Álgebra Superior I
Tarea 2

Prof: Iker Martínez
Ayud: Erick Rodríguez

31 de diciembre de 2019

1. Teoría de Conjuntos

1.1. Álgebra de Conjuntos y Funciones

Ejercicio 1.1. *Dados 2 conjuntos A, B, sea X un conjunto con las siguientes propiedades:*

1. $A \subseteq X$ *y* $B \subseteq X$.
2. *Si* $A \subseteq Y$ *y* $B \subseteq Y$, *entonces* $X \subseteq Y$.

Demuestra que $X = A \cup B$.

Ejercicio 1.2. *Dados 2 conjuntos A, B, sea X un conjunto con las siguientes propiedades:*

1. $X \subseteq A$ *y* $X \subseteq B$.
2. *Si* $Y \subseteq A$ *y* $Y \subseteq B$, *entonces* $Y \subseteq X$.

Demuestra que $X = A \cap B$.

Ejercicio 1.3. *Sean $A, B \subseteq X$. Demuestra que:*

(a) $A \cap B = \emptyset$ *si y solo si,* $A \subseteq B^{\complement}$.

(b) $A \cup B = X$ *si y solo si* $A^{\complement} \subseteq B$.

Ejercicio 1.4. *Sean $A, B \subseteq X$. Demuestra que $A \subseteq B$ si y solo si $A \cap B^{\complement} = \emptyset$.*

Ejercicio 1.5. *Da un ejemplo de conjuntos A, B, C tales que :*

$$(A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C)$$

Ejercicio 1.6. *Si $A, B \subseteq X$ satisfacen que $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = X$, demuestra que $B = A^{\complement}$.*

Ejercicio 1.7. *Si $A \subseteq B$ entonces $B \cap (A \cup C) = (B \cap C) \cup A$ para todo conjunto C. Por otro lado si existe un conjunto C tal que se cumple la igualdad anterior, entonces demuestra que $A \subseteq B$.*

Ejercicio 1.8. *Dados 2 conjuntos A,B demuestra que $A = B$ si y sólo si:*

$$(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = \emptyset.$$

Ejercicio 1.9. *Demuestra las siguientes igualdades :*

(a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

(b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

(c) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

(d) $A \subseteq A'$, $B \subseteq B' \Rightarrow A \times B \subseteq A' \times B'$.

Ejercicio 1.10. *Dados 2 conjuntos A,B demuestra que:*

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Ejercicio 1.11. *Definamos la **Diferencia Simétrica** de A y B como el conjunto:*

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Demuestra que si $A \triangle B = A \triangle B$, entonces $B = C$. Determina si se vale un resultado análogo para $\cap, \cup$, ó $\times$.

Ejercicio 1.12. *Demuestra que $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.*

Ejercicio 1.13. *Dada una función $f : A \longrightarrow B$ demuestra que $\forall X, Y \subseteq A$.*

(a) $f(X) \setminus f(Y) \subseteq f(X \setminus Y)$

(b) Si f es inyectiva entonces se da la igualdad en la contención anterior.

Ejercicio 1.14. *Demuestra que una función $f : A \longrightarrow B$ es inyectiva si y solo si $\forall X \subseteq A$, $f(A) \setminus f(X) = f(A \setminus X)$.*

Ejercicio 1.15. *Dada una función* $f : A \longrightarrow B$ *demuestra que:*

(a) $\forall X \subseteq A$ *tenemos que* $X \subseteq f^{-1}(f(X))$.

(b) f *es inyectiva si y sólo si* $f^{-1}(f(X)) = X,\ \forall X \subseteq A$.

Ejercicio 1.16. *Dada una función* $f : A \longrightarrow B$ *demuestra que :*

(a) $\forall Z \subseteq B$ *tenemos que* $f(f^{-1}(Z)) \subseteq Z$.

(b) f *es suprayectiva si y sólo si* $f(f^{-1}(Z)) = Z,\ \forall Z \subseteq B$.

Ejercicio 1.17. *Dada una familia de conjuntos* $\{A_\lambda\}_{\lambda\in I}$, *demuestra que* $X := \bigcup_{\lambda\in I} A_\lambda$ *es el único conjunto que satisface las siguientes 2 propiedades :*

(a) $\forall \lambda \in I,\ A_\lambda \subseteq X$.

(b) Si Y *es un conjunto tal que* $A_\lambda \subseteq Y,\ \forall \lambda \in I$, *entonces* $X \subseteq Y$.

Ejercicio 1.18. *Enuncia y demuestra un resultado análogo al anterior pero que esta vez caracterice a* $X := \bigcap_{\lambda\in I} A_\lambda$.

