

Introducción a los sistemas dinámicos

Notas de clases, 2024

Italo Cipriano

Actualizado el

24 de mayo de 2024

Resumen

En este curso se motivará el estudio de los sistemas dinámicos usando el *problema de Kepler*, en que se presentará su solución. A lo largo del curso se varán:

1. *Teorema de Poincaré-Bendixon* para sistemas de dos ecuaciones diferenciales, con demostración y aplicación.
2. *Teorema de Hartman-Grobman* para equilibrios hiperbólicos de sistemas de ecuaciones diferenciales, sin demostración y con aplicación.
3. *Teorema de rigidez de Sharkovsky para funciones continuas en \mathbb{R}* , con demostración de una versión más débil.
4. Número de rotación para homeomorfismos del círculo, con demostración.
5. *Teorema de Poincaré para homeomorfismos del círculo*, con demostración.
6. *Teorema de Denjoy para homeomorfismos del círculo*, con demostración.
7. Noción de caos en sistemas dinámicos.
8. Codificación de la herradura de Smale y automorfismos del toro.
9. Exponentes de Lyapunov para funciones C^1 .
10. Entropía topológica.
11. El atractor caótico de Lorentz.
12. Además se verán conceptos transversales en sistemas dinámicos, tales como puntos de equilibrio, órbitas, diagramas de fases, conjuntos estables, atractores, atractores caóticos, órbitas y puntos periódicos, cajas de flujo, topologicamente transitivo, minimalidad, únicamente ergódico, mezclador.

Las referencias principales del curso dictado son: [KA95] y [R19]. Para dinámica continua las referencias son las notas de curso de sistemas dinámico dictado por Pablo Aguirre <http://paguirre.mat.utfsm.cl/dynamics.pdf>. Otras referencias usadas en algunos capítulos son las siguientes.

- En las clases de funciones del círculo se usaron en parte las notas de George Turer, Dynamical systems on the circle <https://math.uchicago.edu/~may/REU2019/REUPapers/Turer.pdf>.
- Para la demostración del teorema de Sharkovsky se usó en parte la demostración en [BK11].
- Para motivar el curso se usó la primera parte del libro [DF].

Indice de clases

- Clase 1. Motivación.
- Clase 2. Teorema de Poincaré-Bendixon.
- Clase 3. Problema de Kepler.
- Clase 4. Demostración de Teorema de Poincaré-Bendixon.
- Clase 5. continuación clase 4.
- Clase 6. Rotaciones del círculo.
- Clase 7. Teorema de Sharkovsky.
- Clase 8. Número de rotación.
- Clase 9. Teoremas de Poincaré y de Devaney para funciones del círculo.
- Clase 10. Funciones expansoras del círculo.
- Clase 11. Caos según Devaney.
- Clase 12. Espacios de shift.

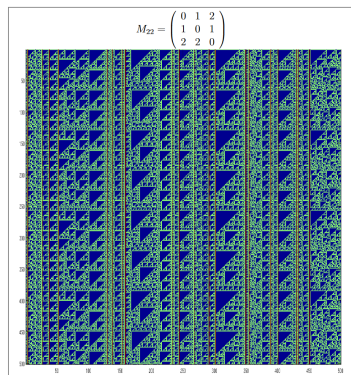


Figura 1: Iteración de un autómata celular

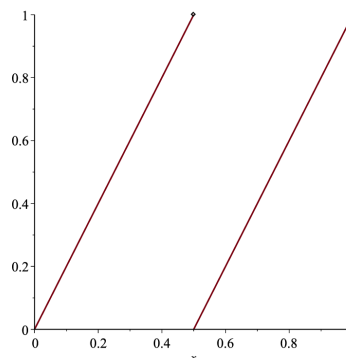


Figura 2: “Doubling map”

1. Introducción y el problema de Kepler

clases 1 y 3, 11 y 18 de abril 2024

Un sistema dinámico puede ser la solución de una EDO, sin embargo el concepto es más general. Podemos considerar una función $T : X \rightarrow X$, sobre un conjunto X , y entender como se comportan las composiciones (iteraciones) de esta función. Preguntas típicas son el comportamiento de órbitas particulares y el de comportamientos globales. En sistemas dinámicos usualmente se utilizan modelos simples motivados por modelos reales de fenómenos complejos, como por ejemplo un modelo meteorológico. Adicionalmente, los sistemas dinámicos permiten explorar problemas en diferentes áreas de las matemáticas, tales como geometría, probabilidades y teoría de números por ejemplo.

Veamos un ejemplo de aplicación de sistemas dinámicos para probar un teorema en teoría de números.

Teorema 1 (Szemerédi) *Dada cualquier partición finita de los enteros positivos, existe un elemento de la partición que contiene progresiones aritméticas de cualquier largo.*

Ahora veremos dos ejemplos de sistemas dinámicos: autómata celular y la función $2x$ en el intervalo.

Automata celular

En este ejemplo $X = \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ y $T : X \rightarrow X$ esta definido localmente por $T(x_1, x_2, \dots)_i = M_{22}(x_i, x_{i+1})$, para todo $i \in \mathbb{N}$, donde $M_{2,2}(x, y)$ es la componente $(x + 1, y + 1)$ de la matriz $M_{2,2}$. En la Figura 1 se muestra las iteraciones hacia abajo de la función T dada una condición inicial. Los número 0, 1, 2 estan

representados con distintos colores en la figura.

Función 2x (doubling map) en el intervalo

$T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ donde

$$Tx = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, 1/2) \\ 2x - 1 & \text{si } x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Ejercicio: Jugar iterando las funciones $\sqrt{\quad}$, \sin , \cos en la calculadora.

Terminaremos esta introducción con un problema importante en física: el problema de Kepler.

1.1. Problema de Kepler clase 3, 18 de abril 2024

El problema de Kepler (también conocido como *el problema de los dos cuerpos*) corresponde al sistema de EDOs

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2}{dt^2} r_1 &= F_{21}, \\ m_2 \frac{d^2}{dt^2} r_2 &= F_{12}. \end{aligned}$$

Los dos cuerpos interactúan mediante la energía potencial $U(|r_1 - r_2|) = g \frac{m_1 m_2}{|r_1 - r_2|^2}$, donde g es la constante de Newton. Esto es $F_{21} = -\frac{\partial}{\partial r_1} U$ y $F_{12} = -\frac{\partial}{\partial r_2} U$.

Como los dos cuerpos interactúan mediante la energía potencial, deben obedecer la tercera ley de Newton (la acción mutua entre dos cuerpos entre ellos es igual y con direcciones opuestas). Al derivar el centro de masa

$$r = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{M}$$

se obtiene la ecuación

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{M}.$$

La aceleración del centro de masa depende de la fuerza externa, $F_{ext} = Ma$, donde a es la aceleración del centro de masa. En el sistema considerado, la aceleración del centro de masa es constante, luego v es constante. Entonces es posible obtener la ecuación que describe la posición $r(t)$ del centro de masa en el tiempo t , que viene dada por $r(t) = vt$. Escribiendo $r_3 = r_1 - r_2$, es posible escribir $r_1 = r + \frac{m_2 r_3}{M}$ y $r_2 = r - \frac{m_1 r_3}{M}$. Entonces es suficiente resolver el problema para r . Para encontrar la ecuación que satisface r , notemos que $m_1 m_2 \frac{d^2}{dt^2} r_1 = m_2 F_{21}$ y $m_1 m_2 \frac{d^2}{dt^2} r_2 = m_1 F_{12}$. Luego,

$$m_1 m_2 \frac{d^2}{dt^2} (r_1 - r_2) = m_2 F_{21} - m_1 F_{12},$$

entonces, usando la tercera ley de Newton

$$\frac{m_1 m_2}{M} \frac{d^2}{dt^2} r_3 = F_{21}.$$

Haciendo un cálculo con las ecuaciones anteriores, obtenemos

$$\frac{m_1 m_2}{M} \frac{d^2}{dt^2} r_3 = -\frac{\partial}{\partial r_3} U(|r_3|),$$

lo que reduce el problema a un sistema de un cuerpo. En lo siguiente denotaremos $m = \frac{m_1 m_2}{M} r_3$ por r , y $\frac{d}{dt} r$ por v , y $-\frac{\partial}{\partial r} U(|r|)$ por $F(r)$.

Ahora usaremos la conservación del momentum angular. El momentum angular viene dado (para el centro de masa) por

$$L = mr \times v.$$

Haciendo un cálculo, obtenemos para $\rho = |r|$

$$F(r) = -\frac{\partial}{\partial r} U(|r|) = -\frac{r}{\rho} \frac{dU(\rho)}{d\rho},$$

luego el torque τ sobre el centro de masa es

$$\tau := r \times F = 0.$$

En la ausencia de torque, el momentum angular es constante, y por lo tanto $\frac{d}{dt} L = 0$.

Usando la identidad que para cualquier trio de vectores x, y, z se tiene que

$$x \cdot (y \times z) = y \cdot (z \times x) = z \cdot (x \times y),$$

obtenemos que

$$r \cdot L = mr \cdot (r \times v) = mv \cdot (r \times r) = 0.$$

Luego r es perpendicular al momentum angular L , pero como el momentum angular es constante tiene que haber un vector fijo en el espacio tal que la posición del vector r es siempre perpendicular a él. Dado que la posición del vector es siempre perpendicular a cierta orientación en el espacio, entonces el vector posición del centro de masa tiene que siempre pertenecer a un plano.

A causa de esto, el problema se ha ahora reducido a solo dos dimensiones. Luego podemos reescribirlo usando coordenadas polares $\rho \cos \theta$ y $\rho \sin \theta$, donde hicimos la elección de escoger el plano perpendicular a la orientación del momentum angular. Recordemos que en coordenadas polares se tiene

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2.$$

Haciendo un calculo, y anotando $l = |L|$, obtenemos

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{m\rho^2}.$$

Finalmente, usamos la conservación de la energía. Ya que el movimiento de los cuerpos es debido a la función de energía potencial, entonces se conserva

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(\rho).$$

La conservación de la energía en coordenadas polares viene dada por

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2 + U(\rho).$$

Substituyendo la ecuación para $\dot{\theta}$, obtenemos

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2 \left(\frac{l}{m\rho^2} \right)^2 + U(\rho).$$

Denotando $U_{eff}(\rho) := \frac{1}{2}\frac{l^2}{m\rho^2} + U(\rho)$, el problema original se redujo al siguiente sistema de dos ecuaciones

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + U_{eff}(\rho), \\ \dot{\theta} &= \frac{l}{m\rho^2}. \end{aligned}$$

La primera ecuacion se puede resolver usando el curso de EDO, luego en la segunda se puede reemplazar ρ e integrar con respecto a t para obtener

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{l}{m} \int_0^t \frac{dy}{\rho^2(y)}.$$

Finalmente, queda como ejercicio probar que la solución de la ecuación permite deducir que los movimientos de un cuerpo con respecto al otro viene dado por las secciones cónicas, i.e., hipérbolas, parábolas, elipses y círculos (y segmentos de línea).

