Randomización de Medidas de Probabilidad por Autómatas Celulares de Tipo Permutativo no Algebraico

Defensa de memoria para optar al título de Ingeniero Civil Matemático

Italo Umberto Cipriano Jara

Profesor Guía:
Alejandro Maass Sepúlveda

Miembros de la Comisión:
Michael Schraudner
Servet Martínez Aguilera

Dado un AC $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ sobre un alfabeto $\mathcal{A}$ y una medida de probabilidad μ en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.

¿Existe $D \subset \mathbb{N}$ de densidad 1 tal que para cualquier $v \in \mathcal{A}^*, i \in \mathbb{Z}$

$$\exists lim_{n\to\infty, n\in D} F_\mu^n([v]_i)?$$

Donde

$$F_\mu^n([v]_i) \doteq \mu\{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : F^n(x)_{[i,i+|v|-1]} = v\}$$

y para $y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ y $j \leq k$ enteros

$$y_{[j,k]} \doteq y_j y_{j+1} \cdots y_k.$$

Definición

Cuando la respuesta al problema anterior es afirmativa se dice que la media de Cesàro $\mathcal{C}_\mu(F)$ sí existe, y se define

$$\mathcal{C}_\mu(F)([v]_i) \doteq lim_{n\to\infty, n\in D} F^n_\mu([v]_i).$$

Definición

Cuando la media de Cesàro $\mathcal{C}_\mu(F)$ existe y coincide con λ, la medida uniforme en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, se dice que el AC F randomiza asintóticamente la medida inicial μ.

Ejemplo (Suma módulo 2)

Sea $X \doteq \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ con la suma coordenada a coordenada módulo 2. Y $F : X \to X$ con $F = id + \sigma$, i.e. $F(x)_i = x_i + x_{i+1}$. Si μ_π es una medida de Bernoulli en X, i.e. existen $\pi_0, \pi_1 \in \mathbb{R}^+$ tales que $\mu(x_i = 0) = \pi_0$ y $\mu(x_i = 1) = \pi_1$, entonces F randomiza asintóticamente la medida inicial μ.

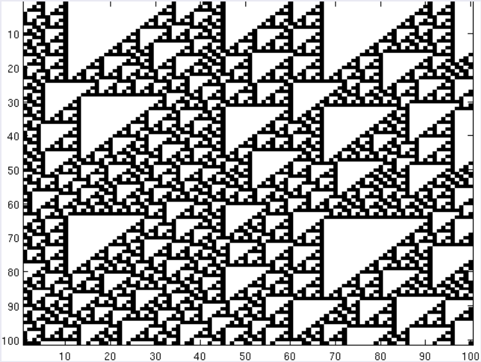


Figura: Imagen de las iteraciones sobre una entrada con distribución de Bernoulli de parámetros $(\pi_0, \pi_1) = (0{,}9; 0{,}1)$.

Problema

- ¿Pueden encontrarse condiciones sobre la medida de probabilidad inicial y la dinámica del AC que permitan concluir que existe la media de Cesàro?
- ¿Pueden encontrarse condiciones que permitan concluir que el AC randomiza asintóticamente la medida inicial?

Definición

Decimos que un AC $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$ es positivamente expansivo si

$$\exists N > 0 \text{ tal que } \forall x \neq y \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}},\ \exists n \in \mathbb{N},\ F^n(x)_{[0,N]} \neq F^n(y)_{[0,N]}.$$

Definición

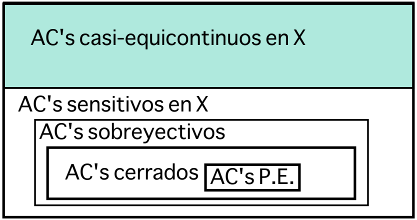
Por AC's P.E. se denota el conjunto de AC's de vecindad $(l, r) = (0, r)$ sobre $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ cuya restricción a $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ es un AC positivamente expansivo.

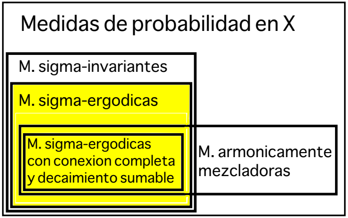
La familia más estudiada de AC's positivamente expansivos son los permutativos a la derecha.

Definición

Un AC se dirá permutativo o permutativo a la derecha si la vecindad es $(l, r) = (0, r)$ y regla local f satisface que para toda palabra $v \in \mathcal{A}^r$, la función $f(v, \cdot) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tal que $a \in \mathcal{A} \mapsto f(va)$, es inyectiva.

Sea $X = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ para $\mathcal{A}$ un alfabeto.

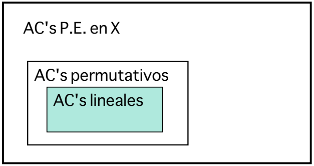


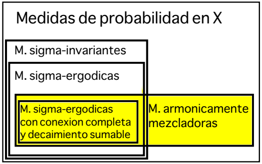


Teorema (Blanchard y Tisseur [BT00])

Si la medida μ es shift ergódica y para algún $k \in \mathbb{Z}$ el $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F \circ \sigma^k)$ tiene una palabra bloqueante en el soporte de μ, i.e. $\exists v \in \mathcal{A}^*$ con $\mu([v]_0) > 0$ tal que $v \in \mathcal{A}^{\overline{r}-\overline{l}+1}$ y existe una secuencia infinita de palabras $\{v_n\}_n$ con $|v_n| = i - j + 1 \leq \overline{r} - \overline{l} + 1$, para j, i constantes con $[j, i] \subset [\overline{l}, \overline{r}]$, tal que para todo $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ con $x_{[\overline{l},\overline{r}]} = v$ se satisface que $F^n(x)_{[j,i]} = v_n$ para $n \in \mathbb{Z}^*$, entonces la media de Cesàro $\mathcal{C}_\mu(F)$ sí existe.

Sea $X = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ para $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_n$ con $n = 2 \ldots$..



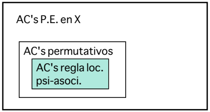


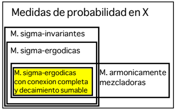
Teorema (Ferrari, Maass, Martínez, Ney, Pivato y Yassawi [FMMN00, PY02, PY04])

Si $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_n$ con $n = 2, 3, \ldots,$ $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ es un AC es lineal, i.e. para cada $i \in \mathbb{Z}$, $(Fx)_i = \sum_{k=0}^{m} a_k x_{k+i}$ con m un entero positivo y $a_0, \ldots, a_m$ constantes en $\mathbb{Z}_n$, y la medida μ es armónicamente mezcladora, i.e. si para todo $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que para todo $\xi \in (\mathbb{Z}_n)^*$ con $|\xi| > R$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$\left| \sum_{v \in \mathbb{Z}_n^{|\xi|}} \mu([v]_k) w^{\sum_{i=0}^{|\xi|-1} \xi_i v_{i+k}} \right| < \epsilon$$

donde $w \doteq e^{2\pi i/n}$, entonces la media de Cesàro $\mathcal{C}_\mu(F)$ sí existe y coincide con λ la medida uniforme en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.





