.00011003
9000	0.00004256
10000	0.00001587

Examining the table clearly shows how the average error of the MLP solution decreases over 10,000 iterations: In the initial iteration (100 iterations), the average error is around 0.01040, or approximately 1%. This is a reasonable starting value. In subsequent iterations, the error decreases monotonically and steadily. This demonstrates stable learning and no overfitting/oscillation. After 4,000 iterations, the error decreases rapidly, reaching the level of 10^{-3} . After this point, improvement is slower but steady. In the 9,000 – 10,000 iteration range, the error drops to 10^{-5} . This indicates that the network has achieved a highly accurate analytical solution. Overall performance: The training process was effective; the network is increasingly accurate, and convergence has been achieved. As a result, the MLP solution initially approaches the analytical solution but contains small errors. These errors gradually decrease as a sufficient number of iterations are reached. At 10,000 iterations, the error is now very small ($1.5 \cdot 10^{-5}$) demonstrating the reliability of the solution.

Conclusion

The MLP-based solution provides a numerical approach to integral-differential equations. The resulting solution converges to the analytical solution. The residual function measures the accuracy of the method and shows that as the error becomes smaller, the MLP solution becomes closer to the true solution. The integral term in the problem is of the Fredholm type and does not depend on x ; therefore, it is calculated as a single scalar at each iteration. The analytical solution is the reference curve; the numerical solution is expected to match this curve (with sufficient architecture and training). The learning rate μ and the number of neurons m significantly affect convergence; excessively large μ can lead to oscillations. Using a full gradient can increase stability and accuracy.

References

1. Pinkus, A. (1999). Approximation theory of the MLP model in neural networks. *Acta Numerica*, 8, 143–195. <https://doi.org/10.1017/S0962492900002921>
2. Chui, C. K., & Li, X. (2023). Approximation by deep ReLU neural networks with bounded width. *Journal of Approximation Theory*, 284, 105894. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2023.105894>
3. Wazwaz, A. M. (2011). *Linear and nonlinear integral equations: Methods and applications*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-21449-3>
4. Kanwal, R. P. (2013). *Linear integral equations: Theory and technique*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6338-9>
5. Islam, S., Haq, F., Shah, K., & Zaman, G. (2017). Numerical solution of singular Fredholm integro-differential equations using Haar wavelet. *Applied Mathematics and Computation*, 293, 416–431. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.08.006>
6. Polyanin, A. D., & Manzhirov, A. V. (2008). *Handbook of integral equations* (2nd ed.). Chapman & Hall/CRC.
7. Atkinson, K. E. (1997). *The numerical solution of integral equations of the second kind*. Cambridge University Press.
8. Brunner, H. (2017). *Volterra integral equations: An introduction to theory and applications*. Cambridge University Press.
9. Lagaris, I. E., Likas, A., & Fotiadis, D. I. (1998). Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 9(5), 987–1000. <https://doi.org/10.1109/72.712178>
10. Raissi, M., Perdikaris, P., & Karniadakis, G. E. (2019). Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 378, 686–707. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.10.045>
11. Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A., & Zang, T. A. (2006). *Spectral methods: Fundamentals in single domains*. Springer.
12. Kauthen, J.-P. (1989). Continuous time collocation methods for Volterra-Fredholm integral equations. *Numerische Mathematik*, 56(5), 409–424. <https://doi.org/10.1007/BF01396646>



Bölüm 4

New Developments of Nabla Fractional Inequalities

Yusuf Zeren¹

1. Introduction

The classical Hardy inequality was developed by Hardy [1]. Let (b_n) be a sequence, and $c > 1$, for $c \in \mathbb{R}$. In this case, the following inequality is valid.

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_m}{m} \right)^c < \left(\frac{c}{c-1} \right)^c \sum_{m=1}^{\infty} b_m^c.$$

However, Hardy [2] proved the following inequality. If w^c is integrable for $w(\tau) \geq 0$, and $c > 1$, then the following inequality holds.

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{s} \int_0^s w(\tau) d\tau \right)^c ds \leq \left(\frac{c}{c-1} \right)^c \int_0^{\infty} w^c(s) ds. \quad (1)$$

Later, Hardy [3] generalized (1) inequality. For $c > 1$, $w(\tau) > 0$, and let w be integrable on $(0, \infty)$, then the following inequalities hold.

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{t^n} \int_t^{\infty} w(\tau) d\tau \right)^c dt \leq \left(\frac{c}{1-n} \right)^c \int_0^{\infty} \frac{1}{t^{n-c}} w^c(t) dt, \quad n < 1, \quad (2)$$

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{t^n} \int_0^t w(\tau) d\tau \right)^c dt \leq \left(\frac{c}{n-1} \right)^c \int_0^{\infty} \frac{1}{t^{n-c}} w^c(t) dt, \quad n > 1. \quad (3)$$

Hardy and Littlewood [4] showed the following inequalities. If (b_n) is a sequence for $c > 1$, then the following inequalities hold.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^j} \left(\sum_{m=n}^{\infty} b_m \right)^c \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{j-c}} b_n^c, \quad j < 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^j} \left(\sum_{m=1}^n b_m \right)^c \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{j-c}} b_n^c, \quad j > 1,$$

where M is a constant.

¹ Prof. Dr., Yıldız Technical University, ORCID: 0000-0001-8346-2208

The following fractional Hardy operator and its adjoint [9] are defined on $(0, \infty)$ version by

$$H_\alpha v(t) = \frac{1}{t^{1-\alpha}} \int_0^t v(\epsilon) d\epsilon, \quad \tilde{H}_\alpha v(t) = \int_t^\infty \frac{1}{t^{1-\alpha}} v(\epsilon) d\epsilon,$$

where $0 \leq \alpha < 1$.