Ejercicio 1.19. *Dadas las familias* $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *y* $\{B_\mu\}_{\mu\in M}$, *considera las familias:*

(a) $\{A_\lambda \cup B_\mu\}_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}$.

(b) $\{A_\lambda \cap B_\mu\}_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}$.

Demuestra que:

$$\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) \cap \Big(\bigcup_{\mu\in M} B_\mu\Big) = \bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M} (A_\lambda \cap B_\mu).$$

$$\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) \cup \Big(\bigcap_{\mu\in M} B_\mu\Big) = \bigcap_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M} (A_\lambda \cup B_\mu).$$

Ejercicio 1.20. *Sea* $\{A_{ij}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ *una familia de conjuntos indexada por* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. *Demuestra o dar un contraejemplo de la siguiente igualdad:*

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_{ij}) = \bigcap_{i=1}^{\infty}(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}).$$

Ejercicio 1.21 (Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder). *Sean A,B dos conjuntos. Supongamos que existen dos funciones inyectivas, $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow A$. Demuestra que existe una biyección $h : A \longrightarrow B$.*

1.2. Inducción

Ejercicio 1.22. *Un elemento $n^- \in \mathbb{N}$ se llama **Antecesor** de $n \in \mathbb{N}$ cuando se tiene que $n^- < n$ pero no existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $n^- < c$ y $c < n$. Demuestra que todo numero natural distinto de 0 tiene antecesor.*

Ejercicio 1.23. *Demuestra que $(n^-)^+ = n$, para todo $n > 0$.*

Ejercicio 1.24. *Demuestra por inducción matemática que para todo $n \in \mathbb{N}$:*

(a) $2(0+1+2+....+n) = n(n+1)$.

(b) $1+3+5+...+(2n+1) = (n+1)^2$.

(c) $(a-1)(1+a+....+a^n) = a^{n+1}-1,\ \forall a \in \mathbb{N}$.

(d) $0^2+1^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(e) $0^3+1^3+...+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Ejercicio 1.25. *Demuestra por inducción a partir de k:*

(a) Para todo $n \in \mathbb{N}^\times$, $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

(b) Para todo $n \in \mathbb{N}^\times$, $(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})\cdots(1-\frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+1}$.

(c) Para todo $n \in \mathbb{N}^\times$, $(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\cdots(1+\frac{1}{n}) = n+1$.

(d) Para cualesquiera $a,n \in \mathbb{N}$ y $t \in \mathbb{N}^\times$,

$$a+at+at^2+at^3+...+at^n = \frac{a(t^{n+1}-1)}{t-1}.$$

(e) Para todo $n \in \mathbb{N}^\times$, $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

(f) Para todo $n \in \mathbb{N}^\times$, $1\cdot 3+2\cdot 3^2+...+n\cdot 3^n = \frac{(2n-1)3^{n+1}+3}{4}$.

(g) *Para toda* $n \geq 4$, *demuestra que* $n! > 2^n$.

(h) *Prueba que la suma de los ángulos internos de un polígono de* $n \geq 3$ *lados es* $(n-2)\pi$, *dando por hecho que la suma de los ángulos internos de un triángulo es* π.

Ejercicio 1.26. *Sea* $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *la función definida por:*

$$f(1,n) = 2n-1, \quad f(m+1,n) = 2^m(2n-1)$$

Demuestra que f *es una biyeccion.*

1.3. Estructuras Algebriacas

Ejercicio 1.27. *Sea* X *un conjunto y* $\mathscr{P}(X)$ *su conjunto potencia. Demuestra que* $\big(\mathscr{P}(X), \triangle, \cap\big)$ *es un anillo conmutativo con unidad. Donde* $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ *es la diferencia simétrica.*

Ejercicio 1.28. *Demuestra que* $\forall k \neq 0$, *la función* $P_k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $P_k(n) = k \cdot n$, *es inyectiva*

Ejercicio 1.29. *Demuestra que* $(\mathbb{Z}, +)$ *es un grupo Abeliano.*

Ejercicio 1.30. *Demuestra que* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *es un anillo conmutativo.*

Ejercicio 1.31. *Demuestra que* $(\mathbb{Z}, <)$ *es un COTO estricto.*

Ejercicio 1.32. *Demuestra que* $(\mathbb{Q}, +)$ *es un grupo Abeliano.*

Ejercicio 1.33. *Demuestra que* $(\mathbb{Q}^{\times}, \cdot)$ *es un grupo Abeliano.*

Ejercicio 1.34. *Demuestra que* $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *es un campo.*

Ejercicio 1.35. *Demuestra que* $(\mathbb{Q}, <)$ *es un COTO estricto.*