Teorema (Host, Maass y Martínez [HMS03])

Si $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ es un AC con regla local f $\psi-$asociativa, i.e. es un AC permutativo a la derecha con vecindad $(l, r) = (0, 1)$ y existe una función $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ para la que

$$\forall a, b, c \in \mathcal{A}, \psi(f(f(a, b), c)) = f(a, f(b, c)),$$

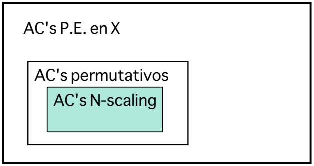
la medida μ es shift invariante, tiene conexión completa y decaimiento sumable, i.e. satisface que para todo $a \in \mathcal{A}, \underline{w} \in \mathcal{A}^{-\mathbb{N}^*}$

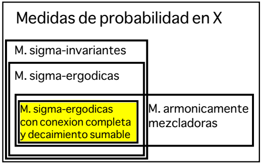
$\mu\{x_0 = a | x_{(-\infty,-1]} = \underline{w}\} \doteq \mu_{\underline{w}}\{x_0 = a\} > 0$ y para $m \geq 0$

$$\gamma_m \doteq sup \left\{ \left| \frac{\mu_{\underline{w}}\{x_0 = a\}}{\mu_{\underline{v}}\{x_0 = a\}} - 1 \right| : \ a \in \mathcal{A}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathcal{A}^{-\mathbb{N}}, v_i = w_i, i \in [-m, -1] \right\}$$

$\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m < \infty$, y $\tilde{\mathcal{A}}$ es abeliano, $\tilde{\mathcal{A}} \doteq \mathcal{A}/\sim \doteq \{\tilde{a} : a \in \mathcal{A}\}$ con la relación de equivalencia $\sim$ en $\mathcal{A}$ definida por $a \sim b \Leftrightarrow f(a, \cdot) = f(b, \cdot)$ y $\tilde{\mathcal{A}}$ es abeliano para la operación $\tilde{\bullet}$ definida por $\tilde{a}\tilde{\bullet}\tilde{b} = \widetilde{f(a, b)}$, entonces la media de Cesàro $\mathcal{C}_\mu(F)$ sí existe.

Sea $X \doteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.





Teorema (Host, Maass y Martínez [HMS03])

Si $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ es un AC $N-$scaling, i.e. es un AC permutativo a la derecha con vecindad $(l, r) = (0, 1)$ y existe un entero $N \geq 2$ tal que

$$(F^N x)_0 = f(x_0, x_N) \text{ para todo } x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}},$$

μ es una medida de probabilidad shift-invariante con conexión completa y decaimiento sumable, entonces la media de Cesàro $\mathcal{C}_\mu(F)$ existe.

Nota

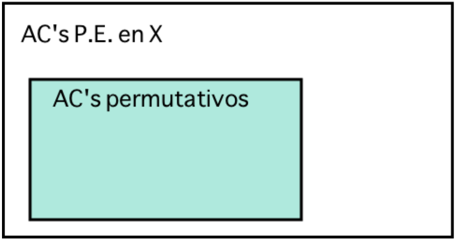
Para AC's afines sobre espacios de shift más generales hay resultados de Maass, Martínez, Pivato, Sobottka, y Yassawi [MMPY06b, MMPY06a, MSS06], en que se demuestra que la media de Cesàro de la iteración de medidas iniciales con hipótesis bien generales, converge a la medida de máxima entropía para el shift.

Existencia de la media de Cesàro de medidas iteradas por AC's permutativos

Problema

¿Qué puede decirse de la media de Cesàro de medidas iteradas por AC's permutativos?

Para $X = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ y $\mathcal{A}$ un alfabeto cualquiera.



Existencia de la media de Cesàro de medidas iteradas por AC's permutativos

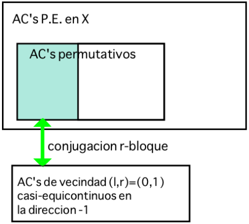
Conclusiones

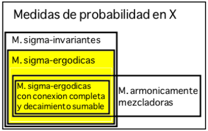
Lema

Un AC $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ permutativo a la derecha de vecindad $(l, r) = (0, 1)$ solo puede tener palabras bloqueantes en la dirección -1, i.e. para todo $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ el AC $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F \circ \sigma^k)$ no tiene palabras bloqueantes, pero el AC $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F \circ \sigma^{-1})$ si puede tenerlas.

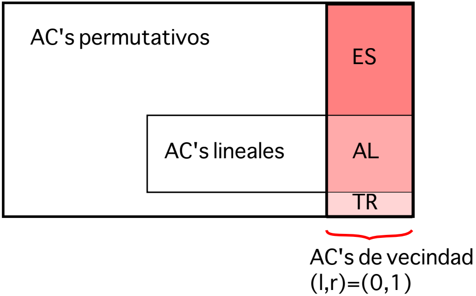
Teorema

Dado un AC $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ permutativo a la derecha de vecindad $(l, r) = (0, r)$ y μ una medida shift ergódica en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, entonces hay una alternativa, existe la media de Cesàro $\mathcal{C}_\mu(F)$ o existe un AC topológicamente conjugado $((\mathcal{A}')^{\mathbb{Z}}, F')$ de vecindad $(l, r) = (0, 1)$ tal que $((\mathcal{A}')^{\mathbb{Z}}, F' \circ \sigma^{-1})$ no tiene palabras bloqueantes.





Sea $X = \mathbb{Z}_m^{\mathbb{N}}$ para $m = 3, 4, \cdots$.



Problema

¿Existe la media de Cesàro de medidas de probabilidad invariantes bajo translaciones iteradas por AC's permutativos de vecindad $(l, r) = (0, 1)$ sobre el alfabeto $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_3$?

Definición

Para un AC $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$ de vecindad $(l, r) = (0, 1)$ la regla local f se puede representar por una matriz M de $(\#\mathcal{A}) \times (\#\mathcal{A})$ a coeficientes en $\mathcal{A}$ tal que para $a, b \in \mathcal{A}$ $f(a, b) = M_{a,b}$. Se dice que M es la matriz asociada al AC $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$.

Definición

Dado $m=3,4,\cdots$, PE_m denota al conjunto de los AC's permutativos a la derecha de vecindad $(l,r)=(0,1)$ sobre el alfabeto $\mathbb{Z}_m$. Además.

- $S_m \doteq \{\rho\}$ el grupo simétrico de orden m.
- $S'_m \subset S_m$ tal que $\forall \rho \in S'_m$ existe $(b,c) \in \mathbb{Z}^*_m \times \mathbb{Z}_m$ que cumple $\rho(g)=bg+c \ \forall g \in \mathbb{Z}_m$.
- $S''_m \subset S_m$ tal que $\forall \rho \in S''_m$ existe $a \in \mathbb{Z}^*_m$ tal que $\rho(g)=g+a \ \forall g \in \mathbb{Z}_m$.

Definición

Para cada $m = 3, 4, \cdots$, definiremos las subclases disjuntas AL_m, TR_m y ES_m de PE_m como sigue.

- AL_m es la familia de AC's en PE_m asociados una matriz M tal que

$$\exists \rho_0 \in S'_m, \rho_1 \in S''_m : (\forall g \in \mathbb{Z}_m)(M_{g,\bullet} = \rho_1^g \rho_0).$$

- TR_m es la familia de AC's en PE_m asociados una matriz M tal que

$$\exists \rho \in S_m : (\forall g \in \mathbb{Z}_m)(M_{g,\bullet} = \rho).$$

- ES_m es la familia de AC's en PE_m que no pertenecen ni a AL_m ni a TR_m.