Este problema se llama usualmente problema de Kepler, y su solución se conoce desde 1710 (demostrado por Johann Bernoulli). El problema original es en sistema de EDOs con 12 ecuaciones (3 variables de posición y 3 de velocidad para cada cuerpo), sin embargo, haciendo uso de la conservación de la energía, y del momentum angular y lineal, se reduce a un sistema de EDOs con solo 2 ecuaciones.

En el año 1887 se pensaba era posible resolver el problema para tres cuerpos, más aún, el premio del rey Oscar II de Suecia y Noruega se le otorgaría el 21

de Enero del 1889, en honor a su cumpleaños 60, a quien resolviera uno de los cuatro problemas escogidos por K. Weierstrass, C. Hermite y G. Mittag-Leffler, uno de los cuales era el siguiente: *Dado un sistema de cierto número arbitrario de masas puntuales, atrayendose entre ellas de acuerdo a las leyes de Newton, tratar de encontrar, bajo el supuesto que dos puntos nunca chocan, una representación de las coordenadas de cada punto como una serie en una variable que es una función conocida en el tiempo y que para todos sus valores la serie converge uniformemente.*

El premio fue ganado por Henri Poincaré, quien no pudo resolver el problema, sin embargo su trabajo desarrollaba una nueva manera cualitativa y geométrica de entender este problema. Según el este problema proveyó una fuente inexhaustible de resultados para las futuras generaciones, el problema era muy difícil para el sólo, y que al menos el había entendido que nadie resolverá este problema solo. El paper de H. Poincaré se publico en el volumen 13 de Acta Mathematica del 1890, y tenía 270 páginas. Actualmente es considerado el inicio de la teoría de sistemas dinámicos. Motivación de la clase y más en [DF].

Tarea: ver simulación de solución al problema con condición inicial del problema de los tres cuerpos. Buscar simulaciones del problema del pendulo doble y del pendulo caótico (con imanes).

2. El teorema de Poincaré-Bendixon

clase 2, 12 de abril de 2024

En el contexto de esta parte del curso, un sistema dinámico se puede asociar a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), donde el estado x que resuelve la ecuación tiene asociada una condición inicial x_0 y eventualmente también cierto parámetro p

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, p), x \in \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}^k \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{1}$$

La trayectoria de las soluciones se pueden representar geoméricamente en \mathbb{R}^n , mediante un *diagrama de fases*. Por ejemplo recordar el diagrama de fases de sistemas autónomos lineales con coeficientes constantes del curso de EDO :

$$\dot{x} = Ax, A \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Ejemplo sistemas autónomos lineales con coeficientes constantes en dimensión 2 El diagrama de Poincaré (caso $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$) resume la información obtenida de resolver la ecuación para los valores propios:

$$\lambda - Tr(A)\lambda + \det(A) = 0, \lambda = \frac{Tr(A) \pm \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Poincaré Diagram: Classification of Phase Portraits in the $(\det A, \text{Tr } A)$ -plane

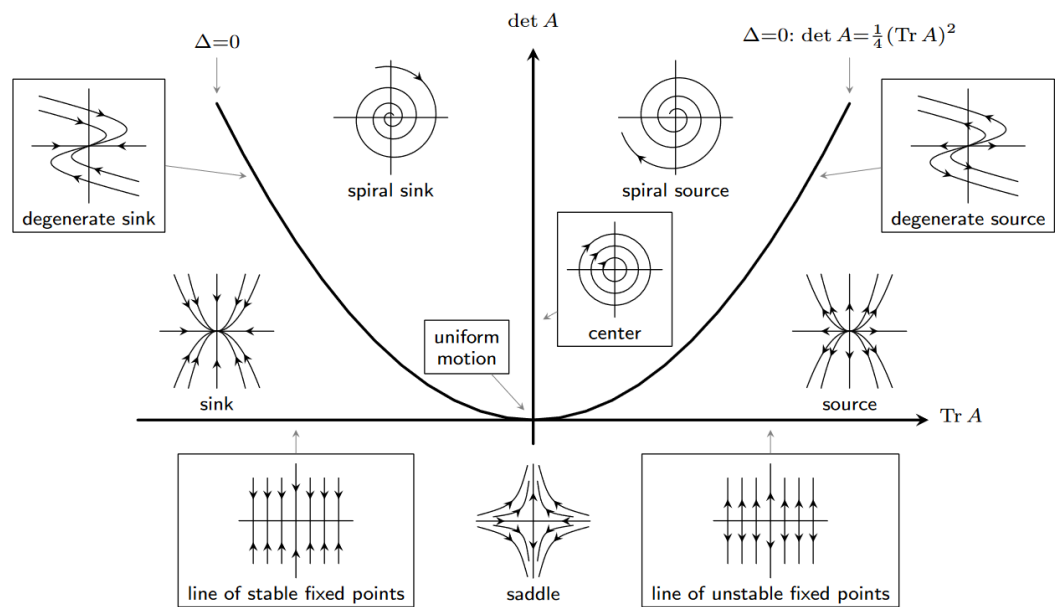


Figura 3: Diagram de Poincaré

Ejercicio: Jugar con diagramas de fases en <https://aeb019.hosted.uark.edu/pplane.html>

Construcción de un sistema dinámico a partir de un sistema de ecuaciones

Dada el sistema de ecuaciones diferenciales 1 sin condición inicial, consideramos el operador de evolución

$$\begin{aligned}\varphi_t : X &\rightarrow X, \\ x_0 &\mapsto \varphi_t(x_0) = x(t)\end{aligned}\tag{2}$$

donde $t \in \mathbb{R}$ y $x(t)$ es la solución del problema con condición inicial 1 evaluado en t . Notar que para que esta definición tenga sentido es necesario que $X \subset \mathbb{R}^n$ sea tal que el problema con condición inicial para todo $x_0 \in X$ tenga una única solución.

Notar que el sistema construido cumple las siguientes condiciones

1. $\varphi_0(x_0) = x_0$.
2. $\varphi_{t+s}(x_0) = \varphi_t(\varphi_s(x_0))$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$.

Estas propiedades del sistema dinámico asociado al sistema de ecuaciones diferenciales usualmente se generalizan. De este modo, puede definirse en general un sistema dinámico continuo como cualquier función 2 cumpliendo las dos condiciones anteriores.

2.1. Definiciones

Definición 2.1 (Sistema dinámico continuo) *Un sistema dinámico continuo (X, φ_t) viene dado por un conjunto X y un operador de evolución*

$$\begin{aligned}\varphi_t : X &\rightarrow X \\ x_0 &\mapsto \varphi_t(x_0) = x_t\end{aligned}$$

donde $t \in \mathbb{R}$, tal que

1. $\varphi_0(x_0) = x_0$ para todo $x_0 \in X$, y
2. $\varphi_{t+s}(x_0) = \varphi_t(\varphi_s(x_0))$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$.

Definición 2.2 (Órbita) *Una órbita por x_0 es el conjunto*

$$\mathcal{O}(x_0) = \cup_{t \in \mathbb{R}} \varphi_t(x_0)$$

Cada órbita tiene asociada una dirección que puede ser positiva o negativa de acuerdo a la dirección de $\varphi_t(x_0)$ con respecto a $\mathcal{O}(x_0)$ cuando varía $t \in \mathbb{R}$.

Definición 2.3 (Puntos equilibrio) Un punto x_0 es un punto de equilibrio si $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0\}$.

Definición 2.4 (Órbitas periódicas) Una órbita $\mathcal{O}(x_0)$ es periódica si existe un intervalo $[0, T] \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{O}(x_0) = \cup_{t \in [0, T]} \varphi_t(x_0).$$

El intervalo minimal con tal propiedad viene determinado por el periodo $T^* \in \mathbb{R}$ de la órbita.

Definición 2.5 (Diagrama de fases) El diagrama de fases de un sistema dinámico es una partición de X en órbitas.

Definición 2.6 (Conjunto invariante) Un conjunto invariante es un subconjunto $S \subset X$ tal que si $x_0 \in S$, entonces $\varphi_t(x_0) \in S$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Los conjuntos invariantes maximales son muy importantes en sistemas dinámicos, su geometría es en muchos casos interesante, y son la 'clave' para entender el sistema (codificación, entropía, etc.). Ejemplo básico de conjuntos invariantes: órbitas.

Definición 2.7 (puntos no-errantes) Un punto p es no-errante para el flujo φ_t si para cualquier vecindad \mathcal{U} de p , existe t arbitrariamente grande tal que $\varphi_t(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. El conjunto de puntos no-errantes se llama conjunto no-errante y se denota por Ω .

Definición 2.8 (conjuntos estables) Un conjunto invariante A se dice estable si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. (Estabilidad de Lyapunov) para toda vecindad suficientemente pequeña \mathcal{U} de A , existe una vecindad \mathcal{V} de A tal que

$$\varphi_t(x) \in \mathcal{U}, \forall x \in \mathcal{V}, \forall t > 0;$$

2. (Estabilidad asintótica) existe una vecindad \mathcal{U}_0 de A tal que para todo $x \in \mathcal{U}_0$ existe $T > 0$ suficientemente grande tal que $\varphi_t(x) \in \mathcal{U}_0$ para todo $t > T$.

Ejemplo. Demuestre que el conjunto estable es $\{0\}$ para el sistema dinámico asociado al sistema de EDOs con condición inicial $\dot{x} = Ax, x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^2$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Definición 2.9 (Atractor) Un atractor es un conjunto estable que contiene una órbita densa. Un repulsor es el conjunto análogo invirtiendo el sentido del tiempo $t - t$.

Observar que generaliza la noción de equilibrios y ciclos atractores, tomando A un punto equilibrio o una órbita periódica, respectivamente. Por lo tanto dos atractores sencillos son los puntos fijos y los ciclos límite.