Hardy [1, 4] demonstrated the following inequalities for $\alpha = 0$.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |Hv(\epsilon)|^\tau d\epsilon &\leq (\tau')^\tau \int_0^\infty |v(\epsilon)|^\tau d\epsilon, \quad \tau > 1, \\ \int_0^\infty |\tilde{H}v(\epsilon)|^\tau d\epsilon &\leq \tau^\tau \int_0^\infty |v(\epsilon)|^\tau d\epsilon, \quad \tau > 1, \end{aligned}$$

where $1/\tau + 1/\tau' = 1$. For more details, see [5-15].

2. Basic structures of time scales

Studies conducted over a period of fifty years on integral inequalities and dynamic equations have assumed a pivotal role within the realms of mathematics and science. About studies on time scales for more details, see [16-50]. The time scale $(\mathbb{T})$ is a subset of arbitrary and non-null real numbers. The representation of $(0, \infty)_\mathbb{T}$ is expressed as $(0, \infty) \cap \mathbb{T}$.

The mappings $\rho, \sigma: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ defined by $\rho(\epsilon) = \sup\{\tau \in \mathbb{T}: \tau > \epsilon\}$ ($\rho(\epsilon)$ is the backward jump operator), $\sigma(\epsilon) = \inf\{\tau \in \mathbb{T}: \tau > \epsilon\}$ ($\sigma(\epsilon)$ is the forward jump operator), for $\epsilon \in \mathbb{T}$. Let two mappings $\mu, \vartheta: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ such that $\mu(\epsilon) = \sigma(\epsilon) - \epsilon$, $\vartheta(\epsilon) = \epsilon - \rho(\epsilon)$ are called graininess mappings. If $\rho(\epsilon) < \epsilon$, then ϵ is left-scattered and if $\rho(\epsilon) = \epsilon$, then ϵ is called left-dense. If $\sigma(\epsilon) > \epsilon$, then ϵ is right-scattered and if $\sigma(\epsilon) = \epsilon$, then ϵ is called right-dense.

If $\mathbb{T}$ has a left-scattered maximum m , then $\mathbb{T}^j = \mathbb{T} - \{m\}$. Otherwise $\mathbb{T}^j = \mathbb{T}$. Briefly

$$\mathbb{T}^j = \begin{cases} \mathbb{T} \setminus (\rho \sup \mathbb{T}, \sup \mathbb{T}], & \text{if } \sup \mathbb{T} < \infty, \\ \mathbb{T}, & \text{if } \sup \mathbb{T} = \infty. \end{cases}$$

By the same way

$$\mathbb{T}_j = \begin{cases} \mathbb{T} \setminus [\inf \mathbb{T}, \sigma(\mathbb{T})], & \text{if } |\inf \mathbb{T}| < \infty, \\ \mathbb{T}, & \text{if } \inf \mathbb{T} = -\infty. \end{cases}$$

In [16], a function $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ is said to be nabla differentiable at $\epsilon \in \mathbb{T}$ if ϑ is defined in a neighborhood V of ϵ and there exists a unique real number $\vartheta^\nabla(t)$,

called the nabla derivative of ϑ at ε , such that for each $\varepsilon > 0$, there exists a neighborhood M of ε with $M \subseteq V$, and

$$|\vartheta(\rho(\varepsilon)) - \vartheta(\tau) - \vartheta^\nabla(\varepsilon)[\rho(\varepsilon) - \tau]| \leq \varepsilon|\rho(\varepsilon) - \tau|$$

for all $\tau \in M$.

In [16], (Chain Rule) let $\vartheta: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ be continuously differentiable and suppose that $\pi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous and ∇ differentiable. Then $\vartheta \circ \pi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ is nabla differentiable, and there exists c in the real interval $[\rho(\varepsilon), \varepsilon]$ such that

$$(\vartheta \circ \pi)^\nabla(\varepsilon) = \vartheta'(\pi(c))\pi^\nabla(\varepsilon) \quad (4)$$

In [38], a function $\Theta: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ is called a nabla antiderivative of $\vartheta: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ if $\nabla(\Theta(\varepsilon)) = \vartheta(\varepsilon)$ for all $\varepsilon \in \mathbb{T}$. We then define the ∇ -integral (nabla integral) of ϑ by

$$\int_a^\varepsilon \vartheta(\tau) \nabla \tau = \Theta(\varepsilon) - \Theta(a)$$

for all $\varepsilon \in \mathbb{T}$.

Theorem 2.1 [43] Let $k, l, m \in \mathbb{T}$, and let $\vartheta \circ \pi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ be left dense continuous for $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- i. $\int_k^l [\alpha \vartheta(s) + \beta \pi(s)] \nabla s = \alpha \int_k^l \vartheta(s) \nabla s + \beta \int_k^l \pi(s) \nabla s,$
- ii. $\int_k^l \vartheta(s) \nabla s = - \int_l^k \vartheta(s) \nabla s,$
- iii. $\int_k^m \vartheta(s) \nabla s = \int_k^l \vartheta(s) \nabla s + \int_l^m \vartheta(s) \nabla s,$
- iv. $\left| \int_k^l \vartheta(s) \nabla s \right| \leq \int_k^l |\vartheta(s)| \nabla s,$
- v. If $\vartheta(s) \geq 0$ for all $s \in [k, l]_{\mathbb{T}}$, then $\int_k^l \vartheta(s) \nabla s \geq 0,$
- vi. If $\vartheta(s) \geq \pi(s)$ for all $s \in [k, l]_{\mathbb{T}}$, then $\int_k^l \vartheta(s) \nabla s \geq \int_k^l \pi(s) \nabla s.$

Lemma 2.2 [43] If $k, l \in \mathbb{T}$, and $\vartheta \circ \pi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ are left dense continuous, then

$$\int_k^l \vartheta(s) \pi^\nabla(s) \nabla s = \vartheta(s) \pi(s) I_k^l - \int_k^l \vartheta^\nabla(s) \pi^\rho(s) \nabla s. \quad (5)$$

Hölder's nabla inequality [43] states that $w, \varphi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ are ld -continuous functions for $a, b \in \mathbb{T}$ with

$$\int_a^b |w(\varepsilon) \varphi(\varepsilon)| \nabla \varepsilon \leq \left(\int_a^b (w(\varepsilon))^\alpha \nabla \varepsilon \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b (\varphi(\varepsilon))^\beta \nabla \varepsilon \right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad (6)$$

where $\alpha > 1$ and $1/\alpha + 1/\beta = 1$.