Proposición

Para $m = 3, 4, \cdots$, la familia de AC's AL_m corresponde a aquellos en que la regla local está dada por $(x, y) \in \mathbb{Z}_m^2 \mapsto ax + by + c$ para $a, b \in \mathbb{Z}_m^*$ y $c \in \mathbb{Z}_m$. Además

$$\# AL_m = m(m-1)^2;$$

$$\# TR_m = m!;$$

$$\# ES_m = (m!)^m - m! - m(m-1)^2.$$

Definición

Para $m = 3, 4, \cdots$, definimos la relación de equivalencia $\sim$ en PE_m; donde para $F, G \in PE_m$ se tiene $F \sim G$ si y solo si existe una biyección $s : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_m$ y un AC $(\mathbb{Z}_m^{\mathbb{N}})$ con regla local s tal que $F = S^{-1} \circ G \circ S$.

Lema

Para $m = 3, 4, \cdots$, dos AC's $(\mathbb{Z}_m^{\mathbb{N}}, F)$ y $(\mathbb{Z}_m^{\mathbb{N}}, F')$ en PE_m, con M y M' sus matrices asociadas, se tiene

$$F \sim F' \Leftrightarrow \exists \rho \in S_m : M_{\rho^{-1}}^T \cdot C_\rho(M) \cdot M_{\rho^{-1}} = M'$$

donde $C_\rho(M)_{a,b} = \rho(M_{a,b})\ \forall a, b \in \mathbb{Z}_m$.

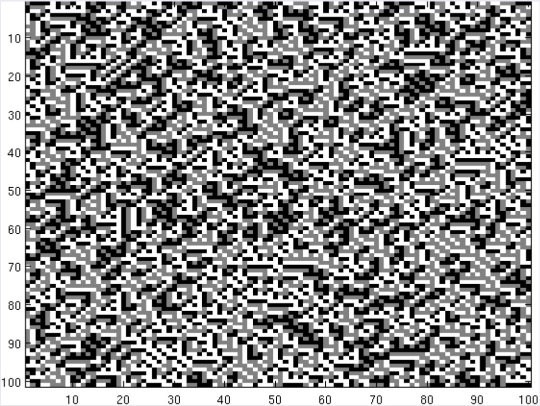
Lema

$AL_3/\sim = \{[F]_\sim : F \text{ es un AC asociado a una matriz } M \in ALQ_3\}$ *con*

$$ALQ_3 \doteq \left\{ \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \end{array} \right\}$$

Ejemplo (AC asociado a matriz en ALQ_3)

AC asociado a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.



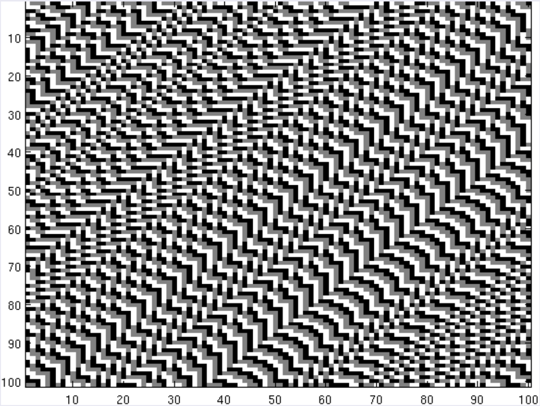
Lema

$TR_3/\sim = \{[F]_\sim : F \text{ es un AC asociado a una matriz } M \in TRQ_3\}$ *con*

$$TRQ_3 \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ejemplo (AC asociado a matriz en TRQ_3)

AC asociado a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.



Definición

$$ESQ_3^0 \doteq \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\}.$$

AC's permutativos de vecindad $(l, r) = (0, 1)$ con alfabeto $\mathbb{Z}_3$

Partición en las subclases AL_3, TR_3 y ES_3

Definición

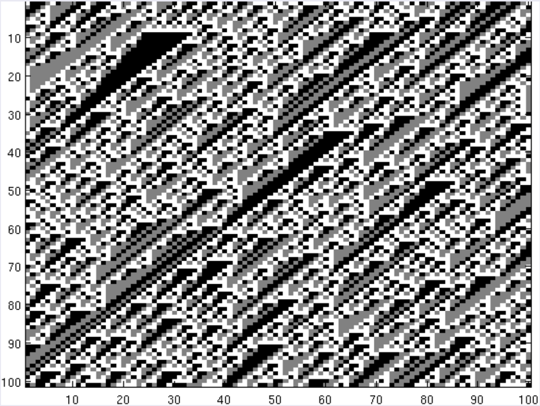
$$ESQ_3^1 \doteq \left\{ \begin{array}{c}
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}
\end{array} \right\}.$$

Lema

$ES_3/\sim = \{[F]_\sim : F$ *es un AC asociado a una matriz* $M \in ESQ_3\}$ *con* $ESQ_3 \doteq ESQ_3^0 \cup ESQ_3^1$.

Ejemplo (AC asociado a matriz en ESQ_3)

AC asociado a la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.



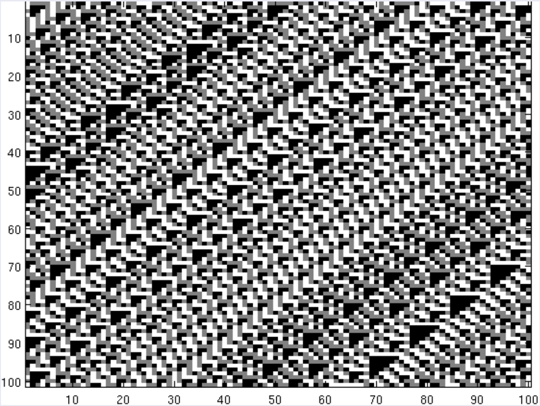
Proposición

El conjunto de AC's en ES_3 con palabras bloqueantes en alguna dirección al menos incluye al de los AC's topológicamente conjugados a los asociados a las matrices siguientes.

$$\left\{ \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \end{array} \right\}$$

Ejemplo (AC asociado a matriz en ESQ_3 con palabra bloqueante en la dirección -1)

AC asociado a la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.



Proposición

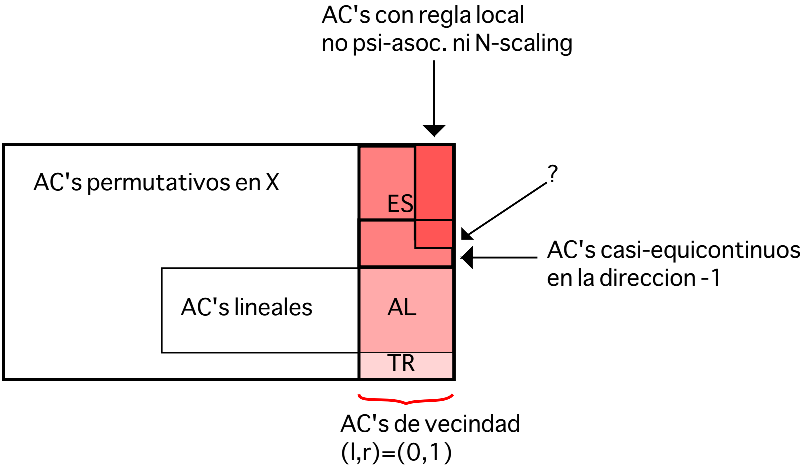
Ningún AC en ES_3 tiene regla local ψ-asociativa.

Proposición

Todo AC en ES_3 topológicamente conjugado a un AC asociado a una de las siguientes matrices no es $N-$scaling.

$$\left\{\begin{array}{c}
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}\right\}$$

Para $X = \mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}$.



La familia de AC's propuesta no tiene regla local $\psi-$asociativa y no es $N-$scaling, además los AC's en ella no son lineales. Estos AC's solo pueden tener palabras bloqueantes en la dirección -1 y no se se conoce una manera de demostrar que no tienen.

