İSTATİSTİK ALANINDA ARAŞTIRMA YÖNTEMLERİ VE YENİLİKÇİ UYGULAMALAR

EDİTÖR
DOÇ. DR. ÇAĞLAR KARAMAŞA

9 786258 513288

DOI: 10.5281/zenodo.18092521

İstatistik Alanında Araştırma Yöntemleri ve Yenilikçi Uygulamalar

Editör

Doç. Dr. Çağlar Karamaşa

İmtiyaz Sahibi Platanus Publishing®

Editör
Doç. Dr. Çağlar Karamaşa

Kapak & Mizanpaj & Sosyal Medya
Platanus Yayın Grubu

Birinci Basım
Aralık, 2025

Yayımcı Sertifika No
45813

ISBN
978-625-8513-28-8

Adres: Natoyolu Cad. Fahri Korutürk Mah. 157/B, 06480, Mamak, Ankara, Türkiye.

Telefon: +90 312 390 1 118
web: www.platanuspublishing.com
e-mail: platanuskitap@gmail.com

Platanus Publishing®

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1

Olasılığın Yeniden Yorumlanması: Olasılık Teorisi ile Derin Öğrenme Arasındaki Bağlantı

Tuba Şekerci[1] & Mehmet Gürcan[2]

[1] Öğr. Gör. Dr., Fırat Üniversitesi, ORCID: 0000-0002-0398-4477
[2] Prof. Dr., Fırat Üniversitesi, ORCID: /000-0002-3641-8113

1.Giriş

Derin öğrenmenin yayılmacı başarısı, yapay zekâ araştırmalarını hızla geliştirirken, bu durum veri yapıları arasındaki matematiksel ilişkilerin yeniden değerlendirilmesini zorunlu kılmıştır. Tabii ki bu yeniden değerlendirme çabasının merkezinde olasılık teorisi de yer almaktadır. Geleneksel olasılık yaklaşımı, tesadüfiliği varyans, yoğunluk ve dağılım fonksiyonları gibi araçlarla açıklarken, belirsizliği ise ölçülebilir bir nicelik olarak ele alan yapısıyla istatistiksel çıkarımın temelini oluşturur. Ancak derin öğrenme modelleri, özellikle yüksek boyutlu veriler, parametrik olmayan fonksiyon sınıfları ve öğrenme dinamikleri açısından, olasılığın klasik yorumlarının ötesine taşan yeni bir perspektif gerektirir. Olasılık, öğrenme sürecinin geometrisini tanımlayan bir yapı olarak yeniden yorumlanmalıdır. Entropi tabanlı yaklaşımlar, gerek stokastik diferansiyel denklemler gerekse kısmi türevli denklemlerin olasılıksal bir bakış açısıyla yorumlanması bilginin geometrisini şekillendirmektedir. Bu aşamada olasılık teorisinin materyalleri yalnızca veri üretme süreçlerinin araçları değil, aynı zamanda derin öğrenme modellerinin temsil gücünü, genelleme kapasitesini ve kararlılığını açıklayan önemli araçlardır. Yüksek boyutlu verilerde değişkenler arasındaki ilişkilerin anlaşılması ve anlamlandırılması birçok makine öğrenmesi algoritmalarının temelini oluşturmaktadır. Sonuç olarak olasılık kavramı, yalnızca belirsizlik ölçüsü değil, aynı zamanda öğrenmenin doğasını belirleyen temel geometrik ve analitik yapı olarak düşünülmektedir.

Görüntü tanıma, doğal dil işleme ve bilimsel keşif gibi birçok alanda üst düzey doğruluk oranlarına ulaşarak derin öğrenme modelleri, klasik yöntemlerle karşılaştırıldığında benzer ya da üstün performans göstermiştir. Ancak, bu uygulamalı başarıların arkasındaki teorik mekanizmalar henüz tam olarak anlaşılamamıştır. Literatürde bu durum, teori ile pratik arasındaki farklılık olarak adlandırılır. Bu, derin öğrenmenin temel dinamiklerinin klasik istatistiksel öğrenme teorisiyle açıklanmasında karşılaşılan zorlukları ortaya çıkarmaktadır (Suh & Cheng, 2025; Grohs & Voigtlaender, 2024). Zhang et al. (2016) tarafından yürütülen araştırma, derin sinir ağlarının rastgele etiketlenmiş verileri bile tamamen ezberleyebilmesine rağmen genellemede çok iyi olduğunu göstermiştir. “Derin sinir ağları, rastgele etiketleri bile sıfır eğitim hatasıyla ezberleyebilir.” Bu bulgu, klasik sapma-varyans dengesi (bias-variance trade-off) kavramının çağdaş derin öğrenme için yeterli olmadığını göstermiştir.

Bu çalışmada, olasılık teorisinin derin öğrenmede kazandığı bu yeni kimliği irdelemeyi sürdürürken bu yeni kimliğin derin öğrenme algoritmalarına kazandırdığı mükemmel analiz kabiliyetini de ortaya koymayı amaçlıyoruz. İlk olarak, klasik olasılık yorumları ile modern öğrenme teorisi arasındaki boşlukları tanımlayacak, ardından derin öğrenmenin güncel araştırma çizgisinin olasılığı hangi biçimlerde yeniden yorumladığını tartışacağız. Son olarak, olasılığın

“yeniden doğuşu” olarak değerlendirilebilecek bu dönüşümün hem teorik yapay zekâ çalışmalarına hem de pratik derin öğrenme uygulamalarına sunduğu olanakları da ele alacağız.

2. Minimum Hata mı? Minimum Varyans mı? Denge Problemi

Makine öğrenmesi modellerinde minimum hata veya minimum varyans aynı anda pek mümkün değildir. Bu modelin karmaşıklığı, genelleme yeteneği ile ilişkilidir. Basitçe söylemek gerekirse, öğrenme sürecinde iki farklı tür hata arasında bir rekabet vardır. Modelin basitleştirilmesi nedeniyle ortaya çıkan sistematik hata kısa sapma olarak bilinir. Bu nedenle, modeldeki parametrelerin kısıtlamaları nedeniyle veri içindeki temel ilişkiyi doğru bir şekilde yansıtamaz ve bu da daha fazla hata yaratır. Bununla birlikte, varyans, modelin verilerdeki küçük değişikliklere çok duyarlı olmasıdır. Model eğitim verilerini ezberler ve test verileriyle tutarsız sonuçlar verir. Bu iki tür hata arasında bir denge bulunması gerekir. Basit modeller tipik olarak orta düzey sapmalar ve varyans büyüklükleri gösterir. Karmaşık modeller yüksek varyansa sahipken düşük sapma gösterir. İdeal olarak, model her iki hatayı da makul düzeyde tutarak genelleme yeteneğini maksimum düzeye çıkarmak zorundadır. Klasik istatistiksel öğrenme kuramı, öğrenme başarısı için bu dengenin sağlanmasının çok önemli olduğunu söylüyor. Bununla birlikte, modern derin öğrenme modelleri, bu kavramı aşarak çok karmaşık yapılarda bile başarılı genellemeler yapabilmektedir. Bu nedenle, klasik sapma-varyans dengesinin derin öğrenme bağlamında yeniden değerlendirilmesi gerekmektedir.

Belkin et al. (2019) ve Nakkiran et al. (2021), model karmaşıklığı arttıkça hatanın önce azalıp sonra tekrar azaldığı çifte düşüş (double descent) fenomenini açıklamıştır. Bu çalışmalar, aşırı parametreleşmiş modellerin genelleme için yeni bir paradigma önermiştir. Bu bağlamda, derin öğrenme modellerinin davranışını açıklamak için olasılık teorisinin yeniden yorumlanması gerekmektedir. Olasılıksal modelleme, yalnızca belirsizlik ve rastgeleliği göstermek yerine derin öğrenmenin genelleme, düzenlileştirme ve veri işleme yöntemlerini anlamak için kapsamlı bir teorik araç sağlar.

2.1. Çifte Düşüş (Double Descent) Fenomeni

Klasik istatistiksel öğrenme teorisine göre, bir modelin karmaşıklığı arttıkça hata eğrisi tipik olarak bir "U" biçiminde ilerler. Modelin basit olması, örneğin az parametreli olması, verilerin temel özelliklerini yakalayamaması ve yüksek sapma nedeniyle hataların artmasına neden olur. Modelin karmaşıklığı arttıkça hata sayısı azalır, ancak bir noktada, model eğitim verisini ezberlemeye başlayarak yüksek varyans gösterir ve test hatası tekrar yükselir. Bu, klasik sapma-varyans dengesi kavramını oluşturur. Bununla birlikte, çağdaş derin öğrenme çalışmaları, bu klasik “U” biçimli ilişkiyi aşan yeni bir olgu ortaya çıkarmıştır. Belkin et al. (2019) ve Nakkiran et al. (2021) tarafından tanımlanan çifte düşüş (double descent) fenomeni, model karmaşıklığı çok yüksek değerlere

ulaştığında test hatasının beklenmedik bir şekilde yeniden azaldığını göstermektedir. Yani "Test hatası, model karmaşıklığı arttıkça önce azalır, ardından artar ve daha sonra tekrar azalır." Bu ikinci düşüş, derin öğrenme modellerinin klasik kuramlara rağmen genelleme yapabilmesinin nedenini açıklar. Bu olay, aşırı parametreli (overparameterized) modellerin ezberleme davranışının genellemeyi her zaman bozmadığını göstermektedir. Bazı durumlarda, aşırı parametreli modellerin daha tutarlı ve genelleştirici temsiller öğrenmesi mümkündür. Bu nedenle, modern derin öğrenme başarısının altında yatan temel faktörlerden biri çifte düşüş fenomenidir.

2.2. Derin Öğrenme Teorisi

Derin öğrenme, makine öğrenmesinin bir alt sınıfı olup özellik çıkarma ve dönüştürme için çok sayıda doğrusal olmayan işlem biriminden oluşan katmanların kullanıldığı bir yapıyı ifade eder. Her katman, bir önceki katmandan aldığı çıktıyı girdi olarak işler (Deng & Yu, 2014). Derin öğrenmede verilerin birden fazla özellik düzeyinin veya temsillerinin öğrenilmesine dayalı hiyerarşik bir yapı söz konusudur. Üst düzey özellikler alt düzey özelliklerden türetilerek çok katmanlı bir soyutlama oluşturur (Bengio, 2009).

Derin öğrenmenin kökeni, McCulloch ve Pitts'in 1943 yılında sinir mantığı olarak adlandırılan ve düşünce süreçlerini taklit etmeyi amaçlayan hesaplama modelini geliştirmesine kadar uzanır (McCulloch & Pitts, 1943). 1958'de Frank Rosenblatt, iki katmanlı bir yapay sinir ağına dayanan ve toplama-çıkarma işlemleriyle çalışan denetimli bir desen tanıma algoritması olan perceptron'u ortaya koymuştur (Haykin, 2009). 1965 yılında Ivakhnenko ve Lapa, derin öğrenme algoritmalarının öncülü kabul edilebilecek çalışmalarıyla karmaşık denklemlere dayalı modeller geliştirmiştir (Ivakhnenko & Lapa, 1965). 1980'lerde Kunihiko Fukushima, el yazısı ve desen tanıma için çok katmanlı hiyerarşik yapıdaki Neocognitron'u önermiştir (Fukushima, 1988). Weng ve arkadaşları (1992), karmaşık sahnelerden otomatik 3 boyutlu nesne tanıma yapabilen Cresceptron yöntemini tanıtmıştır. 1995'te Cortes ve Vapnik, benzer veri kümelerini sınıflandırmaya yönelik destek vektör makinelerini geliştirmiştir (Cortes & Vapnik, 1995). 1997'de Hochreiter ve Schmidhuber, uzun vadeli bağımlılık problemlerini çözmek amacıyla LSTM mimarisini önermiştir (Hochreiter & Schmidhuber, 1997).

2000'li yılların ortasında Hinton ve Salakhutdinov'un çalışmaları, çok katmanlı ağların katman bazlı ön-eğitimiyle derin öğrenmenin popülerleşmesine katkı sağlamıştır (Hinton & Salakhutdinov, 2006). 2012'de Google araştırmacıları, 16.000 işlemciden ve bir milyardan fazla bağlantıdan oluşan yapay sinir ağıyla insan düzeyine yakın performans göstermiştir (Le et al., 2012). 2014'te Facebook, fotoğraflarda kullanıcıları otomatik etiketlemek için 120 milyon parametreli DeepFace sistemini geliştirmiştir (Taigman, Yang, Ranzato, & Wolf, 2014). Google DeepMind tarafından geliştirilen AlphaGo, karmaşık Go

oyununda milyonlarca simülasyona dayalı öğrenmeyle uzmanlaşmış ve 2016'da profesyonel oyuncu Lee Sedol'u 4-1 yenmiştir (Silver et al., 2016). 1940'ların yapay zekâ çalışmaları 1980'lerde makine öğrenmesine, 2010'larda ise derin öğrenme paradigmasına evrilmiştir.

Güncel teorik tartışmalarda, klasik örnek yakınsama temelli genelleme sınırlarının derin ağların davranışını açıklamakta yetersiz olduğu gösterilmiştir (Nagarajan & Kolter, 2019). Bartlett ve arkadaşları (2020), zararsız aşırı öğrenme (benign overfitting) kavramını tanımlayarak tam ara değerleme yapan modellerin belirli koşullarda iyi genelleme yapabileceğini matematiksel olarak ispatlamıştır. D'Amour ve arkadaşları (2022) ise modern makine öğrenmesi modellerinin aynı eğitim verisinde birden fazla geçerli çözüm üretebilmesinin güvenilirlik açısından riskler barındırdığını vurgulamıştır. Son olarak Grohs ve Voigtlaender (2024) ile Suh ve Cheng (2025), teori-pratik uçurumunun yalnızca ampirik değil aynı zamanda matematiksel ve epistemolojik bir boşluk olduğunu belirtmiş; derin öğrenme kuramının istatistiksel ve olasılıksal bir çerçevede yeniden yapılandırılması gerektiğini savunmuştur.

Modern derin sinir ağlarının doğası, klasik istatistiksel öğrenme teorisinin varsayımlarının ötesindedir. Günümüzdeki modeller çoğu zaman aşırı parametreleşmiş olup parametre sayısı gözlem sayısından fazladır. Bu tür modellerin sıfır hatayla veriyi interpole etmelerine rağmen yüksek genelleme başarısı göstermesi, çifte düşüş (double descent) fenomeniyle ilişkilidir (Belkin et al., 2019). Bu durum klasik genelleme sınırlarının yetersizliğini ortaya koymaktadır. Dolayısıyla derin öğrenmeyi anlamak için olasılık teorisi, yüksek boyutlu parametre uzaylarında optimizasyon dinamiklerini, dağılımsal kararlılığı ve rastgelelik ile öğrenme performansı arasındaki bağlantıları açıklamada temel bir araç haline gelmiştir. Rastgele matris teorisi, ortalama alan sınırları ve Bayesçi yorumlar gibi yaklaşımlar, derin ağ davranışını stokastik süreçlerle ilişkilendiren yeni matematiksel paradigmalar sunmaktadır (Mei & Montanari, 2019; Li et al., 2020).

Bu çalışmanın amacı, söz konusu paradigma değişiminin kavramsal ve teorik yönlerini incelemektir. Bu kapsamda ilk olarak derin öğrenmede olasılık teorisinin rolü ele alınacak; ardından ortalama alan yaklaşımı ve sinirsel teğet çekirdek (NTK) çerçevesi tartışılacaktır. Daha sonra stokastik gradyan inişinin olasılıksal özellikleri ile dağıtımdan bağımsız genelleme teknikleri incelenecek ve bilgi teorisiyle bağlantılı açık araştırma problemleri özetlenecektir. Böylece olasılık teorisinin derin öğrenmenin anlaşılmasında nasıl temel bir araç hâline geldiği gösterilecektir.

2.3. Olasılık Teorisinin Derin Öğrenmedeki Yeri

Gerek makine öğrenmesi gerekse derin öğrenme tekniklerinin veri analizi yapacak kadar gelişiminden sonra istatistik ve veri bilimi tanımlamaları arasında gözle görülür bir çekişme inkar edilemez. İstatistik biliminin uzmanları haklı bir

edayla makinenin olmadığı dönemlerde de bu analizleri yapıyorduk içgüdüsüyle veri bilimini kendi kategorilerine çekme ve bir uygulamalı branşları olarak göstermek çabasındadır. Buna karşılık yeni bir meslek tanımı olarak veri bilimi uzmanları ise makinenin kendilerine verdiği çok sayıda imkandan dolayı, istatistik bilimi bizden biraz geri kaldı içgüdüsüyle, artık istatistiğin yerini aldıklarını göstermek çabasındadır. Mantık çerçevesinde bakıldığında ise günümüzde bu işin aslı, araştırmacının kuramlarını gerçekleştirebilmek için isteklerini makineye anlatabilmesi aşaması direkt olarak matematiğin dilidir. İkinci olarak makinenin bu işi yapabilmesi aşaması veri biliminin dilidir. Üçüncü olarak ise makineden gelen sonuçların anlamlandırılması ise istatistiğin işidir. Bu ilişki içerisinde şunu inkar etmemek gerekir, makine yokken matematik ve istatistik direkt olarak bağlanmış bir bütündür. Araştırmacı kuramını makineye aktarırken matematiğin içerisinde önceden de var olan istatistik dilini kullanır. Sonuçta matematiğin birçok dili vardır. Okumasını bilenler bunlardan uygun olanı seçebilme imkanına sahiptir. Bu açıdan bakıldığında makinenin aldığı bilgi direkt olarak olasılık diliyle aktarılmış bilgidir.

Olasılık teorisi, çağdaş derin öğrenmenin temel unsurlarından biridir. Derin sinir ağlarının eğitimi ve yorumlanması, doğrudan ya da dolaylı olarak olasılıksal varsayımlara dayanmaktadır. Ağların genel davranışını belirleyen olasılıksal mekanizmalar, rastgele başlatılan parametreler, stokastik optimizasyon süreçleri ve veri gürültüsünün modellenmesidir. Bu nedenle, derin öğrenmeyi deterministik bir fonksiyon yaklaşımı olarak değil, yüksek boyutlu bir olasılık uzayında tanımlanmış stokastik bir sistem olarak da düşünmek gerekir (Neal, 2012; Bishop & Nasrabadi, 2006, 2006).

Rastgele parametre başlatmaları ve Stokastik gradyan inişi (SGD) algoritması, sinir ağlarının olasılıksal özelliklerine katkıda bulunur. Her aşamada, SGD, verinin rassal bir alt kümesini kullanarak ağırlıkları günceller. Bu, öğrenme sürecini stokastik hale getirir. Stokastik süreç teorileri ve Langevin difüzyonu, bu dinamiklerin rassal diferansiyel denklemler (SDE) kullanılarak modellenebilir (Li et al., 2020). Böylece optimizasyon süreci olasılık yoğunluklarının zaman içindeki evrimi olarak görülebilir.

Langevin difüzyonu, bir sistemin hem düzenli (deterministik) hem de rastgele (stokastik) kuvvetlerin etkisi altında nasıl değiştiğini ifade eden fiziksel bir teoridir. Derin öğrenmede bu fikir, Stokastik Gradyan İnişi (SGD) algoritmasının olasılıksal yorumunu anlamada kullanılır. Her adımda, SGD, verinin rastgele seçilmiş bir alt kümesiyle model parametrelerini değiştirir. Bu rastgelelik, algoritmayı fiziksel bir sistemin Langevin dinamiklerine benzer bir şekilde davranmaya iter. Yani model kayıp yüzeyinde aşağı doğru hareket ederken küçük olasılıksal dalgalanmalara maruz kalır. Bu nedenle SGD hem optimizasyon hem de olasılıksal evrim olarak görülebilir. Bu yaklaşım, derin öğrenme modellerinin gürültüye rağmen genelleştirici çözümler üretmesinin nedenlerini açıklar.

Bayesian yaklaşım, derin öğrenme için olasılıksal bir temel sağlayan en önemli teorik yaklaşımlardan biridir. Bayesian sinir ağlarında model parametreleri rastgele değişkenler olarak kabul edilir ve eğitim süreci, bu parametrelerin posterior dağılımının öğrenilmesi yoluyla yorumlanır (Neal, 2012). Ancak yüksek boyutlu ağlarda posterior hesaplaması doğrudan mümkün olmadığından, varyasyonel çıkarım veya varyasyonel inference gibi yaklaşık yöntemler geliştirilmiştir. Bu yaklaşımlar arasında rastgele maskeleme tabanlı düşüş veya Monte Carlo düşüş yöntemi (Monte Carlo dropout) yer almaktadır (Kingma & Welling, 2014; Gal & Ghahramani, 2016). Bu teknikler, model belirsizliğini tahmin etmede ve genelleme performansını artırmada önemli bir rol oynamıştır. Benzer şekilde, Mandt, Hoffman ve Blei (2017), Stokastik Gradyan İnişi'nin yaklaşık bir Bayesçi çıkarım süreci olarak yorumlanmasını önermiştir. Wilson ve Izmailov (2020), olasılıksal modellemenin sınırlarını tartışarak Bayesçi derin öğrenmenin belirsizlik tahminlerindeki zorluklarını tartışmıştır.

Derin öğrenmede olasılıksal modelleme hem parametre hem de veri dağılımı açısından çok önemlidir. Veri dağılımı hakkında kesin bilgi bulunmadığında, dağılımdan bağımsız (distribution free) genelleme yöntemlerinin öne çıkması beklenir. Bu yaklaşımlarda, belirli bir dağılıma bağlı olmaksızın, modelin başarısı olasılıksal genelleme sınırlarıyla değerlendirilir. Bu tür durumlarda teorik güvence, karşılıklı bilgi tabanlı genelleme ölçütleri ve PAC-Bayesian analizleri tarafından sağlanır (Alquier, 2021; Xu & Raginsky, 2017). Böylece olasılık teorisi modelleme ve genelleme garantilerinin oluşturulmasında çok önemlidir.

Sonuç olarak, olasılık teorisi, rastgelelik, belirsizlik ve gürültü kavramlarını teorik ve pratik olarak bütünleştirerek derin öğrenmeyi anlamamıza yardımcı olur. Model parametrelerinden optimizasyon prosedürlerine, veri dağılımından genelleme sınırlarına kadar her aşama olasılıksal bir yorumla yeniden şekillendirilmektedir. Bununla birlikte, olasılıksal yaklaşım, modelin iç işlevlerinin yanı sıra verinin doğasında bulunan karmaşıklık ve rastgeleliğin anlaşılmasını sağlar. Bu nedenle, olasılık teorisinin yeniden yorumlanması, derin öğrenmenin davranışını anlamak için gerekli bir epistemolojik temel sağlar.