For the remainder of our work, we will suppose that the functions v_k , φ_k , and g_k are positive functions and ld –continuous. We will also need the following arithmetic-geometric inequality to help us with the proofs. (see [21])

$$\prod_{k=1}^m \delta_k^{\beta_k} < \sum_{k=1}^m \delta_k \beta_k, \quad (7)$$

where $\sum_{k=1}^m \beta_k = 1$. Now, let us define the operators

$$D_k(\varepsilon) = \frac{1}{v_k(\varepsilon)} \int_a^\theta v_k(s) \varphi_k(s) \mu_k(s) \nabla s, \quad (8)$$

$$H_{k,\alpha} \varphi(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{1-\alpha}} \int_a^t \varphi_j(s) \nabla s, \quad (9)$$

where $\varepsilon \in [a, \infty)_{\mathbb{T}}$ and $j = 1, 2, \dots, m$.

3. Main Result

Theorem 3.1. Let $\beta_j < \delta_j$ and $1 < \beta_j < \gamma_j$ for $j = 1, 2, \dots, m$ such that $\sum_{j=1}^m \beta_j = 1$. $\vartheta_j(t)$ is a non-increasing functions for $j = 1, 2, \dots, m$, and $g_j(t)$ is a non-decreasing for $j = 1, 2, \dots, m$. Let the constants $\chi_j > 0$ for $j = 1, 2, \dots, m$ satisfying

$$\begin{aligned} & \left[\frac{H_{j,\alpha}^\rho \Omega(\varepsilon)}{H_{j,\alpha} \Omega(\varepsilon)} \right]^{\frac{\delta_j}{\beta_j}} \frac{\gamma_j H_{j,\alpha} \Omega(\varepsilon) \vartheta_j^\nabla(\varepsilon)}{(\delta_j - \beta_j) \Omega_j(t) \vartheta_j(\varepsilon)} + 1 \\ & \geq \left[\frac{H_{j,\alpha}^\rho \Omega(\varepsilon)}{H_{j,\alpha} \Omega(\varepsilon)} \right]^{\frac{\delta_j}{\beta_j}} \frac{\gamma_j H_{j,\alpha} \Omega(\varepsilon) g_j^\nabla(\varepsilon)}{(\delta_j - \beta_j) \Omega_j(\varepsilon) g_j^\rho(\varepsilon)} + \frac{1}{\chi_j}. \end{aligned} \quad (10)$$

Then for any constants $C_j > 0$, we have

$$\int_a^\infty \prod_{j=1}^m \left(\left[D_j^\rho(\varepsilon) \right]^{\gamma_j} \frac{[g_j^\rho(\varepsilon) \Omega_j(\varepsilon)]^{\beta_j}}{[H_{j,\alpha}^\rho \Omega(\varepsilon)]^{\delta_j}} \right) \nabla \varepsilon$$

$$\leq \left[\prod_{j=1}^m \frac{1}{C_j^{\gamma_j}} \right] \sum_{j=1}^m S_j \int_a^\infty g_j^\rho(\varepsilon) \Omega_j(\varepsilon) \mu_j^{\frac{\gamma_j}{\beta_j}}(\varepsilon) \frac{\left(H_{j,\alpha}^\rho \Omega(\varepsilon) \right)^{\frac{\delta_j(\gamma_j-1)}{\beta_j}}}{\left(H_{j,\alpha}^\rho \Omega(\varepsilon) \right)^{\frac{\gamma_j(\delta_j-1)}{\beta_j}}} \nabla \varepsilon, \quad (11)$$

where $S_j = \beta_j \left(C_j \frac{\chi_j \gamma_j}{\delta_j - \beta_j} \right)^{\frac{\gamma_j}{\beta_j}}$.

Proof. Integrating the left-hand side of (11) for

$\vartheta(\varepsilon) = - \int_\varepsilon^\infty \Omega_j(s) \left(H_{j,\alpha}^\rho \Omega(s) \right)^{\frac{\delta_j}{\beta_j}} \nabla s$, then we have

$$\int_a^\infty \frac{g_j^\rho(\varepsilon) \Omega_j(\varepsilon) \left[D_j^\rho(\varepsilon) \right]^{\frac{\gamma_j}{\beta_j}}}{\left(H_{j,\alpha}^\rho \Omega(\varepsilon) \right)^{\frac{\delta_j}{\beta_j}}} \nabla \varepsilon = - \int_a^\infty \vartheta(\varepsilon) \left(g_j(\varepsilon) D_j^{\frac{\gamma_j}{\beta_j}}(\varepsilon) \right)^\nabla \nabla \varepsilon, \quad (12)$$

where we use (5) with

$$\begin{cases} \lambda^\rho(\varepsilon) = g_j^\rho(\varepsilon) \left[D_j^\rho(\varepsilon) \right]^{\frac{\gamma_j}{\beta_j}} \\ \vartheta^\nabla(\varepsilon) = \frac{\Omega_j(\varepsilon)}{\left(H_{j,\alpha}^\rho \Omega(\varepsilon) \right)^{\frac{\delta_j}{\beta_j}}} \end{cases},$$

to obtain

$$\begin{aligned} & \int_a^\infty \frac{g_j^\rho(\varepsilon) \Omega_j(\varepsilon) \left[D_j^\rho(\varepsilon) \right]^{\frac{\gamma_j}{\beta_j}}}{\left(H_{j,\alpha}^\rho \Omega(\varepsilon) \right)^{\frac{\delta_j}{\beta_j}}} \nabla \varepsilon \\ &= \vartheta(t) g_j(\varepsilon) D_j^{\frac{\gamma_j}{\beta_j}}(\varepsilon) I_a^\infty - \int_a^\infty \vartheta(\varepsilon) \left(g_j(\varepsilon) D_j^{\frac{\gamma_j}{\beta_j}}(\varepsilon) \right)^\nabla \nabla \varepsilon. \end{aligned}$$