Problema

¿Cómo es la iteración de una medida inicial de Bernoulli por los AC's en la clase propuesta?

Este problema está abierto. Sin embargo, pueden hacerse simulaciones de la medida iterada.

Definición

Si $p, q, r \in \mathbb{R}^+$ con $p + q + r = 1$, decimos que X simula una variable aleatoria de Bernoulli de distribución (p,q,r) y lo denotamos por $X \sim B(p, q, r)$ cuando X es la salida del algoritmo que en la entrada w simula una variable aleatoria uniforme U en $[0, 1)$ y retorna 0 si $U \in [0, p)$, 1 si $U \in [p, p + q)$ y 2 si $U \in [p + q, 1)$.

Definición

Si $p, q, r \in \mathbb{R}^+$ con $p + q + r = 1$, $n \in \mathbb{N}$ y μ es la medida de Bernoulli en $\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}$ de parámetros (p, q, r), decimos que Y^n simula una variable aleatoria de distribución F_μ^n y lo denotamos por $Y^n \sim F_\mu^n$ cuando Y^n es la salida del algoritmo que en la entrada w simula $n+1$ variables aleatorias $X_i \sim B(p, q, r)$ y retorna $F^n(X_0, \ldots, X_n)$.

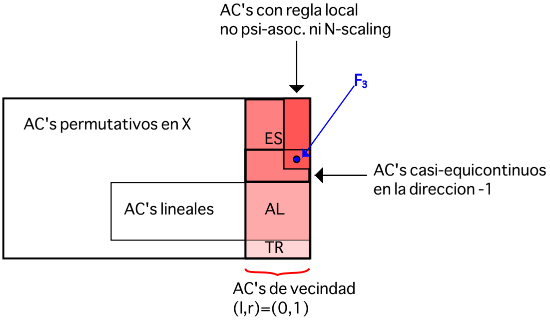
Definición

Con las hipótesis de antes y $m \in \mathbb{N}^*$, decimos que $Y_0^n, \ldots, Y_{m-1}^n$ simula una secuencia de m variables aleatorias de distribución F_μ^n y lo denotamos por $(Y_0^n, \ldots, Y_{m-1}^n) \sim F_\mu^n$ cuando $(Y_0^n, \ldots, Y_{m-1}^n)$ es la salida del algoritmo que en la entrada w simula $n + m$ variables aleatorias $X_i \sim B(p, q, r)$ y retorna $F^n(X_0, \ldots, X_{n+m})$.

Definición

Denotamos por F_3 al AC en ES_3 asociado a la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Para $X = \mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}$.



Simulación

Para $p, q, r \in \mathbb{R}^+$ con $p + q + r = 1$, las simulaciones siguientes muestran iteraciones del AC F_3 sobre una entrada $X_0, X_1, \ldots \sim B(p, q, r)$.

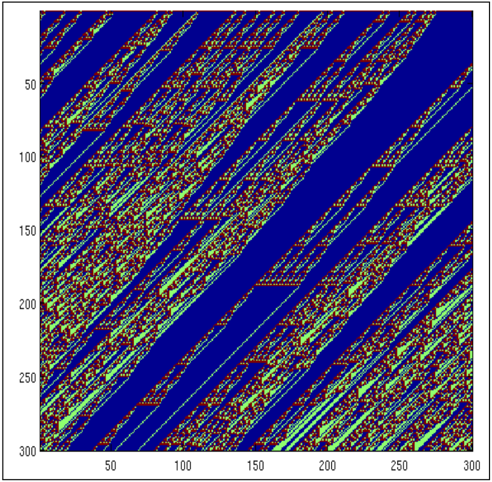


Figura: Simulación de iteración $n = 0, \ldots, 300$ de la medida de Bernoulli con distribución $\pi = (0,01; 0,09; 0,9)$ iterada por el AC F_3.

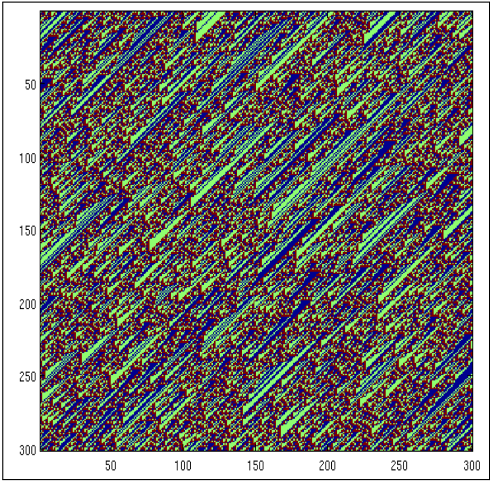


Figura: Simulación de iteración $n = 25000, \ldots, 25300$ de la medida de Bernoulli con distribución $\pi = (0,01; 0,09; 0,9)$ iterada por el AC F_3.

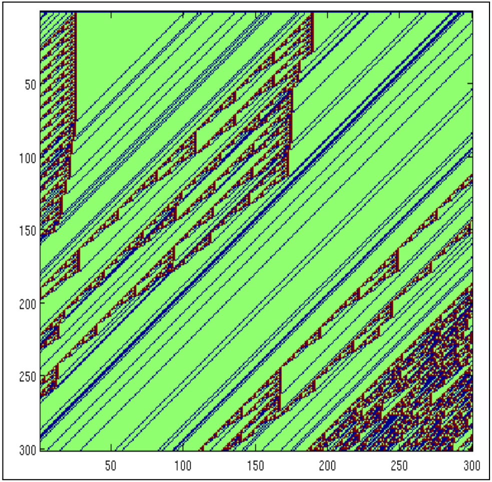


Figura: Simulación de iteración $n = 0, \ldots, 300$ de la medida de Bernoulli con distribución $\pi = (0,09; 0,9; 0,01)$ iterada por el AC F_3.

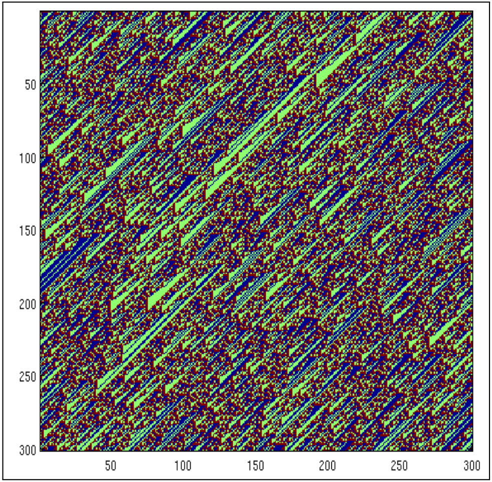


Figura: Simulación de iteración $n = 25000, \ldots, 25300$ de la medida de Bernoulli con distribución $\pi = (0,09; 0,9; 0,01)$ iterada por el AC F_3.

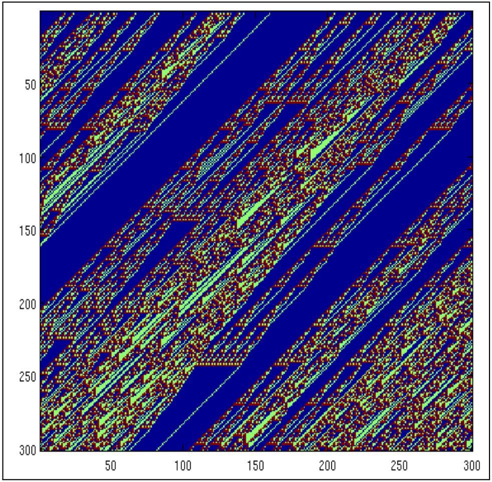


Figura: Simulación de iteración $n = 0, \ldots, 300$ de la medida de Bernoulli con distribución $\pi = (0,9; 0,01; 0,09)$ iterada por el AC F_3.