3. Asimptotik Teoriler ve Ortalama Alan (Mean Field) Yaklaşımı

Derin öğrenme modellerinin teorik analizinde en etkili yaklaşımlardan biri, ağın sonsuz genişlik limitindeki davranışını incelemektir. Katmanlardaki nöron sayısı sonsuza yaklaştıkça, ağın rastgele bileşenleri ortadan kalkar ve sistem deterministik bir yapıya yakınsar. Böylece, yüksek boyutlu ve karmaşık parametre uzaylarında tanımlanan rastgele süreçler yerine, analitik olarak çözülebilen sürekli limit modeller elde edilir (Neal, 2012; Jacot et al., 2018). Bu tür analizlerin temelinde ortalama alan (mean-field teorisi) yer alır. Mean-field yaklaşımı, istatistiksel fizikteki ortalama alan yönteminin derin sinir ağlarına uyarlanmış biçimidir. Bu yaklaşımda çok sayıda etkileşen nöronun karmaşık davranışı, diğer tüm nöronların ortalama etkisiyle temsil edilir. Böylece ağ içi

etkileşimlerin analizi önemli ölçüde basitleşir. Ağın ağırlıkları bir olasılık yoğunluğu olarak modellenir ve eğitim süreci, bu yoğunluğun zamana bağlı evrimi şeklinde tanımlanır. Bu evrim genellikle Fokker–Planck veya McKean–Vlasov tipi diferansiyel denklemlerle ifade edilir (Mei et al., 2019). Sonuç olarak, ağın parametre dinamikleri, olasılık ölçülerinin deterministik akışı üzerinden incelenebilir. Bu analiz, her bir nöronun diğerlerinden bağımsız ancak istatistiksel olarak benzer davrandığı varsayımına dayanır. Bu "öz ortalama" özelliği, ağın makro düzeyde öngörülebilir bir dinamik sergilemesini sağlar.

Mean-field analizinin en önemli sonuçlarından biri, sinir ağlarının Gaussian süreçlerine (GP) yakınsamasıdır. Ağ genişledikçe çıktı dağılımı, merkezi limit teoremi benzeri bir davranış sergileyerek Gaussian süreç limitine ulaşır (Lee et al., 2017). Bu sonuç, derin ağların deterministik bir GP çekirdeği tarafından temsil edilebileceğini ortaya koyar. Bu bağlantı, derin ağların rastlantısal doğasına rağmen genelleme yeteneğini açıklamada güçlü bir teorik araç sağlar. Matthews et al. (2018) bu yakınsamanın deneysel olarak gözlemlenebilir olduğunu göstermiş, Arora et al. (2019) ise aşırı parametreleşmiş ağlarda optimizasyon ve genelleme süreçlerinin NTK çerçevesiyle nasıl ilişkilendirilebileceğini analitik olarak incelemiştir. Bu çalışmalar, Gaussian süreç limitinden sinirsel teğet çekirdek (Neural Tangent Kernel (NTK)) yaklaşımına geçişte önemli bir teorik köprü sunmaktadır. Bunun bir uzantısı olarak, ağların eğitim sürecinde parametre güncellemelerinin davranışını açıklayan NTK çerçevesi geliştirilmiştir. Bu teori, sonsuz genişlik limitinde ağın eğitimi sırasında parametre güncellemelerinin lineer bir çekirdek dinamiğine dönüştüğünü gösterir.

Jacot, Gabriel ve Hongler (2018) tarafından tanımlanan NTK, bir sinir ağının optimizasyon sürecini kernel regression formuna indirger ve eğitim sürecini parametrelerin küçük güncellemelerle lineerleştirildiği bir dinamik olarak yorumlar. Bu çerçevede, ağın eğitim süreci, kernel fonksiyonunun sabit kaldığı bir dinamik olarak ele alınır ve modelin çıktısı deterministik hale gelir. Böylece, eğitim sürecinin rastgeleliği ortadan kalkar ve genelleme davranışı analitik biçimde hesaplanabilir (Yang, 2020). Mean-field ve NTK teorileri yalnızca teorik analiz araçları olarak değil, aynı zamanda pratik öngörüler sunan modeller olarak da değerlidir. Bu yaklaşımlar sayesinde, derin ağların parametrelerinin "rastgele başlatmadan bağımsız" olarak benzer davranış göstermesinin nedenleri açıklanabilmektedir. Ayrıca, bu teoriler derin öğrenmede implicit bias, aşırı parametreleşme ve genelleme gibi olguların matematiksel açıklamasına da ışık tutmaktadır (Chizat & Bach, 2018).

Sonuç olarak, asimptotik analizler derin öğrenme modellerine olasılıksal bir deterministik limit kazandırmakta ve bu limit, klasik istatistiksel öğrenme teorisinin ötesinde bir açıklayıcılık sağlamaktadır. Mean-field ve NTK çerçeveleri, yüksek boyutlu rastgele sistemlerin öngörülebilir ve analitik olarak

çözülebilir davranışlara nasıl dönüştüğünü göstererek, derin öğrenmenin teorik temellerine dair en güçlü ve birleştirici yaklaşımlardan birini temsil etmektedir.

4. Örtülü Düzenlileştirme (Implicit Regularization): Olasılık Perspektifi

Derin öğrenmede genelleme başarısının önemli bir bölümü, doğrudan açık bir düzenlileştirme teriminden değil, eğitim algoritmasının doğasından kaynaklanmaktadır. Derin öğrenme modellerinde genelleme başarısını sağlayan mekanizmalar yalnızca modele eklenen açık regularizasyon terimlerinden ibaret değildir. Aksine, eğitim sürecinin kendisi de örtük bir regularizasyon gibi davranır. Bundan dolayı kara kutu sıfatı yakıştırılmıştır. Özellikle stokastik gradyan iniş ve onun türevleri, büyük modelleri bile aşırı ezberlemeye sürüklemeden, daha düzgün ve daha az karmaşık çözümlere yöneltme eğilimindedir. Mini-batch yapısı, öğrenme oranı dinamikleri, momentum, batch-norm gibi süreçlerin tamamı modelin parametrelerini belirli bir yapısal sınıra zorlayarak, formel olarak eklenmiş bir ceza terimi olmadan da bir çözüm üretir. Bu nedenle derin öğrenmede regularizasyon sadece açıkça formüle edilen terimlerle değil, eğitimin dinamikleriyle de gerçekleşir. Bu olgu literatürde örtük düzenlileştirme (implicit regularization) olarak adlandırılır. Özellikle Stokastik Gradyan İnişi (Stochastic Gradient Descent, SGD) gibi stokastik optimizasyon yöntemleri, gürültü kaynaklı olasılıksal etkiler aracılığıyla modelin belirli çözüm bölgelerine yönelmesini sağlar (Neyshabur et al., 2018; Li et al., 2020). SGD'nin rastlantısal doğası, öğrenme sürecine doğal bir olasılıksal bileşen kazandırır.

Her aşamada yalnızca rastgele seçilen örneklerin kullanılması, ağırlık güncellemelerini deterministik bir yoldan çıkararak stokastik diferansiyel denklemlere (SDE) yaklaşan bir dinamik oluşturur. Bu durumda, Langevin difüzyonu SGD davranışını modelleyebilir; öğrenme oranı (η) ve örneklem boyutu difüzyon katsayısını belirler (Mandt et al., 2017). Böylece SGD hem bir optimizasyon yöntemi hem de bir tür olasılık örnekleme mekanizması olarak görülebilir. SGD parametre uzayında belirli alt manifoldlara "çekilme" eğilimini açıklamak için bu yaklaşım kullanılır. Gürültü, ağırlıkları düşük enerjili bölgelerde tutar ve yüksek enerjili bölgelerden uzaklaştırır. Sonuç olarak, model basit, yaygın çözümleri tercih eder çünkü olasılık yoğunluğu belirli alt alanlarda yoğunlaşır (Sagun et al., 2017). Bu işlem, entropik bir düzenlileştirme etkisi yaratarak parametrelerin yüksek entropili bölgelerde toplanmasını sağlar. Böylece parametreler daha kararlı bölgelerde toplanır (Chaudhari & Soatto, 2018).

Olasılık teorisi bu davranışı açıklamaktadır. Parametre dağılımının zamanla bir olasılık ölçüsü olarak evrilmesi, SGD'nin stokastik doğasını açıklar. Bu ölçünün bir potansiyel enerji yüzeyinde difüzyon hareketi olarak gösterilmesiyle eğitim süreci gösterilir. Bu nedenle, sistemin deterministik gradyan inişi yerine denge dağılımına yönelen stokastik bir süreç ortaya çıkar. Bu denge dağılımı,

posterior dağılıma Bayesyen yaklaşımını kullanarak model belirsizliğini de yansıtır.

Sonuç olarak, örtük düzenlileştirme (implicit regularization) ve örtük sapma (implicit bias), derin öğrenmenin genelleme yeteneğini açıklamak için tamamlayıcı iki mekanizmadır. Klasik düzenlileştirme tekniklerinden bağımsız olarak, gürültü kaynaklı stokastik dinamikler, modelin aşırı uyum (overfitting) riskini azaltır ve veri dağılımındaki temel yapıları yakalamasına yardımcı olur. Bu yönüyle SGD, bir optimizasyon yöntemi olarak hizmet ederken aynı zamanda kendiliğinden ortaya çıkan bir olasılıksal düzenleyici mekanizma olarak da hizmet eder.

5. Dağılımdan Bağımsız (Distribution-Freee) Yaklaşım

Derin öğrenme modellerinin başarısı, yalnızca eğitim verisi üzerinde değil, aynı zamanda görülmemiş örnekleri genelleme yetenekleriyle ölçülür. Belirli bir veri dağılımına P(x,y) bağlı olarak, klasik istatistiksel öğrenme teorisi bu genelleme davranışını açıklar. Bununla birlikte, çağdaş derin öğrenmede veri dağılımının tam olarak bilinmemesi veya zaman içinde değişkenlik göstermesi nedeniyle, dağılımdan bağımsız bir analiz yaklaşımı gereklidir. Bu çerçevede amaç, herhangi bir dağılım varsayımına bağlı olmaksızın modelin performans garantilerini belirlemektir.

Dağılımdan bağımsız genelleme yaklaşımları, klasik olasılıksal yaklaşık doğruluk (Probably Approximately Correct-PAC), çerçevesinin genişletilmiş biçimlerine dayanır. PAC teorisi, belirli bir güven düzeyinde modelin hatasının belirli bir tolerans içinde kalacağını garanti eder. Ancak bu sınırlar genellikle modelin kapasitesiyle yani VC boyutu (Vapnik–Chervonenkis dimension) veya Rademacher karmaşıklığı gibi ölçütlerle ifade edilir (Vapnik, 1999). Derin sinir ağları ise parametre sayısının çok yüksek olduğu durumlarda bu ölçütleri aşar. Dolayısıyla klasik PAC sınırları yetersiz hale gelir. Bu durum, genelleme analizinde dağılım varsayımlarından tamamen bağımsız yeni yöntemlerin geliştirilmesini teşvik etmiştir.

Bu yeni yaklaşımlardan biri PAC-Bayesian teoridir. PAC-Bayesian analiz, öğrenme sürecini olasılıksal bir çerçevede ele alarak, modelin ağırlıkları üzerindeki önsel (prior) ve sonsal (posterior) dağılımlar arasındaki Kullback–Leibler (KL) uzaklığı üzerinden genelleme sınırları tanımlar (McAllester, 1998; Alquier, 2021). Böylece, genelleme hatası yalnızca model karmaşıklığına değil, aynı zamanda modelin bilgi içeriğine ve parametre dağılımlarının uyumuna da bağlı hale gelir. Bu yöntem, özellikle Bayesyen Sinir Ağları ve stokastik optimizasyon çerçeveleriyle doğal bir uyum sergiler.

Bir diğer güçlü çerçeve ise bilgi teorisi tabanlı genelleme sınırlarıdır. Bu yaklaşımda genelleme hatası, öğrenme algoritmasıyla veri arasında taşınan karşılıklı bilgi miktarıyla ilişkilendirilir (Xu & Raginsky, 2017; Bu, Zou, &

Veeravalli, 2020). Algoritmanın veriyle çok fazla bilgi paylaşması genelleme hatasının artmasına neden olur; dolayısıyla bilgi aktarımının sınırlandırılması, modelin genelleme performansını artırır. Bu teori, klasik kapasite ölçütlerinden farklı olarak, öğrenme sürecinin dinamik doğasını doğrudan hesaba katar.

Sonuç olarak, dağılımdan bağımsız genelleme analizleri, modern derin öğrenmeye iki temel katkı sunar:

• Modelin başarısının belirli bir dağılıma bağımlı olmadığını ve bu nedenle dağılım dışı (out-of-distribution, OOD) senaryolarda da teorik olarak tutarlı açıklamalar yapılabileceğini gösterir.

• Öğrenme sürecini yalnızca deterministik bir fonksiyon değil, aynı zamanda olasılıksal bir bilgi aktarım mekanizması olarak yeniden tanımlar. Böylece, derin öğrenmenin genelleme davranışı klasik istatistiksel teorinin ötesinde, olasılık ve bilgi teorisinin birleşik bir çerçevesiyle açıklanabilir hale gelir.

6. Bilgi Teorisi ile Olasılık Arasındaki İlişki

Matematiksel olarak bilgi kavramı, olasılık teorisi tarafından tanımlanır. Bilgi aktarımı, belirsizlik ve öğrenme süreçlerinin nicel analizi, bilgi teorisinin bu olasılıksal yapıların üzerine inşa edilmesiyle mümkündür. Bilgi teorisi, derin öğrenmede modellerin tahminlerini ve bilgi kodlama ve sıkıştırma süreçlerini açıklar. Modern öğrenme teorisinin olasılık temelli yeniden yorumlanması, özellikle entropi, karşılıklı bilgi (Tishby & Zaslavsky, 2015) ve bilgi darboğazı (Tishby & Zaslavsky, 2015).

6.1 Entropi ve Olasılıksal Bilgi Temsili

Bir olasılık dağılımındaki belirsizliğin ölçüsü entropi olarak bilinir. Öğrenme sürecinde bilginin miktarını ölçmek için doğal bir ölçümdür. Bir rastgele değişkenin entropisi azaldıkça, modelin bu değişken hakkında daha fazla bilgi sahibi olduğu bir gerçektir. Bu ilişki, derin öğrenmede, özellikle katmanlar arasındaki bilgi akışının araştırılmasında kullanılır. Katman çıktılarının entropisinin değişimi, modelin bilgi aktarımını veya sıkıştırmasını nasıl optimize ettiğine doğrudan işaret eder (Shwartz-Ziv & Tishby, 2017). Bu çerçevede, öğrenme süreci olasılıksal olarak şöyle açıklanabilir: Bir model, giriş değişkeninden hedef değişkene bilgi aktarırken en fazla karşılıklı bilgiyi koruyarak gereksiz bilgiyi azaltmaya çalışır. Bu durumda, model daha fazla sıkıştırma yaparsa daha fazla genelleme kapasitesi kazanır, ancak aşırı sıkıştırma bilgi kaybına neden olabilir.

6.2 Bilgi Darboğazı (IB) Teorisi

Bilgi Darboğazı (Information Bottleneck (IB**)** teorisi, derin öğrenmede bilgi akışını açıklayan en güçlü olasılıksal modellerden biridir (Tishby, Pereira, & Bialek, 2000). IB prensibine göre, iyi bir temsil hem hedef değişkenle Y

maksimum oranda bilgi taşır, hem de giriş değişkeni X'e ilişkin gereksiz bilgiyi en aza indirir. Bu, şu optimizasyon ilkesiyle ifade edilir:

$$min_{p(t|x)} I(X;T) - \beta I(T;Y) \quad (1)$$

Burada T, ara katman temsillerini; $I(.;.)$, karşılıklı bilgi ölçüsünü; β ise sıkıştırma ve bilgi koruma arasındaki denge katsayısını temsil eder. Bu formülasyon, derin öğrenme modellerinin neden belirli özellikleri otomatik olarak ayıkladığını ve soyut temsiller oluşturduğunu açıklamakta kullanılır (Alemi et al., 2016).

IB teorisi ayrıca genelleme ve overfitting arasındaki ilişkiyi olasılıksal bir zeminde açıklar. Eğitim sırasında modelin bilgi akışı, önce yüksek I(X; T) (öğrenme fazı) ve sonra düşen I(X; T) (sıkıştırma fazı) olarak iki evrede gözlenmiştir (Shwartz-Ziv & Tishby, 2017). Bu süreç, SGD'nin rastlantısal doğasının bir sonucu olarak ortaya çıkar ve implicit regularization ile doğrudan ilişkilidir.

6.3 Karşılıklı Bilgiye Dayalı Genelleme

Karşılıklı bilgi, temsillerin ne kadar iyi çalıştığını ve genelleme hatasının ne kadar yüksek olduğunu belirleyebilir. Xu ve Raginsky (2017), öğrenme algoritmasının veriden aktardığı bilginin genelleme hatasını doğrudan sınırladığını buldu. Bu durumda, eğitim seti ve model parametreleri gösterilir. Bu teoriye göre, öğrenme sürecinde daha az bilgi varsa, modelin genelleme yeteneği daha yüksek olur. Başka bir deyişle, öğrenme algoritmasının veriye aşırı bağımlı hale gelmesi, genelleme hatasının artmasına neden olur.

Bilgi Darboğazı teorisi ve PAC-Bayesian çerçeve bu yaklaşımı yakından etkiler (Bu et al., 2020). Bilgi Darboğazı perspektifinden bakıldığında, modelin yalnızca çıktı değişkenleriyle ilgili bilgiyi koruyup gereksiz bilgiyi sıkıştırması, genellemenin nasıl sağlandığını açıklar. Böylece karşılıklı bilgi tabanlı analiz, derin öğrenmede bilgi akışını kısıtlamanın genelleme üzerindeki etkisini nicel olarak değerlendirmek için güçlü bir araç sağlar.

6.4 Olasılık Teorisi ile Bilgi Teorisi Arasındaki İlişki

Bilgi teorisi, olasılık teorisinin ölçümsel araçlarını kullanarak öğrenme süreçlerini anlamada bir köprü oluşturur. Karşılıklı bilgi, entropi, KL uzaklığı ve karşılıklı bilgi, olasılık dağılımlarının nasıl değiştiğini anlatan temel niceliklerdir. Böylece derin öğrenme, yalnızca veri temsili veya fonksiyonel yaklaşım değil, aynı zamanda olasılıksal bilgi işleme süreci de olabilir. Bu yaklaşımın teorik temeli, derin ağların "neden işe yaradığını" açıklamak için giderek daha fazla kabul görmektedir. Bu bağlamda derin öğrenme, yalnızca bir fonksiyonel yaklaşım veya veri gösterimi yöntemi olarak değil, aynı zamanda olasılıksal bir bilgi işleme süreci olarak da düşünülebilir. Sinir ağları, girdilerde belirsizliği azaltarak çıktıda daha fazla bilgi sağlar. Bilgi teorisi, bu aşamada ağın yalnızca

"ne öğrendiğini" değil, aynı zamanda "nasıl öğrendiğini" açıklamak için teorik bir perspektif sağlar.

Bilgi Darboğazı teorisi, öğrenme sürecini bilgi akışı açısından ele alır (Tishby & Zaslavsky, 2015). Bu teoriye göre, model yalnızca çıktıyla ilgili bilgiyi koruyup gereksiz ayrıntıları bastırarak genelleme yapabilir. Benzer şekilde, karşılıklı bilgi tabanlı genelleme analizleri (Xu & Raginsky, 2017; Bu, Zou & Veeravalli, 2020), modelin eğitim verileriyle paylaştığı bilgi miktarının genelleme hatasının üst sınırını belirlediğini ortaya koyar. Bilgi teorisi, derin öğrenmenin epistemolojik temellerini, olasılık teorisiyle birlikte şekillendirir; rastgelelik, belirsizlik ve bilgi aktarımı arasındaki ilişkiyi açıklar. Ayrıca bilgi teorisi, modern öğrenme sistemlerinin neden genelleme yapabildiğini ve nasıl yapabildiğini açıklar.

7. Teorik Sonuçlar ve Problemler

Son on yılda derin öğrenme teorisi büyük bir ilerleme kaydetmiştir. Bu alan, klasik istatistiksel öğrenme kuramının sınırlarını aşan yeni yaklaşımlar üretmiştir. Derin ağların davranışını açıklamak için güçlü kavramsal temeller, özellikle mean-field analizleri, sinirsel teğet çekirdek (NTK) teorisi, Bayesyen modelleme ve bilgi teorisi tabanlı genelleme çerçeveleri tarafından sağlanmıştır. Bu teoriler, stokastik optimizasyonun örtük düzenlileştirme üzerinde nasıl bir etkisi olduğunu ve derin ağların yüksek parametre sayısına rağmen aşırı öğrenmeden kaçınabildiğini açıklar (Jacot et al., 2018; Mandt et al., 2017; Tishby & Zaslavsky, 2015). Bununla birlikte, bu teorik çerçevelerin büyük bir kısmı idealleştirilmiş varsayımlarla ilgilidir. Örneğin, sabit öğrenme oranı, Gaussian başlangıç dağılımları veya sonsuz genişlik limiti gibi koşullar, gerçek derin ağların karmaşık yapısını tam olarak göstermez. Mevcut teorilerin açıklama yeteneği, gerçek sistemlerde sınırlı veri, dengesiz dağılımlar, karmaşık aktivasyon fonksiyonları ve adaptif optimizasyon teknikleriyle sınırlıdır. Ayrıca, çok modlu temsiller, zamanla değişen dağılımlar, transfer öğrenme, dağılım dışı (out-of-distribution) (OOD) genelleme ve genelleme hala teorik olarak tam olarak açıklanamamıştır (Nagarajan & Kolter, 2019).

Bilgi teorisi, olasılık teorisi ve istatistiksel fizikten beslenen yeni yaklaşımlar, derin öğrenmenin teorik temellerinin daha kapsamlı bir şekilde kurulabilmesi için gereklidir. Araştırmacılar, özellikle stokastik diferansiyel denklemler (SDE) çerçevesinde dinamik öğrenme süreçlerinin modellenmesi, öğrenme dinamiklerinin enerji bazlı bir şekilde tanımlanması ve entropik düzenlileştirme ilkeleri gibi konuları tartışmaya devam ediyor. Nihai hedef, derin öğrenmenin epistemolojik ve matematiksel temellerini açıklayabilecek bir teori geliştirmektir.

7.1 Sonsuz Katman ve Kernel Limitleri

Sonsuz genişlik limitinde ağların deterministik hale geldiği, büyük alan ve NTK teorilerine dayanmaktadır (Jacot et al., 2018; Yang, 2020). Sonlu

genişlikteki ağlara bu sınırlamaların ne ölçüde uygulanabileceği henüz tam olarak bilinmemektedir. Uygulamada kullanılan modellerde milyonlarca parametre bulunmasına rağmen, bu sayı matematiksel olarak "sonsuz" değildir. Sonuç olarak, "yaklaşık sonsuzluk" içinde model dinamiklerini açıklamak için yeni asimptotik teoriler geliştirilmelidir (Chizat & Bach, 2018). Benzer şekilde, Kernel tabanlı (örneğin NTK) yaklaşımların genelleme performansını sınırlayan unsurlar tam olarak anlaşılmamıştır. Kernel davranışlarının, ağın derinliği ve aktivasyon fonksiyonlarının özelliklerine göre nasıl değiştiği; ayrıca kernel rejimi ile özellik öğrenme (feature learning) rejimi arasındaki geçiş noktası hâlen aktif araştırma konularıdır.

7.2 Örtük Sapma (Implicit Bias) ve Optimizasyon Dinamiği

Örtük sapma (implicit bias), Stokastik Gradyan İnişi (SGD) algoritmasının bir özelliğidir. Ancak bu sapmanın niteliği, özellikle yüksek boyutlu parametre uzaylarında tam olarak tanımlanamamıştır. Gürültü kaynaklı düzenlileştirmenin, diğer adıyla örtük düzenlileştirmenin, genelleme performansını hangi koşullarda artırabileceği ve hangi koşullarda zararlı olabileceği çok sayıda araştırma konusudur. Ek olarak, çeşitli optimizasyon stratejilerinin oluşturduğu örtük sapma türleri arasındaki farklılıkları açıklamak için ortak bir teori henüz oluşturulamamıştır.