Teorema 2 (Poincaré-Bendixon) *Considere el sistema con $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$*

$$\dot{x} = f(x). \quad (3)$$

Si existe $K \subset \mathbb{R}^2$ tal que se tiene las 3 propiedades siguientes.

1. *K es cerrado y acotado.*
2. *El sistema (3) no tiene puntos de equilibrio en K (i.e., no existe $x_0 \in K$ tal que $f(x_0) = 0$).*
3. *Existe $x_0 \in K$ tal que la solución x del problema con condición inicial (3) con $x(0) = x_0$ satisface $x(t) \in K$ para todo $t \geq 0$.*

Entonces (3) tiene una solución periódica no trivial en K .

2.2. Ejemplos

Veamos algunos ejemplos de sistemas dinámicos continuos.

Sistema de Lorenz

Por ejemplo, sistema de Lorenz se le llama al sistema de EDOs

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(r - z) - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

donde $\sigma, r, b \in \mathbb{R}$ son parámetros del sistema. El sistema de Lorenz corresponde a un modelo simplificado para modelar convección atmosférica (movimiento del aire debido a capas de aire a diferentes temperatura). En sistemas dinámicos hay estados a los que los sistemas tienden cuando avanza el tiempo, para una gran cantidad de condiciones iniciales del sistema. Por ejemplo, cuando el sistema esta determinado por un sistema de ecuaciones diferenciales. Los atractores son extraños cuando la evolución del sistema partiendo de puntos distintos resulta en trayectorias exponencialmente divergentes (formalizaremos más adelante). Por ejemplo, un pendulo simple con energia disipativa, tiene un atractor (no extraño) en el punto de menor altura. Existen parámetros $\sigma = 10, r = 28, b = 8/3$, para los que el atractor es extraño.

Un ejemplo de ecuación no lineal

Con sideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x} = -6y, \\ \dot{y} = y^2 - x^2 \end{cases}$$

Que puede decirse de las órbitas cercanas a los puntos de equilibrio? Responderemos a esta pregunta usando el teorema de Hartman-Grobman [ir a ayudantía 2].

Sistema de Hopf

Viene dado por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

Hay órbitas periódicas? Responderemos a esta pregunta usando el teorema de Poincaré-Bendixson [ir a ayudantía 1].

Sistema de glicolisis

Con sideremos el siguiente sistema de glicolisis

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y/10 + x^2y, \\ \dot{y} = 1/2 - y/10 - x^2y \end{cases}$$

Hay órbitas periódicas? Responderemos a esta pregunta usando el teorema de Poincaré-Bendixson [ir a ayudantía 1].

Problema en Tarea 1

Demuestre (usando teorema de Poincaré-Bendixson) que los sistemas (4) y (5) tienen cada una al menos una solución periódica.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2) \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + by + x^2y \\ \dot{y} = a - by - x^2y \end{cases} \tag{5}$$

donde $a, b > 0$.

Construya un ejemplo de un flujo bidimensional con un atractor que no tenga puntos de equilibrios ni órbitas periódicas.

2.3. Temas para presentaciones

Para las presentaciones puede escogerse entre los siguientes tema. El objetivo de las presentaciones de familias de sistemas dinámicos consiste en describir las definiciones básicas, enunciar y probar alguna propiedad básica, y mostrar algún ejemplo. Los temas son los siguientes.

1. Sistemas iterados de funciones (IFS).
2. Dinámica compleja.

3. Fractales.
4. Automatas celulares.
5. Funciones de cambios de intervalo (Interval exchange transformation).
6. Dinámica simbólica.

3. Demostración del teorema de Poincaré-Bendixon clases 4 y 5, 19 y 25 de abril 2024

Antes de demostrar el teorema, es bueno hacerse una idea de como se ven los diagramas de fases para sistemas en que el teorema puede aplicarse, ya que gran parte de la demostración tiene una motivación geométrica proveniente de un ejemplo.

Definición 3.1 (Sección) Una sección o sección transversal es un segmento de línea $S = \{\lambda x_0 + (1 - \lambda)x_1 : \lambda \in (0, 1)\}$ tal que para todo $x \in S$, $f(x)$ no se anula y no es paralelo a S .

Teorema 3 (Cajas de flujo) Sea S una sección y $x_0 \in S$. Entonces existe un conjunto abierto U con $x_0 \in U$ y una función $\tau : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi_{\tau(x)}(x) \in S$ para todo $x \in U$.

La demostración la dejaremos para el final de clase, si es que hay tiempo, ya que usa el teorema de la función implícita. De todas formas, aca recordemos el teorema de la función implícita, que nos da un criterio para resolver una ecuación $F(x, y) = 0$ para y en función de x .

Teorema 4 (Teorema de la función implícita) Suponga que $S \subset \mathbb{R}^{n+k}$ es un abierto y $F : S \rightarrow \mathbb{R}^k$ es una función de clase C^1 . Suponga también que $(a, b) \in S$, que $F(a, b) = 0$ y que $\det D_y F(a, b) \neq 0$. Entonces,

1. Existe $r_0, r_1 > 0$ tal que para todo $x \in B(a, r_0)$, existe un único $y \in B(b, r_1)$ con

$$F(x, y) = 0.$$

2. La función $f : B(a, r_0) \rightarrow B(b, r_1) \subset \mathbb{R}^k$ arriba es de clase C^1 , y la derivada se puede calcular derivando

$$F(x, f(x)) = 0$$

y resolviendo para las derivadas parciales de f .

Dem. [Cajas de flujo] Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x_0 = (0, 0)$ y que S es un subconjunto de $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Definiendo $F(x, t) = \pi_1(\varphi_t(x))$ para π_1 donde $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi_1(x, y) = x$. Tenemos que

$$F(x_0, 0) = \pi_1(\varphi_0(x_0)) = \pi_1(x_0, 0) = x_0 = 0$$

y que

$$D_t F(x_0, 0) = \pi_1(D_t \varphi_0(x_0)) = \pi_1(f(x_0)) = \pi_1(f(0)) \neq 0$$

por la hipótesis de sección de S , que $f(0) \neq 0$, pues no se anula en la sección, y el caso que queda que $f(0) = (0, \lambda)$ para $\lambda \neq 0$, implicaría que la dirección del flujo en 0 que es $f(0)$ es paralela a la dirección de la sección S . Finalmente, puede probarse que F es C^1 , y usando el Teorema de la función implícita existe U y $\tau : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in U$ se tiene que $F(x, \tau(x)) = \pi_1(\varphi_{\tau(x)}(x)) = 0$, i.e. $\varphi_{\tau(x)}(x) \in S$. \square .

En clase 4 demostraremos el siguiente lema, donde el concepto de interseccionar la sección de manera ordenada lo definiremos en clases.

Lema 1 *Dada una sección S por x_0 . El flujo $\varphi_t(x_0)$ intersecciona la sección S de manera ordenada.*

Ahora, dado un punto x_0 , introduciremos la definición de puntos ω -límites de x_0 (también conocidos como límites débiles de x_0) y conjuntos ω -límite de x_0 (también conocidos como conjunto límites débiles de x_0)

Definición 3.2 (Puntos ω -límites de x_0) *Un punto $y \in \mathbb{R}^2$ es ω -límite de x_0 si existe una secuencia de tiempos $t_1 < t_2 < \dots$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{t_n}(x_0) = y.$$

Definición 3.3 (Conjuntos ω -límites) *Es el conjunto de todos los puntos ω -límites de x_0 . Denotamos este conjunto por $\omega(x_0)$.*

Bajo la hipótesis de $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, denotamos por $\varphi_t(x_0)$ el flujo C^1 correspondiente a la solución única del problema $\dot{x} = f(x), x(0) = x_0$. Tenemos los siguientes lemas.

Lema 2 *Sea $y_0 \in \omega(x_0)$. Entonces*

1. $\varphi_s(y_0) \in \omega(x_0)$, para todo $s \in \mathbb{R}$.
2. Si $z_0 = \varphi_s(y_0)$ para algún $s \in \mathbb{R}$, entonces $z_0 \in \omega(x_0)$.
3. Si $w_0 \in \omega(y_0)$, entonces $w_0 \in \omega(x_0)$.

La demostración del Lema 2 es parte de la tarea 1.

Lema 3 *Para $y_0 \in \omega(x_0)$ y S una sección cualquiera, se tiene que $\varphi_t(y_0)$ intersecciona S en a lo más un punto.*

La demostración del Lema 3 es parte de la clase 4.

Finalmente, podemos demostrar el teorema.

Dem. [Poincaré-Bendixon] Sea x_0 de la hipótesis. Por teorema de Bolzano-Weierstrass, como K es cerrado y acotado, $\omega(x_0) \neq \emptyset$, y $\omega(x_0) \subset K$, pues K es cerrado. Como K no contiene puntos de equilibrio, y $\omega(x_0) \subset K$, entonces tiene que haber una sección transversal S a x_0 dentro de K , y a cada uno de los puntos de la trayectoria de la solución. Ahora tomemos cualquier punto $y_0 \in \omega(x_0)$, y consideremos $\varphi_t(y_0)$, queremos demostrar que tiene una órbita periódica. Para esto tomemos $z_0 \in \omega(y_0)$. Sabemos que $\varphi_s(y_0) \in \omega(x_0) \subset K$ para todo $s \geq 0$. Entonces, como K es cerrado $\omega(y_0) \subset K$ y $z_0 \in K$, y tampoco es equilibrio porque en K no hay puntos de equilibrio, entonces podemos tomar la sección S que contiene al punto z_0 . Sabemos que $\varphi_t(y_0)$ interseca a S en a lo más un punto. Pero el flujo $\varphi_t(y_0)$ tiene que intersectar S infinitas veces, pues $z_0 \in \omega(y_0)$, pero como solo lo puede intersectar por un punto, entonces lo interseca infinitas veces por un único punto. Esto concluye que hay una órbita periódica. \square

4. Estabilidad de equilibrios hiperbólicos

ayudantía del 22 de abril 2024

Considere el sistema de ecuaciones

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n, \quad (6)$$

donde $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. El teorema de Hartman-Grobman nos permite demostrar que localmente el sistema el sistema linealizado es topológicamente equivalente al sistema original en torno a los equilibrios hiperbólicos. Y por lo tanto, es posible usar la tecnología desarrollada para sistemas lineales para describir localmente el comportamiento en el equilibrio del sistema original.