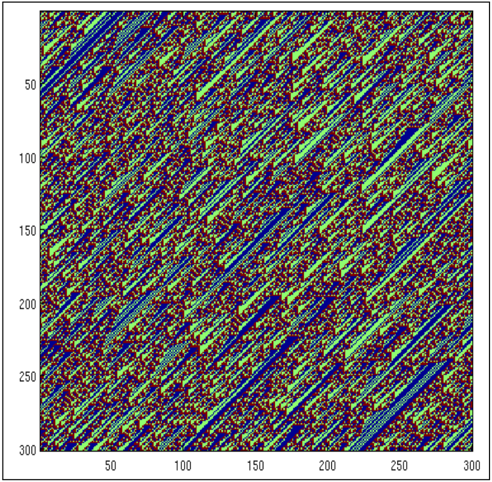


Figura: Simulación de iteración $n = 25000, \ldots, 25300$ de la medida de Bernoulli con distribución $\pi = (0,9; 0,01; 0,09)$ iterada por el AC F_3.

Simulación

Sea μ una medida de Bernoulli en $\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}$ de distribución $\pi = (p, q, r)$, $[c]_0$ un cilindro con $c \in (\mathbb{Z}_3)^*$ y n un entero positivo. Simularemos $F_\mu^n([c]_0)$ de la siguiente manera. Escoger $M \in \mathbb{N}^*$ y retornar

$$\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} 1\{\big(Y_0^n(m), Y_1^n(m), \ldots, Y_{|c|-1}^n(m)\big) = (c_0, c_1, \ldots, c_{|c|-1})\},$$

donde $\big(Y_0^n(m), Y_1^n(m), \ldots, Y_{|c|-1}^n(m)\big) \sim F_\mu^n$ para $m = 0, \ldots, M-1$.

Simulación

Para las mismas hipótesis de antes simularemos $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_\mu^n([c]_0)$ mediante

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} 1\{\big(Y_0^n(m), Y_1^n(m), \ldots, Y_{|c|-1}^n(m)\big) = (c_0, c_1, \ldots, c_{|c|-1})\},$$

donde $\big(Y_0^n(m), Y_1^n(m), \ldots, Y_{|c|-1}^n(m)\big) \sim F_\mu^n$ para $m = 0, \ldots, M-1$ y $n = 0, \ldots, N-1$.

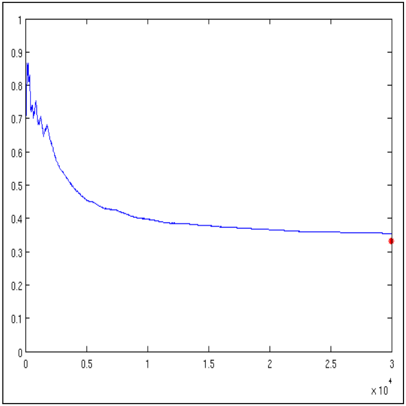


Figura: Simulación de $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_{\mu}^{n}([0]_0)$ con $N = 0, \cdots, 3 * 10^4$, para μ una medida de Bernoulli de distribución $(0{,}01; 0{,}01; 0{,}98)$ en $\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}$ y $F = F_3$.

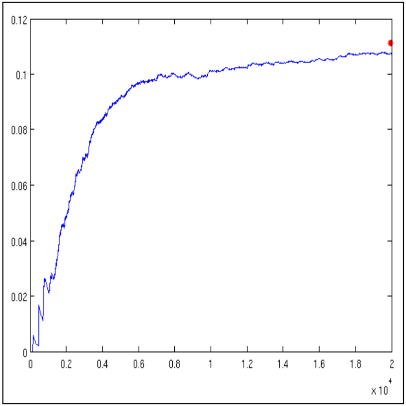


Figura: Simulación de $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_{\mu}^{n}([11]_0)$ con $N = 0, \cdots, 2 * 10^4$, para μ una medida de Bernoulli de distribución $(0{,}01; 0{,}01; 0{,}98)$ en $\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}$ y $F = F_3$.

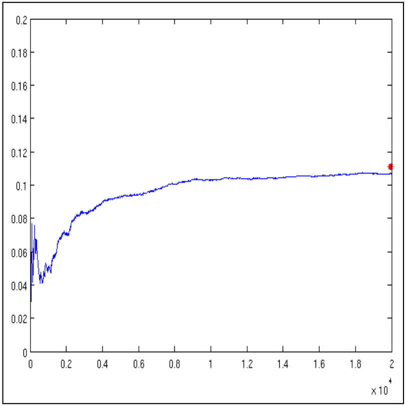


Figura: Simulación de $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_{\mu}^{n}([02]_0)$ con $N = 0, \cdots, 2 * 10^4$, para μ una medida de Bernoulli de distribución $(0{,}01; 0{,}01; 0{,}98)$ en $\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}$ y $F = F_3$.

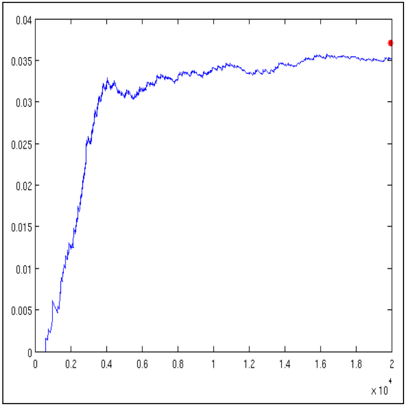


Figura: Simulación de $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_{\mu}^{n}([111]_0)$ con $N = 0, \cdots, 2 * 10^4$, para μ una medida de Bernoulli de distribución $(0{,}01; 0{,}01; 0{,}98)$ en $\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}$ y $F = F_3$.

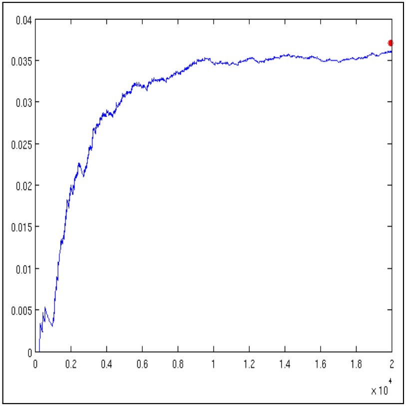


Figura: Simulación de $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_{\mu}^{n}([120]_0)$ con $N = 0, \cdots, 2 * 10^4$, para μ una medida de Bernoulli de distribución (0,01; 0,01; 0,98) en $\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}$ y $F = F_3$.

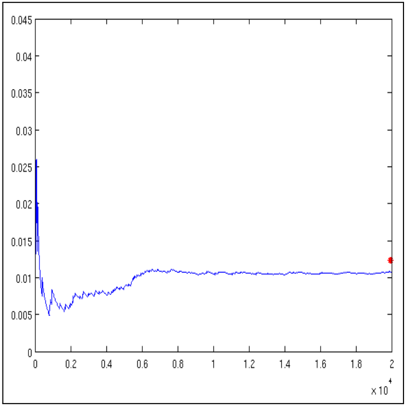


Figura: Simulación de $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_\mu^n([2010]_0)$ con $N = 0, \cdots, 2 * 10^4$, para μ una medida de Bernoulli de distribución $(0{,}01; 0{,}01; 0{,}98)$ en $\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}$ y $F = F_3$.