7.3 Dağılım Kayması (Distribution Shift) ve Adalet (Fairness) Problemleri

Teorik modellerin çoğu, test ve eğitim verilerinin aynı dağılımdan geldiğini varsayar. Oysa gerçek hayatta dağılım kayması (distribution shift) kaçınılmazdır. Genelleme tahminleri, eğitim verisi ile test ortamı arasındaki bu fark nedeniyle doğrudan geçersiz hale gelir (Quionero-Candela et al., 2008). Veri dağılımı değiştiğinde genelleme sınırlarını koruyacak yeni olasılıksal yaklaşımlara ihtiyaç vardır. Bu boşluğu doldurmak için, özellikle domain adaptasyonu ve nedensel çıkarım (causal inference) gibi yöntemler kullanılabilir (Gulrajani & Lopez-Paz, 2020). Ek olarak, olasılıksal çerçevede adalet kavramı hala tartışmalı bir konudur. Farklı alt gruplar arasında modelin performansındaki farklılıkları azaltmak etik ve olasılık dağılımı eşitliği açısından önemlidir. Bilgi teorik çerçeveler, genelleme ve fairness arasındaki ilişkiyi formel olarak tanımlamak için henüz tam olarak tamamlanmamıştır (Dwork et al., 2012).

7.4 Veri Bağımlı Sapma (Bias) ve Öneriler

Modern araştırmalar, derin modellerde veri bağımlı sapma (bias) olduğunu ortaya koymaktadır. Veri dağılımındaki lokal yapılar, modelin öğrenme yönelimini belirler. Bu, modelin genelleme performansının yalnızca parametreler veya optimizasyon prosedürüyle değil, aynı zamanda verinin geometrik özellikleri tarafından da belirlendiğini göstermektedir. Gelecekteki teorik araştırmalar, öğrenme sürecinin veri manifoldu üzerindeki olasılıksal akışını

araştıracaktır. Bu nedenle derin öğrenmenin olasılıksal teorisi, klasik istatistiksel paradigmaları değiştirir. Ancak "tam" bir teoriye ulaşmak için hâlâ açık problemler bulunmaktadır. Dağılım kaymaları, adalet–genelleme dengesi, veri bağımlı sapma ve sonlu genişlik dinamikleri gibi konular, geleceğin araştırma gündemini oluşturmaya devam edecektir.

Olasılık teorisi, bilgi teorisi ve optimizasyon dinamiklerinin kesişiminde gelişen bu yeni teorik yönelim, derin öğrenmeyi yalnızca ampirik bir başarı alanı olmaktan çıkararak matematiksel olarak tanımlanabilir bir disiplin hâline getirmektedir. Ancak bu dönüşüm, disiplinler arası bir çabanın sürdürülmesini gerektirmektedir; istatistik, fizik ve bilgi kuramı arasındaki sınırların bulanıklaşması, geleceğin "birleşik öğrenme teorisi"nin temelini oluşturacaktır.

7.5. Birleşik Olasılıksal Teorinin Geleceği

Bu yeni teorik yönelim, derin öğrenmeyi yalnızca ampirik bir başarı alanı olmaktan çıkararak matematiksel olarak tanımlanabilir bir disiplin haline getirmektedir. Bu, optimizasyon dinamikleri, olasılık teorisi ve bilgi teorisi ile birleştiğinde ortaya çıkmıştır. Bununla birlikte bu değişiklik, disiplinler arası bir çabanın sürdürülmesini gerektirir. Gelecekte birleşik öğrenme teorisinin temeli, fizik, bilgi kuramı ve istatistik alanlarındaki sınırların daha belirgin hale gelmesiyle oluşacaktır. Dolayısıyla, bilgi, olasılık ve optimizasyon teorilerinin birleştirilmesi, derin öğrenmenin gelecekteki teorik yöneliminin temelini oluşturacaktır. Bu kombine yöntem, derin ağların davranışını açıklamakla kalmaz, aynı zamanda yapay zekânın epistemolojik ve bilişsel temellerini anlamada yeni bir paradigma sunar.

8. Sonuçlar

Bu çalışma boyunca, derin öğrenmenin teorik temellerini anlamada olasılık teorisinin oynadığı merkezi rol ele alınmıştır. Modern derin ağların davranışlarını açıklayabilmek için, klasik istatistiksel öğrenme teorisinin ötesine geçmek gerekmektedir. Sabit boyutlu modeller, bağımsız ve özdeş dağılmış veri varsayımı gibi geleneksel kabuller, aşırı parametreleşmiş ve stokastik karaktere sahip derin ağlar karşısında yetersiz kalmaktadır. Olasılık teorisi, bu boşluğu dolduran yeni bir matematiksel dil ve yorumlama çerçevesi sunmaktadır.

İlk olarak, olasılık uzayı perspektifi, derin öğrenme süreçlerinin rastgele parametreler, stokastik optimizasyon ve belirsizlik kavramları üzerinden yeniden tanımlanmasını mümkün kılmıştır. Mean-field ve sinirsel teğet çekirdek (Neural Tangent Kernel (NTK)) yaklaşımları, ağların sonsuz genişlik limitinde deterministik davranış sergilediğini göstererek, derin modellerin karmaşık yapısını analitik olarak incelenebilir hale getirmiştir. Bu çerçeve, Gaussian süreçleri ve rassal matris teorisi ile güçlü bir teorik bağ kurmaktadır. Böylece derin modellerin davranışları, istatistiksel fizik temelli bir yorumla açıklanabilir hale gelir.

İkinci olarak, örtük düzenlileştirme (implicit regularization) kavramı, eğitim algoritmalarının olasılıksal doğasının genelleme üzerindeki etkisini ortaya koymuştur. Stokastik Gradyan İnişi (Stochastic Gradient Descent, SGD) yalnızca bir optimizasyon yöntemi değil, aynı zamanda bir olasılıksal difüzyon süreci olarak yorumlanabilir. Bu süreç, modelin düşük enerjili ve yüksek entropili bölgelerde kararlı çözümlere yönelmesini sağlayarak, açık biçimde tanımlanmış düzenlileştirmenin bulunmadığı durumlarda dahi "örtük" bir genelleme etkisi oluşturur. Böylece, öğrenme dinamikleri ile olasılıksal istikrar kavramı arasında doğrudan bir bağlantı kurulmuştur.

Üçüncü olarak, dağılımdan bağımsız genelleme ve bilgi teorisi temelli analizler, derin modellerin veri dağılımına bağlı olmadan genelleme yapabilme kapasitesine yeni bir açıklama getirmiştir. PAC-Bayesian sınırları, karşılıklı bilgi (mutual information) ölçütleri ve Bilgi Darboğazı (Information Bottleneck) teorisi, öğrenme sürecini bilgi aktarımı ve sıkıştırma açısından yeniden tanımlamıştır. Bu yaklaşımlar, genelleme–belirsizlik–bilgi dengesini olasılıksal bir formülasyonla bütünleştirerek, öğrenmenin epistemolojik temelini güçlendirmiştir.

Son olarak, dağılım kayması (distribution shift), adalet–genelleme dengesi, veri bağımlı sapma ve sonlu genişlik dinamikleri gibi konular, derin öğrenme teorisinin önümüzdeki yıllardaki ana araştırma eksenlerini oluşturmaktadır. Bu problemlerin çözümü, yalnızca istatistiksel değil, aynı zamanda olasılıksal düşüncenin derinlemesine entegrasyonunu gerektirecektir.

Özetle, derin öğrenmenin olasılık teorisiyle yeniden yorumlanması, klasik öğrenme kuramını genişleten ve modern yapay zekânın anlaşılabilirliğini artıran bir paradigma değişimini temsil etmektedir. Olasılık temelli bu çerçeve, model güvenilirliği, genelleme sınırları ve bilgi işleme süreçleri arasındaki ilişkiyi bütüncül biçimde açıklayarak, yapay zekânın gelecekteki teorik gelişimi için sağlam bir temel sunmaktadır. Ayrıca, bu çerçeve yalnızca derin ağların matematiksel temellerini açıklamakla kalmayıp, yapay zekânın güvenilirlik, genelleme ve bilgi işleme süreçleri arasındaki ilişkileri bütüncül biçimde kavrayan yeni bir teorik paradigma sunmaktadır.

Kaynakça

Alemi, A. A., Fischer, I., Dillon, J. V., & Murphy, K. (2016). Deep variational information bottleneck. arXiv preprint arXiv:1612.00410.

Alquier, P. (2021). User-friendly introduction to PAC-Bayes bounds. Foundations and Trends in Machine Learning, 14(5), 493–590. doi:10.1561/2200000079

Arora, S., Du, S., Hu, W., Li, Z., & Wang, R. (2019). Fine-grained analysis of optimization and generalization for overparameterized two-layer neural networks. In International Conference on Machine Learning (pp. 322–332).

Bartlett, P. L., Long, P. M., Lugosi, G., & Tsigler, A. (2020). Benign overfitting in linear regression. Proceedings of the National Academy of Sciences, 117(48), 30063–30070.

Belkin, M., Hsu, D., Ma, S., & Mandal, S. (2019). Reconciling modern machine-learning practice and the classical bias–variance trade-off. Proceedings of the National Academy of Sciences, 116(32), 15849–15854.

Bengio, Y. (2009). *Learning deep architectures for AI.* Foundations and Trends in Machine Learning, 2(1), 1–127. doi:10.1561/2200000006

Bishop, C. M. (2006). Pattern recognition and machine learning. New York, NY: Springer.

Bu, Y., Zou, S., & Veeravalli, V. V. (2020). Tightening mutual information-based bounds on generalization error. IEEE Journal on Selected Areas in Information Theory, 1(1), 121–130.

Chaudhari, P., & Soatto, S. (2018). Stochastic gradient descent performs variational inference, converges to limit cycles for deep networks. In Information Theory and Applications Workshop (pp. 1–10). IEEE.

Chizat, L., & Bach, F. (2018). On the global convergence of gradient descent for over-parameterized models using optimal transport. In Advances in Neural Information Processing Systems (Vol. 31).

Cortes, C., & Vapnik, V. (1995). Support-vector networks. *Machine Learning, 20*(3), 273–297.

D'Amour, A., Heller, K., Moldovan, D., Adlam, B., Alipanahi, B., Beutel, A., ... & Sculley, D. (2022). Underspecification presents challenges for credibility in modern machine learning. Journal of Machine Learning Research, 23, 1–61.

Deng, L., & Yu, D. (2014). *Deep learning: Methods and applications.* Foundations and Trends in Signal Processing, 7(3–4), 197–387. doi:10.1561/2000000039

Dwork, C., Hardt, M., Pitassi, T., Reingold, O., & Zemel, R. (2012). Fairness through awareness. In Innovations in Theoretical Computer Science Conference (pp. 214–226).

Fukushima, K. (1988). Neocognitron: A hierarchical neural network capable of visual pattern recognition. *Neural networks*, *1*(2), 119-130.

Gal, Y., & Ghahramani, Z. (2016). Dropout as a Bayesian approximation: Representing model uncertainty in deep learning. In International Conference on Machine Learning (pp. 1050–1059).

Grohs, P., & Voigtlaender, F. (2024). Proof of the theory-to-practice gap in deep learning via sampling complexity bounds for neural network approximation spaces. Foundations of Computational Mathematics, 24(4), 1085–1143.

Gulrajani, I., & Lopez-Paz, D. (2020). In search of lost domain generalization. arXiv preprint arXiv:2007.01434.

Haykin, S. (2009). *Neural networks and learning machines, 3/E*. Pearson Education India.

Hochreiter, S., & Schmidhuber, J. (1997). Long short-term memory. *Neural computation*, *9*(8), 1735-1780.

Hinton, G. E., & Salakhutdinov, R. R. (2006). Reducing the dimensionality of data with neural networks. *science*, *313*(5786), 504-507.

Ivakhnenko, A. G., & Lapa, V. G. (1965). Cybernetic predicting devices. *(No Title)*.

Jacot, A., Gabriel, F., & Hongler, C. (2018). Neural tangent kernel: Convergence and generalization in neural networks. In Advances in Neural Information Processing Systems (Vol. 31).

Kingma, D. P., & Welling, M. (2013). Auto-encoding variational Bayes. arXiv preprint arXiv:1312.6114.

Lee, J., Bahri, Y., Novak, R., Schoenholz, S. S., Pennington, J., & Sohl-Dickstein, J. (2017). Deep neural networks as Gaussian processes. arXiv preprint arXiv:1711.00165.

Le, Q. V., Ranzato, M., Monga, R., Devin, M., Chen, K., Corrado, G. S., ... & Ng, A. Y. (2012). Building high-level features using large-scale unsupervised learning. *Proceedings of the International Conference on Machine Learning*.

Mandt, S., Hoffman, M. D., & Blei, D. M. (2017). Stochastic gradient descent as approximate Bayesian inference. Journal of Machine Learning Research, 18, 1–35.

Matthews, A. G. D. G., Rowland, M., Hron, J., Turner, R. E., & Ghahramani, Z. (2018). Gaussian process behaviour in wide deep neural networks. arXiv preprint arXiv:1804.11271.

McAllester, D. A. (1998). Some PAC-Bayesian theorems. In Proceedings of the Eleventh Annual Conference on Computational Learning Theory (pp. 230–234).

McCulloch, W. S., & Pitts, W. (1943). A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *The bulletin of mathematical biophysics*, *5*(4), 115-133.

Mei, S., & Montanari, A. (2019). The generalization error of random features regression: Precise asymptotics and double descent curve. arXiv preprint arXiv:1908.05355.

Nagarajan, V., & Kolter, J. Z. (2019). Uniform convergence may be unable to explain generalization in deep learning. In Advances in Neural Information Processing Systems (Vol. 32).

Nakkiran, P., Kaplun, G., Bansal, Y., Yang, T., Barak, B., & Sutskever, I. (2021). Deep double descent: Where bigger models and more data hurt. Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, 2021(12), 124003.

Neal, R. M. (2012). Bayesian learning for neural networks. New York, NY: Springer.

Neyshabur, B., Li, Z., Bhojanapalli, S., LeCun, Y., & Srebro, N. (2018). Towards understanding the role of over-parametrization in generalization of neural networks. arXiv preprint arXiv:1805.12076.

Sagun, L., Evci, U., Guney, V. U., Dauphin, Y., & Bottou, L. (2017). Empirical analysis of the Hessian of over-parametrized neural networks. arXiv preprint arXiv:1706.04454.

Shwartz-Ziv, R., & Tishby, N. (2017). Opening the black box of deep neural networks via information. arXiv preprint arXiv:1703.00810.

Suh, N., & Cheng, G. (2025). A survey on statistical theory of deep learning: Approximation, training dynamics, and generative models. Annual Review of Statistics and Its Application, 12(1), 177–207.

Silver, D., et al. (2016). Mastering the game of Go with deep neural networks and tree search. *Nature, 529*(7587), 484–489.

Şeker, A. (2017). *Derin öğrenme yöntemleri ve uygulamaları hakkında bir inceleme* (Yüksek lisans tezi). Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, Türkiye.

Taigman, Y., Yang, M., Ranzato, M., & Wolf, L. (2014). DeepFace: Closing the gap to human-level performance in face verification. *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 1701–1708.

Tishby, N., Pereira, F. C., & Bialek, W. (2000). The information bottleneck method. arXiv preprint physics/0004057.

Tishby, N., & Zaslavsky, N. (2015). Deep learning and the information bottleneck principle. In IEEE Information Theory Workshop (pp. 1–5). IEEE.

Vapnik, V. N. (1999). An overview of statistical learning theory. IEEE Transactions on Neural Networks, 10(5), 988–999.

Yang, G., & Hu, E. J. (2020). Feature learning in infinite-width neural networks. arXiv preprint arXiv:2011.14522.

Zhang, C., Bengio, S., Hardt, M., Recht, B., & Vinyals, O. (2016). Understanding deep learning requires rethinking generalization. arXiv preprint arXiv:1611.03530.

Xu, A., & Raginsky, M. (2017). Information-theoretic analysis of generalization capability of learning algorithms. In Advances in Neural Information Processing Systems (Vol. 30).

Quiñonero-Candela, J., Sugiyama, M., Schwaighofer, A., & Lawrence, N. D. (2008). Dataset shift in machine learning. Cambridge, MA: MIT Press.

Wilson, A. G., & Izmailov, P. (2020). Bayesian deep learning and a probabilistic perspective of generalization. In Advances in Neural Information Processing Systems (Vol. 33, pp. 4697–4708).

Weng, J., Ahuja, N., & Huang, T. S. (1992, June). Cresceptron: a self-organizing neural network which grows adaptively. In *[Proceedings 1992] IJCNN International Joint Conference on Neural Networks* (Vol. 1, pp. 576-581). IEEE.

BÖLÜM 2

Yinelemeli M/M/1 Kuyruk Sisteminin Analizi ve Simülasyonu

İlker Bayri[1] & Müjgan Zobu[2] & Murat Sağır[3] & Vedat Sağlam[4]

[1] Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü https://orcid.org/0009-0007-3505-5561
[2] Doç. Dr., Amasya Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Eğitim Bilimleri Bölümü https://orcid.org/0000-0001-9182-8927
[3] Dr. Öğr. Üyesi, İskenderun Teknik Üniversitesi, İşletme ve Yönetim Bilimleri Fakültesi, Ekonomi Bölümü, https://orcid.org/0000-0001-7567-9327
[4] Prof. Dr., Ondokuz Mayıs Üniversitesi,Fen Edebiyet Fakültesi, İstatistik Bölümü https://orcid.org/ 0000-0002- 8586-1373

1. Giriş

Günümüzde hizmet sistemlerinde, özellikle çağrı merkezleri, bankacılık işlemleri, teknik destek servisleri ve sağlık hizmetleri gibi alanlarda, müşterilerin hizmete ulaşamadığında daha sonra tekrar deneme yapması sık karşılaşılan bir durumdur. Bu gibi sektörlerde, yinelemeli kuyruk teorisi gerçek hayat senaryolarını modellemek için geniş bir çerçeve sunar. Bu teorinin ilk ve en temel uygulama alanı, telekomünikasyon olmuştur; bir arayanın meşgul sinyali aldığında hatları sürekli kontrol etmek yerine rastgele aralıklarla tekrar numarayı tuşlaması (Cohen, 1969), yinelemeli kuyrukların klasik bir örneğidir. Benzer bir davranış günümüzdeki çağrı merkezlerinde de gözlemlenir; bir çağrı düştüğünde veya tüm müşteri temsilcileri meşgul olduğunda, müşterilerin kısa bir süre sonra sistemi tekrar araması yaygın bir durumdur. Bilgisayar ağlarında ise, ethernet gibi paylaşımlı ortam protokollerinde (CSMA/CD) veri paketleri çakıştığında, istasyonların rastgele bir süre bekledikten sonra iletimi yeniden denemesi, bu teorinin merkezinde yer alan yeniden deneme mantığının bir yansımasıdır. Sağlık hizmetlerinde, özellikle yoğun kliniklerde, randevu alamayan veya muayene olamayan hastaların bir süre sonra tekrar başvuruda bulunmaları da bir tür yinelemeli kuyruk sistemi oluşturur. Yine, trafik akışı ve enerji dağıtım şebekeleri gibi karmaşık altyapı sistemlerinde, bir rota tıkandığında veya bir hat arızalandığında trafiğin ve enerjinin alternatif yollarla yeniden yönlendirilmesi, bu teorinin prensipleriyle analiz edilebilecek yeniden deneme davranışları sergiler. Kısaca özetlersek, klasik kuyruk modellerinde müşteriler sisteme geldikleri anda hizmet alamamaları durumunda ya kuyrukta beklerler ya da sistemi terk ederler. Ancak bazı durumlarda, hizmet alamayan müşteriler sistemi tamamen terk etmek yerine bir süre sonra tekrar deneme yaparak hizmet almak ister. Bu tür sistemler yinelemeli kuyruk sistemleri olarak adlandırılır. Bu modellerde bekleyemeyen müşteriler bir bekleme havuzunda (orbit) toplanır ve burada bağımsız bir şekilde tekrar hizmet denemesi yaparlar. Bu bölümde yinelemeli kuyruk teorisinin temelleri ele alınmakta, yaygın modeller tanıtılmakta ve çözüm yöntemleri sunulmaktadır.

Bu gerçek hayat senaryolarını modellemek amacıyla, klasik M/M/1 ve M/M/c kuyruk sistemleri üzerine kurulu yinelemeli kuyruk modelleri üzerinde birçok araştırmacı tarafından çalışmalar yapılmıştır. Cohen (1969), bu sistemlerin ilk kapsamlı analizini gerçekleştirmiştir. Bu alandaki bilgi birikimi, Falin ve Templeton (1997)'un yazdığı "Yinelemeli Kuyruklar" (Retrial Queues) isimli kitapla önemli ölçüde genişlemiş ve bu eser konunun temel başvuru kaynaklarından biri hâline gelmiştir. Artalejo (2000-2010) ise çok sunuculu sistemler ve sabit oranlı yineleme politikaları üzerine yaptığı sistematik çalışmalarla alana önemli katkılar sağlamıştır. Daha karmaşık sistemlerin modellenmesi konusunda Dudina vd. (2016), faz-tipi dağılımları, BMAP (Batch Markovian Arrival Process) girişli süreçleri ve heterojen müşteri yapılarını içeren genişletilmiş modeller önermişlerdir. Ayhan ve Kim (2010)'in sabırlı müşterili sistemler üzerine yaptığı çalışmalar, gerçek hayattaki müşteri davranışlarının modellemesine önemli bir boyut kazandırmıştır. Phung-Duc (2019), "Yeniden deneme kuyruğu modelleri: Teori ve uygulamalara ilişkin bir inceleme" adlı bir

çalışma yapmıştır. Çağrı merkezleri, hücresel ağlar ve yerel alan ağlarındaki rastgele erişim protokolleri gibi çeşitli sistemlerde yeniden deneme olgusunu inceleyen bu makale yinelemeli kuyrukların teori ve uygulamaları üzerine kapsamlı bir inceleme sunmaktadır. Liu vd. (2022), "Kusurlu kapsama ve yeniden başlatma gecikmesine tabi olan güvenilir olmayan sunucularla yeniden deneme kuyruğunun optimizasyonu" adlı bir çalışma yapmıştır. Bu çalışmada, rastgele yeniden deneme politikası, güvenilir olmayan sunucular ve başarısız sunucuların tespit edilemediği bir yeniden deneme kuyruğu incelenmiştir. Saranavan vd. (2023), "Güvenilir olmayan sunucu, engelleme ve tahliye modeli ile çoklu sunucu yeniden deneme kuyruklama sisteminin performans analizi" adlı bir çalışma yapmıştır.

2. Materyal ve Yöntem

2.1. Kuyruk Modelleri

Marketlerde kasa önlerindeki sıra bekleme, bankacılık işlemleri için gişelerde sıra bekleme, muayene olabilmek için sıra bekleme, hava limanlarında uçakların iniş-kalkış yapmaları, endüstriyel bir üretimde üretimin aşamaları, trafik ışıklarında bekleme gibi örnekler için birer kuyruk modeli tanımlamak mümkündür. Bu tür sistemler, kuyruk teorisi ile modellenerek hizmet süreleri, bekleme süreleri ve kaynak verimliliği gibi performans ölçütleri analiz edilebilir.