Definición 4.1 (Equilibrio hiperbólico) *Dado el sistema de ecuaciones (6) donde $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, un equilibrio $x_0 \in \mathbb{R}^n$ del sistema se dice hiperbólico si $Df(x_0)$, la matriz Jacobiano de f en x_0 , no tiene valores propios con parte real nula.*

Ahora definiremos el concepto de sistema dinámico localmente topológicamente equivalente, donde recordemos que un homeomorfismo es una función continua cuya inversa también es continua.

Definición 4.2 *Un sistema dinámico continuo (X, φ_t) es localmente topológicamente equivalente en una vecindad del \mathcal{V} del origen al sistema dinámico $(Y, \tilde{\varphi}_t)$, si existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ que transforma órbitas de φ_t en órbitas $\tilde{\varphi}_t$, para todo $t \in \mathcal{V}$.*

Teorema 5 (Hartman-Grobman) *Si el sistema de ecuaciones (6) tiene un equilibrio hiperbólico x_0 , entonces existe una vecindad U de x_0 tal que el sistema (6) en U es localmente topológicamente equivalente al sistema linealizado*

$$\dot{x} = Df(x_0)x$$

en una vecindad \mathcal{V} del origen.

Por lo tanto, como conocemos las dinámicas del sistema lineal, recordar curso de edo del semestre pasado, entonces conocemos localmente la dinámica local en torno a los equilibrios hiperbólicos de sistemas no-lineales también.

5. Dinámica de funciones del círculo

clases 6,8 y 9, 26 de abril, y 3 y 9 de mayo 2024

En este capítulo se partirá con una familia básica de homeomorfismos del círculo, las rotaciones. Luego se presentaran criterios para determinar cuando un homeomorfismo (cualquiera) del círculo es dinámicamente equivalente a una rotación.

5.1. Rotaciones del círculo

clase 6, 26 abril de 2024

Definición 5.1 (Rotación en el círculo) Dado $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ definimos $T : K \rightarrow K$, $T(x) = e^{i2\pi\alpha}z$. Este sistema dinámico (K, T) se conoce como rotación en el círculo por el ángulo $2\pi\alpha$.

Una notación alternativa es la siguiente.

Definición 5.2 (Rotación en \mathbb{R}/\mathbb{Z}) Dado $K = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y $\alpha \in (0, 1)$, definimos $T : K \rightarrow K$, $T(x) = x + \alpha \pmod{1}$.

Proposición 1 Si α es irracional entonces para todo $z \in K$ $\{T^n z : n \geq 0\}$ es denso en K .

La demostración se ve en clase 4. En general se define el concepto de sistema topológicamente transitivo, minimales y únicamente ergódicos.

Definición 5.3 (Topológicamente transitivo) Decimos que $f : X \rightarrow X$ es topológicamente transitivo si existe un $x \in X$ tal que la órbita $\{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ es densa en X .

Una definición más fuerte es la de minimalidad.

Definición 5.4 (Minimal) Decimos que $f : X \rightarrow X$ es minimal si para todo $x \in X$, la órbita $\{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ es densa en X .

Definición 5.5 (Únicamente ergódico) Sea X un espacio métrico compacto y $f : X \rightarrow X$ una función continua. Decimos que f es únicamente ergódica si para toda función continua $\phi \in C(X, \mathbb{R})$, la secuencia $(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(f^k x))$ converge a una función constante.

En la clase 4 se demuestra que las rotaciones por ángulos irracionales son minimales y únicamente ergódicos. El hecho que sea únicamente ergódico se aplica para determinar la distribución con que el primer dígito de $\{2^n : n \geq 1\}$ es p , donde $p \in \{1, \dots, 9\}$ está fijo.

5.2. Número de rotación

clase 8, 3 de mayo 2024

El objetivo de esta parte del curso es estudiar cuando un homeomorfismo del círculo es 'dinámicamente' equivalente a una rotación.

La clave para esto es el *número de rotación* introducido por Poincaré, y que se define a partir de levantamientos de funciones del círculo.

Partamos con algunas definiciones generales. En clases se explicará la definición de conjugación topológica.

Definición 5.6 Una función $f : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo si f es continua, inyectiva, sobreyectiva, y f^{-1} es continua. Si las derivadas $f, f', \dots, f^{(r)}$ existen y son continuas, entonces f se dice de clase C^r . La función f se dice que es un C^r -difeomorfismo si f es un C^r -homeomorfismo y f^{-1} es de clase C^r .

Definición 5.7 Dadas las funciones $f : X \rightarrow X$ y $g : Y \rightarrow Y$. Se dice que f es semi-conjugada con g si existe una función continua sobreyectiva $h : X \rightarrow Y$ tal que $h \circ f = g \circ h$. Si h es también inyectiva, entonces f y g se dicen topológicamente conjugados.

Y ahora algunas definiciones particulares, donde es conveniente considerar $K = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Definición 5.8 Se define la función $\pi : \mathbb{R} \rightarrow K = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $x \mapsto x \pmod{1}$.

Definición 5.9 Dado un homeomorfismo del círculo $f : K \rightarrow K$. Decimos que una función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un levantamiento de f si $f \circ \pi = \pi \circ F$.

Definición 5.10 Dado un homeomorfismo del círculo $f : K \rightarrow K$. Se dice que f preserva la orientación si f puede levantarse a un homeomorfismo monotonamente creciente $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Las rotaciones del círculo son ejemplos de homeomorfismos del círculo que preservan orientación. Recordemos que se definen por $R : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, tal que $R(x) = x + \alpha \pmod{1}$, para algún $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo.

En ayudantía se verán ejemplos de levantamientos y problemas relacionados. Ahora definiremos el número de rotación utilizando el siguiente teorema.

Teorema 6 (Número de rotación) Sea $f : K \rightarrow K$ un homeomorfismo del círculo que preserva orientación, y $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un levantamiento de f . El límite

$$\rho(F) := \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$$

existe para todo $x \in \mathbb{R}$, y su valor no depende de $x \in \mathbb{R}$. Llamaremos a $\rho(F)$ el número de rotación del levantamiento F . Además, dado cualquier otro levantamiento G de f , se tiene que $\rho(F) - \rho(G) \in \mathbb{Z}$.

En la demostración usamos la siguiente observación y proposición.

Observación 1 Si $f : K \rightarrow K$ preserva orientación y $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un levantamiento de f , entonces para cada $w \in K$ existen contables $x \in \mathbb{R}$ tales que $\pi(x) = w$, esto es, si $\pi(x) = w$, entonces $\pi(x+1) = w$. Luego $F(x+1) = F(x) + 1$, y en general $F(x+z) = F(x) + z$ para $z \in \mathbb{Z}$.

Proposición 2 Sea $f : K \rightarrow K$ un homeomorfismo del círculo que preserva orientación, y sea F un levantamiento. Si $|x-y| < 1$, entonces $|F(x)-F(y)| < 1$. Sigue que $|F^n(x) - F^n(y)| < 1$.

Dem. [Demostración Teorema 6] Ya que f preserva orientación, entonces F es monótona creciente. Luego

$$|F(x) - F(y)| < |F(x+1) - F(x)| = |F(x) + 1 - F(x)| = 1.$$

□

Dem.[Número de rotación] Primero asumamos que el límite existe para todo $x \in \mathbb{R}$ y demostremos que el límite es independiente de la elección de x . Sean $x, y \in [0, 1)$ fijos, entonces

$$\left| \frac{(F^n(x) - x) - (F^n(y) - y)}{n} \right| \leq \frac{|F^n(x) - F^n(y)| + |x - y|}{n} \leq \frac{2}{n},$$

pasando al límite concluye el resultado. Ahora probemos que el límite existe, considerando los dos casos siguientes.

- Caso 1: f tiene un punto periódico $w \in K$ de periodo m . Se tiene que para $x \in \mathbb{R}$ tal que $\pi(x) = w$, $F^m(x) = x + k$, para algún $k \in \mathbb{Z}$. Sigue de la observación que $F^{jm}(x) = x + jk$, para $j \in \mathbb{Z}$. Luego

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|F^{jm}(x) - x|}{jm} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{jk}{jm} = \frac{k}{m}.$$

Ahora demostraremos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|F^{jm}(x) - x|}{jm} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|F^n(x) - x|}{n}.$$

Para esto, notar que para todo $n \in \mathbb{N}$, existen $j, r \in \mathbb{N}$ con $0 \leq r < m$ tales que $n = jm + r$. Ya que r es acotado, existe $M > 0$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $|F^r(x) - x| < M$. Luego

$$\frac{|F^n(x) - x - (F^{jm}(x) - x)|}{n} = \frac{|F^r(F^{jm}(x)) - F^{jm}(x)|}{n} \leq \frac{M}{n},$$

tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$ se concluye el resultado.

- Caso 2: f no tiene ningún punto periódico. Entonces para todo $x \in \mathbb{R}$, $F^n(x) - x$ nunca es un entero para $n \neq 0$. Luego existe un $z \in \mathbb{Z}$ tal que $z < F^n(x) - x < z + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Para $n, m \geq 1$,

$$F^{nm}(0) = (F^n(F^{n(m-1)}(0)) - F^{n(m-1)}(0)) + \dots + (F^n(F^n(0)) - F^n(0)) + F^n(0),$$

luego $mz < F^{nm}(0) < m(z + 1)$ y dividiendo por n ,

$$\frac{z}{n} < \frac{F^{nm}(0) - 0}{mn} < \frac{z + 1}{n}.$$

Luego

$$\left| \frac{F^{nm}(0) - 0}{mn} - \frac{F^n(0)}{n} \right| < \frac{1}{n}.$$

Y en lo mismo puede hacerse cambiando n por m en la desigualdad anterior. Finalmente,

$$\left| \frac{F^n(0) - 0}{n} - \frac{F^m(0) - 0}{m} \right| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m},$$

luego la secuencia $\left\{ \frac{F^n(0) - 0}{n} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es de Cauchy y por lo tanto converge.

Para la última parte de la demostración notar que si F, G son dos levantamientos de f entonces como los levantamientos solo pueden diferir en un entero, tiene que existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $F = G + k$, sigue que $F^n(x) = G^n(x) + nk$, y luego $\rho(F) = \rho(G) + k$, lo que concluye la demostración. \square

Ahora podemos definir el número de rotación de un homeomorfismo del círculo en general.

Definición 5.11 Dado un homeomorfismo $f : K \rightarrow K$, definimos el número de rotación de f como

$$\rho(f) := \rho(F) \pmod{1},$$

donde F es algún levantamiento de f .