Las simulaciones sugieren que el AC F_3 randomiza asintóticamente una medida inicial de Bernoulli. Para el AC F_3 no se sabe como demostrar la existencia de la media de Cesàro, en partícular no se sabe como demostrar que no existen palabras bloqueantes en la dirección -1.
Una generalización del AC $(\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}, F_3)$ se definió en $Z_m^{\mathbb{N}}$ para $m = 2, 3, 4, \cdots$.

Definición

La familia de ACs $RANDOMES \doteq \{(\mathbb{Z}_m^{\mathbb{N}}, F_m)\}_{m \geq 2}$ es la colección de ACs $(\mathbb{Z}_m^{\mathbb{N}}, F_m)$, tales que la regla local está asociada a una matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & m-1 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & m-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & m-1 \\ 1 & 2 & \dots & m-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposición

Los ACs en RANDOMES no son lineales, ni $N-$scaling, ni tienen regla local ψ-asociativa.

Proposición

Para $F_m \in$ RANDOMES se tienen los siguientes casos:

1. *si $m = 2 \Rightarrow F = id + \sigma$ es lineal con regla local $f(x, y) = x + y$;*
2. *si $m > 2$ y par, entonces el AC no es algebraico en el sentido que no existe un polinomio $p \in \mathbb{Z}_m[x, y]$ tal que $p(x, y)$ sea la regla local;*
3. *si $m > 2$ y primo, entonces el AC es algebraico en el sentido que tal polinomio existe (no afín).*

El siguiente problema quedó abierto.

Problema

- ¿Existen palabras bloqueantes en la dirección -1 para ACs en RADOMES?
- ¿Los AC's en RANDOMES randomizan asintótica una medida inicial de Bernoulli en $\mathbb{Z}_m^{\mathbb{N}}$?

Lema (Generalización de Proposición 1 en [Wil75])

Todo AC actuando sobre $\mathbb{Z}_p^{\mathbb{Z}}$ para p primo, está definido por una regla local algebraica (en el sentido que la regla local es un polinomio). El caso p no primo no es necesariamente cierto.

Definición

Para p un primo, a cada AC $(\mathbb{Z}_p^{\mathbb{N}}, F)$ de vecindad $(l, r) = (0, 1)$, le asociamos una familia de polinomios $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $G_n \in \mathbb{Z}_p[x_0, \ldots, x_n]$ de la siguiente manera.

$$G_n(x_0, \cdots, x_n) \doteq F^n(x_0 \cdots x_n 0^\infty)_0 \text{ para todo } x_0, \cdots, x_n \in \mathbb{Z}_p.$$

Definición

Para p un primo y $G \doteq (G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de polinomios con $G_n \in \mathbb{Z}_p[x_0,\ldots,x_n]$, decimos que G randomiza asintóticamente una medida de probabilidad $\mu \in \mathbb{Z}_p^{\mathbb{N}}$ si existe $D \subset \mathbb{N}$ de densidad 1 tal que para todo $g \in \mathbb{Z}_p$

$$\left|\mu(G_n = g) - \frac{1}{p}\right| \to 0 \text{ cuando } n \to \infty, n \in D.$$

Lema (Corolario de Lema 4.1 en [FMMN00])

Sea p un primo y $\mathbb{P}$ una medida de probabilidad en $\mathbb{Z}_p^{\mathbb{Z}}$ invariante bajo translaciones con conexión completa y decaimiento sumable. Sea además $G \doteq (G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de polinomios con $G_n \in \mathbb{Z}_p[x_0,\ldots,x_n]$ en que

$$G_n(x_0,\cdots,x_n) = \sum_{i\in R_n} \alpha_i x_i + H_n(x_i|_{i\notin R_n})$$

con $R_n \subset \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{Z}_p^*$ y $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de polinomios a coeficientes en $\mathbb{Z}_p$. Si existe $D \doteq \{n_k\} \subset \mathbb{N}$ de densidad 1 tal que $R_{n_k} \subsetneq R_{n_{k+1}}$ para todo k, entonces para todo $\underline{w} \in \mathbb{Z}_p^{-\mathbb{N}^*}$, G randomiza asintóticamente la medida de probabilidad $\mathbb{P}_{\underline{w}}$.

Definición

Sea $(K,+)$ un grupo abeliano finito y $T \doteq (T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de funciones $T_n : K^{n+1} \to K$, decimos que T randomiza asintóticamente una medida de probabilidad μ en $K^{\mathbb{N}}$ si existe $D \subset \mathbb{N}$ de densidad 1 tal que para todo $k \in K$

$$\left|\mu(T_n = k) - \frac{1}{\#K}\right| \to 0 \text{ cuando } n \to \infty, n \in D.$$

Teorema

Sea $(K,+)$ un grupo abeliano finito y $\mathbb{P}$ una medida de probabilidad en $K^{\mathbb{Z}}$ invariante bajo translaciones con conexión completa y decaimiento sumable. $T \doteq (T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de funciones $T_n : K^{n+1} \to K$, en que

$$T_n(x_0, \cdots, x_n) = \sum_{i\in R_n} \psi_{i,R_n}(x_i) + H_n(x_i|_{i\notin R_n})$$

con $R_n \subset \mathbb{N}$, para cada $n \in \mathbb{N}, i \in R_n$, $\psi_{i,R_n} : K \to K$ es una biyección y $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de funciones a valores en K. Si existe $D \doteq \{n_k\} \subset \mathbb{N}$ de densidad 1 tal que $R_{n_k} \subsetneq R_{n_{k+1}}$ para todo k, entonces para todo $\underline{w} \in \mathbb{Z}_p^{-\mathbb{N}^*}$, G randomiza asintóticamente la medida de probabilidad $\mathbb{P}_{\underline{w}}$.

El fenómeno de randomización asintótica de medidas de probabilidad iniciales en $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ para $\mathcal{A}$ un alfabeto, es una propiedad general de familias de funciones no necesariamente asociadas a AC's.
Los siguientes problemas están abiertos.

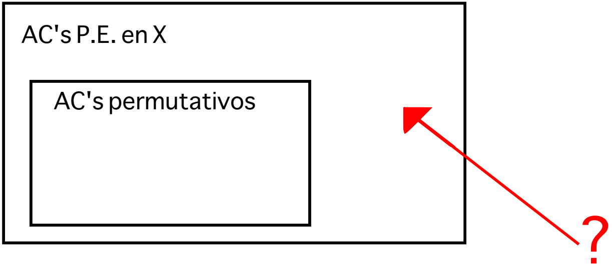
Problema

¿Hay autómatas celulares para los que no se haya estudiado la media de Cesàro que cumplen las hipótesis del último teorema?

Problema

¿Hay autómatas celulares que randomizan medidas de probabilidad iniciales shift invariantes y no cumplen las hipótesis del último teorema?

¿Que ejemplos se conocen de AC's positivamente expansivos no permutativos?



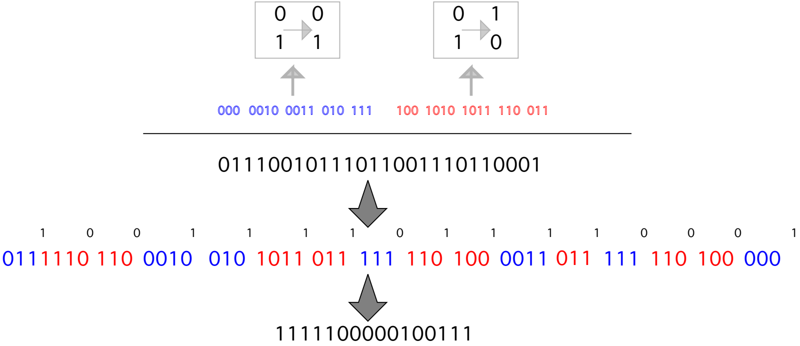
Definición

Sea $\mathcal{A}$ un alfabeto fijo.