2.2. M/M/1 Sistemi ve Analizi

M/M/1 kuyruk sistemi gelenlerin λ parametresiyle Poisson dağıtıldığı tek kanallı bir kuyruk sistemi tanımlar ve servis süresi μ parametresiyle üsteldir. Ayrıca aksi belirtilmediği sürece sistem ilk gelen ilk hizmeti alır FIFO, sistemin kuyruk kapasitesi ve gelen müşterilerinin kaynağı sınırlı değildir, hizmetlerini alan müşteriler sisteme tekrar dönmezler.

M/M/1 sisteminde müşterilerin sisteme geliş anları (varış) anları, t_1, t_2,... tesadüfi değişkenleri ile gösterilsin. Ayrıca her bir müşterinin hizmet süresi y tesadüfi değişkeni ile gösterilsin. Bu değişken μ parametreli üstel dağılıma sahiptir ve sistemde bir tane hizmet kanalı bulunmaktadır. Sistemin hizmet disiplini FIFO (ilk gelen ilk çıkar) disiplinidir.

$N(t)$, t anında sistemde olan müşteri sayısı olsun. O hâlde $\{N(t), t> 0\}$ bir stokastik süreç olarak tanımlanır. Bu sürece ait durum uzayı E = {0, 1, 2, ... }'dir. Sistemde t anında k tane müşteri olması olasılığı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mathrm{P}(N(t) = n) = p_n(t) \tag{2.1}$$

Bu olasılığını bulmak oldukça zordur. Fakat bu olasılık $t \to \infty$ için $\rho = \frac{\lambda}{\mu} <$ 1 koşulu altında mevcuttur.

2.2.1. Sisteme Ait Performans Ölçütleri

2.2.1.1. Sistemdeki Ortalama Müşteri Sayısı

Sistemdeki ortalama müşteri sayısı sisteme ait trafik yoğunluğunun sistemin boş olma olasılığına bölünmesi ile elde edilmektedir.

$$\mathrm{E(N)} = \frac{\rho}{1-\rho} \tag{2.2}$$

2.2.1.2. Kuyruktaki Ortalama Müşteri Sayısı

Kuyruktaki herhangi bir zamanda bulunan kişilerin sayısı N_q ile gösterilsin.

$$\mathrm{E}(N_q) = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \rho \mathrm{E(N)} \tag{2.3}$$

Kuyruktaki ortalama kişi sayısı trafik yoğunluğunun sistemdeki ortalama kişi sayısı ile çarpılması ile ifade edilir.

2.2.1.3. Sistemde Ortalama Bekleme Süresi

Bir müşterinin sistemde ortalama bekleme süresi W tesadüfi değişkeni olarak tanımlanır.

$$\mathrm{E(W)} = \frac{1}{\mu - \lambda} \tag{2.4}$$

2.2.1.4. Kuyrukta Ortalama Bekleme Süresi

Bir müşterinin kuyrukta bekleme süresi W_q tesadüfi değişkeni olarak tanımlanır.

$$\mathrm{E}(W_q) = E\left(W - \frac{1}{\mu}\right) = \frac{\rho}{(\mu - \lambda)} \tag{2.5}$$

M/M/c Sistemi ve Analizi

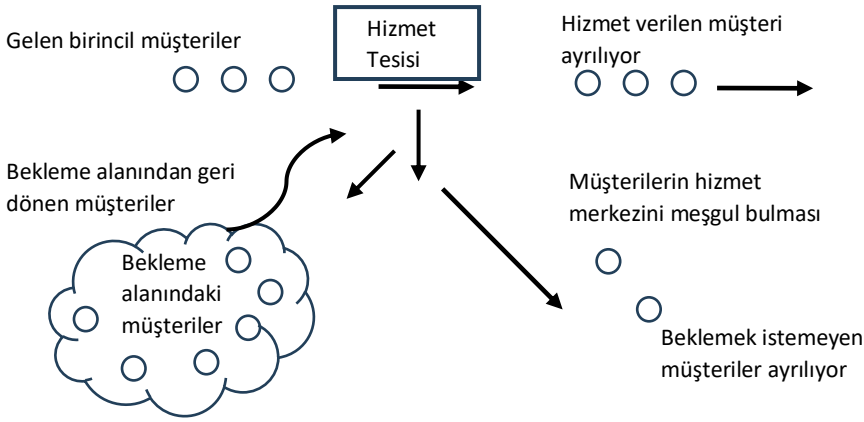
Günlük hayatın bir parçası olan kuyruklarda genellikle tek hizmet kanalı bulunmaz. Çeşitli kuyruk sistemlerinde hizmet kanalları birden çok olabilmektedir. Gelişler λ parametresi ile Poisson dağılımına sahip iken sistemde c tane hizmet kanalı bulunuyor ve bu kanalların hizmet sürelerinin her biri özdeş μ parametreli üstel dağılıma sahip olduğunda sistem M/M/c olarak isimlendirilir.

Bu sistem sonsuz müşteri kaynaklı λ parametreli Poisson geliş akımlı ve c tane paralel hizmet kanaldan oluşan ve her bir kanaldaki hizmet süresi benzer ve bağımsız olup μ oranı ile üstel dağılıma uymaktadır. Sistem ilk gelene ilk hizmet (FIFO) disiplini ile çalışır. Müşteri sisteme geldiğinde kanalların tümü doluysa hizmet almak için bekleme hattına (kuyruğa) girer. Sistemde kuyruk kapasitesi sınırsızdır. Ayrıca hizmetini tamamlayan müşteriler sisteme geri dönmezler. $N(t)$, t anında sisteme gelen müşteri sayısı olarak tanımlansın. Zamanı sonsuza

yaklaştırdığımızda ($t\to\infty$) $\lambda/(c\mu)$ <1 koşulu sağlanıyorsa $p_n = \lim_{t\to\infty} P(N_t = n)$ limit olasılığı vardır.

2.4. Yinelemeli Kuyruk Modellerinin Basit Tanımı

Burada müşterilerin hizmete erişmek için tekrarlanan denemeleri olarak adlandırılan ve yeniden deneme kuyrukları adı verilen bir model açıklanmaktadır. Örnek olarak, bir müşterinin yerel bir mağazayı aramaya çalıştığını varsayalım. Müşteri meşgul sinyali alırsa, müşteri telefonu bir kenara bırakıp daha sonra, örneğin 15 dakika sonra tekrar deneyebilir. Bir sonraki aramadan önce kanalın boş olduğunu düşünür. Ancak bu süre içinde diğer müşteriler de arayabilir, dolayısıyla ilk müşteri ikinci denemede yine de meşgul sinyali alabilir.



Şekil 2.1.Yinelemeli deneme kuyruğu için temel model

Böylesi bir kuyruk modelinin belirgin bazı karakteristikleri aşağıdaki gibi verilebilir:

Gelen müşteri uygun bir kanal bulduğunda hizmete girer.

Gelen bir müşteri, tüm kanalların meşgul olduğunu gördükten sonra geçici olarak ayrılır.

Müşteri aşağıdakilerden birini yapabilir:

(a) Sistemi tamamen terk eder.

(b) Daha sonra servis sistemine geri döner. Uzaktayken müşteri bekleme alanında yer alır.

Müşteriler bekleme alanında hizmet kanalının durumunu göremeyebilir. Müşteriler hizmet kanalına tekrar ulaşarak durumu kontrol eder. Böylesi bir deneme tekrar deneme olarak adlandırılır. Yani müşteriler sürekli bekleme alanından hizmet kanalına girmeye çalışırlar. Sonuçta ya hizmet alınır ya da sistemden ayrılırlar.

Bazı açılardan bekleme alanı müşterilerin hizmet almak için beklediği bir kuyruk gibidir. Ancak kuyruktan farklı olarak bekleme alanındaki müşteri kanalın durumunu izleyemez. Özellikle kanal boşaldığında, bekleme alanındaki bir müşteri kanalın boş olduğunu anlayıp hizmete başlamasına kadar bir gecikme olur. Ayrıca, bekleme alanı kuyruk düzeni kavramı da yoktur.

Hizmet alma sırası, herhangi bir düzene veya disipline bağlı değildir ve müşteriler sisteme geri dönen herhangi bir müşteri kanalı boş bulduğunda hizmet alır. Özellikle, müşteriler genellikle ilk gelene ilk hizmet esasına göre hizmet almazlar.

Sınırlayıcı durumlardan biri de her bir müşterinin bekleme alanında geçirilen sürenin anlık olmasıdır. Başka bir deyişle, gelen bir müşteri, tüm kanalın meşgul olduğunu görünce bekleme alanına gider ve ardından anlık olarak kanal durumunu kontrol etmek için geri döner. Bu durumda, bekleme alanı rastgele hizmet disiplinine sahip bir kuyruk gibi davranır (yani, bekleme alanındaki her müşterinin bir sonraki müşteri olma olasılığı eşit olur).

2.5. Yinelemeli Kuyruk Sistemlerinin Kapsamlı Tanımı

Yukarıda da belirtildiği gibi sistemin temel bileşenlerinden biri olan bekleme alanı**,** hizmet alamayan müşterilerin pasif durumda bekletildiği, geleneksel bir fiziksel kuyruk sırasının bulunmadığı ve her bir müşterinin bağımsız yeniden deneme zamanlarına sahip olduğu sanal bir bekleme alanı olarak tanımlanır. Bekleme alanının yapısı temelde iki model üzerinden ele alınır. Çoğu teorik çalışmada kabul gören ve bekleme alanı büyüklüğünün sonsuz olduğu "Sınırsız Bekleme Alanı" (M/M/1) modelidir. Diğeri ise daha gerçekçi bir yaklaşım sunan ve bekleme alanı kapasitesinin sonlu bir K değeri ile sınırlandırıldığı "Sınırlı Bekleme Alanı" (M/M/1/K) modelidir. Sınırlı orbit modeli, özellikle tampon belleğin kısıtlı olduğu uydu haberleşmesi ve kablosuz ağ uygulamalarında büyük önem taşımaktadır.

Sistem davranışını şekillendiren bir diğer kritik unsur ise yineleme politikalarıdır. Bu politikalar, bekleme alanındaki müşterilerin hizmet kanallarını yeniden deneme stratejilerini belirler. Klasik yineleme politikasında (doğrusal politika), orbitteki her müşteri, bağımsız bir Poisson süreci ile sistemi denemeye devam eder. Bu durumda, orbitteki müşteri sayısı n ile gösterildiğinde, toplam yeniden deneme oranı $n\gamma$ olur ve bekleme alanı kalabalıklaştıkça sistemdeki toplam trafik yükü artar. Analizi daha karmaşık olsa da bu politika gerçek hayattaki bireysel davranışları modellemekte oldukça gerçekçidir. Buna karşılık, sabit oranlı politikada ise bekleme alanı büyüklüğünden bağımsız olarak, bekleme alanından sabit bir ν oranında müşteri seçilerek yeniden deneme yaptırılır. Bu yaklaşım, matematiksel analizi kolaylaştırmasının yanı sıra, otomatik geri arama sistemleri gibi senaryolarda daha anlamlı bir model sunar. Son dönemde verimliliği artırmak amacıyla kontrol edilmiş yineleme politikaları öne çıkmaktadır. Bekleme alanındaki müşteri sayısı belirli bir eşiği aştığında

yeniden deneme hızını artıran eşik politikaları, sistem yüküne bağlı olarak oranı değiştiren duruma bağlı politikalar ve farklı müşteri sınıflarına farklı öncelikler tanıyan politikalar, telekomünikasyon operatörleri başta olmak üzere birçok sektörde uygulama alanı bulmaktadır.

Yinelemeli kuyruk sistemleri, hizmet kanalı yapıları açısından da büyük bir çeşitlilik gösterir. Temel modeller tek sunuculu (M/M/1 yinelemeli) ve çok sunuculu (M/M/c yinelemeli) sistemler üzerine inşa edilmiştir. Araştırma seviyesinde ise bu temeller, hizmet oranları farklı heterojen sunucular, olasılıksal aşamalardan oluşan faz-tipi (PH) hizmet süreleri, ardışık işlem basamakları içeren tandem yapılar ve Markov Geliş Süreci (MAP) gibi daha karmaşık ve genel giriş süreçleri ile zenginleştirilmiştir. Özellikle heterojen müşteri sınıflarının dahil edildiği ve MAP/PH bileşenleri ile modellenen sistemler, güncel literatürde yoğun bir şekilde çalışılmakta ve analitik zorluklar ile uygulama potansiyeli taşımaktadır.

Birkaç basit model dışında, yeniden deneme kuyruklarının analitik olarak analiz edilmesi genellikle zordur. Bu bölümde çoğunlukla tek bir kanal ile Markov sürecine dayalı yeniden deneme kuyruklarını ele alıyoruz. Bu bölümdeki bilgiler büyük ölçüde Falin ve Templeton (1997) tarafından yazılan kitaptaki içeriğe dayanmaktadır. Genel dağılımları içerenler de dahil olmak üzere yeniden deneme modelleri bakınız, bkz. Artalejo (1999).

2.6. M/M/1 Retrial Kuyruk Sistemi

İlk model olarak M/M/1 deneme kuyruğunu göz önüne alıyoruz. Bu modelde, müşteriler λ oranlı Poisson sürecine göre tek kanallı bir kuyruğa gelirler. Hizmet süreleri 1/μ ortalamalı üstel dağılıma sahiptir. Gelen herhangi bir müşteri, kanalı meşgul bulduğunda bekleme alanına girer. $1/\gamma$ ortalamalı üstel dağılım gösteren bir periyodla orda kalır. Tüm varışlar arası zamanlar (birincil varışlar arasındaki), servis süreleri ve bekleme alanı süreleri bağımsızdırlar. Müşteriler, servis kapatılıncaya kadar mevcut hizmet girişimlerini tekrarlarlar. Bu modelde hiçbir müşterinin sistemden ayrılmadığını varsayıyoruz.

$N_s(t), t$ zamanında hizmette olan müşteri sayısı olsun [çünkü bir kanal, $N_s(t) \in \{0,1\}$]. $N_0(t)$ t zamanında bekleme alanındaki müşteri sayısı olsun. O zaman, $\{N_s(t), N_0(t)\}$ durum uzayı {i, n} olan bir sürekli parametrenin Markov zinciridir, burada $i \in \{0,1\}$ ve $n \in \{0,1,2,\dots\}$ olsun. Sistemdeki toplam müşteri sayısı şöyledir $N(t) = N_s(t) + N_0(t)$. Şekil 2.2 durumlar arasındaki geçiş oranlarını göstermektedir. $p_{i,n}$, sistemin $\{i,n\}$ durumundaki olasılığı olsun. Daha sonra denge durumu denklemleri şunlardır;

$$(\lambda + n\gamma)p_{0,n} = \mu p_{1,n} \tag{2.6}$$

$$(\lambda + \mu)p_{1,n} = \lambda p_{0,n} + (n+1)\gamma p_{0,n+1} + \lambda p_{1,n-1} \quad \text{(Hata! Belgede belirtilen stilde met}$$

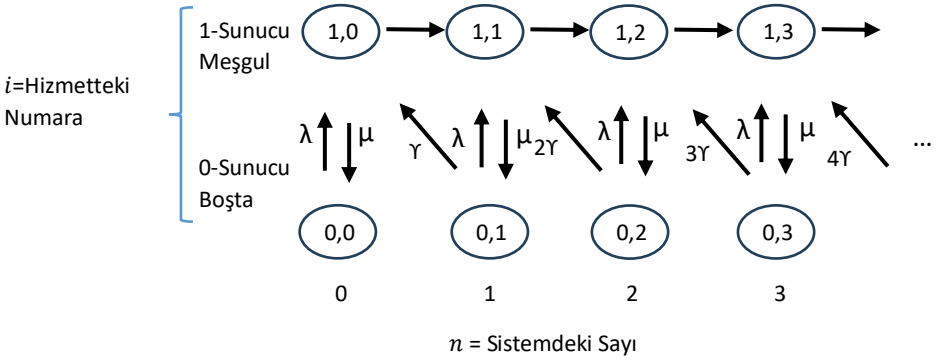
$$(\lambda + \mu)p_{1,0} = \lambda p_{0,0} + \gamma p_{0,1} \tag{2.8}$$

Bu sistem için üreten fonksiyonları kullanarak denge durum çözümleri elde ederiz. Türetme Falin ve Templeton (1997)'de verilenleri takip etmektedir. Aşağıdaki kısmi olasılık çıkaran fonksiyonları tanımlanır:

$$P_0(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_{0,n} \qquad P_1(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_{1,n} \tag{2.9}$$

(2.6)'ı z^n ile çarpın ve $n \geq 0$ üzerinden toplanırsa:

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_{0,n} + \gamma \sum_{n=0}^{\infty} n z^n p_{0,n} = \mu \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_{1,n} \tag{2.10}$$



Şekil 2.2.Yinelemeli deneme kuyruğu için durum geçiş hızları

Bu şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$\lambda P_0(z) + z\gamma P'_0(z) = \mu P_1(z) \tag{2.11}$$

Benzer şekilde, (2.7)'i z^n ile çarpın, $n \geq 1$ üzerinden toplayıp ve (2.8)'i ekleyince:

$$(\lambda + \mu) P_1(z) = \lambda P_0(z) + \gamma P'_0(z) + \lambda z P_1(z) \tag{2.12}$$

(2.11)'de $P_1(z)$ için çözme ve (2.12)'de yerine konular elde edilir.

$$P'_0(z) = \frac{\lambda\rho}{\gamma(1-\rho z)} P_0(z) \tag{2.13}$$

Burada $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ dir. Bunu, aşağıdaki gibi ayrılabilir bir diferansiyel denklem ile yazabiliriz.

$$\frac{P'_0(z)}{P_0(z)} = \frac{\lambda\rho}{\gamma(1-\rho z)} \tag{2.14.}$$

z'ye göre integral alındığında,

$$\ln P_0(z) = -\frac{\lambda}{\gamma} \ln(1-\rho z) + C' \tag{2.15}$$

elde edilir. Burada $C = e^{C'}$ alınarak,

$$P_0(z) = C(1-\rho z)^{-\frac{\lambda}{\gamma}} \quad \text{(Hata! Belgede belirtilen stilde metne rastlanmadı.. 16)}$$

elde edilir. $P_1(z)$, $P_0(z)$'yi (2.11)'e yerleştirerek bulunur:

$$P_1(z) = \rho P_0(z) + \frac{\gamma}{\mu} z P'_0(z)$$

$$= C_\rho (1-\rho z)^{-\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)-1} \quad \text{(Hata! Belgede belirtilen stilde metne rastlanmadı.. 17)}$$

C sabiti, $P_0(1) + P_1(1) = 1$ normalleştirme koşulu ile bulunur:

$$\mathrm{C} = (1-\rho)^{\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)+1} \tag{2.18}$$

Bunu (2.16) ve (2.17)'de yerine koyarsak, şunu verir:

$$P_0(z) = (1-\rho z)\left(\frac{1-\rho}{1-\rho z}\right)^{\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)+1} \tag{2.19}$$

$$P_1(z) = \rho\left(\frac{1-\rho}{1-\rho z}\right)^{\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)+1} \tag{2.20}$$

Denge durum olasılıklarını elde etmek için $P_0(z)$ ve $P_1(z)$'yi binom formülünü kullanarak seri bir kuvvete genişletiyoruz.

$$(1+z)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} (m-i) \tag{2.21}$$

$n = 0$ olduğunda çarpımın 1 olduğu varsayılır. (2.16)'ten $P_0(z)$ 'nin genişletilmesi şunları verir

$$P_0(z) = \mathrm{C}(1-\rho z)^{-\lambda/\gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[C \frac{\rho^n}{n!\,\gamma^n} \prod_{i=0}^{n-1} (\lambda + i\gamma) \right] z^n$$

Z^n'nin önündeki katsayı $P_{0,n}$'dir. Benzer şekilde, $P_{1,n}$ $P_1(z)$'nin genişletilmesiyle bulunabilir. Özet olarak,

$$p_{0,n} = (1-\rho)^{\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)+i} . \frac{\rho^n}{n!\,\gamma^n} \prod_{i=0}^{n-1} (\lambda + i\gamma) \tag{2.22}$$

$$p_{1,n} = (1-\rho)^{\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)+1} . \frac{\rho^{n+1}}{n!\gamma^n} \prod_{i=0}^{n} (\lambda + i\gamma) \tag{2.23}$$

Kanalın meşgul olduğu zaman kesri $\sum_{n=0}^{\infty} p_{1,n}$.'dir. Bu sonuç, $\sum_{n=0}^{\infty} p_{1,n} = P_1(1) = \rho$ olmadığı için üreten fonksiyondan bulunabilir. Sonuç, üreten fonksiyon olmadan, Little (1961) yasasını kanala uygulayarak da elde edilebilirdi: Kararlı durumda, hizmeti tamamlayan müşterilerin oranı

λ 'dır. Dolayısıyla hizmete başlayan müşterilerin oranı da λ 'dır. Hizmette geçen ortalama süre 1/μ'dir. Little yasasına göre, hizmetteki ortalama sayı λ /μ = ρ 'dur.

Bekleme alanındaki ortalama müşteri sayısı (2.20)'deki kısmi üretici fonksiyonlardan türetilebilir. İlk olarak, bekleme alanındaki müşteri sayısı için üretici fonksiyonunu oluşturuyoruz:

$$P(z) = P_0(z) + P_1(z)$$

L_O bekleme alanındaki ortalama müşteri sayısı olsun. O halde, $L_O = P'_1(1)$. Buradan şu gösterilebilir.

$$L_O = \frac{\rho^2}{1-\rho} . \frac{\mu+\gamma}{\gamma} \tag{2.24}$$

L_O iki terimin çarpımıdır: bir M/M/1 kuyruğu için kuyruktaki ortalama sayı, $\rho^2/(1 - \rho)$ ve yeniden deneme oranı γ 'ye bağlı bir terim, $(\mu + \gamma)/\gamma$. Eğer γ büyükse, müşteriler yeniden deneme girişiminde bulunmadan önce bekleme alanında çok az zaman geçirirler. $\gamma \to \infty$ limitinde, müşteriler yeniden deneme girişiminde bulunmadan önce bekleme alanında hiç zaman harcamazlar ve böylece kanalın durumunu sürekli olarak izleyebilirler. Bu durumda, sistem etkin bir şekilde rastgele hizmet sırasına sahip bir M/M/1 kuyruğu gibi davranır.

Bekleme alanında geçirilen ortalama süre W_O (kanalı boşta bulup hizmete başlayana kadar bekleme alanında geçirilen ortalama süre) Little formülü kullanılarak (2.24)'den türetilebilir:

$$W_O = \frac{L_0}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu - \lambda} . \frac{\mu + \gamma}{\gamma} \tag{2.25}$$

W sistemindeki ortalama süre ve L sistemindeki herhangi bir andaki ortalama müşteri sayısı da benzer şekilde türetilebilir:

$$\mathrm{W} = \mathrm{W}_0 + \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda\mu + \gamma\mu}{\mu\gamma(\mu - \lambda)} \tag{2.26}$$

Bu şu şekilde basitleştirilir.

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} . \frac{\lambda + \gamma}{\gamma} \tag{2.27}$$

$$L = \lambda W = \frac{\rho}{1 - \rho} . \frac{\lambda + \gamma}{\gamma} \tag{2.28}$$

L aynı zamanda $L = L_0 + \rho$ 'den de türetilebilirdi, burada ρ daha önce tartışıldığı gibi hizmetteki ortalama müşteri sayısına karşılık gelmektedir.