5.3. Teoremas de Poincaré y de Devaney para funciones del círculo

clase 9, 9 de mayo 2024

Condiciones suficientes, pero difíciles de aplicar, para que un homeomorfismo del círculo sea dinámicamente equivalente a una rotación es el siguiente teorema. (En la clase 9, la demostración del Lema 6 no hará, por lo que queda como ejercicio opcional leerla/hacerla).

Teorema 7 (Teorema de Poincaré para funciones del círculo) Si $f : K = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow K$ es un homeomorfismo minimal del círculo, que preserva dirección y con número de rotación irracional, entonces f es topológicamente conjugado a una rotación irracional por ángulo ρ , $R_\rho : K \rightarrow K$, $R_\rho(x) = x + \rho \pmod{1}$.

En la demostración usaremos el siguiente lema.

Lema 4 *Suponga que $f : K \rightarrow K$ tiene número de rotación irracional $\rho = \rho(f)$. Entonces:*

1. Sean $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ con $n_1 \neq n_2$. Si $F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$ para algún x , entonces $F^{n_1}(y) + m_1 < F^{n_2}(y) + m_2$ para todo y .
2. La biyección

$$\Lambda \ni F^n(0) + m \mapsto n\rho + m \in \Omega,$$

para

$$\Omega = \{n\rho + m : n, m \in \mathbb{Z}\} \text{ y}$$

$$\Lambda = \{F^n(0) + m : n, m \in \mathbb{Z}\},$$

preserva el orden usual en \mathbb{R} .

Dem.[Demostracion Lema 4]

1. Asuma por contradicción que hay un x tal que $F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$ y un y tal que $F^{n_1}(y) + m_1 > F^{n_2}(y) + m_2$. Entonces por teorema del valor intermedio existe un $z \in \mathbb{R}$ tal que $F^{n_1}(z) + m_1 = F^{n_2}(z) + m_2$, luego $F^{n_1}(z) - F^{n_2}(z) \in \mathbb{Z}$, y por consiguiente $f^{n_1-n_2}(z) = z$, lo que es una contradicción, pues el número de rotación es irracional, y en la demostración del Teorema 6 vimos que si hay un punto periodico entonces el número de rotación es racional.
2. Asuma sin pérdida de generalidad que para $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ se tiene que $F^{n_1}(0) + m_1 < F^{n_2}(0) + m_2$. Es suficiente demostrar que $n_1\rho + m_1 < n_2\rho + m_2$. Denotemos $y = F^{n_2}(0)$, luego podemos escribir $F^{n_1-n_2}(y) - y < m_2 - m_1$. Además, por la parte recién demostrada esta desigualdad es válida para todo $y \in \mathbb{R}$. En particular, cuando $y = 0$, se obtiene $F^{n_1-n_2}(0) < m_2 - m_1$. Cuando $y = F^{n_1-n_2}(0)$, se obtiene que $F^{2(n_1-n_2)}(0) < m_2 - m_1 + F^{n_1-n_2}(0) < 2(m_2 - m_1)$. Luego cuando $y = F^{(n-1)(n_1-n_2)}(0)$, se obtiene que $F^{n(n_1-n_2)}(0) < n(m_2 - m_1)$. Luego

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^{n(n_1-n_2)}(0)}{n(n_1-n_2)} < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(m_2 - m_1)}{n(n_1 - n_2)}.$$

Adicionalmente, la desigualdad es estricta pues ρ es irracional. Finalmente, se concluye que $n_1\rho + m_1 < n_2\rho + m_2$. \square

Ahora podemos escribir la demostración de Teorema 7.

Dem.[Demostración Teorema 7] En la demostración usaremos Ω y λ del Lema 4. Como ρ es irracional, entonces Ω es denso en \mathbb{R} . Ya que f es minimal, entonces Λ es denso en \mathbb{R} , ya que $\{f^n(0) : n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en K . Denotemos

$\tilde{\pi} : \Lambda \rightarrow \Omega$ la biyección que preserva el orden dada por el Lema 4, y extendamosla a un homeomorfismo de \mathbb{R} , $\tilde{\pi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Luego, se tiene que para $x = F^n(0) + m$,

$$\tilde{\pi} \circ F(x) = \tilde{\pi}(F(F^n(0) + m)) = \tilde{\pi}(F^{n+1}(0) + m) = (n+1)\rho + m,$$

y para el levantamiento de R_ρ dado por $\overline{R}_\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\overline{R}_\rho(x) = x + \rho$ se tiene que

$$\overline{R}_\rho \circ \tilde{\pi}(x) = \overline{R}_\rho \circ \tilde{\pi}(F^n(0) + m) = \tilde{\pi}(F^n(0) + m) + \rho = (n+1)\rho + m,$$

lo que demuestra que $\tilde{\pi}$ es un levantamiento de $\pi : K \rightarrow K$ con $\pi \circ f = R_\rho \circ \pi$.
□

A continuación veremos un teorema que reemplaza la condiciones de minimalidad por un criterio que es más directo de verificar, para esto es necesario introducir el concepto de función de variación acotada.

Definición 5.12 (Variación acotada) *Decimos que una función continua $\omega : K \rightarrow \mathbb{R}$ tiene variación acotada si*

$$var(\omega) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} |\omega(x_{i+1}) - \omega(x_i)| : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1 \right\}$$

es finito.

Teorema 8 (Teorema de Denjoy para funciones del círculo) *Sea $f : K \rightarrow K$ un homeomorfismo del círculo que preserva orientación con número de rotación irracional $\rho = \rho(f)$. Adicionalmente, asuma que $f : K \rightarrow K$ es de clase C^1 y que*

$$\omega(x) := \log |f'(x)|$$

tiene variación acotada. Entonces $f : K \rightarrow K$ es topológicamente conjugado a una rotación irracional por ángulo ρ , $R_\rho : K \rightarrow K$, $R_\rho(x) = x + \rho \pmod{1}$.

En la demostración se usaran los siguientes lemas para demostrar que f es minimal.

Lema 5 *Si existe $C > 0$ y una secuencia de enteros $q_n \uparrow +\infty$ tal que*

$$|(f^{q_n})'(x)| |(f^{-q_n})'(x)| \geq C,$$

entonces $f : K \rightarrow K$ es minimal.

Dem.[Demostración Lema 5] Asumiendo por contradicción que f no es minimal, entonces existe $x \in K$ tal que $\cup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(x) =: Y \subsetneq K$. Escogiendo un intervalo maximal $I_0 \subset K \setminus Y$ con puntos de borde en Y . Observar que los intervalos $I_n := f^n I_0$ para $n \in \mathbb{Z}$ son intervalos maximales distintos. Pues, si dos de estos intervalos se intersectan, entonces deben ser iguales y los puntos de borde

serian puntos periodicos, contradiciendo que ρ es irracional.
 Sea $|I_n|$ el largo de I_n , entonces ya que son disjuntos se tiene que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |I_n| \leq 1,$$

luego $|I_n| \rightarrow 0$ cuando $|n| \rightarrow \infty$.

Dado q_n se puede escribir

$$\begin{aligned} |I_{q_n}| + |I_{-q_n}| &= \int_{I_0} (|(f^{q_n})'(x)| + |(f^{-q_n})'(x)|) dx \\ &\geq 2 \int_{I_0} \sqrt{(|(f^{q_n})'(x)| \cdot |(f^{-q_n})'(x)|)} dx \\ &\geq 2\sqrt{C}|I_0|, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Donde la primera igualdad es por cambio de variable, y la primera desigualdad viene de la desigualdad entre media aritmética y media geométrica. Esto contradice que $|I_n| \rightarrow 0$ cuando $|n| \rightarrow \infty$. \square

Lema 6 Fije $x \in K$ y denote $x_n = f^n(x)$, $n \in \mathbb{Z}$. Entonces existe una secuencia $q_n \uparrow +\infty$ tal que los intervalos

$$(x_0, x_{q_n}), (x_1, x_{q_n+1}), \dots, (x_i, x_{q_n+i}), \dots, (x_{q_n}, x_{2q_n})$$

son todos disjuntos.

Dem.[Demostración Lema 6] Aún sin suponer minimalidad, la demostración del Teorema 7 prueba que las f -órbitas y las R_ρ -órbitas están ordenadas de la misma manera, por lo que es suficiente probar el resultado para $R_\rho : K \rightarrow K$. Definimos inductivamente q_n como el entero más chico y mayor a q_{n-1} tal que la órbita $\{f^m(x)\}_{m=1}^\infty$ está más cerca de x que la distancia $d(x, f^{q_{n-1}}x)$, esto es

$$q_n := \min\{m \in \mathbb{Z} : m > q_{n-1} \text{ y } d(x, f^m x) < d(x, f^{q_{n-1}} x)\},$$

luego se cumple que

$$d(x, f^{q_1} x) > d(x, f^{q_2} x) > d(x, f^{q_3} x) > \dots$$

Asumiendo por contradicción que $x_i < x_r < x_{i+q_n}$ para $0 \leq i \leq q_n$ y $0 \leq r \leq 2q_n$, se tienen los siguientes casos.

- Caso $r < i$. Entonces

$$x_0 = R_\rho^{-r}(x_r) \in R_\rho^{-r}(x_i, x_{q_n+i}) = (x_{i-r}, x_{q_n+i-r}).$$

Luego,

$$|x_{i-r} - x_0| < |x_{i-r} - x_{q_n+i-r}| = |x_0 - x_{q_n}|,$$

y esto es una contradicción con la definición de q_n , ya que $0 < i - r < q_n$.

- Caso $r > i$. Entonces

$$x_{r-i} = R_\rho^{-i}(x_r) \in R_\rho^{-i}(x_i, x_{q_n+i}) = (x_0, x_{q_n}),$$

y por lo tanto $r - i > q_n$, por definición de q_n . Luego,

$$x_{(r-i)-q_n} = R_\rho^{-q_n}(x_{r-i}) \in R_\rho^{-q_n}(x_0, x_{q_n}) = (x_{-q_n}, x_0).$$

Luego,

$$|x_{(r-i)-q_n} - x_0| < |x_{-q_n} - x_0| = |x_0 - x_{q_n}|.$$

Sin embargo, ya que $0 < (r - i) - q_n < q_n$, lo anterior contradice la definición de q_n . \square

Ahora podemos escribir la demostración de Teorema 8.