From (4), we obtain that

$$\begin{aligned}
& \left(\left(H_{j,\alpha} \Omega(s) \right)^{1-\frac{\delta_j}{\beta_j}} \right)^\nabla \\
&= \left(1 - \frac{\delta_j}{\beta_j} \right) \int_0^1 \left(\tau H_{j,\alpha}^\rho \Omega(s) + (1-\tau) H_{j,\alpha}(s) \right)^{-\frac{\delta_j}{\beta_j}} d\tau H_{j,\alpha}^\nabla \Omega(s) \\
&\leq \left(1 - \frac{\delta_j}{\beta_j} \right) \int_0^1 \left(\tau H_{j,\alpha}^\rho \Omega(s) + (1-\tau) H_{j,\alpha}^\rho \Omega(s) \right)^{-\frac{\delta_j}{\beta_j}} \nabla \tau H_{j,\alpha}^\nabla \Omega(s) \\
&= \left(1 - \frac{\delta_j}{\beta_j} \right) \left(H_{j,\alpha}^\rho \Omega(s) \right)^{-\frac{\delta_j}{\beta_j}} \Omega_j(s),
\end{aligned}$$

so

$$\left(H_{j,\alpha}^\rho \Omega(s) \right)^{-\frac{\delta_j}{\beta_j}} \Omega_j(s) \leq \frac{\beta_j}{\beta_j - \delta_j} \left(\left(H_{j,\alpha} \Omega(s) \right)^{1-\frac{\delta_j}{\beta_j}} \right)^\nabla.$$

Therefore

$$\begin{aligned}
\vartheta(\varepsilon) &= - \int_\varepsilon^\infty \left(H_{j,\alpha}^\rho \Omega(s) \right)^{-\frac{\delta_j}{\beta_j}} \Omega_j(s) \nabla s \leq \frac{\beta_j}{\beta_j - \delta_j} \int_\varepsilon^\infty \left(\left(H_{j,\alpha} \Omega(s) \right)^{1-\frac{\delta_j}{\beta_j}} \right)^\nabla \nabla s \\
&= \frac{\beta_j}{\delta_j - \beta_j} \left(\left(H_{j,\alpha} \Omega(s) \right)^{1-\frac{\delta_j}{\beta_j}} - I_j \right) \leq \frac{\beta_j}{\delta_j - \beta_j} \left(H_{j,\alpha} \Omega(s) \right)^{1-\frac{\delta_j}{\beta_j}}. \tag{13}
\end{aligned}$$

Combining (12) and (13),

$$\begin{aligned}
& \int_a^\infty \frac{g_j^\rho(\varepsilon) \Omega_j(\varepsilon) \left[D_j^\rho(\varepsilon) \right]^{\frac{\gamma_j}{\beta_j}}}{\left(H_{j,\alpha}^\rho \Omega(\varepsilon) \right)^{\frac{\delta_j}{\beta_j}}} \nabla \varepsilon \\
&\leq \frac{\beta_j}{\delta_j - \beta_j} \int_a^\infty \left(H_{j,\alpha} \Omega(\varepsilon) \right)^{1-\frac{\delta_j}{\beta_j}} \left(g_j(\varepsilon) D_j^{\frac{\gamma_j}{\beta_j}}(\varepsilon) \right)^\nabla \nabla \varepsilon. \tag{14}
\end{aligned}$$

From the definition of $D_j(\varepsilon)$, we can write the following equation

$$\begin{aligned}
D_j^\nabla(\varepsilon) &= \frac{[\vartheta_j(\varepsilon)\Omega_j(\varepsilon)\mu_j(\varepsilon)]}{\vartheta_j(\varepsilon)} + \left(-\frac{\vartheta_j^\nabla(\varepsilon)}{\vartheta_j(\varepsilon)\vartheta_j^\rho(\varepsilon)} \right) \int_{\rho(\varepsilon)}^{\varepsilon} \vartheta_j(s)\Omega_j(s)\mu_j(s)\nabla s \\
&= \Omega_j(\varepsilon)\mu_j(\varepsilon) - \frac{\vartheta_j^\nabla(\varepsilon)D_j^\rho(\varepsilon)}{\vartheta_j(\varepsilon)} \geq 0.
\end{aligned}$$

Applying the chain rule (4) for $c \in [\rho(\varepsilon), \varepsilon]$, then we obtain

$$\left(D_j^{\frac{\gamma_j}{\beta_j}}(\varepsilon) \right)^\nabla = \frac{\gamma_j D_j^{\frac{\gamma_j}{\beta_j}-1}(c)}{\beta_j} D_j^\nabla(\varepsilon).$$