Ortalama müşteri sayısı (L), ortalama müşteri varış oranının (λ) bir müşteri için ortalama hizmet süresi (W) ile çarpılmasıyla hesaplanır.

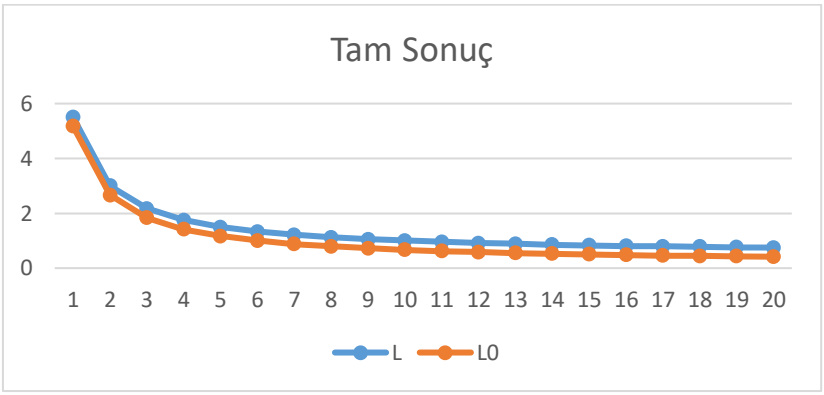
Her durumda, hizmet ölçüleri M/M/1 kuyruğu için benzer ölçü ile $\gamma \to \infty$ olarak 1'e giden bir terimin çarpımıdır. Tersine, $\gamma \to 0$ olduğunda, bloke edilen müşteriler yeniden denemeden önce bekleme alanında çok uzun bir süre geçirdikleri için beklenen hizmet ölçütleri ∞'a gider.

Simülasyon Uygulaması

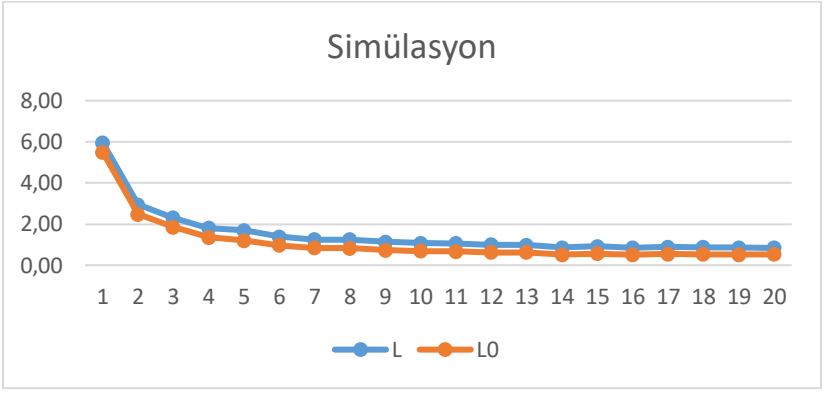
Tablo 2.1'de, $\lambda = 1$, $\mu = 3$ ve $\gamma = 0{,}10$ ile $\gamma = 2$ arasındaki bazı parametre değerleri için, yukarıda verilen teorik formüllerle hesaplanan performans ölçütlerine ait tam sonuçlar ve Matlab R2023a yazılımıyla üretilen performans ölçütlerine ait simülasyon sonuçları verilmiştir. Simülasyon sürecinde iterasyon sayısı $N = 1000$ olarak belirlenmiş ve her bir adım $n = 1,2, \dots, N$ için sonuçlar hesaplanmıştır. Daha sonra tablodaki tam sonuçlar ve simülasyon sonuçları için grafikler çizilmiş ve tam sonuçlar ile simülasyon sonuçlarının birbirlerine çok yaklaştığı, grafikler üzerinden daha açık bir şekilde görülmüştür. (Bakınız: Şekil 2.3, Şekil 2.4, Şekil 2.5, Şekil 2.6).

Parametreler			Tam Sonuçlar				Simülasyon Sonuçları			
λ	μ	γ	L	L_0	W	W_0	L	L_0	W	W_0
1	3	0,1	5,5	5,2	5,5	5,2	5,9	5,5	5,6	5,4
1	3	0,2	3,0	2,7	3,0	2,7	2,9	2,5	2,5	2,3
1	3	0,3	2,2	1,8	2,2	1,8	2,3	1,9	2,0	1,7
1	3	0,4	1,6	1,4	1,8	1,4	1,8	1,4	1,5	1,3
1	3	0,5	1,5	1,2	1,5	1,2	1,7	1,2	1,4	1,1
1	3	0,6	1,3	1,0	1,3	1,0	1,4	1,0	1,2	0,9
1	3	0,7	1,2	0,9	1,2	0,9	1,3	0,8	1,1	0,8
1	3	0,8	1,1	0,8	1,1	0,8	1,2	0,8	1,1	0,8
1	3	0,9	1,1	0,7	1,1	0,7	1,1	0,7	1,0	0,7
1	3	1,0	1,0	0,7	1,0	0,7	1,1	0,7	1,0	0,7
1	3	1,1	1,0	0,6	1,0	0,6	1,1	0,7	0,9	0,7
1	3	1,2	0,9	0,6	0,9	0,6	1,0	0,6	0,9	0,6
1	3	1,3	0,9	0,6	0,9	0,6	1,0	0,6	0,9	0,6
1	3	1,4	0,9	0,5	0,9	0,5	0,9	0,5	0,8	0,6
1	3	1,5	0,8	0,5	0,8	0,5	0,9	0,6	0,8	0,6
1	3	1,6	0,8	0,5	0,8	0,5	0,9	0,5	0,7	0,5
1	3	1,7	0,8	0,5	0,8	0,5	0,9	0,6	0,7	0,5
1	3	1,8	0,8	0,4	0,8	0,4	0,9	0,5	0,8	0,6
1	3	1,9	0,8	0,4	0,7	0,4	0,9	0,5	0,7	0,5
1	3	2,0	0,8	0,4	0,7	0,4	0,9	0,5	0,7	0,5

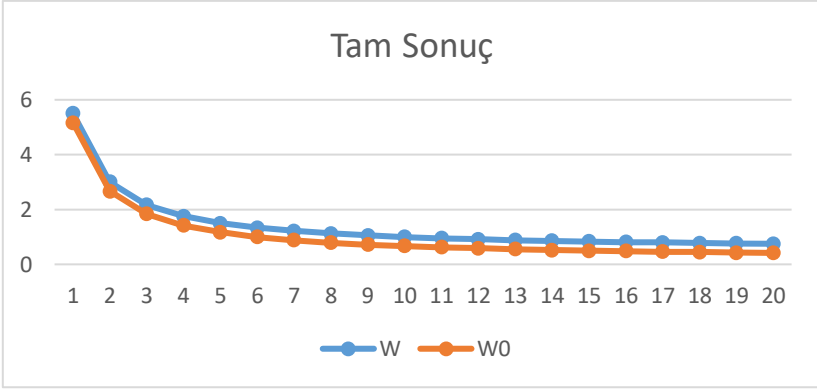
Tablo 2.1. Tam sonuç ve simülasyon sonuçları



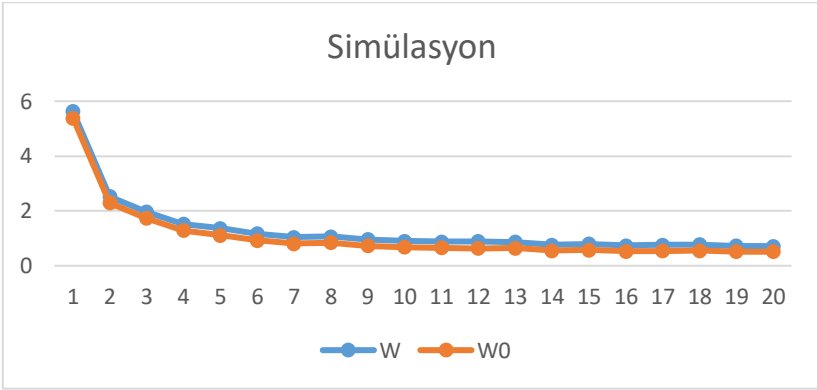
Şekil 2.3. ***L*** *ve* $\boldsymbol{L_0}$ *için tam sonuç grafiği*



Şekil 2.4. ***L*** *ve* $\boldsymbol{L_0}$ *için simülasyon grafiği*



Şekil 2.5. W ve W_0 için tam sonuç grafiği



Şekil 2.6. W ve W_0 için simülasyon grafiği

4. Sonuç

Kuyruk teorisi, Erlang (1909)'ın katkılarıyla ortaya çıkan ve günümüzde hem kuramsal hem de uygulamalı alanlarda yaygın kullanılan güçlü bir analitik çerçevedir. Çalışmanın ilk bölümünde klasik M/M/1 ve M/M/c sistemlerinin varsayımları, yapıları ve trafik yoğunluğu (ρ), ortalama bekleme süresi ve ortalama müşteri sayısı gibi temel performans ölçütleri matematiksel temelleriyle ele alınmıştır. Bu modeller, belirli varsayımlar altında pek çok gerçek yaşam problemine hızlı ve kapalı formda çözümler sunmaktadır.

Çalışmanın ikinci bölümünde incelenen yinelemeli M/M/1 sistemi, klasik modellerin ötesine geçerek dolu sistemde müşterilerin sabit bir oranda (γ) tekrar giriş denemesi yaptığı daha gerçekçi bir yapı sergiler. Bu mekanizma, özellikle

iletişim ağları, çağrı merkezleri ve bilgisayar sistemlerinde yaygın biçimde gözlenen davranışları temsil eder.

M/M/1 ve M/M/c modelleri basit yapıları sayesinde performans ölçütlerinin kapalı formda hesaplanmasına olanak tanır. Yinelemeli sistemler, klasik kuyruğun yetersiz kaldığı durumlarda daha gerçekçi bir yaklaşım sunar. γ değerinin artması sistemi klasik modellere yaklaştırarak performansı iyileştirir; düşük γ ise tıkanıklığı artırır ve bekleme sürelerini uzatır.

Sonuç olarak, yeniden deneme davranışını içeren bu modeller, daha karmaşık olmalarına rağmen gerçekçi sistemleri anlamada önemli avantaj sağlar. Gelecek çalışmalarda farklı hizmet disiplinleri, sınırlı kaynaklar veya öncelik yapıları içeren gelişmiş yinelemeli modellerin incelenmesi hem kuramsal hem de uygulamalı açıdan değerli katkılar sunacaktır.

KAYNAKLAR

Artalejo, J. (1999). A Classified Bibliography of Research on Retrial Queues: Progress in 1990-1999. *Applied Mathematics*.

Dudina, O., Dudin, A., & Kim, C. S. (2016). Analysis of multi-server retrial queues with batch Markovian arrivals and customer heterogeneity. *Computers & Industrial Engineering*, 98, 10–22.

Erlang, A. K. (1909). The theory of probabilities and telephone conversations. *Nyt Tidsskrift for Matematik B, 20, 33–39.*

Falin, G., & Templeton, J. (1997). *Retrial Queues.* Routledge.

Little, J. D. (1961). A proof for the queuing formula L = λW. *Operations Research, 9(3), 383–387.*

Liu, T.-H., Chang, F.-M., Ke, J.-C., & Sheu, S.-H. (2022). Optimization of retrial queue with unreliable servers subject to imperfect coverage and reboot delay. *Quality Technology & Quantitative Management, 19(9), 1–26.*

Phung-Duc, T. (2019). Retrial Queueing Models: A Survey on Theory and Applications. *arXiv preprint*.

Saranavan, V., Poongothai, V., & Godhandaraman, P. (2023). Performance analysis of a multi server retrial queueing system with unreliable server, discouragement and vacation model. *Mathematics and Computers in Simulation*, Pages 204-226.

BÖLÜM 3

Güvenilirlik Teorisinde Stokastik Şok Modelleri ve Uygulama Alanları

Fahrettin Özbey[1]

[1] Doç. Dr., Bitlis Eren Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü
ORCID: 0000-0002-7847-739X

1. Giriş

Giderek daha karmaşık ve birbirine bağlı hâle gelen mühendislik sistemlerinde arızalar çoğu zaman yalnızca kademeli aşınma ya da iç bozulmadan kaynaklanmaz. Modern güvenilirlik sorunlarının önemli bir bölümü beklenmeyen ve yüksek etkili dış olaylara bağlıdır. Mekanik şoklar, elektrik dalgalanmaları ve çevresel tehlikeler bu tür dış olaylara örnek teşkil eder. Geleneksel güvenilirlik modelleri içsel bozulmayı tanımlamada başarılı olsa da bu ani ve rastgele bozulmaları yakalamakta çoğu zaman yetersiz kalır. Bu eksikliği gidermek üzere geliştirilen şok modelleri, klasik güvenilirlik teorisinin temel bir uzantısıdır. Bu modeller stokastik dış stres faktörleri altında sistem performansının incelenmesine imkân verir.

Şok modelleri, sistemlerin zaman içinde karşılaştığı dış olay dizilerine nasıl tepki verdiğini değerlendirmek için stokastik bir yaklaşım sunar. Bu modeller havacılık, güç sistemleri ve yapı mühendisliği gibi dış etkilerin öngörülemez biçimde ortaya çıktığı alanlarda kullanılmaktadır. Kavramsal kökenleri uzun yıllar öncesine dayandığından şok modelleri zaman içinde önemli ölçüde çeşitlenmiştir. Güncel yaklaşımlar farklı arıza ölçütlerini ve farklı şok varış süreçlerini kapsayan çok sayıda yapıyı içerir.

Bu bölümde temel şok model türleri, sistematik biçimde sınıflandırılmakta ve incelenmektedir. Bu bölümün temel amacı, şok modellerinin matematiksel yapılarını, kuramsal özelliklerini ve uygulamadaki kullanım alanlarını incelemektir. Sunulan modeller kümülatif, aşırı ve zamansal olarak kümelenmiş etkileri dikkate alır. Ayrıca çağdaş sistemlerdeki arızaların çok boyutlu doğasını yansıtan hibrit yapılara da yer verilir.

1.1. Güvenilirlik Teorisi

Güvenilirlik teorisi, bileşenlerin ve sistemlerin arızaya kadar geçen sürelerine ilişkin olası davranışlarını inceleyen bir teoridir. Bu alandaki temel kavramlardan biri olan sistem ömrü, T değişkeni ile ifade edilir. Sistemin bir t anında çalışma olasılığı sistem güvenilirliği olarak tanımlanır ve sistem ömrünün t' den uzun olama olasılığını ifade eden Eşitlik (1)' deki model, güvenilirlik fonksiyonu olarak ifade edilir:

$$R(t) = P(T > t). \tag{1}$$

Eşitlik (1), arıza zamanının kümülatif dağılım fonksiyonu $F(t)$ kullanılarak, Eşitlik (2) şeklinde de ifade edilebilir:

$$R(t) = 1 - F(t). \tag{2}$$

Ayrıca, güvenilirlik teorisinde sıkça başvurulan bir diğer kavram da, belirli bir zamanda arıza meydana gelme olasılığını tanımlayan tehlike oranı (*hazard rate*) ya da arıza oranı fonksiyonudur:

$$h(t) = f(t)/R(t)\,. \tag{3}$$

Eşitlik (3)'te $f(t)$, arıza zamanının olasılık yoğunluk fonksiyonunu temsil eder. Klasik güvenilirlik modelleri, sistemlerin farklı yaşlanma dinamiklerini ve arıza desenlerini tanımlayabilmek amacıyla üstel, Weibull gibi çeşitli yaşam süresi dağılımlarından yararlanır (Griffith, 2015).

Güvenilirlik teorisi, mühendislik ve temel bilimlerde önemli bir yere sahiptir. Çünkü sistem dayanıklılığına yönelik tasarım kararları, bakım süreçlerinin planlanması ve güvenlik açısından kritik uygulamalarda risk analizleri bu teoriye dayandırılır. Örneğin, havacılık veya enerji sistemlerinde güvenilirlik fonksiyonunun ($R(t)$) bilinmesi, potansiyel arızaların önceden tahmin edilerek etkin bir önleyici bakım planı oluşturulmasına olanak tanır (Wu, 2022).

1.2. Şok Modellerinin Kavramsal Temelleri

Güvenilirlik teorisinde bir şok modeli, sistemin zaman içerisinde rassal biçimde maruz kaldığı ani bozulmaların (şokların), belirli bir arıza mekanizması doğrultusunda sistemin işlevselliğini sona erdirebileceği durumları modelleyen bir yapıdır. Bu modeller dört temel unsur üzerine inşa edilir:

(i) şoklar arasındaki zaman aralıklarının istatistiksel özellikleri,

(ii) her bir şokun büyüklüğü ya da neden olduğu hasarın dağılımı,

(iii) şokların sistem arızasına neden oluş biçimini belirleyen arıza kriteri,

(iv) şok zamanlamaları, büyüklükleri ve sistemin dayanım kapasitesi arasındaki olası bağımlılıklar (Mallor & Santos, 2003).

Şayet sistem herhangi bir şoka maruz kalmamışsa, varsayımsal olarak "yeni kadar iyi" durumda kabul edilir. Başka bir deyişle, iç yıpranma etkileri göz önüne alınmaz (ancak birleşik modellerde bu etkiler dâhil edilebilir). Şokların geliş zamanları, $\{N(t): t \geq 0\}$ biçiminde tanımlanan bir noktalar süreci (*point process*) ile modellenir. Burada $N(t)$, t anına kadar meydana gelen şok sayısını ifade eder. Her bir şok, sistemin arızalanmasına yol açabilecek ya da etkisiz kalabilecek rastgele bir olay olarak değerlendirilir. Sistemin ömrü T olmak üzere, şok modellerine dayalı genel güvenilirlik fonksiyonu Eşitlik (4) şeklinde ifade edilir:

$$R(t) = P(T > t) = \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(t) = k\} \cdot P_k. \qquad (4)$$

Eşitlik (4)' te P_k, sistemin k sayıda şoka rağmen arızalanmadan çalışmaya devam etme olasılığıdır. Bu formül, sağkalım olasılığını iki ana bileşen üzerinden yapılandırır. Yani, t anına kadar tam olarak k şokun meydana gelme olasılığı ve sistemin bu şoklara karşı direnç gösterme olasılığı (Graham, 1986).

Şok modelleri, şokların zamanla rastgele meydana geldiği ve sistem üzerinde ani, sıçramalı etkiler yarattığı varsayımına dayanır. Sistem, tek bir büyük şokla

ani olarak arızalanabileceği gibi, zamanla biriken şokların toplam etkisiyle de kademeli olarak işlevini yitirebilir. Bu yaklaşım, sürekli ve yumuşak değişimlere dayanan geleneksel yaşlanma modellerinden farklıdır. Çünkü burada bozulma süreci, rastlantısal zamanlarda gerçekleşen ani sıçramalar (*jumps*) aracılığıyla modellenir (Griffith, 2015).

Genel olarak şok modelleri, sistem arızasını dış rassal olaylar dizisinin sonucu olarak anlamlı ve sistematik biçimde modellemeye olanak sağlar. Böylece, iç yıpranmaya dayalı klasik modellerin açıklamakta yetersiz kaldığı durumlarda tamamlayıcı bir yapı sunar.

1.3. Şok Modellerinin Tarihsel Gelişimi

Güvenilirlik kuramında, şoklara bağlı arıza kavramı oldukça eskiye dayanır. İlk dönem güvenilirlik analizleri, tüm arızaların süreklilik gösteren yaşlanma süreçleriyle açıklanamayacağını, bazı arızaların ani ve dış etmenler (yani "şoklar") sonucu oluştuğunu ortaya koymuştur. Bu doğrultuda, biçimsel şok modelleri 1960'lı ve 1970'li yıllarda geliştirilmeye başlanmıştır. Alandaki öncü çalışmalardan biri, Esary, Marshall'ın (1973) şokların zaman içerisinde Poisson sürecine uygun şekilde gerçekleştiği sistemleri incelediği araştırmadır. Bu çalışma, şoklara karşı dayanım olasılıkları P_k (veya şok etkisi dağılımları) üzerine yapılan farklı varsayımların, çeşitli yaşlanma karakteristiklerine sahip yaşam süresi dağılımlarını nasıl üretebileceğini göstermiştir. Bu çalışmanın en dikkat çekici yönlerinden biri, şok modelleri ile parametrik olmayan yaşam süresi dağılım sınıfları arasında kurduğu sistematik bağlantıdır. Ayrıca, şok sayısı dağılımı $N(t)$ ile sistem ömrü T arasındaki ilişkinin matematiksel olarak nasıl ifade edileceğini ve Poisson süreci dışında kalan şok geliş süreçlerinin nasıl modellenebileceği tanıtılmıştır. 1970'lerin sonlarına gelindiğinde, Nakagawa (1979), şokların rastgele koşullar altında oluştuğu senaryoları incelemiş ve bu durumların optimal yenileme politikalarına etkilerini ele almıştır. 1980'li yıllarda yapılan araştırmalar, şok büyüklükleri ile bu şoklar arasındaki zaman aralıkları arasındaki olası bağımlılık yapıları ve birikimli hasar modelleri üzerine yoğunlaşmıştır. Bu bağlamda Shanthikumar ve Sumita (1983), şok büyüklüklerinin ve geliş aralıklarının istatistiksel olarak bağımlı olabileceği korelasyonlu şok modellerini geliştirmiştir. 1990'lı yıllarda odak noktası, şok modellerinin sistematik olarak sınıflandırılması ve bütünleştirilmesine yönelmiştir (Mallor & Santos, 2003). 2000'li ve 2010'lu yıllarda şok modelleri, çok bileşenli sistemlere uygulanarak daha karmaşık stokastik süreçlerle zenginleştirilmiştir. Örneğin, Marshall–Olkin tipi şok modelleri, aynı anda birden fazla bileşeni etkileyen "koşu şokları" senaryolarına uyarlanmıştır (Ozkut & Eryilmaz, 2019). Cha ve Finkelstein (2016), meydana gelme süresi bağımlı olan genelleştirilmiş bir Pólya sürecine dayalı şok modelleri önererek, şokların zamanla kümelenmesini modellemişlerdir. Bu yaklaşım, Goyal, Hazra ve Finkelstein'ın (2022) Pólya süreci kullanarak geliştirdiği karma bir δ-şok modeli

geliştirerek çalışmalara katkı sağlamıştır. 2020'li yılların ortalarına gelindiğinde, şok modelleme yaklaşımı daha da genişleyerek geçmişe bağımlı etkiler, Bayesyen güncellemeler ve sürekli bozulma süreçleriyle şokların birlikte modellendiği hibrit modelleri kapsar hâle gelmiştir. Şok modelleri bu süreçte yalnızca teorik bir yapı olmaktan çıkmış. Ayrıca risk analizi, stok yönetimi ve biyometri gibi uygulamalı alanlarda işlevsel bir araç olarak kullanılmaya başlanmıştır. Mitra ve Khan'ın (2021) çalışmaları, şok modellerinin bu alanlarla kurduğu bütünleştirici bağlara dair önemli örnekler sunmaktadır.

Bu tarihsel gelişim çizgisi, şok modeli kuramının basit Poisson sürecine dayalı yapılardan, karmaşık bağımlı yapılar içeren ileri düzey modellere doğru nasıl geliştiğini açıkça ortaya koymaktadır. Böylece, çeşitli şok kaynaklı arıza senaryoları giderek daha gerçekçi, esnek ve bütünsel biçimde modellenebilir hâle gelmiştir.