Dem.[Demostración Teorema 8] Por definición y el Lema 6 se tiene que

$$\begin{aligned} \text{var}(\log |f'|) &\geq \sum_{i=0}^{q_n-1} |\log |f'(x_i)| - \log |f'(x_{i+q_n})|| \\ &\geq \left| \sum_{i=0}^{q_n-1} \log |f'(x_i)| - \sum_{i=0}^{q_n-1} \log |f'(x_{i+q_n})| \right| \\ &= \left| \log \left| \frac{(f^{q_n})'(x_0)}{(f^{q_n})'(x_{q_n})} \right| \right| \\ &= \left| \log |(f^{-q_n})'(x_{q_n}) \cdot (f^{q_n})'(x_{q_n})| \right|. \end{aligned}$$

Luego

$$|(f^{-q_n})'(y) \cdot (f^{q_n})'(y)| \geq \exp(-\text{var}(\log |f'|)) =: C$$

para todo $y \in K$. Finalmente, por Lema 5 se tiene que $f : K \rightarrow K$ es minimal, y la conclusión se obtiene usando el Teorema 7. \square

6. El teorema de Sharkovsky

clase 7, 2 de mayo 2024

Dada una función continua $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, para I un intervalo cerrado de \mathbb{R} , el teorema de Sharkovsky entrega un orden $\prec_{\text{Sharkovsky}} := \triangleleft$ de los naturales, tal que la existencia de un punto periódico periodo n implica la existencia de un punto periódico para cualquier periodo mayor según el orden dado por \triangleleft .

Para presentar el teorema, usaremos las siguientes definiciones.

Definición 6.1 *Un punto $p \in I$ es periódico de periodo $n \in \mathbb{N}$ para f , si $f^n(p) = p$ y $f^i(p) \neq p$ para $i = 1, \dots, n - 1$.*

Definición 6.2 Un punto $p \in I$ es punto fijo si $f(p) = p$.

Es importante tener en cuenta la siguiente observación.

Observación 2 Observemos que si $p \in I$ es punto fijo de f^n , i.e. $f^n(p) = p$, entonces no es necesariamente punto periódico de periodo n con nuestra definición. Lo que si sabemos es que es un punto periódico de periodo a lo más n . En la literatura inglesa, un punto periódico (con la definición de esta clase) x de periodo n se dice que es un punto periódico con “prime period or least period n .” En español se usa el término “periodo principal o periodo mínimo n ”. Por lo que en esta clase, y solo en esta, abreviaremos punto periódico con periodo principal n simplemente por punto periódico de periodo n .

Definición 6.3 (Orden de Sharkovsky)

$$\begin{array}{cccccccc}
 3 & \triangleleft 2^0 \cdot 5 & \triangleleft 2^0 \cdot 7 & \triangleleft 2^0 \cdot 9 & \triangleleft 2^0 \cdot 11 & \triangleleft \dots & \triangleleft 2^0 \cdot (2m+1) & \triangleleft \dots \\
 \triangleleft 2^1 \cdot 3 & \triangleleft 2^1 \cdot 5 & \triangleleft 2^1 \cdot 7 & \triangleleft 2^1 \cdot 9 & \triangleleft 2^1 \cdot 11 & \triangleleft \dots & \triangleleft 2^1 \cdot (2m+1) & \triangleleft \dots \\
 \triangleleft 2^2 \cdot 3 & \triangleleft 2^2 \cdot 5 & \triangleleft 2^2 \cdot 7 & \triangleleft 2^2 \cdot 9 & \triangleleft 2^2 \cdot 11 & \triangleleft \dots & \triangleleft 2^2 \cdot (2m+1) & \triangleleft \dots \\
 \dots & & & & & & & \\
 \triangleleft \dots & \triangleleft 2^{n+1} \triangleleft & 2^n \triangleleft 2^{n-1} & \triangleleft \dots & \triangleleft 2^2 & \triangleleft 2^1 & \triangleleft 1.
 \end{array}$$

Teorema 9 (Teorema de Sharkovsky) Dado $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y tiene un punto periódico de periodo n . Entonces para cada $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \triangleleft m$, existe al menos un punto periódico de f de período m .

En la clase 7 probamos la siguiente versión débil de este teorema.

Teorema 10 Dado $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y tiene un punto periódico de periodo 3. Entonces ara todo $m \in \mathbb{N}$ existe al menos un punto periódico de f de período m .

Para demostrar el Teorema 10 introduciremos algunas definiciones.

Definición 6.4 (\rightsquigarrow) Decimos que un intervalo J_1 cubre un intervalo J_2 y escribimos $J_1 \rightsquigarrow J_2$ si $J_2 \subset f(J_1)$.

Definición 6.5 (\rightarrow) Si un intervalo J_1 cubre un intervalo J_2 y además $J_2 = f(J_1)$, escribimos $J_1 \rightarrow J_2$.

Definición 6.6 (loop) Si J_0, \dots, J_{n-1} son intervalos cerrados y acotados y $J_0 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow J_{n-1} \rightsquigarrow J_0$, entonces llamamos loop a la expresión $J_0 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow J_{n-1} \rightsquigarrow J_0$.

Definición 6.7 (largo de un loop) Decimos que un loop

$$J_0 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow J_{n-1} \rightsquigarrow J_0$$

tiene largo n .

Definición 6.8 (punto que sigue a un loop) Si J_0, \dots, J_{n-1} son intervalos cerrados y acotados y se tiene el loop $J_0 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow J_{n-1} \rightsquigarrow J_0$, entonces decimos que $p \in I$ es un punto que sigue el loop si p es punto fijo de f^n tal que $f^i(p) \in J_i$ para $0 \leq i < n$.

Definición 6.9 (loop con puntos de borde en una órbita periódica) Si J_0, \dots, J_{n-1} son intervalos dados por $J_i = [a_i, b_i]$, donde $a_i < b_i$ para todo $i = 0, \dots, n-1$ y $B := \cup_{i=0}^{n-1} \{a_i, b_i\}$. Decimos que $J_0 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow J_{n-1} \rightsquigarrow J_0$ es un loop con puntos de borde en una órbita periódica si existe un punto periódico $x \in I$ de periodo k , para algún $k \in \mathbb{N}$, tal que $B \subset \{f^i(x) : 0 \leq i < k, i \in \mathbb{Z}\}$.

Los puntos que siguen a un loop de largo n veremos que no tienen necesariamente periodo n .

Definición 6.10 (loop elemental) Decimos que un loop de largo n es elemental si todo p que lo sigue tiene periodo n .

A continuación enunciaremos los lemas usados en la demostración.

Lema 7 Si $[a, b] \rightsquigarrow [a, b]$, entonces f tiene un punto fijo en $[a, b]$.

Dem. Tomando $[a', b'] \subset [a, b]$ tal que $f([a', b']) = [a, b]$, se tiene que $g(x) := f(x) - x$ satisface $g(a') = a - a' \leq 0$ y $g(b') = b - b' \geq 0$. Luego, por el Teorema del valor intermedio se tiene que $f(x) - x = 0$ para algún $x \in [a', b']$. \square

Observación 3 Observar que se usó en la demostración que si $[a, b] \rightsquigarrow [a, b]$, entonces existe $[a', b'] \subset [a, b]$ tal que $f([a', b']) = [a, b]$, i.e., $[a', b'] \rightsquigarrow [a, b]$. La demostración de esto se deja de ejercicio. Este hecho se usará frecuentemente en la demostración.

Lema 8 Si J_0, \dots, J_{n-1} son intervalos cerrados y acotados y $J_0 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow J_{n-1} \rightsquigarrow J_0$ es un loop, entonces hay un punto fijo p de f^n tal que $f^i(p) \in J_i$ para $0 \leq i < n$.

Dem. Usando observación 3 existe $K_{n-1} \subset J_{n-1}$ tal que $K_{n-1} \rightsquigarrow J_0$. Entonces $J_{n-2} \rightsquigarrow K_{n-1}$, y existe un intervalo $K_{n-2} \subset J_{n-2}$ tal que $K_{n-2} \rightsquigarrow K_{n-1}$. Inductivamente, existen intervalos $K_i \subset J_i$, $0 \leq i < n$, tales que

$$K_0 \rightsquigarrow K_1 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow K_{n-1} \rightsquigarrow J_0.$$

Cualquier $x \in K_0$ satisface que $f^i(x) \in K_i \subset J_i$ para $0 \leq i < n$ y $f^n(x) \in J_0$. Como $K_0 \subset J_0 = f^n(K_0)$, entonces por Lema 7 se tiene que f^n tiene un punto fijo en K_0 . \square

La siguiente proposición es directa del Lema 8 y de las definiciones de loop elemental y de largo de un loop.

Proposición 3 La presencia de un loop elemental de largo n implica la existencia de un punto periódico que sigue al loop.

El siguiente lema da un criterio simple de verificar para obtener loops elementales.

Lema 9 *Un loop $J_0 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow J_{n-1} \rightsquigarrow J_0$ con puntos de borde en una orbita periodica es elemental si no es seguida por un punto de la orbita periodica y el interior $\text{Int}(J_0)$ de J_0 es disjunto de cada J_1, \dots, J_n .*

Dem. Suponga la orbita periodica viene dada por $O = O(x) := \{f^i(x) : 0 \leq i < k, i \in \mathbb{Z}\}$, para algun punto periodico x de periodo k . Si $f^n(p) = p$ y p sigue al loop, entonces $p \notin O$, luego $p \in \text{Int}(J_0)$. Si $0 < i < n$, entonces $f^i(p) \notin \text{Int}(J_0)$, luego $p \neq f^i(p)$. Lo que concluye que p tiene periodo n . \square

Finalmente podemos escribir la demostración de Teorema 10.