From $D_j^\nabla(\varepsilon) \geq 0$ and $\rho(\varepsilon) \geq c$, then we can write the following inequality

$$\begin{aligned}
\left(D_j^{\frac{\gamma_j}{\beta_j}}(\varepsilon) \right)^\nabla &\leq \frac{\gamma_j D_j^{\rho(\frac{\gamma_j}{\beta_j}-1)}(\varepsilon)}{\beta_j} \left[\Omega_j(\varepsilon)\mu_j(\varepsilon) - \frac{\vartheta_j^\nabla(\varepsilon)D_j^\rho(\varepsilon)}{\vartheta_j(\varepsilon)} \right] \\
&= \frac{\gamma_j \Omega_j(\varepsilon)\mu_j(\varepsilon)D_j^{\rho(\frac{\gamma_j}{\beta_j}-1)}(\varepsilon)}{\beta_j} - \frac{\gamma_j \vartheta_j^\nabla(\varepsilon)D_j^{\frac{\rho\gamma_j}{\beta_j}}(\varepsilon)}{\beta_j \vartheta_j(\varepsilon)},
\end{aligned}$$

and we can write the following inequality

$$\begin{aligned}
\left(g_j(\varepsilon)D_j^{\frac{\gamma_j}{\beta_j}}(\varepsilon) \right)^\nabla &= D_j^{\frac{\gamma_j}{\beta_j}}(\varepsilon)g_j^\nabla(\varepsilon) + \left(D_j^{\frac{\gamma_j}{\beta_j}}(\varepsilon) \right)^\nabla g_j^\rho(\varepsilon) \\
&\leq D_j^{\frac{\rho\gamma_j}{\beta_j}}(\varepsilon)g_j^\nabla(\varepsilon) + \frac{\gamma_j g_j^\rho(\varepsilon)\Omega_j(\varepsilon)\mu_j(\varepsilon)D_j^{\rho(\frac{\gamma_j}{\beta_j}-1)}(\varepsilon)}{\beta_k} \\
&\quad - \frac{\gamma_j g_j^\rho(\varepsilon)\vartheta_j^\nabla(\varepsilon)D_j^{\frac{\rho\gamma_j}{\beta_j}}(\varepsilon)}{\beta_j \vartheta_j(\varepsilon)}. \tag{15}
\end{aligned}$$

Substituting (15) into (14), then we have

$$\begin{aligned}
& \int_a^\infty \frac{g_j^\rho(\varepsilon)\Omega_j(\varepsilon)D_j^{\frac{\rho\gamma_j}{\beta_j}}(\varepsilon)}{\left(H_{j,\alpha}^\rho\Omega(\varepsilon)\right)^{\frac{\delta_j}{\beta_j}}} \nabla\varepsilon \leq \frac{\beta_j}{\delta_j - \beta_j} \int_a^\infty \left(H_{j,\alpha}\Omega(\varepsilon)\right)^{1-\frac{\delta_j}{\beta_j}} g_j^\nabla(\varepsilon)D_j^{\frac{\rho\gamma_j}{\beta_j}}(\varepsilon)\nabla\varepsilon \\
& + \frac{\gamma_j}{\delta_j - \beta_j} \int_a^\infty \left(H_{j,\alpha}\Omega(\varepsilon)\right)^{1-\frac{\delta_j}{\beta_j}} g_j^\rho(\varepsilon)\Omega_j(\varepsilon)\mu_j(\varepsilon)D_j^{\rho\left(\frac{\gamma_j}{\beta_j}-1\right)}(\varepsilon)\nabla\varepsilon \\
& - \frac{\gamma_j}{\delta_j - \beta_j} \int_a^\infty \frac{g_j^\rho(\varepsilon)\vartheta_j^\nabla(\varepsilon)}{\vartheta_j(\varepsilon)} \left(H_{j,\alpha}\Omega(\varepsilon)\right)^{1-\frac{\delta_j}{\beta_j}} D_j^{\frac{\rho\gamma_j}{\beta_j}}(\varepsilon)\nabla\varepsilon.
\end{aligned}$$

From the above inequality and (10), it follows that

$$\begin{aligned}
& \int_a^\infty \frac{g_j^\rho(\varepsilon)\Omega_j(\varepsilon)}{\left(H_{j,\alpha}^\rho\Omega(\varepsilon)\right)^{\frac{\delta_j}{\beta_j}}} D_j^{\frac{\rho\gamma_j}{\beta_j}}(\varepsilon)\nabla\varepsilon \\
& \leq \frac{\chi_j\gamma_j}{\delta_j - \beta_j} \int_a^\infty \left(H_{j,\alpha}\Omega(\varepsilon)\right)^{1-\frac{\delta_j}{\beta_j}} g_j^\rho(\varepsilon)\Omega_j(t)\mu_j(\varepsilon)D_j^{\rho\left(\frac{\gamma_j}{\beta_j}-1\right)}(\varepsilon)\nabla\varepsilon \\
& = \frac{\chi_j\gamma_j}{\delta_j - \beta_j} \int_a^\infty \left(\frac{\left(H_{j,\alpha}\Omega(\varepsilon)\right)^{1-\frac{\delta_j}{\beta_j}} g_j^\rho(\varepsilon)\Omega_j(\varepsilon)\mu_j^{\frac{\gamma_j}{\beta_j}}(\varepsilon)}{\left(H_{j,\alpha}^\rho\Omega(\varepsilon)\right)^{\frac{\delta_j(\gamma_j}{\beta_j}-1)}} \right)^{\frac{\beta_j}{\gamma_j}} \\
& \quad \times \left(\frac{g_j^\rho(t)\Omega_j(\varepsilon)D_j^{\frac{\rho\gamma_j}{\beta_j}}(\varepsilon)}{\left(H_{j,\alpha}^\rho\Omega(\varepsilon)\right)^{\frac{\delta_j}{\beta_j}}} \right)^{\frac{\gamma_j-\beta_j}{\gamma_j}} \nabla t.
\end{aligned}$$