2. Şok Geliş Süreçleri

Herhangi bir şok modelinin temel yapı taşlarından biri, şokların zaman içerisindeki geliş dinamiğini tanımlayan şok geliş sürecidir. Şokların zamana bağlı dağılımına ilişkin yapılan varsayımlar, sistemin güvenilirlik fonksiyonu üzerinde doğrudan belirleyici etkiye sahiptir. Bu alt bölümde, şok geliş süreçlerini tanımlamak için geliştirilen başlıca yaklaşımlar sistematik olarak ele alınmaktadır.

2.1. Homojen Poisson Süreci (HPP)

Homojen Poisson süreci (HPP), şok gelişlerini modellemek amacıyla kullanılan en klasik stokastik yaklaşımdır. Bu modelde şoklar, sabit bir ortalama oranla (λ) meydana gelir ve şoklar arası zamanlar bağımsız ve özdeş dağılımlı üstel rastgele değişkenler olarak kabul edilir. Uzunluğu t olan bir zaman aralığında k şokun meydana gelme olasılığı Poisson dağılımına uyar:

$$P\{N(t) = k\} = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}. \tag{5}$$

Bu süreç hem hafızasız hem de durağandır; yani geçmiş şokların varlığı, gelecekteki şok geliş hızını etkilemez. HPP, fiziksel olarak rassal ve zaman olarak bağımsız gerçekleşen olayların modellenmesinde uygundur. Örneğin, kozmik ışın çarpmaları veya düzensiz voltaj yükselmeleri gibi dış kaynaklı şoklar bu süreç yardımıyla modellenebilir.

Eğer sistem K. şoktan sonra arızalanıyorsa (K sabit ya da rastgele olabilir), güvenilirlik fonksiyonu şu şekilde ifade edilir (Esary & Marshall, 1973):

$$R(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(t) = k\} \cdot P\{K > k\}. \tag{6}$$

HPP varsayımı, analitik kolaylık sağlaması açısından da önemlidir. Örneğin, her şokun sistem arızasına belirli bir olasılıkla (p) neden olduğu varsayıldığında, sistem arıza süresi $T \sim e^{\lambda p}$ şeklinde üstel dağılım gösterir. HPP bu nedenle şok modelleme çalışmalarında genellikle referans (*baseline*) model olarak kullanılır.

2.2. Homojen Olmayan Poisson Süreci (NHPP)

Homojen olmayan Poisson süreci (NHPP), şok geliş oranının zamanla değişmesine olanak tanır. Sabit λ yerine zamanın bir fonksiyonu olan $\lambda(t)$ tanımlanır. Bu durumda, şok sayısı süreci $N(t)$, ortalaması

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du \tag{7}$$

olan bir Poisson dağılımına sahip olur. NHPP, şokların zamanla yoğunlaştığı veya seyrekleştiği durumları modellemek için oldukça uygundur. Örneğin, çevresel koşulların bozulduğu veya sistemin yaşlandığı senaryolar bu yapı ile temsil edilebilir.

NHPP süreçlerinde güvenilirlik fonksiyonu, t anına kadar gerçekleşen şok sayısı koşulu altında hesaplanır:

$$R(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(t) = k\} \cdot P_k. \tag{8}$$

Eşitlik (8)' de $N(t) \sim \text{Poisson}(\Lambda(t))$ olur. HPP'de elde edilen sonuçlar, λt yerine $\lambda(t)$ yerleştirilerek NHPP için genelleştirilebilir (Mallor & Santos, 2003).

Uygulamada NHPP, siber güvenlikte değişen tehdit yoğunluklarının veya mevsimsel doğa olaylarının modellenmesinde sıkça kullanılır. Esneklik sunmasına rağmen, $\lambda(t)$'nin zamana bağlı biçimde tanımlanması analitik izlenebilirliği azaltabilir. Yine de, doğru model yapılandırması sağlandığında gözlenen verilere yüksek uyum sağlar.

2.3. Yenileme Süreçleri

Yenileme süreci (*renewal process*), şoklar arası zamanların bağımsız ve özdeş dağılıma sahip Y_n rastgele değişkenlerden oluştuğu bir modeldir. Yenileme süreçleri, üstel olmayan dağılımlara (örneğin log-normal) izin vererek daha gerçekçi varyans yapıları sağlayabilir. Bu modelde bellekten bağımsızlık özelliği kaybedilse de, ardışık şok aralıkları arasındaki bağımsızlık korunur. Güvenilirlik analizi çoğunlukla t zamanına kadar gerçekleşen şok sayısına koşullanarak yapılır. Kapalı form çözümlerin elde edilemediği durumlarda Laplace dönüşümleri veya yenileme kuramına dayalı yaklaşımlar kullanılır (Goyal, Finkelstein vd., 2022).

Yenileme süreçleri, jeofiziksel aralıklarla tekrarlanan olayları (örneğin depremler) veya Poisson' dan daha düzenli şok geliş yapılarını modellemek için

uygundur. Ayrıca, bileşik süreçlerin (*compound processes*) temel yapıtaşlarından biridir.

2.4. Markov Modülasyonlu Süreçler

Markov modülasyonlu şok süreçleri, şok geliş mekanizmasının, altta yatan bir Markov zincirinin durumuna bağlı olarak değiştiği modellerdir. Bu yapı, çevresel koşulların zamanla rejim değiştirerek şok geliş oranını farklılaştırmasını temsil eder. En bilinen örnek, Markov Modülasyonlu Poisson Süreci (MMPP)'dir. Burada, sistem $i.$ durumda iken şoklar, λ_i hızında gerçekleşir. Bu modeller, şok gelişlerinde kümelenme etkisi ve bağımlılık yaratır. Ayrıca, şok aralıklarının dağılımı da durumlara bağlı olarak farklılaşabilir. Igaki, Sumita ve Kowada (1995), Markov yenileme süreci yaklaşımıyla şok gelişlerini yarı-Markov yapılar üzerinden ele alarak sistem sağkalım olasılıklarını türetmiştir.

Markov modülasyonlu modellerde hasar büyüklükleri de zincir durumuna bağlı olarak değişebilir. Bu, sistemin içinde bulunduğu duruma göre şok etkilerinin de modüle edildiği daha genel modellerin geliştirilmesini sağlar. Bazı çalışmalarda bu tür modeller, varyans fazlalığı ve kümelenmeyi yakalamak için stokastik yapılara genişletilmiştir (Nakagawa, 2007).

Bu modeller matematiksel olarak karmaşık olsa da, faz tipi dağılımlar ve matris analizi gibi tekniklerle hesaplanabilirlik sağlanmaktadır. Gerçek sistemlerin genellikle "normal," "zorlanmış" ve "kriz" gibi farklı modlar arasında geçiş yaptığı dikkate alındığında, Markov modülasyonu gerçekçi modelleme açısından oldukça değerlidir.

3. Şok Modellerinin Türleri

Bir şok modelini tanımlayan yalnızca şokların zamansal geliş yapısı değil, aynı zamanda bu şokların sisteme nasıl etki ederek arızaya neden olduğu mekanizmadır. Literatürde, farklı arıza türlerini temsil eden çeşitli temel şok modeli sınıfları geliştirilmiştir. Bu sınıflar, sistemin dayanım özellikleri, şokların büyüklükleri ve arıza eşikleri gibi parametreler doğrultusunda farklı güvenilirlik davranışları sergiler.

3.1. Aşırı (Extreme) Şok Model

Aşırı şok modeli, sistemin belirli bir şiddeti aşan tek bir şokla aniden arızalandığı durumları temsil eder. Her bir şok kendi başına yıkıcı potansiyele sahiptir. Bu modelde şok büyüklükleri $X_1, X_2, \cdots$ biçiminde, genellikle bağımsız ve özdeş dağılıma sahip rastgele değişkenler olarak tanımlanır. Bu şokların meydana gelme zamanları $Z_1, Z_2, \cdots$ olsun. Sistem, ilk kez bir şok büyüklüğünün belirli bir eşik değeri D' yi aşması durumunda arızalanır. Bu nedenle, arıza zamanı şu şekilde tanımlanır:

$$T = min\{T_n : Z_n > D\}. \quad (9)$$

Eşitlik (9), literatürde "eşik aşımı modeli" (*threshold crossing model*) olarak da adlandırılır. Eğer eşik değeri D sabitse, bu model bazen "tek atışlı model" (*one-shot model*) olarak da anılır. Yani eşik değerinin üzerindeki tek bir şok sistemi devre dışı bırakır. Alternatif olarak, $q = P(X > D)$ olmak üzere, her bir şokun ölümcül olma olasılığı tanımlanabilir. Bu durumda sistemin k adet şoktan sonra hâlâ çalışır durumda olma olasılığı $P_k = (1-q)^k$ şeklindedir. Bu ifade, şok gelişlerinin homojen Poisson süreci (HPP) ile modellenmesi durumunda güvenilirlik fonksiyonuna yerleştirildiğinde:

$$R(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{(-\lambda t)}(\lambda t)^k}{k!}(1-q)^k = e^{(-\lambda t q)} \tag{10}$$

şeklinde kapalı formda ifade edilebilir. Böylece, sistemin arıza süresi üstel dağılım gösterir ve hafızasızlık özelliği taşır. Daha genel olarak, eğer şok geliş oranı zamanla değişen bir fonksiyonla tanımlanıyorsa (örneğin NHPP ile), güvenilirlik fonksiyonu:

$$R(t) = e^{\left(-q\int_0^t \lambda(u)du\right)} = e^{(-q\Lambda(t))} \tag{11}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\Lambda(t)$, zamana bağlı ortalama şok sayısını gösterir (Mallor & Santos, 2003). Eğer eşik değeri D rastgele bir değişkense, bu durumda güvenilirlik hesaplamaları, D'nin dağılımı üzerinden entegrasyon yapılarak elde edilir. Aşırı şok modelleri, tek bir büyük şokun sistemi tamamen işlevsiz hâle getirebileceği senaryolar için uygundur. Bu modellerde, eşik altı şokların sistem üzerinde birikimli veya kalıcı bir etkisi olmadığı varsayılır; yalnızca şiddetli şoklar arızaya yol açar. Modelin temel varsayımı, sistemin önceki şoklara karşı hafızasız olmasıdır. Geçmişteki ölümcül olmayan şokların sistemin gelecekteki dayanımını etkilemediği kabul edilir. Sistem, ancak ölümcül şiddette bir şokla karşılaştığında arızalanır. Bu nedenle, aşırı şok modelleri, hasar birikimini dikkate almaz (Gut & Hüsler, 1999).

3.2. Kümülatif Şok Model

Kümülatif şok modelinde, her bir şok sistemde belirli bir miktar hasar oluşturur ve sistem, bu hasarın zaman içinde birikerek belirli bir arıza eşiğini aşması durumunda arızalanır. Bu modelde, tekil bir şok ölümcül olmayabilir; ancak şokların kümülatif etkisi, sistemin dayanım sınırını aşarak arızaya yol açabilir. X_n ifadesi $n.$ şokun yarattığı pozitif büyüklükteki hasarı temsil etsin. k şok sonrası toplam hasar,

$$S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k \tag{12}$$

şeklinde tanımlanır. Sistem, $(K-1).$ şokta $S_{K-1} < D$ iken $S_K \geq D$ koşulu sağlandığında arızalanır. Burada D, sabit ya da rastgele tanımlanmış bir arıza eşiğidir. Denk şekilde, arıza zamanı $T = Z_K$ dır, yani sistemin ömrü $K.$ şokun meydana gelme zamanına (Z_K) eşit olup,

$$K = min\{n: S_K \geq D\} \quad (13)$$

şeklinde ifade edilir (Gut, 1990).

Analitik olarak, çoğu sonuç X_n değişkenlerinin bağımsız ve özdeş dağılıma sahip olduğu ve geliş zamanlarından bağımsız varsayımları altında elde edilir. Bu durumda, sistemin k şoka kadar sağlam kalma olasılığı:

$$P_k = P\{S_k < D\} \quad (14)$$

şeklinde ifade edilir. Arızaya kadar geçen şok sayısının dağılımı, toplam hasarın arıza eşiği D'yi aşması için gereken rastgele toplamın dağılımıyla doğrudan ilişkilidir. Eğer $N(t)$ Poisson süreci (oran λ) ile tanımlanıyorsa, $k = N(t)$ durumunda güvenilirlik fonksiyonu:

$$R(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{(-\lambda t)}(\lambda t)^k}{k!} P_k \quad (15)$$

şeklinde yazılabilir (Mallor & Santos, 2003).

Kümülatif şok modelleri genellikle yaşa bağlı davranış sergiler. Yani sistem çalıştıkça hasar birikir ve bu da zamanla arıza olasılığını artırır. Bu tür modellerin ürettiği yaşam süresi dağılımları sıklıkla artan arıza oranı özelliğine sahiptir. Dolayısıyla, çok sayıda şoka maruz kalmış bir sistemde hasar birikmiştir ve arıza olasılığı yüksektir (Mitra & Khan, 2021).

3.3. δ-Şok Model

δ-şok modeli (delta-şok modeli), zamana dayalı bir arıza kriteri çerçevesinde tanımlanır. Bu modele göre sistem, ardışık iki şokun çok kısa bir süre içinde gerçekleşmesi ve bu sürenin belirli bir eşik değer olan δ'dan daha kısa bir zaman aralığında gerçekleşmesi durumunda arızalanır. Diğer bir deyişle, şoklar yeterince aralıklı geldiğinde sistem kendini toparlayabilirken, toparlanma süresi tamamlanmadan gelen bir sonraki şok sistemi aşırı zorlayarak başarısızlığa yol açar. Burada δ parametresi, sistemin toparlanma süresi ya da tolerans aralığını ifade eder. Şoklar bu süreden daha sık meydana gelirse, sistemin dayanıklılık eşiği aşılmış olur.

Y_i şoklar arası zamanları temsil etmek üzere, sistem $Y_k < \delta$ olduğu durumda, yani k. şok ile bir önceki şok arasındaki sürenin δ'dan kısa sürede gelmesiyle arızalanır. Bu durumda arıza zamanı:

$$T = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k \quad (16)$$

şeklinde tanımlanır. Sistem yalnızca ilk defa şoklar arası zaman aralığı δ'dan kısa olduğunda arızalanır. Poisson şok geliş varsayımları altında ilk k şokta hayatta kalma olasılığı

$$P_k = P(Y_1 \geq \delta, Y_2 \geq \delta, \cdots, Y_k \geq \delta) = \left(e^{-\lambda\delta}\right)^k \quad (17)$$

şeklindedir. Zamana göre güvenilirlik fonksiyonu:

$$R(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(t-(k-1)\delta)}[\lambda(t-(k-1)\delta)]^k}{k!} P_k \qquad (18)$$

şeklinde yazılabilir (Li vd., 1999). Temel δ-şok modellerinde varsayılan, sistemin δ süresi geçtikten sonra tamamen toparlanmasıdır. Bu nedenle yeni bir şok bu süreden sonra gelirse sistemin hasar geçmişi sıfırlanır. Ancak bu süreden önce gelen bir şok doğrudan arızaya neden olur. Bu yaklaşımda "kısmi hasar" kavramı yer almaz. Her ardışık şok çifti için sistem ya çalışır durumda kalır ya da aniden arızalanır (Goyal vd., 2022).

3.4. Ardışık (Run) Şok Model

Ardışık şok modeli, aşırı şok modelinin bir genellemesi olup, sistemin arızalanması için belirli sayıda art arda gerçekleşen kritik şokun meydana gelmesini zorunlu kılar. Bu modelde sistem, yalnızca her biri belirli bir eşik değeri aşan k ardışık şokun oluşması hâlinde arızalanır. Tek bir şokun kritik eşiği geçmesi yeterli değildir. Ancak bu türden şokların arka arkaya gelmesi ölümcül olarak değerlendirilir. Eğer araya daha zayıf (eşik altı) bir şok girerse, sistemin toleransı sıfırlanmış sayılır ve sayaç yeniden başlatılır. Bu durumu tanımlamak için $E_n = \{X_n > D\}$ olaylarını ele alalım. Burada D, kritik şok büyüklüğünü temsil eder. Sistem, şayet $E_{N-k+1}, E_{N-k+2}, \cdots, E_N$ olaylarının tümü gerçekleşmişse ve bu durum ilk kez ortaya çıkıyorsa, N. şokta arızalanır. Başka bir ifadeyle, sistem ilk kez k ardışık eşiği aşan şokun oluştuğu anda başarısız olur. Bu model, $k = 1$ durumunda klasik aşırı şok modeline indirgenir (Mallor & Omey, 2001).

3.5. Karışık Şok Modelleri

Karışık şok modelleri, farklı arıza mekanizmalarının tek bir model altında birleştirildiği yapılardır. Bu yaklaşım, gerçek sistemlerin genellikle yalnızca tek bir arıza türüne değil, birden fazla arıza moduna maruz kalabileceği gerçeğine dayanır. Örneğin, sistem ya tek bir büyük şokla aniden arızalanabilir (sert arıza) ya da zaman içinde biriken küçük şoklar nedeniyle yavaş yavaş bozulabilir (yumuşak arıza). Karışık modeller, hangi arıza türü önce gerçekleşirse sistemin o noktada arızalanacağını varsayar. Tipik bir karışık model, aşırı şok (eşik üstü tek bir şokla arıza) ve kümülatif hasar (toplam hasar belirli bir değeri aştığında arıza) kriterlerini bir araya getirir. Bu modelde her şok, ya doğrudan sistemi arızaya uğratabilecek kadar büyük bir şoktur (eşik D_1 üstü) ya da sistemin hasar birikimine katkıda bulunan daha küçük bir şoktur (eşik altı, D_2). Örneğin, bir elektronik cihaz yüksek voltaj darbesiyle aniden bozulabilir ya da çok sayıda orta büyüklükteki dalgalanma sonucu zamanla aşınarak arızalanabilir. Karışık şok modelleri bu anlamda rekabetçi arıza süreçlerini temsil eder. Yani sistem, herhangi bir arıza modunun gerçekleşmesiyle işlevini yitirir. Bu durumda güvenilirlik fonksiyonu şu şekilde ifade edilir:

$$R(t) = P(T > t) = P(T_A > t \text{ veya } T_B > t). \quad (19)$$

Burada T_A ve T_B, ilgili arıza modlarının arıza zamanlarını temsil eder (Eryilmaz & Tekin, 2019). Eğer bu süreçler bağımsızsa, güvenilirlik çarpılarak hesaplanabilir. Ancak çoğu zaman aynı şok süreci her iki arıza modunu da tetiklediğinden, bağımlılık dikkatle analiz edilmelidir. Karışık şok modelleri, örneğin hem δ-şok hem kümülatif hem de aşırı şok etkilerini birlikte içeren üç kriterli modeller gibi daha karmaşık yapılara genişletilebilir (Li vd., 2025).

4. Farklı Disiplinlerde Şok Model Uygulamaları

Şok modelleri, mühendislikten finansa ve sistem güvenilirliğine kadar birçok alanda, beklenmedik dış olayların sistem arızalarına yol açan durumlarının modellenmesinde yaygın biçimde kullanılmaktadır. Bu modellerin temel uygulama alanları bu alt bölümde incelenecektir.

4.1. Mekanik ve Yapısal Mühendislik

Mekanik sistemler çoğunlukla rassal yük şoklarına maruz kalır. Örneğin, uçak kanatları yüksek hızlı rüzgar darbeleriyle karşılaştığında, her bir darbe sistem üzerinde ani bir gerilim yaratır. Bu tür sistemler için, eğer tek bir şok belirli bir yük eşiğini aşarak ani arızaya neden oluyorsa, ekstrem şok modelleri uygundur. Örneğin rüzgar kesmesi gibi ani ve şiddetli bir olay, kanadın doğrudan arızalanmasına yol açabilir (Bozbulut & Eryilmaz, 2020; Patil & Taylor, 2006).

Buna karşılık, zamanla biriken hasarın yol açtığı yorulma gibi süreçler için kümülatif şok modelleri tercih edilir. Bu senaryolarda, her bir şok çatlak büyümesine katkı yapar ve toplam hasar belli bir eşiği geçtiğinde arıza meydana gelir. Mühendislikte yaygın biçimde kullanılan Miner kuralı, bu kümülatif hasar yapısıyla örtüşür. Şok modelleri, bu tür yaklaşımları stokastik bir temele oturtarak daha kapsamlı analizlere olanak tanır (Birnbaum & Saunders, 1968; Hectors & De Waele, 2021; Kahle & Wendt, 2004).

Benzer şekilde, deprem mühendisliği kapsamında, şok modelleri yapıların güvenilirliğini değerlendirmek için kullanılır. Orta şiddetteki depremler yapının bütünlüğünü hemen bozmasa da zaman içinde zayıflatarak kümülatif hasara neden olabilirken, tekil bir büyük deprem doğrudan yıkıma sebep olabilir. Böyle durumlar için karma (*mixed*) şok modelleri uygundur. Bu durumda, sistem hem kümülatif hem de aşırı şoklara karşı incelenir (Chadjiconstantinidis & Eryilmaz, 2023; Eryilmaz & Tekin, 2019; Krawinkler & Zohrei, 1983; Sánchez-Silva & Riascos-Ochoa, 2013). Poisson süreci altında deprem sıklığı ve şiddet dağılımı göz önünde bulundurularak, yıllık çökme olasılığı gibi metrikler hesaplanabilir. Bu hesaplamalar, mühendislik tasarımlarında güvenlik paylarının belirlenmesinde önemli rol oynar (Allin, 2007; Campbell, 1982).

Ayrıca, titreşim ve darbe gibi olaylara maruz kalan sistemlerde de şok modelleri kullanılmaktadır. Örneğin, taşıma sürecinde rastgele düşmelere maruz kalan bir kargo konteyneri, her bir darbeden sonra küçük çaplı hasar alabilir. Eğer

sistem, belirli sayıda ardışık düşmeden sonra arızalanıyorsa, bu durum koşullu şok modelleri (*run shock models*) ile modellenebilir. Bu yaklaşım, özellikle dayanıklılığı ardışık stres olaylarına bağlı sistemlerin analizi açısından değerlidir (Hall vd., 2019; Poursaeed & Asadian, 2020; Xiang & Eschke, 2004).

4.2. Elektronik ve Güç Sistemleri

Elektronik bileşenler, gerilim sıçramaları ve ani akım artışları gibi dış etkilenmelere karşı son derece hassastır. Bu nedenle, ekstrem şok modelleri elektronik sistemlerin güvenilirlik analizinde yaygın biçimde kullanılmaktadır. Belirli bir eşik değeri aşan tek bir güç darbesi, örneğin bir kapasitörü ya da transistörü anında bozabilir. Uluslararası standartlarda tanımlanan "dayanım gerilimi" (*withstand voltage*), aslında bu ekstrem şok eşik seviyesinin bir karşılığıdır (Wunsch & Bell, 1968). Buna karşılık, tekrarlanan küçük gerilim artışları yalıtım malzemelerinin aşınmasına, dielektrik bozulmalara ve yarı iletkenlerde kusur birikimine neden olarak zamanla performans düşüşüne yol açar. Bu tür bir bozulma mekanizması kümülatif şok modelleri ile uyumludur (Ghassemi, 2019). Örneğin bir güç kaynağının toplam güvenilirliği, karma (*mixed*) bir şok modeli kullanılarak daha gerçekçi biçimde değerlendirilebilir. Bu modelde arızaların büyük bölümü (yaklaşık %90'ı) tek bir büyük gerilim darbesinden (örneğin yıldırım düşmesi gibi ekstrem bir şok), geri kalanı (%10'u) ise çok sayıdaki küçük darbenin zamanla biriktirdiği yalıtım hasarından kaynaklanabilir.