Dem.[Demostración de Teorema 10] Tomemos el punto x periodico de periodo 3, y consideremos $\mathcal{O} = \mathcal{O}(x) = \{x, f(x), f^2(x)\}$. Hay dos grafos dirigido que salvo renombramiento de los vertices no son iguales, al considerar 3 vértices (uno para x , otro para $f(x)$ y otro para $f^2(x)$) y 3 aristas dirigidas que se forma de seguir la orbita de \mathcal{O} en el orden $x, f(x), f^2(x), x$ (o en el orden $f(x), f^2(x), x, f(x)$, o en el orden $f^2(x), x, f(x), f^2(x)$) que pueden formarse. Dibujarlos! Asumamos aqui (otros casos son similares) que $x < f(x) < f^2(x)$ y denotemos $I_1 = [f(x), f^2(x)]$ e $I_2 = [x, f(x)]$. En este caso se tiene que $I_1 \rightsquigarrow I_1$, $I_1 \rightsquigarrow I_2$ y $I_2 \rightsquigarrow I_1$. Demostrarlo! De hecho se puede demostrar que $I_2 \rightsquigarrow I_1$ y $I_1 \rightsquigarrow I_1 \cup I_2$. Para la demostración estudie las imagenes de los puntos de borde de los intervalos, y note que por continuidad si la imagen incluye a dos puntos a, b con $a < b$, entonces la imagen del intervalo debe contener al intervalo $[a, b]$. Ya que $I_1 \rightsquigarrow I_1$, se sigue de Lema 7 que I_1 contiene un punto fijo de f . Los puntos de \mathcal{O} no pueden estar en el loop $I_1 \rightsquigarrow I_2 \rightsquigarrow I_1$, ya que tienen periodo 3 y si siguen al loop tiene que tener periodo 1 o 2. Se sigue del Lema 9 que f tiene un punto de periodo 2. Como los puntos de \mathcal{O} no pueden permanecer en el intervalo I_1 por más de dos iteraciones consecutivas por f , entonces el loop

$$I_2 \rightsquigarrow I_1 \rightsquigarrow I_1 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow I_1 \rightsquigarrow I_2,$$

donde I_1 aparece $l - 1$ veces es un loop elemental de largo l si $l > 3$. Sigue del Lema 9 que f tiene un punto periodico de periodo l para cada $l > 3$. \square

7. Funciones expansoras del círculo

clase 10, 10 de mayo 2024

En esta parte del curso veremos una clase de sistemas dinámicos, llamados funciones expansoras, que exhibe un comportamiento muy distinto a los homeomorfismos del círculo, y en particular que las rotaciones. Además, daremos una definición alternativa de topologicamente transitivo y demostraremos que es una definición alternativa, luego definiremos un concepto más fuerte, topologicamente mezclador. Finalmente, demostraremos que las funciones expansoras son mezcladoras.

Definición 7.1 (Funciones expansoras del círculo $K = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$) Una función de clase C^1 $f : K \rightarrow K$ se dice expansora si $|f'(x)| > 1$, para todo $x \in K$.

Notar que ya que la derivada es continua y K es compacto, existe $\beta > 1$ tal que $\inf_{x \in K} |f'(x)| \geq \beta > 1$.

Definición 7.2 (Grado de f) Definimos el grado de f , y lo denotamos por $\deg(f)$ como el número de preimágenes por f de cualquier punto $x \in K$.

Observación 4 A f también se le puede asociar un levantamiento $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\pi \circ F = f \circ \pi$, para $\pi : \mathbb{R} \rightarrow K$. Usando el levantamiento F , una definición alternativa de grado viene dada por

$$\deg(f) = F(x+1) - F(x),$$

para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Un ejemplo de funciones expansoras del círculo es el siguiente.

Ejemplo 1 Sea $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$. Sea $f : K \rightarrow K$, definida por $f(x) = mx \pmod{1}$. Entonces f es una función expansora del círculo con $\deg(f) = m$. En particular, cuando $m = 2$, se tiene $f(x) = 2x \pmod{1}$ y $\deg(f) = 2$. Alternativamente, si uno escribiera $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ entonces estas funciones vienen dadas por $f(z) = z^m$.

Lema 10 Si $f, g : K \rightarrow K$ son funciones expansoras, entonces

$$\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f).$$

En particular, $\deg(f^n) = \deg(f)^n$.

Dem. Ya que cada $y \in f^{-1}(x)$ tiene $\deg(g)$ preimágenes $g^{-1}(y)$. Entonces $(g \circ f)^{-1}(x)$ tiene $\deg(g) \cdot \deg(f)$ elementos, ya que hay $\deg(f)$ elementos en $f^{-1}(x)$. \square

Como ejercicio en tarea 3, demuestre el Lema 10 usando la definición de grado con levantamientos.

Proposición 4 Si $f : K \rightarrow K$ es una función expansora con $\deg(f) = d$ para $|d| > 1$, entonces el número de puntos periódicos de periodo n es $(d^n - 1)$.

Dem. Primero demostraremos el caso de puntos fijos, esto es, cuando $n = 1$. En este caso consideremos un levantamiento $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de f y restringámonos al intervalo $[0, 1]$. Puntos fijos para f son los valores $x \in [0, 1]$ tales que $g(x) := F(x) - x \in \mathbb{Z}$. Por el teorema del valor intermedio hay $|\deg(f) - 1| + 1$ de tales puntos, pero 0 y 1 proyectan al mismo punto en K . Ya que $g'(x) \neq 0$, la función g es monótona y hay precisamente $|\deg(f) - 1|$ puntos fijos. El caso $n \geq 2$ se obtiene reemplazando f por f^n , y los puntos periódicos para f por puntos fijos para f^n y $\deg(f^n) = d^n$. \square

Ahora veremos una definición alternativa de topológicamente transitivo, ver Definición 5.3, para un sistema dinámico discreto $f : X \rightarrow X$ general.

Proposición 5 *Las siguientes proposiciones son equivalentes.*

1. f es topologicamente transitivo.
2. Si $U, V \subset X$ son abiertos no vacíos, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(U) \cap V \neq \emptyset$ (o $f^{-N}(U) \cap V \neq \emptyset$).

Dem. La demostración se hace en dos partes.

- Demostración de 1 \Rightarrow 2: Sea $f^n(x), n \geq 0$, una órbita densa. Escoger n tal que $f^n(x) \in U$. Escoger $m > n$ tal que $f^m(x) \in V$. Sea $N = m - n$, entonces $f^N(U) \cap V \ni f^m(x)$, luego $f^N(U) \cap V \neq \emptyset$.
- Demostración de 2 \Rightarrow 1: Sea $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ una secuencia de bolas abiertas de radio decreciendo a cero y centrada en un conjunto denso numerable. Escoja $N_1 \geq 0$ tal que $f^{N_1}(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ ($f^{-N_1}(U_2) \cap U_1 \neq \emptyset$). Escoja una bola abierta V_1 de radio menor a $1/2$ tal que

$$\overline{V_1} \subset U_1 \cap f^{-N_1}(U_2).$$

Escoja N_2 tal que $f^{N_2}(V_1) \cap U_3 \neq \emptyset$. Escoja una bola abierta V_2 de radio menor a $1/4$ tal que

$$\overline{V_2} \subset V_1 \cap f^{-N_2}(U_3).$$

Proceda inductivamente, obteniendo que para la bola abiertas V_n de radio menor a $1/2^n$ se tiene que

$$V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_n \supset \dots$$

y tal que

$$\overline{V_{n+1}} \subset V_n \cap f^{-N_n}(U_{n+2}).$$

Si $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V_n}$, entonces $f^{N_{n-1}}(x) \in U_n$ para $n \geq 1$. En particular, $\{f^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es denso en X . \square

Ahora veremos una condición más fuerte.

Definición 7.3 (Topologicamente mezclador) *Decimos que $f : X \rightarrow X$ es topologicamente mezclador, o simplemente mezclador, si para todo par de conjuntos abiertos no vacíos $U, V \subset X$, existe $N \geq 0$, tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$ (o $f^{-n}(V) \cap U \neq \emptyset$).*

Observar, que si un sistema es mezclador, entonces es en particular transitivo.

Proposición 6 *Una función expansora $f : K \rightarrow K$ es mezcladora.*

Dem. Asuma que $|f'(x)| \geq \beta > 1$, para todo $x \in .$ Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un levantamiento de f , entonces $|F'(x)| \geq \beta$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Dada cualquier abierto $U \subset \mathbb{R}$, escoger un intervalo $(a, b) \subset U$. Por el teorema del valor medio, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$|F(b) - F(a)| = |F'(c)(b - a)| \geq \beta(b - a).$$

Entonces F expande el largo de los intervalos por al menos un factor de β . Luego, F^n expande el largo de los intervalos por un factor de al menos β^n , y esto concluye la demostración ya que: eligiendo $\beta^n > 1/(b-a)$, se tiene que $F^n(b-a)$ tiene largo al menos 1, luego $\pi(F^n(b-a)) = K$, entonces $f^n(U) = K \supset V$, y entonces $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. \square

8. Caos de Devaney clase 11 (17 mayo)

Introduciremos la siguiente definición de caos de Devaney.

Definición 8.1 (Caos) Dado un espacio métrico (X, d) , una función continua $f : X \rightarrow X$ se dice caótica si es topológicamente transitiva y si los puntos periódicos son densos.

Veamos un ejemplo usando las funciones expansoras del círculo.

Ejemplo 2 Un ejemplo es la función expansora del círculo $f : K \rightarrow K$, $f(x) = 2x \pmod{1}$, que vimos que era mezcladora, entonces en particular topológicamente transitivo, además los puntos periódicos de periodo n corresponden a $\{i/(2^n - 1) : 0 \leq i < 2^n - 1\}$, luego el conjunto de puntos periódicos es denso.

Definición 8.2 (Dep. inest. cr a las cond. inic.) Dado un espacio métrico (X, d) , una función continua $f : X \rightarrow X$ se dice que tiene dependencia inestable con respecto a las condiciones iniciales si existe $\Delta > 0$ tal que $\forall x, \forall \epsilon > 0, \exists y \in X$ tal que $d(x, y) < \epsilon$ y $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \Delta$ para algún $N \geq 0$.

Proposición 7 Una función caótica $f : X \rightarrow X$ es o-exclusivo:

- (I) la órbita periódica de un punto $x \in X$, o
- (II) tiene dependencia inestable con respecto a las condiciones iniciales.