- Una familia de palabras $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}^*$ se dice código si para todo $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ existe una única secuencia $\{w_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ tal que $x = w_0 w_1 w_2 w_3 \cdots$.
- Dada una familia de palabras $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}^*$ definimos $\mathcal{C}^R \doteq \{w^R : w \in \mathcal{C}\}$, donde $w^R = w_{|w|-1} w_{|w|-2} \cdots w_0$.
- Decimos que una familia de palabras $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}^*$ es código biprefijo si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^R$ son códigos.
- Dado un código $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}^*$. Para cada $w \in \mathcal{C}$ consideramos una permutación del alfabeto $\mathcal{A}$, $\rho_w : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Se define el AC $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$ de permutación inducido por $\mathcal{C}$ en que para cada $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ y $k \in \mathbb{N}$, $F(x)_k = \rho_w(x_{k+|w|})$ donde $w \in \mathcal{C}$ es tal que $x_{[k,\infty)} = w w_1 w_2 w_3 \cdots$, donde $w_i \in \mathcal{C}$.

Proposición (Jadur, Yazlle [JY07])

Todo AC de permutación inducido por un código biprefijo es positivamente expansivo, independientemente de la elección de las permutaciones.



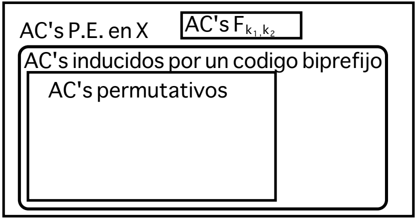
Proposición (Blanchard y Maass)

Sean k_1, k_2 enteros positivos y $s = k_1k_2$. Para cada $a \in \mathbb{Z}_s$, definamos $f_a \in \mathbb{Z}_{k_1}$ y $l_a \in \mathbb{Z}_{k_2}$ tales que $a = f_a k_2 + l_a$. El AC $(F_{k_1,k_2}, \mathbb{Z}_s^{\mathbb{N}})$ definido por $F_{k_1,k_2}(x)_i = k_1 l_{x_i} + f_{x_{i+1}}, x \in \mathbb{Z}_s^{\mathbb{N}}$ es positivamente expansivo si y solo si k_2 divide a una potencia positiva de k_1.

Observación

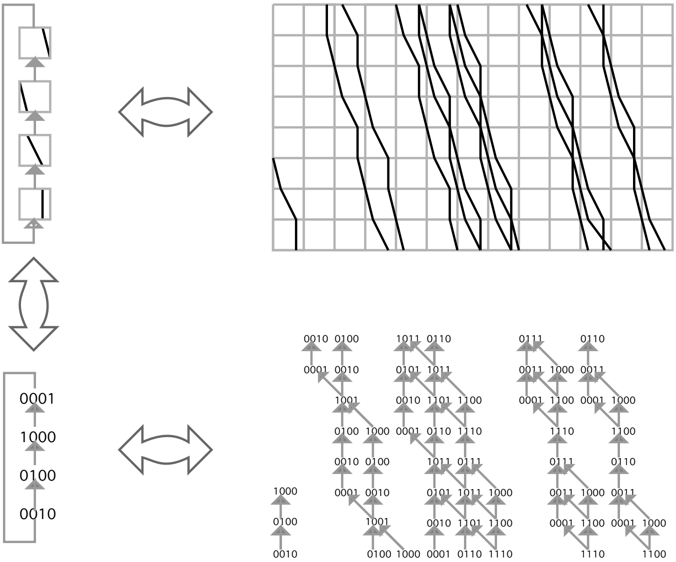
El AC $(F_{k_1,k_2}, \mathbb{Z}_s^{\mathbb{N}})$ representa la multiplicación por k_1 en base s, y no es permutativo a la derecha.

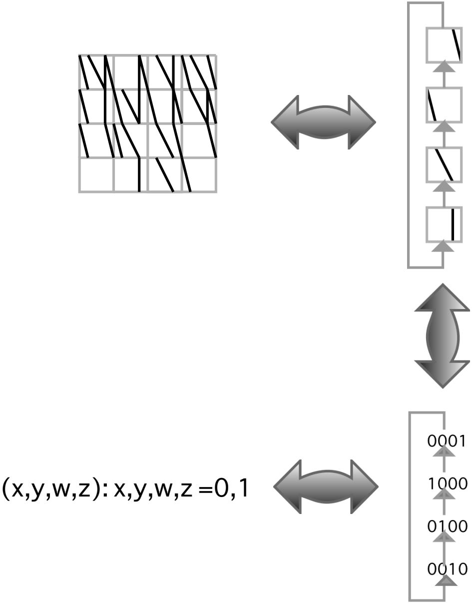
Para $X = \mathbb{Z}_s^{\mathbb{N}}$.

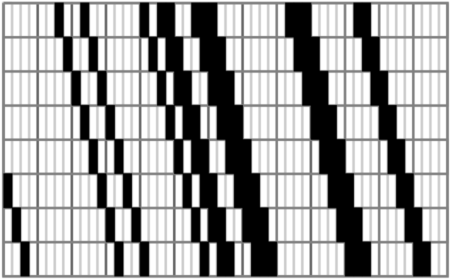


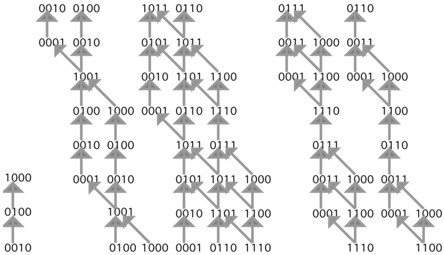
Una Construcción de AC's Positivamente Expansivos no Permutativos

Ejemplos de la construcción



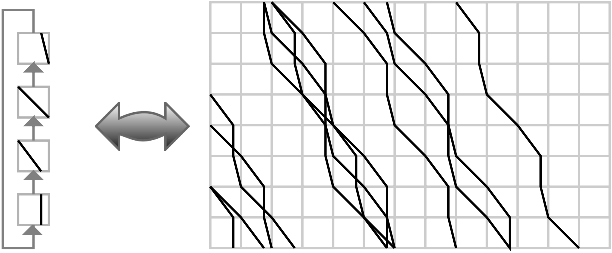

(x,y,w,z): x,y,w,z =0,1
0001
1000
0100
0010

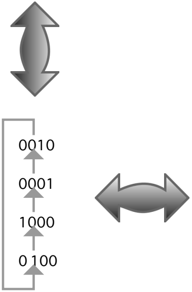



0010 0100 1011 0110 0111 0110
0001 0010 0101 1011 0011 1000 0011
1001 0010 1101 1100 0001 1100 0001 1000
0100 1000 0001 0110 1110 1110 1100
0010 0100 1011 0111 0111 0110
1000 0001 0010 0101 1011 1000 0011 1000 0011
0100 1001 0010 1101 1100 0001 1100 0001 1000
0010 0100 1000 0001 0110 1110 1110 1100