Güç şebekeleri de şok niteliği taşıyan olaylara maruz kalır. Hat arızaları, kısa devreler ve ani yük transferleri bu tür olaylara örnektir. Şebeke koruma sistemleri açısından δ-şok modeli oldukça uygun bir yaklaşımdır. İki arızanın çok kısa aralıklarla ardışık gerçekleşmesi durumunda koruma ekipmanları yeterli tepki süresine sahip olmayabilir ve bu durum büyük çaplı kesintilere (*blackout*) neden olabilir (Finkelstein & Cha, 2024). Gerçekte de enerji sistem operatörleri, zaman bakımından birbirine çok yakın arızalardan kaygı duyar. Örneğin, bir jeneratör arızalandıktan kısa bir süre sonra ikinci bir jeneratörün devre dışı kalması zincirleme arıza sürecini tetikleyebilir (Mitra vd., 2016). Şok modelleri, bu tür kritik durumların rassal olarak değerlendirilmesine yardımcı olur ve gecikme mekanizmaları, hızlı toparlanma devreleri, tampon zamanlama gibi koruyucu önlemlerin tasarlanması için yol gösterici olabilir.

4.3. Finans ve Sigortacılık

Finans alanında "şok" kavramı genellikle ani piyasa hareketlerini tanımlamak için kullanılsa da, güvenilirlik teorisindeki şok modelleri özellikle operasyonel risk ve sigorta riski gibi alanlarda doğrudan uygulanmaktadır. Sigortacılıkta, bir sigorta şirketinin sermaye süreci bu duruma klasik bir örnektir. Tazminat talepleri rastgele zamanlarda ortaya çıkar ve sermayeyi azaltan şoklar gibi davranır. Toplam talepler şirket sermayesini aştığında iflas gerçekleşir. Bu yapı, kümülatif şok modelinin finansal karşılığıdır (Huang vd., 2021). Bu durum, sürekli prim

gelirinin sermayeye pozitif eğim kazandırdığı Cramér–Lundberg risk modeli ile doğrudan ilişkilidir (Blom, 1987) .

Kredi riski bağlamında, ortak bir şok süreci firmalar arasındaki bağımlı temerrütleri modellemek için kullanılabilir. Örneğin, tek bir şokun aynı anda birden fazla firmanın temerrüde düşmesine neden olması mümkündür. Bu nedenle şok modelleri, kredi portföylerinde bağımlı başarısızlıkların temsilinde yaygın bir araç haline gelmiştir. Sistemik bir şok, birden fazla temerrüdün eş zamanlı yaşanmasına yol açarak ekstrem bir olay yaratabilir. Diğer yandan küçük ekonomik şokların birikmesi temerrüt oranlarında yükselmeye yol açabilir.

Finansın bir başka uygulama alanı, piyasa çöküşlerinin modellenmesidir. Günlük küçük kayıplar kümülatif şoklar olarak değerlendirilebilir ve çöküş, toplam kaybın belirli bir eşiği aşmasıyla gerçekleşir. Bunun yanı sıra, büyük bir tekil olayın örneğin kritik bir Fed açıklamasının piyasa fiyatlarını aniden düşürmesi ekstrem şok modeli çerçevesinde açıklanabilir (Huang vd., 2021).

Lindskog ve McNeil (2003), sigorta ve kredi riskindeki bağımlılık yapısını modellemek için Poisson şok modellerini kullanmış ve ortak Poisson şoklarının aynı şoklara maruz kalan firmalar arasında temerrüt korelasyonuna yol açabileceğini göstermiştir. Bu yaklaşım, portföy seviyesinde bir şok modelidir. Her şok bir piyasa veya sektör olayını temsil eder ve etkilediği firma sayısı şokun etkisi veya büyüklüğü olarak ele alınabilir.

Bankacılık sektöründe uygulanan stres testleri (örneğin "petrol fiyatı %50 artarsa ne olur?" gibi senaryolar) ise ekstrem şok modellerinin pratik bir yansıması niteliğindedir. Bu tür testler, finansal sistemin beklenmedik ve yüksek etkili olaylara karşı dayanıklılığını değerlendirmeyi amaçlayan şok temelli analizlerdir.

4.4. Biyoloji ve Tıp

Dikkat çekici bir şekilde, şok modelleri biyoloji ve tıp alanında da kavramsal olarak karşılık bulmaktadır. Örneğin, bir bireyin sağlığını, zaman içinde rassal sağlık "şoklarına" (hastalıklar, yaralanmalar, fizyolojik bozulmalar) maruz kalan bir sistem olarak düşünmek mümkündür. Aşırı şok modeli, ani ve yoğun etkiye sahip bir olayın yol açtığı beklenmedik ölüm durumlarını (örneğin kalp krizi, ağır travma, felç gibi) temsil edebilir (Freiberger vd., 2023). Buna karşılık kümülatif şok modelleri, sağlığı olumsuz yönde etkileyen ancak tek başına ölümcül olmayan küçük bozuklukların kötü beslenme, hafif fakat tekrarlayan enfeksiyonlar, kronik stres gibi zaman içinde birikerek ciddi hastalıklara veya geri dönüşü olmayan hasarlara yol açmasını modellemek için uygundur. Nitekim, tıbbi yaşam analizi çalışmalarında güvenilirlik teorisine ait kavramlar doğrudan kullanılmakta, ancak genellikle şok süreçlerinden ziyade kovaryatlara dayalı yapılar tercih edilmektedir (Ledberg, 2020). Benzer şekilde, düşük dozda bir toksine tekrarlayan maruz kalmakta kümülatif şok modeline benzetilebilir. Her

maruziyet küçük bir "hasar şoku" olarak ele alınabilir ve toplam toksik yük belirli bir eşik seviyesini aştığında organ yetmezliği gibi ciddi sonuçlar ortaya çıkabilir.

Ekoloji alanında da paralel bir durum gözlemlenir. Bir popülasyon, kuraklık, ani sıcaklık değişimleri, kimyasal kirlenme veya besin azlığı gibi şok niteliğindeki çevresel olaylara maruz kalabilir. Bu tür şoklar popülasyonun bir kısmının ölümüne veya üreme kapasitesinin zayıflamasına neden olabilir. Eğer dış şoklar tekrarlayıcı ve yoğun bir biçimde gerçekleşirse, etkileri zaman içinde birikerek popülasyon çöküşüne veya türün yok olmasına kadar varabilir. Böyle durumlar, ekolojik sistemlerin dayanıklılığını incelemek için kümülatif veya karma şok modellerinin kullanılmasını mümkün kılar (Crespo-Miguel vd, 2022).

5. Sonuç ve Öneriler

Bu çalışma, stokastik şok modellerinin güvenilirlik teorisindeki temel konumunu ve farklı disiplinlerdeki kullanımını ortaya koymuştur. Şokların geliş süreçleri ve arıza mekanizmaları sistem davranışını belirleyen iki ana unsurdur. Aşırı, kümülatif, delta ve ardışık şok modelleri farklı arıza türlerini temsil eder ve gerçek sistemlerde görülen karmaşık bozulma biçimlerini açıklamak için bakış açıları sunar. Elektronikten finansal modellere, biyolojik sistemlerden ekolojik yapılara kadar geniş bir alanda şok modellerinin uygulanabilir olduğu gösterilmiştir. Bu sonuçlar, dış olayların çoğu zaman sistem performansında belirleyici rol oynadığını ve klasik yaşlanma modellerinin bu etkileri tam olarak yansıtamadığını göstermektedir. Bu kapsamda öneriler şöyledir. Öncelikle, şok modellerinin gözlemsel verilerle daha sık karşılaştırılması gerekir. Böylece model varsayımlarının gerçek sistem davranışıyla ne ölçüde örtüştüğü daha net belirlenebilir. Ayrıca, bağımlılık yapıları, geçmiş etkileri ve çoklu şok kaynaklarını bir arada ele alan hibrit modellerin daha fazla geliştirilmesi önemlidir. Modern mühendislik ve finans sistemlerinde arıza mekanizmaları çok boyutludur ve tek bir şok türü çoğu zaman yetersiz kalmaktadır. Son olarak, sağlık, ekoloji ve enerji şebekeleri gibi alanlarda şok süreçlerinin daha ayrıntılı incelenmesi, bu alanlarda erken uyarı ve risk yönetimi kararlarını güçlendirebilir.

Kaynaklar

Allin, C. C. (2007). Seismic reliability analysis of structures. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, *36*(13), 1811-1812. https://doi.org/10.1002/eqe.732

Birnbaum, Z. W., & Saunders, S. C. (1968). A Probabilistic Interpretation of Miner's Rule. *SIAM Journal on Applied Mathematics*,*16*(3),637-652. https://doi.org/10.1137/0116052

Blom, G. (1987). Harald Cramér, 1893–1985. *The Annals of Statistics,15*(4),1335–1350. https://doi.org/10.1214/aos/1176350596

Bozbulut, A. R., & Eryilmaz, S. (2020). Generalized extreme shock models and their applications. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, *49*(1), 110-120. https://doi.org/10.1080/03610918.2018.1476699

Campbell, K. W. (1982). Bayesian analysis of extreme earthquake occurrences. Part I. Probabilistic hazard model. *Bulletin of the Seismological Society of America*, *72*(5),1689-1705. https://doi.org/10.1785/BSSA0720051689

Cha, J. H., & Finkelstein, M. (2016). New shock models based on the generalized Polya process. *European Journal of OperationalResearch*,*251*(1),135-141. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.11.032

Chadjiconstantinidis, S., & Eryilmaz, S. (2023). Reliability of a mixed δ-shock model with a random change point in shock magnitude distribution and an optimal replacement policy. *Reliability Engineering & System Safety*,*232*,109080. https://doi.org/10.1016/j.ress.2022.109080

Crespo-Miguel, R., Jarillo, J., & Cao-García, F. J. (2022). Dispersal-induced resilience to stochastic environmental fluctuations in populations with Allee effect. *Physical ReviewE,105*(1),014413. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.105.014413

Eryilmaz, S., & Tekin, M. (2019). Reliability evaluation of a system under a mixed shock model. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *352*, 255-261. https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.12.011

Esary, J. D., & Marshall, A. W. (1973). Shock Models and Wear Processes. *The Annals of Probability*, *1*(4), 627-649. https://doi.org/10.1214/aop/1176996891

Finkelstein, M., & Cha, J. H. (2024). Discussing some approaches to delta-shock modeling. *TOP, 32*, 245–262. https://doi.org/10.1007/s11750-024-00665-z

Freiberger, M., Kuhn, M., & Wrzaczek, S. (2023). *Modeling health shocks* (IIASA Working Paper WP-23-002). International Institute for Applied Systems Analysis.

Ghassemi, M. (2019). Accelerated insulation aging due to fast, repetitive voltages: A review identifying challenges and future research needs. *IEEE Transactions*

on Dielectrics and Electrical Insulation, 26(5), 1558–1568. https://doi.org/10.1109/TDEI.2019.008176

Goyal, D., Finkelstein, M., & Hazra, N. K. (2022). On history-dependent mixed shock models. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, *36*(4), 1080-1097. https://doi.org/10.1017/S0269964821000255

Goyal, D., Hazra, N. K., & Finkelstein, M. (2022). On the general δ-shock model. *TEST*, *31*(4), 994-1029. https://doi.org/10.1007/s11749-022-00810-5

Graham, P. J. (1986). *Some shock models in reliability theory* [Massey University]. http://hdl.handle.net/10179/13652

Griffith, W. S. (2015). Shock Models. *Wiley StatsRef: Statistics Reference Online*. John Wiley & Sons, Ltd.

Gut, A. (1990). Cumulative Shock Models. *Advances in Applied Probability*,*22*(2),504-507. https://doi.org/10.2307/1427554

Gut, A., & Hüsler, J. (1999). Extreme Shock Models. *Extremes*, *2*(3),295-307. https://doi.org/10.1023/A:1009959004020

Hall, T. M., Ind, P. R., & Anthistle, T. J. (2019). Validation of Container System Component Models for Drops. R. Barthorpe (Ed.), *Model Validation and Uncertainty Quantification, Volume 3* (ss. 11-15). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-74793-4_2

Hectors, K., & De Waele, W. (2021). Cumulative Damage and Life Prediction Models for High-Cycle Fatigue of Metals:AReview.*Metals*,*11*(2),2. https://doi.org/10.3390/met11020204

Huang, Y., Li, J., Liu, H., & Yu, W. (2021). Estimating ruin probability in an insurance risk model with stochastic premium income based on the CFS method. *Mathematics,9*(9),982. https://doi.org/10.3390/math9090982

Igaki, N., Sumita, U., & Kowada, M. (1995). Analysis of Markov Renewal Shock Models. *Journal of Applied Probability*, *32*(3), 821-831. https://doi.org/10.2307/3215132

Kahle, W., & Wendt, H. (2004). On a cumulative damage process and resulting first passages times. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, *20*(1), 17-26. https://doi.org/10.1002/asmb.511

Krawinkler, H., & Zohrei, M. (1983). Cumulative damage in steel structures subjected to earthquake ground motions. *Computers & Structures*, *16*(1), 531-541. https://doi.org/10.1016/0045-7949(83)90193-1

Ledberg, A. (2020). Exponential increase in mortality with age is a generic property of a simple model system of damage accumulation and death. *PLOS ONE, 15*(6), e0233384. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0233384

Li, Y., Yu ,Xiangwen, & Gao, H. (2025). Reliability analysis of competing failure systems considering multiple-damage self-recovery and aggravation evolution mechanisms. *Quality Technology & Quantitative Management*,1-24. https://doi.org/10.1080/16843703.2025.2485173

Li, Z., Chan, L.-Y., & Yuan, Z. (1999). Failure time distribution under a δ-shock model and its application to economic design of systems. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, *6*(3), 237-247. https://doi.org/10.1142/S0218539399000231

Lindskog, F., & McNeil, A. J. (2003). Common Poisson shock models: Applications to insurance and credit risk modelling. *ASTIN Bulletin, 33*(2), 209–238. https://doi.org/10.2143/AST.33.2.503691

Mallor, F., & Omey, E. (2001). Shocks, Runs and Random Sums. *Journal of Applied Probability*, *38*(2), 438-448.

Mallor, F., & Santos, J. (2003). Classification of shock models in system reliability. *VII Jornadas Zaragoza-Pau de Matemática Aplicada y estadística* (C. 27, ss. 405-412).

Mitra, M., & Khan, R. A. (2021). Reliability Shock Models: A Brief Excursion. A. K. Laha (Ed.), *Applied Advanced Analytics*(ss.19-42).Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-33-6656-5_3

Mitra, P., Vittal, V., Keel, B., & Mistry, J. (2016). A systematic approach to N-1-1 analysis for power system security assessment. *IEEE Power and Energy Technology SystemsJournal,3*(2),71–80. https://doi.org/10.1109/JPETS.2016.2546282

Nakagawa, T. (1979). Further Results of Replacement Problem of a Parallel System in Random Environment. *Journal of AppliedProbability*,*16*(4),923-926. https://doi.org/10.2307/3213159

Nakagawa, T. (2007). Shock and Damage Models in Reliability Theory. *Shock and Damage Models in Reliability Theory*(ss.1-188).Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-84628-442-7

Ozkut, M., & Eryilmaz, S. (2019). Reliability analysis under Marshall–Olkin run shock model. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *349*, 52-59. https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.09.022

Patil, M., & Taylor, D. (2006). Gust Response of Highly Flexible Aircraft. *47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics. https://doi.org/10.2514/6.2006-1638

Poursaeed, M. hossein, & Asadian, N. (2020). A Discrete Time Run Shock Model. *Journal of Statistical Sciences*, *14*(1), 55-72. https://doi.org/10.29252/jss.14.1.55

Sánchez-Silva, M., & Riascos-Ochoa, J. (2013). Seismic risk models for aging and deteriorating buildings and civil infrastructure. S. Tesfamariam & K. Goda (Ed.), *Handbook of Seismic Risk Analysis and Management of Civil Infrastructure Systems* (ss. 387-409). Woodhead Publishing. https://doi.org/10.1533/9780857098986.3.387

Shanthikumar, J. G., & Sumita, U. (1983). General Shock Models Associated with Correlated Renewal Sequences. *Journal of Applied Probability*, *20*(3), 600-614. https://doi.org/10.2307/3213896

Wu, Y. (2022). Reliability Modelling Considering Self-Exciting Mechanisms of Shock Damage. *Applied Sciences*, *12*(20), 10418. https://doi.org/10.3390/app122010418

Wunsch, D. C., & Bell, R. R. (1968). Determination of threshold failure levels of semiconductor diodes and transistors due to pulse voltages. *IEEE Transactions on Nuclear Science,15*(6),244–259. https://doi.org/10.1109/TNS.1968.4325054

Xiang, M., & Eschke, R. (2004). Modelling of the effects of continual shock loads in the transport process. *Packaging Technology and Science*, *17*(1), 31-35. https://doi.org/10.1002/pts.636

BÖLÜM 4

Tahmin Modellemesinde Veri Sızıntısı: Sistematik Kaynaklar, Tespit Stratejileri ve Metodolojik Etkileri

Özge Taş[1]

[1] Öğr. Gör., Kastamonu University, ORCID: 0000-0001-7220-5054

Tahmin modellemesinde veri sızıntısı, makine öğrenimi modellerinin eğitimi veya değerlendirilmesi sırasında gerçek dünya uygulamalarında mevcut olmayacak bilgilerin istem dışı kullanımını ifade eder ve model performans değerlendirmelerinin bütünlüğünü önemli ölçüde tehlikeye atar. Bu olgu, yanıltıcı derecede yüksek doğruluk oranları oluşturma yeteneğiyle dikkat çekmektedir; bu da uygulayıcıların bir modelin etkinliği ve genelleme yetenekleri hakkında hatalı sonuçlar çıkarmasına yol açabilir. Veri sızıntısını anlamak, özellikle karar vermenin doğru tahminlere büyük ölçüde bağlı olduğu sağlık, finans ve sosyal bilimler gibi alanlarda, pratik ortamlarda geçerli sonuçlar veren sağlam tahmin sistemleri oluşturmak için çok önemlidir. Veri sızıntısının sistematik kaynakları, hedef sızıntısı, özellik sızıntısı, eğitim-test kirlenmesi ve ön işleme sızıntısı dahil olmak üzere çeşitli türlere ayrılabilir. Bu kategoriler, model eğitimini etkilemek için gelecekteki bilgilerin kullanılması, eğitim ve test veri kümelerinde veri noktalarının çoğaltılması ve ön işleme tekniklerinin yanlış uygulanması gibi veri işleme hatalarının meydana gelebileceği çeşitli senaryoları kapsar. Bu tür hatalar, modelin eğitim verilerinde iyi performans göstermesine rağmen görünmeyen verilere genelleme yapamamasına ve güvenilirliğini ve doğruluğunu zayıflatmasına yol açan önemli aşırı uyum sorununa neden olabilir. Veri sızıntısının tespiti, model bütünlüğünü korumak için zorunludur tanımlama ve azaltma için çeşitli stratejiler mevcuttur. Bunlar arasında, alışılmadık derecede yüksek doğruluk seviyelerinin potansiyel sızıntıya işaret edebileceği performans analizi; hedef değişkene ilişkin gelecekteki veya doğrudan içgörülerin dahil edilmediğinden emin olmak için kapsamlı özellik incelemesi eğitim ve doğrulama veri kümeleri arasında uygun ayrımı sağlamak için düzenli veri denetimleri yer almaktadır. Ayrıca, zaman serisi analizlerinde örtüşmeyi önlemek gibi verilerin zamansal doğasına uygun teknikler, model değerlendirmelerini çarpıtabilecek sızıntıyı önlemek için gereklidir. Veri sızıntısının sonuçları, yalnızca yanlışlıkların ötesine uzanır ve genellikle kullanıcı güveninde ve tahmin modellerinin benimsenmesinde düşüşe yol açar. Modeller, aşırı uyum veya yanlı eğitim verileri nedeniyle gerçek dünya uygulamalarında beklenen performansı sağlayamadığında, kuruluşlar itibar ve finansal maliyetlere katlanabilir. Bu nedenle, veri sızıntısı konusunda farkındalık kültürü oluşturmak ve titiz doğrulama protokolleri uygulamak, çeşitli sektörlerdeki tahmine dayalı modelleme çalışmalarının güvenilirliğini ve etkinliğini artırmak için kritik öneme sahiptir.

Veri Sızıntısının Kavramsal Temelleri

Data leakage (veri sızıntısı) sıklıkla overfitting (aşırı uyum) ile karıştırılmaktadır. Oysa bu iki kavram yapısal olarak farklıdır. Aşırı uyum, modelin eğitim verisine aşırı uyum sağlaması sonucu genelleme yeteneğini kaybetmesiyle ilgilidir. Veri sızıntısı ise modelin, gerçek tahmin sürecinde erişilemeyecek bilgiyle eğitilmesi anlamına gelir.

İstatistiksel açıdan bakıldığında veri sızıntısı, örneklemin bağımsızlık varsayımını ihlal eder. Eğitim ve test setleri arasındaki bilgi sızıntısı, tahmin hatasının sistematik olarak düşük hesaplanmasına neden olur. Bu durum bias–variance (varyans sapması) dengesini bozarak modelin güvenilirliğini ortadan kaldırır.

Sonuç olarak veri sızıntısı, modelin başarımını artıran bir optimizasyon değil, ölçüm sürecini bozan metodolojik bir hatadır.

Veri Sızıntısı Türleri

Veri sızıntısı, her biri tahmin modellerinin bütünlüğünü ve performansını etkileyen çeşitli türlere ayrılabilir. Veri sızıntısının başlıca türleri arasında hedef sızıntısı, özellik sızıntısı, eğitim-test kirlenmesi ve ön işleme sızıntısı yer almaktadır. Veri sızıntısı, hassas bilgileri açığa çıkararak ve eğitim sürecini istemeden etkileyerek makine öğrenimi modellerinin güvenilirliğini önemli ölçüde zayıflatabilir. Sağlam tahmin modelleri oluşturmak için veri sızıntısının sistematik kaynaklarını anlamak şarttır (Papadimitriou et. al., 2010).

Veri Sızıntısı Türlerinin Sınıflandırılması

Hedef Değişken Sızıntısı

Target leakage, makine öğrenmesi bağlamında, model eğitiminde hedef değişkene ilişkin bilgilerin (örneğin etiket ile doğrudan ilişkili özelliklerin) eğitim verisine sızması ile tanımlanır; bu durumda model, tahmin aşamasında gerçek hayatta mevcut olmayacak bilgileri kullanarak şişirilmiş performans ölçümleri sunar. Bu tür sızıntı, özellikle bir özelliğin hedef hakkında bilgi içerdiği veya hedefin sonucu tarafından etkilenmiş olduğu durumlarda ortaya çıkar ve modelin gerçek veri üzerindeki genelleme yeteneğini zayıflatır (Nassar, 2023).

