Facultad de Matemáticas Pontificia Universidad Católica de Chile

La distancia entre medidas estacionarias

XXXI Jornada de Matemática de la Zona Sur

25, 26 y 27 de abril de 2018

Italo Cipriano[1]

[1]Financiado por Proyecto Anillo ACT172001 PIA 583-17

“Nothing can come of nothing.”

— William Shakespeare, El rey Lear

“Nada surge de la nada.”

— Parménides

Escena 1 Manchester, 22 de Julio del 2015. Mark Pollicott presenta su trabajo titulado "The mobility of stationary measures" [10]. En la penúltima lámina plantea dos preguntas

Question

How regular is the function

$$[a,b] \ni \lambda \mapsto d(\mu^{(\lambda)}, \mu^{(a)}) := \sup\left\{\left|\int f d\mu^{(\lambda)} - \int f d\mu^{(a)}\right| : \|f\|_{Lip} \leq 1\right\}?$$

Which functions maximise the supremum?

La presentación surge de la respuesta a la última.

"La belleza misma no es más que la imagen sensible del Infinito."

"Beauty itself is but the sensible image of the Infinite."

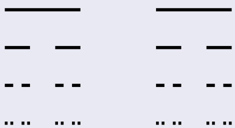
— Francis Bacon

Introducción

Henry John Stephen Smith

Sus dos primeros trabajos fueron en geometría y el tercero en teoría de los números. Como Gauss, escribió su primer artículo sobre teoría de números en latín: "De compositione numerorum primorum formae $4n+1$ ex duobus quadratin". Dónde prueba de manera original el teorema de Fermat: "Todo número primo de la forma $4n+1$ (con n entero) es la suma de dos cuadrados." [7].

Conjunto de Henry John Stephen Smith, 1874

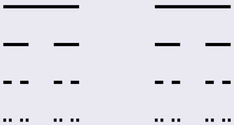


Introducción

Georg Cantor

En 1884 pidió dar clases de filosofía en vez de matemática y comenzó su intenso estudio de la literatura isabelina para probar su teoría que Francis Bacon escribió las obras de Shakespeare [8].

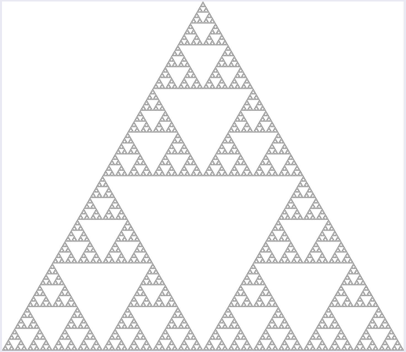
Conjunto de Cantor, 1883 [11]



Waclaw Sierpiński

Fue autor de 724 artículos y 50 libros. Se retiró en 1960 como profesor en la Universidad de Varsovia, pero continuó impartiendo un seminario sobre la teoría de los números en la Academia de Ciencias de Polonia hasta 1967 [9].

Triángulo de Sierpiński, 1915 [14]



Athyrium filix-femina

Se ha documentado que contiene sustancias en la raíz y los brotes cuya ingestión puede afectar a la salud humana [6].

Athyrium filix-femina

Michael Fielding Barnsley

Matemático, químico y emprendedor experto en compresión fractal. En 1987 fundó Iterated Systems Incorporated, en 1988 publica *Fractales en todas partes* y en 2006 *SuperFractals*. Iterated Systems se dedicó inicialmente a la compresión de imágenes fractales, y más tarde se centró en la administración de archivos de imágenes...

Helecho de Barnsley

Imágenes obtenidas de [15].

Un sistema iterado de funciones (**SIF**) es un conjunto finito de contracciones $f_1, f_2, \dots f_N$ en un espacio métrico completo $\mathcal{X}$.

Hutchinson probó que en $\mathbb{R}^n$, un SIF tiene un único conjunto, no vacío y compacto que es invariante [3]. Es decir, existe un único $S \subset \mathbb{R}^n$ (no vacío y compacto) tal que

$$S = \cup_{i=1}^{N} f_i(S).$$

Tal conjunto se conoce como **atractor**. Las imágenes anteriores son ejemplos de atractores para diferentes SIFs.

Medidas Estacionarias

Dado un SIF $(\mathbb{R}^n, f_1, \dots, f_N)$ y un vector de probabilidades $(p_1, p_2, \dots, p_N)$, existe una única de medida de Borel regular μ tal que

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{N} p_i \mu(f_i^{-1}(A)) \text{ para todo } A \in \mathcal{B},$$

donde $\mathcal{B}$ son los subconjuntos de Borel de $\mathbb{R}^n$.

Tal medida se conoce como **medida estacionaria** y tiene la característica de tener soporte en el atractor.