By applying Hölder's inequality (6), we obtain

$$\int_a^\infty \frac{g_j^\rho(\varepsilon)\Omega_j(\varepsilon)D_j^{\frac{\rho\gamma_j}{\beta_j}}(\varepsilon)}{\left(H_{j,\alpha}^\rho\Omega(\varepsilon)\right)^{\frac{\delta_j}{\beta_j}}} \nabla\varepsilon$$

$$\leq \frac{\chi_j \gamma_j}{\delta_j - \beta_j} \left(\int_a^\infty \frac{\left(H_{j,\alpha} \Omega(\varepsilon) \right)^{1 - \frac{\delta_j}{\beta_j}} g_j^\rho(\varepsilon) \Omega_j(\varepsilon) \mu_j^{\frac{\gamma_j}{\beta_j}}(\varepsilon)}{\left(H_{j,\alpha}^\rho \Omega(\varepsilon) \right)^{-\frac{\delta_j(\gamma_j - 1)}{\beta_j}} \nabla \varepsilon} \right)^{\frac{\beta_j}{\gamma_j}} \\ \times \left(\int_a^\infty \frac{g_j^\rho(\varepsilon) \Omega_j(\varepsilon) D_j^{\frac{\rho \gamma_j}{\beta_j}}(\varepsilon)}{\left(H_{j,\alpha}^\rho \Omega(\varepsilon) \right)^{\frac{\delta_j}{\beta_j}} \nabla \varepsilon} \right)^{\frac{\gamma_j - \beta_j}{\gamma_j}}.$$

This gives us that

$$\int_a^\infty \frac{g_j^\rho(\varepsilon) \Omega_j(\varepsilon) D_j^{\frac{\rho \gamma_j}{\beta_j}}(\varepsilon)}{\left(H_{j,\alpha}^\rho \Omega(\varepsilon) \right)^{\frac{\delta_j}{\beta_j}} \nabla \varepsilon} \\ \leq \left(\frac{\chi_j \gamma_j}{\delta_j - \beta_j} \right)^{\frac{\gamma_j}{\beta_j}} \int_a^\infty \frac{g_j^\rho(\varepsilon) \Omega_j(\varepsilon) \mu_j^{\frac{\gamma_j}{\beta_j}}(\varepsilon) \left(H_{j,\alpha}^\rho \Omega(\varepsilon) \right)^{\frac{\delta_j(\gamma_j - 1)}{\beta_j}}}{\left(H_{j,\alpha}^\rho \Omega(\varepsilon) \right)^{\frac{\gamma_j(\delta_j - 1)}{\beta_j}} \nabla \varepsilon}.$$

For any $C_j > 0$, and by using the inequality (7), we obtain

$$\prod_{j=1}^m \left(\frac{g_j^\rho(\varepsilon) \Omega_j(\varepsilon) \left(D_j^\rho(\varepsilon) \right)^{\gamma_j}}{\left(H_{j,\alpha}^\rho \Omega(\varepsilon) \right)^{\delta_j}} \right) \\ = \prod_{j=1}^m \frac{1}{C_j^{\gamma_j}} \left\{ \left(C_j \frac{D_j^\rho(\varepsilon) \left[g_j^\rho(\varepsilon) \Omega_j(\varepsilon) \right]^{\frac{\beta_j}{\gamma_j}}}{\left(H_{j,\alpha}^\rho \Omega(\varepsilon) \right)^{\frac{\delta_j}{\gamma_j}}} \right)^{\frac{\gamma_j}{\beta_j}} \right\}^{\beta_j}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\prod_{j=1}^m \frac{1}{C_j^{\gamma_j}} \right] \prod_{j=1}^m \left\{ \left(\frac{D_j^\rho(\varepsilon) [g_j^\rho(\varepsilon) \Omega_j(\varepsilon)]^{\frac{\beta_j}{\gamma_j}}}{\left(H_{j,\alpha}^\rho \Omega(\varepsilon) \right)^{\frac{\delta_j}{\gamma_j}}} \right)^{\frac{\gamma_j}{\beta_j}} \right\}^{\beta_j} \\
&\leq \left[\prod_{j=1}^m \frac{1}{C_j^{\gamma_j}} \right] \sum_{j=1}^m \frac{\beta_j \frac{\gamma_j}{\beta_j} g_j^\rho(\varepsilon) \Omega_j(\varepsilon) \left(D_j^\rho(\varepsilon) \right)^{\frac{\gamma_j}{\beta_j}}}{\left(H_{j,\alpha}^\rho \Omega(\varepsilon) \right)^{\frac{\delta_j}{\gamma_j}}}.
\end{aligned}$$

Herewith

$$\begin{aligned}
&\int_a^\infty \prod_{j=1}^m \left(\frac{g_j^\rho(\varepsilon) \Omega_j(\varepsilon) \left(D_j^\rho(\varepsilon) \right)^{\gamma_j}}{\left(H_{j,\alpha}^\rho \Omega(\varepsilon) \right)^{\delta_j}} \right) \nabla \varepsilon \\
&\leq \left[\prod_{j=1}^m \frac{1}{C_j^{\gamma_j}} \right] \sum_{j=1}^m \beta_j C_j^{\frac{\gamma_j}{\beta_j}} \int_a^\infty \frac{g_j^\rho(\varepsilon) \Omega_j(\varepsilon) \left(D_j^\rho(\varepsilon) \right)^{\frac{\gamma_j}{\beta_j}}}{\left(H_{j,\alpha}^\rho \Omega(\varepsilon) \right)^{\frac{\delta_j}{\gamma_j}}} \nabla \varepsilon \\
&\leq \left[\prod_{j=1}^m \frac{1}{C_j^{\gamma_j}} \right] \sum_{j=1}^m S_j \int_a^\infty g_j^\rho(\varepsilon) \Omega_j(\varepsilon) \mu_j^{\frac{\gamma_j}{\beta_j}}(\varepsilon) \frac{\left(H_{j,\alpha}^\sigma \Omega(\varepsilon) \right)^{\frac{\delta_j(\gamma_j-1)}{\beta_j(\beta_j-1)}}}{\left(H_{j,\alpha}^\sigma \Omega(\varepsilon) \right)^{\frac{\gamma_j(\delta_j-1)}{\beta_j(\beta_j-1)}}} \nabla \varepsilon,
\end{aligned}$$

where $S_j = \beta_j \left(\frac{\chi_j \gamma_j C_j}{\delta_j - \beta_j} \right)^{\frac{\gamma_j}{\beta_j}}$.