Eğitim–Test Veri Bulaşması

Yanlış veri bölme ve hatalı çapraz doğrulama uygulamalarının etkileri açıklanır. Zamana bağlı varyans yanlılığı senaryosuna göre bir şirket geçmişte kazandıkları ihalelerden ne kadar kar ettiklerini modellemeyi amaçlamaktadır. Standart yaklaşımlara göre veri rast gele karıştırılarak eğitim ve test olarak ayrılmaktadır. Fakat burada veri rasgele bölündüğünde şubat ayındaki veriyi eğitimde kullanıp ocak ayındaki veriyi test edebilme durumu olabilir. Bu da zamanda yolculuk yapmak demektir. Gerçek hayatta geleceği bilerek geçmişi tahmin edemezsiniz. Araştırmacılar bunun kronolojik olarak ayrılması gerektiğini savunur (Weninger, et. al., 2020).

Zamansal Veri Sızıntısı

Zaman serilerinde geleceğe ait bilginin modele sızması ve look-ahead bias kavramı tartışılır.Veri sızıntısı modeli eğitirken veya test ederken modelin gerçek hayatta asla sahip olamayacağı bilgileri kullanması şeklinde karşımıza çıkar. Bir

şirket kapalı zarf usulü açık arttırmalarda kazanmak için gereken fiyatı tahmin etmek istiyor. Ancak şirket sadece ucuz ürünlerle ilgileniyor. Bu durumda verilerde 1.000 dolar üzerindeki bütün verinin silinmesi gerekecek model bu şekilde kurulacak. Bu üst sınır (the upper bound) dediğimiz bir veri sızıntısı olarak karşımıza çıkar. Pahalı ürünlerin modelden çıkarılması ile model dünyadaki her şeyin ucuz olduğu şeklinde sonuçlanır. Böylece fiyatları düşük tahmin eder. Çözüm önerisi olarak modeli tüm veri ile eğitmek ve performans raporlarken sadece ilgilenilen aralığı belirtmek gerekli (Zhang, et. al., 2012).

Doğrusal regresyon bağlamında, dikkat çekici bir örnek, laboratuvar testlerinin sıralanması yoluyla dolaylı olarak teşhisi ortaya koyan bir özelliği içeriyordu. Özellikle, doktorlar yalnızca bir hastalıktan şüphelendiklerinde belirli testler isteyebilirler; bu da modelin bir test sırasının hastalık teşhisi anlamına geldiğini öğrenmesine olanak tanır. Bu durum, tıbbi göstergeleri gerçekten anlamayan, bunun yerine test sıraları ve teşhisler arasındaki korelasyonu kullanan bir modele yol açarak, eğitim ve değerlendirme sırasında yanıltıcı derecede yüksek performansa neden olur (Fund ., et. al., 2025).

Ön İşleme Kaynaklı Veri Sızıntısı

Normalizasyon, özellik seçimi ve boyut indirgeme adımlarında yapılan yaygın hatalar ele alınır.

Veri Sızıntısının Yaygın Nedenleri

Veri sızıntısı, aşağıdakiler de dahil ancak bunlarla sınırlı olmamak üzere çeşitli kaynaklardan kaynaklanabilir:

Geleceğe Ait Bilgilerin Dahil Edilmesi : Eğitim veri setine geleceğe ait veri noktalarının dahil edilmesi, modellerin tahmin anında mevcut olmayan verilere dayanarak sonuçları tahmin etmesi nedeniyle haksız bir avantaj sağlayabilir.

Yanlış Çapraz Doğrulama : Standart K katlı çapraz doğrulama, istemeden gelecekteki veya yinelenen verileri dahil ederek modelin geçerliliğini tehlikeye atabilir. Bölme işlemi sırasında zamansal veya gruplandırılmış bağımlılıkların dikkate alınmasına özen gösterilmelidir (Alturayeif , et. al., 2025).

Normalizasyon Sorunları : Veri setini bölmeden önce tüm veri setine genel normalizasyon parametreleri uygulamak, test setinden gelen bilgilerin eğitim setine sızmasına ve gerçekçi olmayan performans tahminlerine yol açmaktadır.

Uygunsuz Özellik Seçimi : Hedef değişkenle yüksek korelasyona sahip özelliklerin seçilmesi, istemeden yanlılık oluşturabilir ve bu da modelin genelleme yeteneğini etkileyen bir tür sızıntıya yol açmaktadır (Esther, et. al.)

Veri Sızıntısı Tespit Stratejileri

Veri sızıntısının tespiti ve önlenmesi, özelliklerin dikkatli analizini ve sağlam doğrulama stratejilerinin uygulanmasını gerektirir. Bu, hiçbir özelliğin hedef

değişkene doğrudan bir bakış açısı sağlamadığından veya gelecekteki verileri içermediğinden emin olmak için eğitim veri kümelerinin incelenmesini içerir. Bu aynı zamanda, gelecekteki müşteri kaybını tahmin etmek için kullanılan müşteri kaybı durumu gibi, tahmin anında mevcut olmayacak zaman yolculuğu özelliklerinin belirlenmesini de kapsar (Alturayeif & Hassine, 2025), (Bunker & Fraser-King, 2009), (Gyal, 2024).

Tahmin modellemesinde veri sızıntısının tespiti, makine öğrenimi modellerinin bütünlüğünü ve güvenilirliğini sağlamak için çok önemlidir. Veri sızıntısıyla ilişkili riskleri belirlemek ve azaltmak için çeşitli yöntemler kullanılabilir. Burada önemli bir husus makine öğrenmesinde veri sızıntısı model geliştirme sürecinde model dışında kalan bilginin dolaylı ya da doğrudan model performansını etkilemesi olarak tanımlanır. Literatürde yapay zekada veri sızıntısı için karıştırılmaması gereken husus metodolojik veri sızıntısı ve gizlilik odaklı veri sızıntısı farklıdır. Metodolojik veri sızıntısı; hatalı çapraz doğrulama kurguları, eğitim–test karışması, uygunsuz öznitelik seçimi ve zaman boyutunun ihmal edilmesi gibi nedenlerle ortaya çıkar ve özellikle küçük örneklemli çalışmalarda performans metriklerini dramatik biçimde olduğundan yüksek gösterir. Gizlilik odaklı veri sızıntısı ise, eğitilen modelin parametreleri veya çıktıları üzerinden eğitim verisindeki bireylere ilişkin hassas niteliklerin çıkarılabilmesi bağlamında çalışılır (Rosenblatt, et. al., 2024). Metodolojik veri sızıntısı için tespit sıtratejileri aşağıda verilmiştir;

Performans Analizi

Potansiyel veri sızıntısının başlıca göstergelerinden biri, beklenmedik derecede yüksek model performansıdır. Bir model, tipik kıyaslama ölçütlerinin önemli ölçüde üzerinde doğruluk seviyelerine (örneğin, %95'in üzerinde) ulaşırsa, bu, eğitim sırasında kullanılmaması gereken test veri setinden bilgileri istemeden kullandığını gösterebilir.

Performans analizi, modelin sonuçlarının sağlam olduğunu ve veri sızıntısının bir sonucu olmadığını doğrulamak için kapsamlı çapraz doğrulama teknikleriyle desteklenmelidir (Shabtai, et. al., 2012).

Özellik İncelemesi

Özelliklerin sistematik olarak incelenmesi, sızıntıyı belirlemeye de yardımcı olmaktadır. Bu, hedef değişkenden bilgi taşıyabilecek veya tahmin sırasında mevcut olmayan özellikleri kontrol etmeyi içerir. Her bir özelliğin alaka düzeyi ve zamanlaması açısından incelendiği manuel özellik incelemesi çok önemlidir (Shabtai, et. al., 2012).

Ayrıca, özellik korelasyon analizi kullanmak, hedef değişkenle çok yakın korelasyon gösteren sorunlu özellikleri ortaya çıkarmaktadır. Bu tür özellikler bulunursa, geçici olarak kaldırılmalı ve sızıntı üzerindeki etkilerini

değerlendirmek için model performansına olan etkileri izlenmelidir (Papadimitriou, & Garcia-Molina, 2010).

Veri Denetimi

Veri işlem hatlarının düzenli olarak denetlenmesi, olası veri sızıntısı kaynaklarını belirlemek için çok önemlidir. Veri hazırlama süreçlerini, model geliştirme aşamalarını sürekli olarak gözden geçirerek ve eğitim, doğrulama ve test veri kümelerinin kesin bir şekilde ayrılmasını sağlayarak, ekipler sızıntıları proaktif olarak ele alabilir (Shabtai, et. al., 2012),(Kulkarni & Girish, 2024).

Farklı bölümlerde tanımlayıcıların veya çakışan kayıtların bulunmadığını doğrulamak için kontroller uygulamak, sızıntı risklerine karşı daha fazla koruma sağlayabilir.

Zamansal ve Grup Kontrolleri

Zaman açısından hassas veri kümeleri için, zamansal sızıntıyı önlemek amacıyla verilerin kronolojik sırayı koruyacak şekilde doğru şekilde bölünmesi çok önemlidir. Bu, gelecekteki verilerin eğitim sırasında modeli etkilememesi gerektiği anlamına gelir ve bu durum, verilerin yapısıyla uyumlu uygun doğrulama teknikleri kullanılarak izlenmektedir (Kulkarni & Girish, 2024),(Ramos, Ramos & Garcia 2025).

Verilerin gruplandırıldığı durumlarda, bir grup içindeki tüm örneklerin tek bir bölme içinde yer almasını sağlamak hayati önem taşır. Bu, aynı varlığa ait bilgilerin eğitim ve test kümelerinde yanlışlıkla bulunmasına neden olabilecek grup sızıntısını önlenmektedir (Ahmad & Bamnote, 2013).

Otomasyon ve İzleme

Veri sızıntısı kontrollerinin otomatikleştirilmesi, tespit sürecini kolaylaştırabilir. Diferansiyel gizlilik, gürültü enjeksiyonu ve veri kaymasının dikkatli bir şekilde izlenmesi gibi teknikler, modelin bireysel girdilerden öğrenmesini sınırlandırmaya ve potansiyel sızıntıları gerçek zamanlı olarak işaretlemeye yardımcı olmaktadır (Ahmad & Bamnote, 2013), (Ramos, Ramos & Garcia 2025).

Bu tespit stratejilerinin bir kombinasyonunu uygulayarak, veri bilimciler veri sızıntısıyla ilişkili riskleri en aza indiren ve daha güvenilir ve geçerli tahminler sağlayan sağlam modeller oluşturabilecekleri araştırmalarla ortaya konmaktadır.

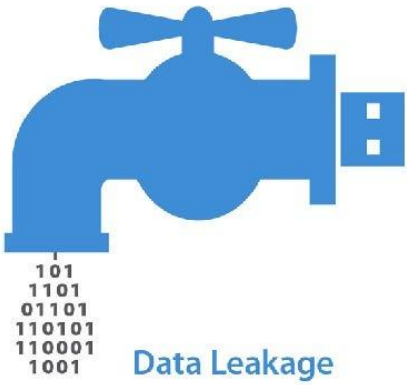
Metodolojik Çıkarımlar

Tahmin modellemesinde veri sızıntısı, modellerin geçerliliğini ve güvenilirliğini tehlikeye atabilecek önemli metodolojik zorluklar ortaya koymaktadır. Genellikle uygunsuz veri işleme uygulamalarından kaynaklanır ve bir modelin tahmin performansının abartılmasına ve bilimsel ve klinik sonuçların zayıflatılmasına yol açar (Starcke, et. al. 2025),(Deaconu, 2023).

Veri Sızıntısını Anlamak

Özünde, veri sızıntısı, model geliştirmenin eğitim veya değerlendirme aşamalarında, gerçek dağıtım sırasında kullanılamayacak bilgilerin istem dışı kullanımını ifade eder. Bu, hedef değişkenden türetilen özelliklerin dahil edilmesi veya eğitim ve test veri kümelerinde örtüşmelerin olması gibi çeşitli yollarla gerçekleşmektedir (Jeffries , 2020).

Şekil 1. Veri sızıntısı gösterimi (Jeffries , 2020).



Bu tür sızıntılar, modelin gerçek etkinliğini bozabilir ve model yeni, daha önce görülmemiş verilerle karşılaştığında geçerliliğini yitiren şişirilmiş performans ölçütlerine yol açabilir (Deaconu 2023).

Veri Sızıntısının Temel Nedenleri

Veri sızıntısının temel nedenleri genel olarak dışsal ve içsel faktörler olarak sınıflandırılabilir. Dışsal faktörler, verilerin toplanma, birleştirilme veya ön işleme biçimini içerebilir ve bu durum genellikle belirli veri noktalarının gerçekten bağımsız olmadığı durumlara yol açar (Merkli, 2024).

İç faktörler, özellikle her iki veri setinde de benzer örnekler kullanılırken, eğitim ve test veri setleri arasında uygun ayrımın sağlanamaması gibi veri işleme sırasındaki uygulama hatalarını içerebilir (Merkli, 2024),(Gyal, 2024).

Dahası, tahmin tekniklerinin yanlış kullanımı veya veri hazırlama sırasında meta verilerin ihmal edilmesi gibi metodolojik hatalar, sızıntı riskini daha da artırabilir (Merkli, 2024).

Veri sızıntısının yanıltıcı sonuçlar doğurma potansiyeli, kaynaklarının iyice anlaşılmasını ve model doğrulamasına dikkatli bir yaklaşımı gerektirmektedir.

Veri sızıntısının etkileri yalnızca yanlışlıklarla sınırlı kalmaz; kullanıcıların tahmin modellerine olan güvenini de zedeleyebilmektedir. Bir model, eğitim verilerine aşırı uyum sağlama nedeniyle gerçek dünya senaryolarında beklendiği gibi performans göstermediğinde, kullanıcılar arasında benimsenme ve güvenin azalmasına yol açmaktadır (Jeffries , 2020).

Bu durum, veriye dayalı karar alma süreçlerinin etkinliğini engellemekle kalmaz, aynı zamanda bu tür modelleri kullanan kuruluşlar için önemli itibar ve maliyet kayıplarına da yol açabilir (Starcke, et. al., 2025).

Veri sızıntısıyla mücadele etmek için, dağıtımdan önce potansiyel sızıntı senaryolarını belirlemeye ve azaltmaya yardımcı olabilecek titiz doğrulama protokolleri uygulamak ve otomatik kontroller benimsemek çok önemlidir. Veri kümelerinin sıkı bir şekilde ayrılmasını sağlamak, zamansal kontroller uygulamak ve duyarlılık analizleri yapmak gibi teknikler etkili güvenlik önlemleri olarak işlev görmektedir. (Merkli, 2024), (Deaconu 2023).

Ayrıca, eldeki verilerin özel bağlamını ve özelliklerini anlamak, uygulayıcıların potansiyel sızıntı risklerini tanımalarına ve bunları proaktif olarak ele almalarına yardımcı olmaktadır.

Sonuç olarak, kuruluşlar içinde veri sızıntısı ve bunun sonuçlarına ilişkin farkındalık kültürünün geliştirilmesi, tahmine dayalı modelleme çalışmalarının sağlamlığını artırabilir ve uygulamalı ortamlarda daha güvenilir sonuçlara katkıda bulunmaktadır.

Vaka Çalışmaları

Veri sızıntısı, tahmine dayalı modellemede yaygın bir sorundur ve aşırı iyimser performans ölçütlerine yol açabilir. Birkaç önemli vaka çalışması, veri sızıntısının nasıl ortaya çıkabileceğini ve model bütünlüğü üzerindeki etkilerini göstermektedir.

Bir hedge fonunun hisse senedi fiyatlarını tahmin etmek için bir yapay zeka modeli eğitme girişiminden kaynaklanmaktadır. Fon, eğitim veri setine yanlışlıkla gelecekteki hisse senedi fiyatlarını dahil etmiş ve bu da neredeyse mükemmel bir doğrulukla sonuçlanmıştır. Ancak bu performans yanıltıcıydı, çünkü model gerçek piyasa trendlerini öğrenmek yerine gelecekteki verileri kullanıyordu. Bu olay, eğitimde gelecekteki veri noktalarını dahil etmenin kritik hatasını vurgulamaktadır; bu durum, gerçek dünya uygulamalarında geçerli olmayan bir doğruluk yanılsaması yaratmaktadır (Bunker & Fraser-King, 2009).

Veri Sızıntısında Sık Görülen Temalar

Bu örnekler, makine öğrenimi içindeki daha geniş bir sorunu vurgulamaktadır: veri sızıntısının model performansının yanlış değerlendirilmesine yol açma eğilimine sebep olmaktadır. Bu tür olaylar yeni değildir ve akademik testlerden makine öğrenimi uygulamalarına kadar çeşitli

senaryolarda belgelenmiştir; bu da model değerlendirme uygulamalarında dikkatli olunması gerektiğini vurgulamaktadır. Sektör uzmanlarının belirttiği gibi, birçok yüksek performanslı yapay zeka modeli, veri sızıntısı nedeniyle gerçek genelleme yerine ezberlemeye dayanmaktadır (Merkli, 2024),

Yapay zeka (YZ) uygulamalarında ise veri sızıntısı teknolojinin kötüye kullanımından kaynaklanabilecek potansiyel riskleri vurgulayan birçok önemli olayla öne çıkmaktadır.

Sonuç

Veri sızıntısı, yapay zekâ ve makine öğrenmesi temelli modellerin hem bilimsel güvenilirliğini hem de toplumsal kabulünü doğrudan etkileyen, çok katmanlı bir problemdir. Güncel çalışmalar, sızıntının alanlar arası yaygınlığını, performans metrikleri üzerindeki çarpıtıcı etkisini ve gizlilik boyutunda doğurduğu riskleri sistematik biçimde ortaya koymuş; ancak tam otomatik tespit ve alan bağımsız önleme mekanizmalarının hâlen araştırma gündeminin merkezinde olduğu vurgulanmıştır. Araştırmalar makine öğrenimi modellerinde gerçek dünyada erişilemeyecek bilgilerin eğitim sürecine dahil edilmesiyle oluşan metodolojik veri sızıntısı olgusunu kapsamlı bir şekilde ele almaktadır. Çalışma, bu yöntemsel hatanın model performansını yapay olarak yükselterek yanıltıcı sonuçlara yol açtığını ve hedef sızıntısı, zaman serisi hataları ile ön işleme yanlışlıkları gibi farklı türlerde ortaya çıkabileceğini açıklamaktadır. Veri sızıntısının sadece istatistiksel bir sapma değil, aynı zamanda finans ve sağlık gibi kritik alanlarda güvenilirlik ve itibar kaybına neden olan bir sorun olduğu vurgulanmaktadır. Çalışmalar gelecekte bu riskleri en aza indirmek için titiz denetim protokolleri, kronolojik veri ayrımı ve performans analizi gibi somut çözüm stratejileri sunmaktadır. Sonuç olarak bu eserler, tahmin sistemlerinin başarısını artırmak için modelin ezber yapmasını önleyen ve genelleme yeteneğini koruyan metodolojik bir farkındalık kültürü oluşturmayı amaçlamaktadır.

Kaynaklar

Ahmad, M. S., & Bamnote, G. R. (2013). Data leakage detection and data prevention using algorithm. *International Journal Of Computer Science And Applications*, *6*(2), 394-399.

Alturayeif N, Hassine J. Data leakage detection in machine learning code: transfer learning, active learning, or low-shot prompting? PeerJ Comput Sci. 2025 Mar 5;11:e2730. doi: 10.7717/peerj-cs.2730. PMID: 40134878; PMCID: PMC11935776.

Alturayeif, N., & Hassine, J. (2025). Data leakage detection in machine learning code: transfer learning, active learning, or low-shot prompting?. *PeerJ. Computer science*, *11*, e2730. https://doi.org/10.7717/peerj-cs.2730

Alturayeif, N., & Hassine, J. (2025). Data leakage detection in machine learning code: transfer learning, active learning, or low-shot prompting?. *PeerJ. Computer science*, *11*, e2730. https://doi.org/10.7717/peerj-cs.2730

Bunker, G., & Fraser-King, G. (2009). *Data leaks for dummies*. John Wiley & Sons.

Bunker, G., & Fraser-King, G. (2009). *Data leaks for dummies*. John Wiley & Sons.

Deaconu G., 2023, How Data Leakage affects model performance claims, towards data science.

Deaconu G., 2023, How Data Leakage affects model performance claims, towards data science.

Esther, D. AI in Data Loss Prevention: Safeguarding Sensitive Data Against Unauthorized Access and Leakage.

Fraida Fund, M., Saeed, M., Malik, S., & Ishak, K. (2025). *Learning from irreproducibility: Introducing data leakage case studies for machine learning education*. In *Proceedings of the 3rd ACM Conference on Reproducibility and Replicability (ACM REP '25)* (pp. 224–228). Association for Computing Machinery. https://doi.org/10.1145/3736731.3746153

Gyal C., 2024 Data Leakage And Its Effect On The Performance of An ML Model

Gyal C., 2024 Data Leakage And Its Effect On The Performance of An ML Model

Jeffries M. W. 2020, How Braze Overcame Data Leakage to Build Predictive Churn

Kulkarni, S., & Girish, G. N. (2024). Navigating The Abyss–Illuminating Data Leakage Threats, Mitigations, and Future Horizons. In *Cloud Security* (pp. 37-51). Chapman and Hall/CRC.

Merkli Y., 2024 Engineer's Guide to Automatically Identifying and Mitigating Data Leakage

Nassar, O. (2023). Data Leakage in Machine Learning.

Papadimitriou, P., & Garcia-Molina, H. (2010). Data leakage detection. *IEEE Transactions on knowledge and data engineering*, *23*(1), 51-63.

Papadimitriou, P., & Garcia-Molina, H. (2010). Data leakage detection. *IEEE Transactions on knowledge and data engineering*, *23*(1), 51-63.

Papadimitriou, P., & Garcia-Molina, H. (2011). Data leakage detection. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 23*(1), 51–63. https://doi.org/10.1109/TKDE.2010.100

Ramos, P., Ramos, R., & Garcia, N. (2025). Data leakage in visual datasets. In *Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision* (pp. 6309-6319).

Rosenblatt, M., Tejavibulya, L., Jiang, R. *et al.* Data leakage inflates prediction performance in connectome-based machine learning models. *Nat Commun* **15**, 1829 (2024). https://doi.org/10.1038/s41467-024-46150-w

Shabtai, A., Elovici, Y., & Rokach, L. (2012). Data leakage detection/prevention solutions. In *A Survey of Data Leakage Detection and Prevention Solutions* (pp. 17-37). Boston, MA: Springer US.

Starcke J, Spadafora J, Spadafora J, Spadafora P, Toma M. The Effect of Data Leakage and Feature Selection on Machine Learning Performance for Early Parkinson's Disease Detection. Bioengineering (Basel). 2025 Aug 6;12(8):845. doi: 10.3390/bioengineering12080845. PMID: 40868358; PMCID: PMC12383348.

Starcke J, Spadafora J, Spadafora J, Spadafora P, Toma M. The Effect of Data Leakage and Feature Selection on Machine Learning Performance for Early Parkinson's Disease Detection. Bioengineering (Basel). 2025 Aug 6;12(8):845. doi: 10.3390/bioengineering12080845. PMID: 40868358; PMCID: PMC12383348.

Weninger, M., Makor, L., & Mössenböck, H. (2020). Memory leak analysis using time-travel-based and timeline-based tree evolution visualizations. *Smart Tools and Apps for Graphics*.

Zhang, X., Liu, C., Nepal, S., Pandey, S., & Chen, J. (2012). A privacy leakage upper bound constraint-based approach for cost-effective privacy preserving of intermediate data sets in cloud. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, *24*(6), 1192-1202.

https://www.analyticsvidhya.com/blog/2021/07/data- leakage-and-its-effect-on-the-performance-of-an-ml-model/