Dem. Sean $A = \{f^k(x)\}_{k=0}^{n-1}$ y $B = \{f^k(y)\}_{k=0}^{m-1}$ dos órbitas periódicas distintas y sea

$$\Delta := \frac{1}{8} \min\{d(f^i(x), f^j(y)) : 0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq m-1\}.$$

Si $z \in X$, entonces o-exclusivo se tiene que $\min_{x \in A} d(z, x) \geq 4\Delta$ o $\min_{y \in B} d(z, y) \geq 4\Delta$. Asuma que $\min_{x \in A} d(z, x) \geq 4\Delta$. Sea $0 < \epsilon < \Delta$. Por densidad de los puntos periódicos escoja $f^N(w) = w \in B(z, \epsilon)$. Sea

$$V := \bigcap_{i=0}^N f^{-i} B(f^i(x), \Delta) \neq \emptyset.$$

Por transitividad, $\exists k \in \mathbb{N}$, tal que $f^k B(z, \epsilon) \cap V \neq \emptyset$, i.e., existe $\xi \in B(z, \epsilon)$ tal que $f^k(\xi) \in V$. Ya que $f^{jN} w = w$, se tiene que

$$\begin{aligned} d(f^{jN}(w), f^{jN}(\xi)) &= d(w, f^{jN}(\xi)) \\ &\geq d(z, f^{jN-k}(x)) - d(f^{jN-k}(x), f^{jN}(\xi)) - d(w, z) \\ &\geq 4\Delta - \Delta - \Delta \\ &= 2\Delta. \end{aligned}$$

Como $\xi, w \in B(z, \epsilon)$, entonces la desigualdad anterior implica que o-exclusivo: $d(f^{jN}(w), f^{jN}(z)) \geq \Delta$ o $d(f^{jN}(\xi), f^{jN}(z)) \geq \Delta$, lo que concluye la demostración. \square

Corolario 1 *Las funciones expansoras lineales del círculo tienen dependencia inestable con respecto a las condiciones iniciales.*

9. Espacios de Shifts clase 12 (30 mayo)

9.1. Shifts unidireccionales

Sea Σ el espacio de secuencias $\omega = (\omega_i)_{i=0}^{\infty}$ tomando valores en el conjunto finito $\{1, 2, \dots, N\}$. Se define una métrica $d = d_\lambda$ en Σ , para $\lambda > 2$, de la siguiente manera:

$$d(\omega, \omega') = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta(\omega_i, \omega'_i)}{\lambda^i},$$

donde $\omega = (\omega_i)_{i=0}^{\infty}$, $\omega' = (\omega'_i)_{i=0}^{\infty}$, y

$$\delta(k, l) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \neq l, \\ 0 & \text{si } k = l. \end{cases}$$

Se observa que dos secuencias están cerca si coinciden en las primeras coordenadas.

Dados $\alpha_i \in \{1, 2, \dots, N\}$ para $0 \leq i \leq n-1$, se define el cilindro

$$[\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}] := \{\omega \in \Sigma : \omega_i = \alpha_i, 0 \leq i \leq n-1\}.$$

Lema 11 *Dada una secuencia fija $\alpha = (\alpha_i)_{i=0}^{\infty}$ se tiene*

$$[\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}] = \{\omega \in \Sigma : d(\alpha, \omega) < \lambda^{1-n}\} = B(\alpha, \lambda^{1-n}).$$

La demostración se deja de ejercicio.

Se define la función shift $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ donde $\omega \mapsto \sigma(\omega)$ está definido componente-a-componente por

$$\sigma(\omega)_i = \omega_{i+1}, \forall i = 0, 1, \dots$$

Teorema 11 *El shift $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ satisface las siguientes propiedades.*

1. *Los puntos periódicos son densos.*
2. *Es topológicamente mezclador, en particular topológicamente transitivo.*
3. *Es caótico.*

La demostración es directa de las definiciones, escribirla como ejercicio.

9.2. Subshifts de tipo finito

Dada una matrix $A \in \{0, 1\}^{N \times N}$ se define un subshift de tipo finito, abreviado STF (en inglés SFT), $\sigma : X_A \rightarrow X_A$ para

$$X_A := \{\omega \in \Sigma : A_{\omega_i, \omega_{i+1}} = 1, i = 0, 1, \dots\},$$

donde para $i, j \in \{1, \dots, N\}$ se define $A_{i,j}$ como la componente de la matrix A en la i -ésima fila y j -ésima columna.

En lo siguiente introduciremos algunas propiedades de la matrix A y la asociaremos a una propiedad dinámica del un subshift de tipo finito.

Definición 9.1 (Matrices irreducibles) Una matrix cuadrada es irreducible si no tiene subespacios de coordenadas invariantes.

Definición 9.2 (Matrices aperiódicas) Una matrix cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es aperiódica si $m \in \mathbb{N}$ tal que A^m es positiva, esto es, todas sus componentes son positivas.

Teorema 12 (STF transitivos) Un subshift de tipo finito $\sigma : X_A \rightarrow X_A$ es transitivo ssi A es irreducible.

Proposición 8 (Número de puntos periódicos de SFT) Un subshift de tipo finito $\sigma : X_A \rightarrow X_A$ tiene $\text{tr}(A^m)$ puntos periódicos de periodo m .

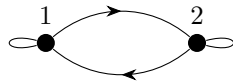
Proposición 9 (SFT mezcladores) Si A es aperiódica entonces $\sigma : X_A \rightarrow X_A$ es mezclador y los puntos periódicos son densos en X_A . En particular, el sistema es caótico y por lo tanto tiene dep. inest. cr a las conds. inicial.

Para probar estos resultados es útil la representación de subshifts de tipo finito usando grafos dirigidos.

9.3. Representación de STF por grafos dirigidos

Se puede representar un subshift de tipo finito por un grafo dirigido donde los vertices son $1, 2, \dots, N$ y hay una arista de i a j ssi $A_{i,j} = 1$.

Ejemplo 3 El shift de tipo finito en 2 simbolos para $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, se puede representar por el siguiente grafo dirigido.



El siguiente lema será usado para demostrar la Proposición 8

Lema 12 Dada un STF y una representación mediante un grafo. Para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$, se tiene que el número de caminos de largo m de i a j es igual a $A_{i,j}^m$, esto es, la coordenada (i, j) de la matrix A^m .

Dem. Para $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ y $n \in \mathbb{N}$ definamos $N_{i,j}^n :=$ número de caminos de largo n de i a j . La demostración sigue por inducción en n . El caso base $n = 1$ se obtiene trivialmente. Asuma $N_{i,j}^n = A_{i,j}^n$. Para cada $k \in \{1, \dots, N\}$ el número de caminos de largo n puede ser extendido a un camino de i a j de largo $n + 1$ ssi $A_{i,j} = 1$. Luego

$$N_{i,j}^{n+1} = \sum_{k=1}^N N_{i,k}^n A_{k,j} = \sum_{k=1}^N A_{i,k}^n A_{k,j} = A_{i,j}^{n+1}$$

lo que concluye la demostración. \square

Demostración de Proposición 8. Un punto periodico $\sigma^n x = x$ corresponde a secuencias de periodo n y por lo tanto a caminos de largo n . Luego el número de puntos periodicos de periodo n es igual a

$$\sum_{i=1}^N N_{i,i}^n = \sum_{i=1}^N A_{i,i}^n = \text{tr}(A^n)$$

lo que concluye la demostración. \square

El siguiente lema será usado en la demostración del Teorema 9

Lema 13 Si A^m es positivo, entonces también A^n para todo $n \geq m$.

Dem. Se tiene que

$$A_{i,j}^{m+1} = \sum_{k=1}^N A_{i,k}^m A_{k,j}.$$

Pero el debe haber un camino terminando en j de largo uno, pues de lo contrario A^m no sería positiva, luego existe k tal que $A_{k,j} = 1$. Entonces A^{m+1} es positiva. Inductivamente, A^n es positiva. \square

Demostración de Teorema 9. La demostración tiene dos partes.

- Para demostrar que los puntos periodicos son densos, es suficiente demostrar que dado un cilindro $[\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}]$ en X_A , existe un punto periodico en el cilindro. Como la matriz A es aperiodica, existe m tal que A^m es positivo, luego existe un camino de largo m entre cualquier par de $i, j \in \{1, \dots, N\}$, en particular, $A_{\alpha_{k-1}, \alpha_0}^m > 0$, luego existe una secuencia $\beta_1, \dots, \beta_{m-1}$ tal que la secuencia $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{m-1}, \alpha_0$ es permitida, y por lo tanto puede encontrarse el punto periodico

$$x = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{m-1}, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \beta_0, \beta_1, \dots) \in X_A$$

que tiene periodo $k + m - 1$ y que pertenece al cilindro $[\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}]$ en X_A .

- Para demostrar que el sistema es mezclador considerar dos cilindros $c_1 = [\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}]$ y $c_2 = [\beta_0, \dots, \beta_{s-1}]$. Como la matriz A es aperiódica, existe m tal que A^m es positivo, en particular, existe un camino de largo m de α_{k-1} a β_0 , luego para $N = k + m$ se tiene que $\sigma^{-N}c_2 \cap c_1 \neq \emptyset$. Usando el Lema 13 se tiene que para todo $n > m$ existe un camino de largo n de α_{k-1} a β_0 , luego para $N' = k + n$ se tiene que $\sigma^{-N'}c_2 \cap c_1 \neq \emptyset$, lo que concluye la demostración de que el sistema es mezclador. \square

Ejercicio: Encuentre matrices que no sean aperiódicas (y otras que si lo sean) y dibuje el grafo asociado a cada STF.

9.4. Shift bidireccionales

Considere

$$\Sigma = \{\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}} : \omega_n \in \{1, \dots, N\}\}.$$

Dado $\lambda > 1$ se considera la métrica $d = d_\lambda$

$$d(\omega, \omega') = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\delta(w_n, w'_n)}{\lambda^{|n|}},$$

donde

$$\delta(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Luego es shift se define como $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ donde $(\sigma\omega)_n = \omega_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Se obtiene que σ es un homeomorfismo en un espacio métrico compacto. Intuitivamente, dos secuencias bi-infinitas esta cerca si conciden a ambos lados de $n = 0$. Observar que la condición de compacidad se pierde al considerar alfabetos infinitos, esto es, cuando se reemplaza el conjunto $\{1, \dots, N\}$ por un conjunto infinito, como por ejemplo \mathbb{N} .

10. Codificación de funciones expansoras del círculo clase 13

En esta clase codificaremos funciones expansoras del círculo de grado dos.

Referencias

- [BK11] Hasselblatt B Burns K. The sharkovsky theorem: A natural direct proof. *American Mathematical Monthly*, 118(3):229–244, 2011.
- [DF] Holmes P Diacu F. Celestial encounters the origins of chaos and stability. *Volume 22 in the series Princeton Science Library* <https://doi.org/10.1515/9780691221830>.

- [KA95] Hasselblatt B Katok A. Introduction to the modern theory of dynamical systems. *Cambridge University Press*, 1995.
- [R19] Devaney R. An introduction to chaotic dynamical systems. *Edition 2nd Edition. Imprint CRC Press DOI <https://doi.org/10.4324/9780429502309>*, 2019.