Escalera de Cantor

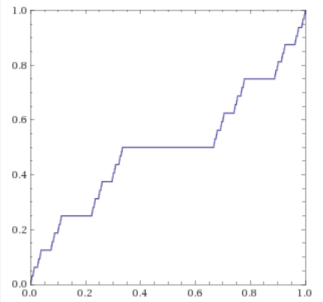
Escalera de Cantor

Función $G : [0, 1] \to [0, 1]$ que es: continua, creciente, con derivada cero c.s y que mapea el conjunto de Cantor de manera sobreyectiva en $[0, 1]$. *Cantor estaba trabajando en extensiones del TFC al caso de funciones discontínuas y G servía como contrajemplo a algunas afirmaciones de Harnack.*

Proposición (Criterio de Lusin)

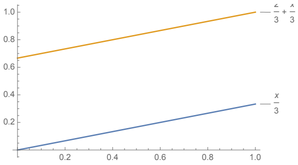
Una función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ manda $\mathcal{L} \to \mathcal{L}$ ssi la imagen de un conjunto medida-Lebesgue cero tiene medida-Lebesgue cero.

Escalera de Cantor

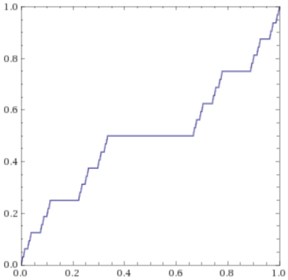


Ejemplo

El Conjunto de Cantor es el atractor del SIF $\left(\mathbb{R}, f_1(x) = \frac{x}{3}, f_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}\right)$.



Existe una única medida estacionaria μ asociada a este SIF y el vector de probabilidad $(0.5, 0.5)$, más aún, su soporte es el conjunto de Cantor.



La escalera de Cantor es la función de distribución acumulada de μ, i.e., $F(x) = \mu[0, x]$.

El problema de Monge

El problema de Monge (1781) es un problema de ingeniería... *"Los materiales extraidos de la mina deben ser transportados de manera óptima para hacer la construcción."* [5].

Modelación Matemática del problema de Monge

- Medida de probabilidad μ modela la masa extraída, $\mu(A)$ es la masa de la región A.
- Medida de probabilidad ν modela la masa construída.
- Una función de transporte $T(x) = y$, que a la posición inicial le asocia la posición final.
- Una función de costos $c(x, y)$, que es el costo de transportar de una posición a otra.

"Dadas μ, ν encontrar T tal que $\nu = \mu \circ T^{-1}$ que minimice el costo total de transporte

$$\int c(x, T(x)) d\mu(x)."$$

Distancia de Wasserstein

El problema de Monge es un problema muy general...

Veamos un caso más particular

Dado $(\mathcal{X}, d)$ un espacio métrico polaco (Sierpiński, Kuratowski, Tarski...), $p \in [1, \infty)$, y dos medidas de probabilidad μ, ν en $\mathcal{X}$, la **distancia de Wasserstein** de orden p entre μ y ν está dada por la fórmula

$$W_p(\mu, \nu) = \inf \left\{ [\mathbb{E} d(X, Y)^p]^{\frac{1}{p}} : X \sim \mu, Y \sim \nu \right\}.$$

El problema de Jon Fraser

Dados $(\mathbb{R}^n, f_1, \ldots, f_N)$ y $(\mathbb{R}^n, g_1, \ldots, g_N)$ SIFs en $\mathbb{R}^n$ con medidas estacionarias μ y ν, respectivamente.

$$W_p(\mu, \nu) = ?$$

El problema fue planteado en [2] y su solución general permanece abierta.

Hipótesis solución parcial

Dada una familia $T_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $i = 1, \ldots, k$, se dice:

- De **contracciones Lipschitz** si $Lip(T_i) := \sup_{x,y \in \mathbb{R}} \frac{|T_i(x) - T_i(y)|}{|x-y|} < 1$.
- De **imágenes disjuntas** si $T_i([0,1]) \cap T_j([0,1]) = \emptyset$ for all $i, j = 1, \ldots, k, i \neq j$.

Dado un par de vectores de probabilidades $(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}) \in (0,1)^k \times (0,1)^k$. Se dice que $(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q})$ es **apto** si

$$\sum_{i=1}^{m} p_i - q_i \in \mathcal{A} \text{ for every } m = 1, 2, \ldots, k,$$

where $\mathcal{A} = \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ or $\mathcal{A} = \mathbb{R}^{\leqslant 0}$.

Denotamos $\mu^{\overrightarrow{p}}$ a la medida estacionaria asociada a un SIF con respecto al vector de probabilidad $\overrightarrow{p}$.