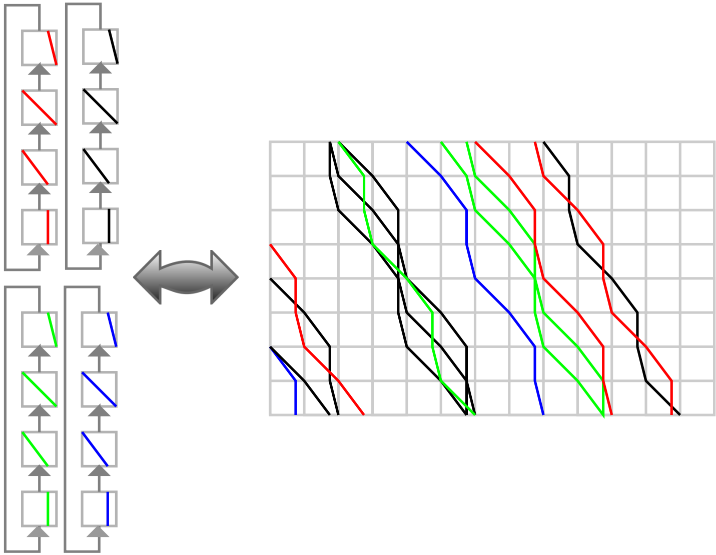
Una Construcción de AC's Positivamente Expansivos no Permutativos

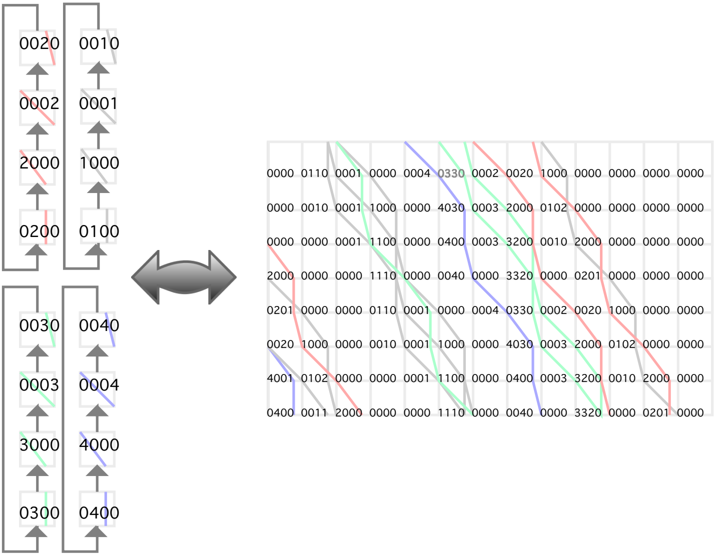
Ejemplos de la construcción





0000	0110	1001	0000	0001	1010	0000	0000	1000	0000	0000	0000	0000
0000	0010	0101	0000	0000	1000	0001	0000	0100	0000	0000	0000	0000
0000	0000	0001	0100	0000	0100	0001	1000	0010	0000	0000	0000	0000
1000	0000	0000	1111	0000	0010	0000	1100	0000	0001	0000	0000	0000
0100	0000	0000	0110	1001	0000	0001	0010	0000	0000	1000	0000	0000
0010	1000	0000	0010	0100	1000	0000	1010	0001	0000	0100	0000	0000
1001	0100	0000	0000	0011	0101	0000	0100	0001	1000	0010	0000	0000
0100	1000	1000	0000	0000	1111	0000	0010	0000	1100	0000	0001	0000




0020
0002
2000
0200
0010
0001
1000
0100
0030
0003
3000
0300
0040
0004
4000
0400
0000 0110 0001 0000 0004 0330 0002 0020 1000 0000 0000 0000 0000
0000 0010 0001 1000 0000 4030 0003 2000 0102 0000 0000 0000 0000
0000 0000 0001 1100 0000 0400 0003 3200 0010 2000 0000 0000 0000
2000 0000 0000 1110 0000 0040 0000 3320 0000 0201 0000 0000 0000
0201 0000 0000 0110 0001 0000 0004 0330 0002 0020 1000 0000 0000
0020 1000 0000 0010 0001 1000 0000 4030 0003 2000 0102 0000 0000
4001 0102 0000 0000 0001 1100 0000 0400 0003 3200 0010 2000 0000
0400 0011 2000 0000 0000 1110 0000 0040 0000 3320 0000 0201 0000

Usando la construcción acá presentada y el hecho que el AC producto con factores positivamente expansivos es también un AC positivamente expansivo, concluímos la siguiente proposición.

Proposición

Dado un número $k = p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$, con $p_1, \ldots, p_n$ primos distintos, $k_1, \ldots, k_n$ enteros positivos tales que algún $k_i > 1$. Entonces puede construirse un AC $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$ positivamente expansivo y no permutativo de vecindad $(l, r) = (0, 1)$ con alfabeto $\mathcal{A}$ de cardinalidad k.

Con respecto a la iteración de medidas de Bernoulli por los AC's construidos tenemos lo siguiente.

Proposición

Dado el AC $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$ positivamente expansivo y no permutativo de vecindad $(l, r) = (0, 1)$ con alfabeto $\mathcal{A}$ de cardinalidad $k = p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$, con $p_1, \ldots, p_n$, $k_1, \ldots, k_n$ enteros positivos tales que algún $k_i > 1$, construido como se mostró antes. Se tiene que la media de Cesàro de una medida de Bernoulli iterada existe.

Quedan abiertos los siguientes problemas.

Problema

¿Existen otros AC's $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$ positivamente expansivos usando la idea del movimiento de una partícula tal que el número de coordenadas de dependencia de $F^n(x)_0$ sea estrictamente creciente con n?

Problema

¿Que ejemplo de AC positivamente expansivo que no caiga dentro de la familia construida ni de los AC's inducidos por un código biprefijo puede explícitamente construirse?

Bibliografía I

F. Blanchard and P. Tisseur.
Some properties of cellular automata with equicontinuity points.
Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., 36(5):569–582, 2000.

P. Ferrari, A. Maass, S. Martínez, and P. Ney.
Cesàro mean distribution of group automata starting from measures with summable decay.
Ergodic Theory Dynam. System, 20:1657–1670, 2000.

B. Host, A. Maass, and S.Martínez.
Uniform Bernoulli measure in dynamics of permutative cellular automata with algebraic local rules.
Discrete Contin. Dyn. Syst., 9(6):1423–1446, 2003.

C. Jadur and J. Yazlle.
On the dynamics of cellular automata induced from a prefix code.
Advances in Applied Mathematics, 38:27–53, 2007.

Alejandro Maass, Servet Martínez, Marcus Pivato, and Reem Yassawi.
Asymptotic randomization of soubgroup shifts by linear cellular automata.
Ergodic Theory Dynam. System, 26(4):1203–1224, 2006.

Bibliografía II

- Alejandro Maass, Servet Martínez, Marcus Pivato, and Reem Yassawi.
  Attractiveness of the haar measure for linear cellular automata on markov soubgroups.
  Dynamics and stochastics, pages 100–108, 2006.
- A. Maass, S.Martínez, and M. Sobottka.
  Limit measures for affine cellular automata on topological markov subgroups.
  Nonlinearity, 19:2137–2147, 2006.
- M. Pivato and R. Yassawi.
  Limit measures for affine cellular automata.
  Ergod. Th. and Dynam. Sys., 22:1269–1287, 2002.
- M. Pivato and R. Yassawi.
  Limit measures for affine cellular automata ii.
  Ergodic Theory Dynam. System, 26(6):1961–1980, 2004.
- Stephen J. Willson.
  On the ergodic theory of cellular automata.
  Math. Systems Theory, 9:132–141, 1975.