Corollary 3.2. Let $\vartheta_j(\varepsilon)$ be non increasing functions for $j = 1, 2, \dots, m$. Let $\Omega_j(\varepsilon) = g_j(\varepsilon) = 1$ functions, we can write the following inequality

$$D_j(\varepsilon) = \frac{1}{\vartheta_j(\varepsilon)} \int_a^\varepsilon \vartheta_j(s) \mu_j(s) \nabla s, \quad (16)$$

where $\varepsilon \in [a, \infty)_{\mathbb{T}}$. If there exist constants $\chi_j > 0$ for $j = 1, 2, \dots, m$ satisfying $\left(\frac{\gamma_j}{\delta_j - \beta_j}\right) \frac{(\varepsilon - a)\vartheta_j^\gamma(\varepsilon)}{\vartheta_j(\varepsilon)} \geq \frac{1}{\chi_j} - 1$ for any constants $C_j > 0$, then we can write the following inequality

$$\begin{aligned} & \int_a^\infty \prod_{j=1}^m \left(\frac{(D_k^\sigma(\varepsilon))^{\gamma_j}}{(\rho(\varepsilon) - a)^{\delta_j}} \right) \nabla \varepsilon \\ & \leq \left[\prod_{j=1}^m \frac{1}{C_j^{\gamma_j}} \right] \sum_{j=1}^m S_j \int_b^\infty \mu_j^{\frac{\gamma_j}{\beta_j}}(\varepsilon) \frac{(\rho(\varepsilon) - a)^{\frac{\delta_j(\gamma_j - 1)}{\beta_j(\beta_j - 1)}}}{(\varepsilon - a)^{\frac{\gamma_j(\delta_j - 1)}{\beta_j(\beta_j - 1)}}} \nabla \varepsilon, \end{aligned}$$

where $S_j = \beta_j C_j^{\frac{\gamma_j}{\beta_j}} \left(\frac{\chi_j \gamma_j}{\delta_j - \beta_j} \right)^{\frac{\gamma_j}{\beta_j}}$.

Remark 3.3. In Corollary 3.2, $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $a = \infty = 0$, replace $\mu_j(\varepsilon)$ by $\frac{\mu_j(\varepsilon)}{\varepsilon}$, and if we take $[\varepsilon, \sigma(\varepsilon)]$ instead of $[\rho(\varepsilon), \varepsilon]$, then we obtain Theorem 1 in [21], proved by Cheung et al.

4. Some Information About Our Results

In this work, we generalize the results of some existing studies in the literature by taking a different approach to the fractional Hardy-type Nabla integral inequalities. Our new results shed light on the solution of various problems in mathematics, business, economics, physics, optics, and other disciplines. The results obtained in the Nabla calculation can also be examined in the more general timescale calculation of diamond alpha.

References

- [1] Hardy, G.H. (1920). Note on a theorem of Hilbert, *Math. Z.* 6(3–4), 314–317
- [2] Hardy, G.H.(1925). Notes on some points in the integral calculus, LX. An inequality between integrals, *Mess. Math.* 54,150–156.
- [3] Hardy, G.H., Littlewood, J.E. (1927). Elementary theorems concerning power series with positive coefficients and moment constants of positive functions, *J. Reine Angew. Math.* 157, 141–158.
- [4] Hardy, G.H. (1928). Notes on some points in the integral calculus, LXIV. *Mess. Math.* 57, 12–16.
- [5] Hardy, G.H., Littlewood, J.E., Polya, G. (1952). *Inequalities* Cambridge Univ; Cambridge University Press: Cambridge, UK.
- [6] Akin, L. (2025). Some Innovations for Hardy-type Inequalities on Time Scales. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, 43(2025), 1-11.
- [7] Akin L., Zeren, Y. (2023). On innovations of the multivariable fractional Hardy-type inequalities on time scales. *Sigma J Eng Nat Sci.* 41(2):415–422.
- [8] Akin, L. & Dusunceli, F. (2019). A New Approach For Weighted Hardy's Operator In VELs. *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, 4(2), 2019. 417-432. <https://doi.org/10.2478/AMNS.2019.2.00040>.
- [9] Akin, L., Zeren, Y. (2019). Some properties for higher order commutators of Hardy-type integral operator on Herz–Morrey spaces with variable exponent, *Sigma J. Eng. & Nat. Sci.* 10(2), 157-163.
- [10] Akin, L. (2018). A Characterization of Approximation of Hardy Operators in VLS, *Celal Bayar University Journal of Science*.14(3), 333-336.
- [11] Yang, B., Rassias, M.T., Raigorodskii, A. (2021). On an extension of a Hardy–Hilbert-type inequality with multi-parameters. *Mathematics*, 9, 2432.
- [12] Mamedov, F.I., Zeren, Y., Akin, L. (2017). Compactification of weighted Hardy operator in variable exponent Lebesgue spaces, *Asian Journal of Mathematics and Computer Science.* 17(1), 38-47.
- [13] Akin, L. (2021). New Principles of Non-Linear Integral Inequalities on Time Scales. *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, 6(2) 387–394.
- [14] Yang, B., Wu, S., Chen, Q. (2020) A new extension of Hardy-Hilbert's inequality containing kernel of double power functions. *Mathematics*, 8, 894.
- [15] Akin, L. (2020). Characterization of Boundedness of Fractional Maximal Operator with Variable Kernel on Herz-Morrey Spaces. *Analysis in Theory and Applications*, 36(1), 60-68. <https://doi.org/10.4208/ata.OA-2018-1006>.