Solución parcial

Teorema (M. Pollicott, I. Cipriano [12])

$$W_1(\mu^{\overrightarrow{p}}, \mu^{\overrightarrow{q}}) = \left| \int x d(\mu^{\overrightarrow{p}} - \nu^{\overrightarrow{q}})(x) \right|$$

Resultados claves de la demostración

Utiliza tres resultados:

1. Fórmula de dualidad de Kantorovich-Rubinstein para W_1

$$W_1(\mu,\nu) = \sup_{Lip(\psi)\leqslant 1} \left\{ \int_{\mathcal{X}} \psi d\mu - \int_{\mathcal{X}} \psi d\mu \right\}.$$

2. TFC para funciones de Lipschitz.
3. El teorema de Dall'Aglio - Vallender. Si μ y ν son medidas de probabilidad en $\mathbb{R}$. Entonces

$$W_1(\mu,\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} |F(t) - G(t)| dt,$$

donde F y G son las funciones de distribución acumulada de μ y ν, respectivamente.

Ejemplo

Cuando $T_1(x) = \frac{x}{4}$, $T_2(x) = \frac{2}{3} + \frac{x}{3}$ y $p, q \in (0,1)$

$$W_1\left(\mu^{(p,1-p)}, \mu^{(q,1-q)}\right)$$
$$= \frac{2}{3}\left|\frac{(1-q)\left(1-\frac{p}{4}-\frac{1-p}{3}\right)-(1-p)\left(1-\frac{q}{4}-\frac{1-q}{3}\right)}{\left(1-\frac{q}{4}-\frac{1-q}{3}\right)\left(1-\frac{p}{4}-\frac{1-p}{3}\right)}\right|.$$

Antes de terminar, un anuncio...

Escuela Doctoral en

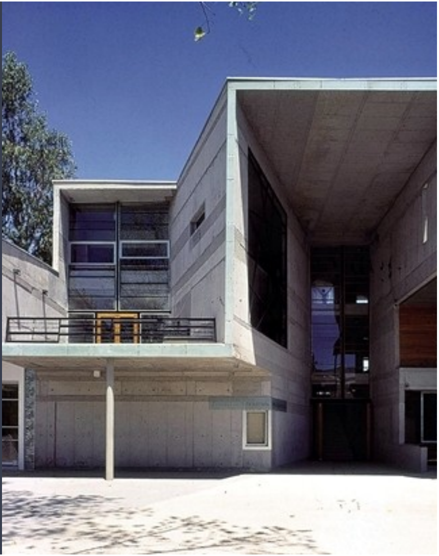
PROBABILIDADES Y SISTEMAS DINÁMICOS

Del 8 al 19 de Octubre 2018

Facultad de Matemáticas

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DE CHILE

Revisar
http://www.mat.uc.cl/noticias



DETALLES

- Se dictarán cursos acorde a las líneas de investigación del doctorado por profesores U.C., U de Chile e Internacionales.
- Habrá número limitado de becas de alojamiento y pasajes.

Los esperamos en la UC en octubre!!!

http://phdcomics.com/

Muchas gracias!

"Una pregunta prudente es la mitad de la sabidura."

"A prudent question is one-half of wisdom."

— Francis Bacon

Referencias I

- G. Dall'Aglio, *Sugli estremi dei momenti delle funzioni di ripartizione doppia*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. 3:1 (1956), 33-74.
- J. Fraser, *First and second moments for self-similar couplings and Wasserstein distances*, Mathematishe Nachrichten, 288 (2015), 2028-2041.
- J. Hutchinson, *Fractals and self similarity*, Indiana Univ. Math. J., 30 (1981), 713-747.
- S.S. Vallender, *Calculation of the Wasserstein distance between probability distributions on the line*, Teor. Veroyatnost. i Primenen., 18:4 (1973), 824-827.
- C. Villani, *Topics in Optimal Transportation*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 58, Amer. Math. Soc., 2003.
- Wikipedia, `https://es.wikipedia.org/wiki/Athyrium_filix-femina`
- MacTutor History of Mathematics archive, School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland, `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Smith.html`
- MacTutor History of Mathematics archive, School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland, `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cantor.html`
- MacTutor History of Mathematics archive, School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland, `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Sierpinski.html`
- M. Pollicott, *The mobility of stationary measures*, 2015, `http://www.mcs.st-and.ac.uk/~jmf32/PollicottSlides.pdf`

Referencias II

G. Cantor, *De la puissance des ansembles parfaits de points*, Acta Math. 4 (1884) 381-392; Reprinted G. Cantor, in: E. Zermelo (Ed.), Gezammelte Abhandlungen Mathematischen und Philosophischen Inhalts, Springer, New York, 1980

I. Cipriano and M. Pollicott, *Stationary measures associated to analytic iterated function schemes*, Mathematische Nachrichten (2018), `https://doi.org/10.1002/mana.201600127`

J. Hutchinson, *Fractals and Self Similarity*, Indiana Univ. Math. J. 30 (5): 713-747 (1981), doi:10.1512/iumj.1981.30.30055

W. Sierpiński, *Sur une courbe dont tout point est un point de ramification*, C. R. A. S. 160, 302-305, (1915).

A. Galvez-Tomida, *IFS Matlab Generator: A Computer Tool for Displaying IFS*, Fractals 2009, International Conference on Computational Science and Its Applications (2009).