- [16] Agarwal, R., O'Regan, D., Saker, S. (2014). *Dynamic Inequalities on Time Scales*; Springer: Cham, Switzerland.
- [17] Akin-Bohner, E., Bohner, M., Akin, F. (2005) Pachpatte inequalities on time scales. *JIPAM J. Inequal. Pure Appl. Math.*, 6, 6.
- [18] Bohner, M., Matthews, T. (2007) The Grüss inequality on time scales. *Commun. Math. Anal.*, 3, 1–8.
- [19] Bohner, M., Matthews, T. (2008). Ostrowski inequalities on time scales. *JIPAM J. Inequal. Pure Appl. Math.*, 9, 8.
- [20] Dinu, C. (2008). Hermite-Hadamard inequality on time scales. *J. Inequal. Appl.*, 2008, 287947.
- [21] Cheung, W.-S., Hanjz, Z., Pecarić, J. (2000). Some Hardy-type inequalities. *J. Math. Anal. Appl.* 250, 621–634.
- [22] Hilscher, R. (2002) A time scales version of a Wirtinger-type inequality and applications. *J. Comput. Appl. Math.*, 141, 219–226.
- [23] Li, W.N. (2010). Some delay integral inequalities on time scales. *Comput. Math. Appl.*, 59, 1929–1936.
- [24] Rehák, P. (2005). Hardy inequality on time scales and its application to half-linear dynamic equations. *J. Inequal. Appl.*, 2005, 942973.
- [25] Hilger, S. (1988) Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten. Ph.D. Thesis, Universität Würzburg, Würzburg, Germany.
- [26] Rahmat, M.R.S., Noorani, M.S.M. (2021) A new conformable nabla derivative and its application on arbitrary time scales. *Adv. Differ. Equ.*, 2021, 238.
- [27] Akin, L. (2019). On Some Properties of Integral-Type Operator in Weighted Herz Spaces with Variable Exponent Lebesgue Spaces. *Universal Journal of Mathematics and Applications*, 2(3), 148-151. <https://doi.org/10.32323/ujma.522420>.
- [28] Hilger, S. (1990). Analysis on measure chains-a unified approach to continuous and discrete calculus, *Results Maths.* 18(1-2) 18–56.
- [29] Ahmad, W., Khan, K.A., Nosheen, A., Sultan, M.A. (2019). Copson, Leindler type inequalities for function of several variables on time scales, *Punjab Univ. J. of Math.* 51(8), 157–168.
- [30] Ashraf, M.S., Khan, K.A., Nosheen, A. (2019). Hardy-Copson type inequalities on time scales for the functions of n independent variables, *Int. J. Anal. Appl.* 17(2), 244–259.

- [31] Baric, J., Bibi, R., Bohner, M., Nosheen, A., Pecaric, J. (2015). Jensen inequalities and their applications on time scales, Element, Zagreb, Croatia
- [32] Akın, L. (2024). On Some Inequalities for Exponentially Weighted Fractional Hardy Operators with Δ -Integral Calculus. Middle East Journal of Science, Vol. 10, No. 1, pp. 1–13, 2024, doi: 10.51477/mejs.1451041.
- [33] Saker, S.H., O'Regan, D. (2016) Hardy and Littlewood Inequalities on time scales, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 39(2) 527–543.
- [34] Li, W., Liu, D., Liu, J. (2019). Weighted inequalities for fractional Hardy operators and commutators, Journal of Inequalities and Applications 2019:158, 1-14.
- [35] Bradley, J. (1978). Hardy inequalities with mixed norms. Can. Math. Bull. 21(4), 405-408.
- [36] Kufner, A., Persson, L.E. (2003). Weighted Inequalities of Hardy Type. World Scientific, Singapore.
- [37] Opic, B., Kufner, A. (1990). Hardy-Type Inequalities. Pitman Research Notes in Mathematics Series, Longman Scientific and Technical, Harlow, Essex.
- [38] Akın, L. (2020). On some results of weighted Hölder type inequality on time scales. Middle East Journal of Science 6(1), 15-22.
- [39] Akın L.(2021). On innovations of n-dimensional integral-type inequality on time scales. Adv. Differ. Equ. 2021:148.
- [40] Bohner, M., Nosheen, A., Pecaric, J., Younas, A. (2014). Some dynamic Hardy-type inequalities on time scales, J. Math. Inequal. 8(1), 185–199.
- [41] Agarwal, R.P., Bohner, M., O'Regan, D., Saker, S.H. (2011). Some Wirtinger-type inequalities on time scales and their applications, Pacific J. Math. 252, 1–26 (2011)
- [42] Akın, L. (2020). On the Fractional Maximal Delta Integral Type Inequalities on Time Scales. Fractal Fract. 4, 26, 1-10.
- [43] Bohner, M., Petereson, A. (2001). Dynamic Equations on Time Scales. An Introduction with Applications, Birkhauser, Boston.
- [44] Akın L. (2021). A New Approach for the Fractional Integral Operator in Time Scales with Variable Exponent Lebesgue Spaces. Fractal Fract. 5(7), 1-13.
- [45] Bohner, M., Georgiev, S.G. (2016). Sequences and Series of Functions. In: Multivariable Dynamic Calculus on Time Scales, Springer Int. Publ. Switzerland.
- [46] Akın, L. (2024). On generalized weighted dynamic inequalities for diamond- α integral on time scales calculus. Indian J Pure Appl Math 55, 363–376.

- [47] Anastassiou, G.A. Principles of delta fractional calculus on time scales and inequalities. *Math. Comput. Model.* 2010, 52, 556–566.
- [48] Saker, S.H., El-Sheikh, M.M.A., Madian, A.M. (2021) Some new generalized weighted dynamic inequalities of Hardy's type on time scales, *J. Math. Computer Sci.*, 23 (2021), 289–301.
- [49] Almarri, B., El-Deeb, A.A. (2023) Gamma-Nabla Hardy–Hilbert-Type Inequalities on Time Scales. *Axioms*, 12, 449.
- [50] Tejado, I., Valerio, D., Valerio, N. (2015) Fractional Calculus in Economic Growth Modelling: the

